Sul comportamento delle serie di potenze sugli archi di regolarità.

Memoria di DELFINA ROUX a Milano) ⁽¹⁾.

Sunto. - Per ogni serie di potenze e le relative somme parziali

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

un teorema di FATOU-RIESZ assicura che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per $n \rightarrow +\infty$ uniformemente sopra ogni arco di regolarità della circonferenza di convergenza $|x| = 1$, se $a_n \rightarrow 0$. Nella presente nota si stabiliscono due teoremi che danno condizioni sufficienti perchè $f_{n_h}(x) \rightarrow f(x)$, ($0 = n_0 < n_1 < \dots < n_h < \dots$), per $h \rightarrow +\infty$ uniformemente su ogni tale arco. Nella condizione si tiene anche conto dell'andamento di $\{n_{h+1} - n_h\}$ e della collocazione dei punti singolari.

1. È ben noto il teorema di P. FATOU secondo il quale una serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

avente raggio di convergenza 1, converge in ogni punto di regolarità del cerchio di convergenza, se $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ ⁽²⁾. Anzi, M. RIESZ dimostrò che tale convergenza è *uniforme su ogni "arco di regolarità"*, (cioè su ogni arco i cui punti, compresi gli estremi, sono regolari per l'elemento analitico $f(x)$ di centro 0) ⁽³⁾.

Anzichè considerare la successione completa $\{f_n(x)\} : f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$, con $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, fissiamo l'attenzione su una successione parziale

$$\{f_{n_h}(x)\} : f_{n_0}(x), f_{n_1}(x), \dots, f_{n_h}(x), \dots, \quad (0 = n_0 < n_1 < \dots < n_h < \dots)$$

e poniamoci i seguenti quesiti:

1°) Quale è una condizione sufficiente atta a garantire la convergenza uniforme di questa successione $\{f_{n_h}(x)\}$ su ogni arco di regolarità?

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico della Università di Milano.

⁽²⁾ P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, « Acta mathematica », 30, p. 389, (1906).

⁽³⁾ M. RIESZ, *Über einen Satz des Herrn Fatou*, « Journal für die reine und angewandte Mathematik », 140, pp. 89-99, (1911).

M. RIESZ, *Neuer Beweis des Fatouschen Satzes*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1916, pp. 62-65.

Vedi anche per es. E. LANDAU, *Ergebnisse der Funktionentheorie*, 2. Aufl., Berlin, 1929, pp. 73-76.

2°) Quale è l'influenza della densità della successione parziale $\{n_h\}$ cioè dell'andamento della successione $\{n_{h+1} - n_h\}$, sulla condizione stessa?

3°) Quale è l'influenza della distanza fra le singolarità della funzione $f(x)$ e l'arco di regolarità, sullo scarto della convergenza medesima?

2. È evidente che, se su un arco di regolarità vale, uniformemente rispetto a x ,

$$f_{n_h}(x) \rightarrow f(x) \quad \text{per } h \rightarrow +\infty$$

allora, sullo stesso arco, risulta (ancora uniformemente rispetto a x):

$$f_{n_h}(x) - f_{n_u}(x) \rightarrow 0 \quad \text{per } u \leq h, u \rightarrow +\infty, h \rightarrow +\infty.$$

Il caso classico di FATOU-RIESZ sussiste in conseguenza del fatto che, posto $|x| = r$ e

$$\varepsilon_n = \max(|a_{n+1}|, |a_{n+2}|, \dots)$$

risulta:

$$\left| \frac{f_m(x) - f_n(x)}{x^n} \right| \leq \varepsilon_n r(1 + r + r^2 + \dots + r^{m-n-1}) = \varepsilon_n r \frac{1 - r^{m-n}}{1 - r}$$

con $\varepsilon_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Nel nostro caso la condizione è analoga e sussiste il seguente

TEOREMA I. - *Poniamo $|x| = r$ e sia verificata la seguente condizione:*

(A) *Per $u \leq h$, $u \rightarrow +\infty$, $h \rightarrow +\infty$, si abbia, uniformemente rispetto a x , in un campo C:*

$$(1 - r) \frac{f_{n_h}(x) - f_{n_u}(x)}{x^{n_u}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } r < 1$$

$$(r - 1) \frac{f_{n_h}(x) - f_{n_u}(x)}{x^{n_h}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } r > 1.$$

Allora:

$$f_{n_h}(x) \rightarrow f(x) \quad \text{per } h \rightarrow +\infty$$

uniformemente su ogni arco di regolarità interno a C.

Sia A_δ l'insieme (chiuso) dei punti appartenenti al contorno della stella di regolarità (secondo G. MITTAG LEFFLER) di centro $x = 0$ e aventi modulo $\leq 1 + 2\delta$, e $\bar{A}_\delta$ l'insieme costituito dai punti x che distano da A_δ per meno di δ . Sussiste il seguente:

TEOREMA II. - *Supponiamo che esistano tre costanti positive δ_0 , K, ω , tali che, per $\delta \leq \delta_0$, si abbia:*

$$(1) \quad |f(x)| < \frac{K}{\delta^\omega}$$

per ogni punto x interno a C ed esterno ad $\bar{A}_\delta$, e tale che $|x| \leq 1 + \delta$. Allora, se è soddisfatta la condizione (A), esiste una successione $\{\eta_h\}$, con $\eta_h \rightarrow 0$ per $h \rightarrow +\infty$, tale che risulti:

$$(2) \quad |f(x) - f_{n_h}(x)| < \frac{\eta_h}{(\gamma + \delta)\delta^{\omega+2}}$$

sopra ogni arco di regolarità di ampiezza γ , interno a C ed esterno ad $\bar{A}_\delta$, la cui distanza dal contorno di C è per lo meno δ .

La successione $\{\eta_h\}$ è indipendente da x e dall'arco di regolarità.

3. È opportuno sostituire alla condizione sufficiente (A) altre condizioni che riguardino il comportamento dello scarto $f_{n_{h+1}}(x) - f_{n_h}(x)$ di due somme parziali contigue della successione $\{f_{n_h}(x)\}$ considerata.

Poniamo $g_u = \min(n_u - n_{u-1}, n_{u+1} - n_u, \dots)$. La condizione (A) è verificata, e quindi vale il Teorema I, quando è verificata la seguente condizione:

$$(B) \quad \begin{aligned} & \frac{f_{n_{h+1}}(x) - f_{n_h}(x)}{x^{n_h}} \rightarrow 0, \text{ per } h \rightarrow +\infty, \text{ quando } r < 1 \\ & \frac{f_{n_{h+1}}(x) - f_{n_h}(x)}{g_{h+1}x^{n_h}} \rightarrow 0, \text{ per } h \rightarrow +\infty, \text{ quando } r > 1. \end{aligned}$$

uniformemente rispetto a x nel campo C .

Alla condizione (B) si può dare un'altra forma; a tal uopo introduciamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} f_{n_{h+1}} - f_{n_h}(x) &= a_{n_{h+1}}x^{n_{h+1}} + a_{n_{h+2}}x^{n_{h+2}} + \dots + a_{n_{h+1}}x^{n_{h+1}} \\ &= x^{n_h} \{ a_{n_{h+1}}x + a_{n_{h+2}}x^2 + \dots + a_{n_{h+1}}x^{n_{h+1}-n_h} \} \\ &= x^{n_h} P_{h+1}(x) \end{aligned}$$

dove $P_{h+1}(x)$ è un polinomio di grado $d_{h+1} = n_{h+1} - n_h$. La condizione (B) assume allora la forma:

$$(B) \quad \begin{aligned} & P_h(x) \rightarrow 0, \text{ per } h \rightarrow +\infty, \text{ quando } r < 1 \\ & \frac{P_h(x)}{g_h} \rightarrow 0, \text{ per } h \rightarrow +\infty, \text{ quando } r > 1, \end{aligned}$$

uniformemente rispetto a x nel campo C .

Quando $\{g_h\}$ (che risulta non decrescente) è limitata, la condizione (B) si riduce a:

$P_h(x) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow +\infty$, uniformemente rispetto a x nel campo C .

4. Osservazioni.

I. - Nel caso in cui la successione $\{n_h\}$ sia quella degli interi naturali, il Teorema I coincide con quello classico di FATOU-RIESZ. Infatti, in questo caso $n_h = h$, $n_{h+1} - n_h = 1$, $g_h = 1$, $P_h(x) = a_h x$, $a_h x \rightarrow 0$ uniformemente per $|x| \leq 1 + k$ (qualunque sia k).

II. - Il Teorema I è una ovvia conseguenza del Teorema II, quando sia fissato un arco di regolarità (quindi fissati γ e δ).

III. - Esistono successioni di polinomi in cui il coefficiente del termine generale non tende a 0 e per i quali sono verificate le ipotesi del Teorema. Si considerino, ad esempio, i polinomi:

$$P_h(x) = (1+x)^{2h} \left/ \binom{2h}{h} \right|;$$

i loro coefficienti hanno il valore assoluto ≤ 1 e, per ogni h , esiste un coefficiente $= 1$; inoltre, essendo

$$1/\binom{2h}{h} = \frac{(h!)^2}{(2h)!} \sim \frac{\sqrt{2\pi h}}{e^{2h}}$$

si ha che $P_h(x) \rightarrow 0$ uniformemente rispetto a x in ogni cerchio interno al cerchio di centro -1 e raggio 2 . Cioè i polinomi $P_h(x)$ soddisfano la condizione (B') nel cerchio di centro -1 e raggio $2 - \eta$ (per ogni $\eta > 0$).

Osserviamo anche che la condizione (B') è meno restrittiva della condizione $P_h(x) \rightarrow 0$ uniformemente per $h \rightarrow \infty$. Per esempio, i polinomi

$$\bar{P}_h(x) = \frac{x^h}{h} + (1+x)^{2^{h+1}} \binom{2^{h+1}}{2^h}$$

soddisfano alla condizione (B') nel cerchio di centro -1 e raggio $2 - \eta$ (per ogni η positivo), mentre soddisfano la condizione $\bar{P}_h(x) \rightarrow 0$ uniformemente rispetto a x per $h \rightarrow +\infty$, nel campo C costituito dai punti comuni ai due cerchi $|x| \leq 1$; $|x+1| \leq 2 - \eta$.

IV. - Se l'elemento analitico $f(x)$ possiede sulla circonferenza di convergenza solo singolarità non essenziali isolate (cioè solo poli e punti di diramazione algebroidi), è certamente possibile determinare le costanti δ_0 , K , ω , in modo che, per $r \leq 1 + \delta_0$, valga la condizione (1) del Teorema II.

5. Da (B) segue (A).

Veniamo a dimostrare che (B) $\Rightarrow$ (A). Consideriamo (B) nella forma (B'). Sia σ_u l'estremo superiore dei valori

$$\begin{aligned} & |P_{u+1}(x)|, |P_{u+2}(x)|, \dots, \text{ per } r < 1, x \text{ in } C \\ & \frac{|P_{u+1}(x)|}{g_{u+1}}, \frac{|P_{u+2}(x)|}{g_{u+2}}, \dots, \text{ per } r > 1, x \text{ in } C. \end{aligned}$$

Per le ipotesi fatte, σ_u esiste finito e $\sigma_u \rightarrow 0$ per $u \rightarrow +\infty$. Sia $r < 1$. Si ha:

$$\begin{aligned} |f_{n_h}(x) - f_{n_u}(x)| &= |a_{n_u+1}x^{n_u+1} + a_{n_u+2}x^{n_u+2} + \dots + a_{n_h}x^{n_h}| \\ &\leq r^{n_u} |P_{u+1}(x)| + r^{n_{u+1}} |P_{u+2}(x)| + \dots + r^{n_{h-1}} |P_h(x)| \\ &\leq \sigma_u r^{n_u} \{1 + r^{n_{u+1}-n_u} + r^{n_{u+2}-n_u} + \dots + r^{n_{h-1}-n_u}\} \\ &< \sigma_u r^{n_u} \{1 + r + r^2 + \dots\} \\ &< \sigma_u \frac{r^{n_u}}{1-r}. \end{aligned}$$

Resta così dimostrato che (B) $\Rightarrow$ (A) per $r < 1$.

Sia $r > 1$. Si ha :

$$\begin{aligned}
 |f_{n_h}(x) - f_{n_u}(x)| &= |a_{n_u+1}x^{n_u+1} + a_{n_u+2}x^{n_u+2} + \dots + a_{n_h}x^{n_h}| \\
 &\leq r^{n_u} |P_{u+1}(x)| + r^{n_{u+1}} |P_{u+2}(x)| + \dots + r^{n_{h-1}} |P_h(x)| \\
 &\leq r^{n_u} \frac{(1+r+\dots+r^{n_{u+1}-1})}{g_{u+1}} |P_{u+1}(x)| + \dots + r^{n_{h-1}} \frac{(1+r+\dots+r^{n_h-1})}{g_h} |P_h(x)| \\
 &\leq \sigma_u \{ r^{n_u} + r^{n_{u+1}} + r^{n_{u+2}} + \dots + r^{n_{h-1}} \} \\
 &\leq \sigma_u \{ 1 + r + r^2 + \dots + r^{n_h-1} \} \\
 &\leq \sigma_u \frac{r^{n_h} - 1}{r - 1} \\
 &< \sigma_u \frac{r^{n_h}}{r - 1},
 \end{aligned}$$

cioè la condizione (A) per $r > 1$.

6. Dimostrazione dei Teoremi I e II.

Veniamo a dimostrare il Teorema II; il Teorema I è, come abbiamo già osservato, una conseguenza di questo.

Sia $r < 1$. Diciamo ε_u l'estremo superiore dei moduli

$$(1-r) \left| \frac{f_{n_h}(x) - f_{n_u}(x)}{x^{n_u}} \right|; \quad h = u+1, u+2, \dots; \quad x \text{ in } C.$$

Per l'ipotesi fatta ε_u esiste finito e $\varepsilon_u \rightarrow 0$ per $u \rightarrow +\infty$. Inoltre risulta:

$$(1-r) \left| \frac{f(x) - f_{n_u}(x)}{x^{n_u}} \right| \leq \varepsilon_u$$

e, scrivendo h in luogo di u , abbiamo:

$$(3) \quad \left| \frac{f(x) - f_{n_h}(x)}{x^{n_h}} \right| \leq \frac{\varepsilon_h}{1-r}, \quad r < 1, \quad x \text{ in } C.$$

Sia $r > 1$. Allora:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f(x) - f_{n_h}(x)}{x^{n_h}} \right| &= \left| \frac{f(x) - f_{n_u}(x) - f_{n_h}(x) + f_{n_u}(x)}{x^{n_h}} \right| \\
 &\leq \frac{|f(x)| + |f_{n_u}(x)|}{r^{n_h}} + \frac{|f_{n_h}(x) - f_{n_u}(x)|}{r^{n_h}}.
 \end{aligned}$$

Sia ε'_u il numero che, per $r > 1$, ha significato analogo a quello di ε_u per $r < 1$; allora $\varepsilon'_u \rightarrow 0$ per $u \rightarrow +\infty$ e

$$(4) \quad \left| \frac{f(x) - f_{n_h}(x)}{x^{n_h}} \right| \leq \frac{|f(x)| + |f_{n_u}(x)|}{r^{n_h}} + \frac{\varepsilon'_u}{r-1}.$$

Sia ora

$$1 < r \leq 1 + \frac{\delta_0}{2} = r_0; \quad M_u(r) = \sum_{k=0}^{n_u} |a_k| r^k; \quad S_u = \sum_{k=0}^{n_u} |a_k|.$$

Risulta dalla (4), ricordando la (1):

$$(5) \quad \left| \frac{f(x) - f_{n_h}(x)}{x^{n_h}} \right| \leq \frac{K}{\delta^\omega r^{n_h}} + \frac{M_u(r)}{r^{n_h}} + \frac{\varepsilon'_u}{r-1}.$$

Ma

$$r^{n_h} = \{1 + (r-1)\}^{n_h} \geq n_h(r-1)$$

$$\frac{M_u(r)}{r^{n_h}} = \frac{M_u(r)}{r^{n_h - n_u} r^{n_u}} \leq \frac{S_u}{r^{n_h - n_u}} \leq \frac{S_u}{(n_h - n_u)(r-1)}.$$

Fissato h , risulta fissato n_h : si scelga per u il massimo intero per cui sono verificate le disuguaglianze: $n_u \leq n_h/2$; $S_u \leq \sqrt{n_h}$. Per h abbastanza grande u è definito e inoltre per $h \rightarrow +\infty$ risulta evidentemente $n_u \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow +\infty$. In queste condizioni, dalla (5) risulta:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f_{n_h}(x)}{x^{n_h}} \right| &< \frac{K}{\delta^\omega n_h(r-1)} + \frac{2}{\sqrt{n_h}(r-1)} + \frac{\varepsilon'_u}{r-1} \\ &\leq \frac{1}{\delta^\omega(r-1)} \left\{ \frac{K}{n_h} + \frac{2\delta_0^\omega}{\sqrt{n_h}} + \varepsilon'_u \delta_0^\omega \right\} \end{aligned}$$

cioè

$$\left| \frac{f(x) - f_{n_h}(x)}{x^{n_h}} \right| < \frac{\eta'_h}{\delta^\omega(r-1)}, \quad (\eta'_h \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow +\infty).$$

Sia $\widehat{x_1, x_2}$ un arco di regolarità di ampiezza γ , e x_0 il punto medio di $\widehat{x_1, x_2}$. Possiamo supporre $\delta \leq \delta_0 \leq 2$. Ampliamo l'arco $\widehat{x_0, x_1}$ nell'arco $\widehat{y_0, y_1}$.

aggiungendo un arco di ampiezza $\delta/2$ da ambedue le parti. Denotiamo con S_δ il settore di corona circolare limitato dai raggi $z_0 Z_0$ pel punto y_0 , $z_1 Z_1$ pel punto y_1 , e dalle due circonferenze di centro O e raggio rispettivamente $1 - \delta/2$ e $1 + \delta/2$.

Consideriamo la funzione

$$\varphi_{n_h}(x) = \frac{f(x) - f_{n_h}(x)}{x^{n_h}} (x - y_0)(x - y_1)$$

essa è regolare in S_δ e, detto μ_h il suo massimo modulo sul contorno di S_δ , per i punti x dell'arco $\widehat{x_0, x_1}$ risulta:

$$|\varphi_{n_h}(x)| \leq \mu_h$$

e quindi, essendo $|x| = 1$

$$|f(x) - f_{n_h}(x)| \leq \frac{\mu_h}{|x - y_0| |x - y_1|}.$$

Al variare di x sull'arco $\widehat{x_0, x_1}$, il denominatore assume il minimo modulo per $x = x_0$ e per $x = x_1$; e, poichè il rapporto fra un arco non superiore a π e la sua corda non supera $\pi/2$, tale minimo non è inferiore a:

$$\left(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{\gamma + \delta}{2}\right) \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{\delta(\gamma + \delta)}{2\pi}.$$

Ne segue, per i punti x dell'arco $\widehat{x_0, x_1}$:

$$(7) \quad |f(x) - f_{n_h}(x)| < \frac{2\pi\mu_h}{(\gamma + \delta)\delta}.$$

Si tratta di studiare μ_h . Sull'arco $\widehat{z_0, z_1}$, (estremi inclusi), essendo $r = 1 - \frac{\delta}{2}$, per la (3) risulta:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f_{n_h}(x)}{x^{n_h}} \right| &< \frac{2\varepsilon_h}{\delta} \\ |\varphi_{n_h}(x)| &< \frac{2\varepsilon_h}{\delta} |x - y_0| |x - y_1| < \frac{2\varepsilon_h}{\delta} \cdot 2 \cdot 2; \end{aligned}$$

pertanto:

$$(8) \quad |\varphi_{n_h}(x)| < \frac{8\varepsilon_h}{\delta} \quad \text{sopra } \widehat{z_0, z_1}.$$

Ancora per la (3), sui raggi $z_0 y_0$, $z_1 y_1$ (secondi estremi esclusi), abbiamo:

$$|\varphi_{n_h}(x)| < \frac{\varepsilon_h}{1-r} |x - y_0| |x - y_1| < \frac{\varepsilon_h}{1-r} (1-r) \cdot 2$$

e cioè

$$(9) \quad |\varphi_{n_h}(x)| < 2\varepsilon_h, \quad \text{sopra } \overline{z_0 y_0} \text{ e } \overline{z_1 y_1}.$$

Per la (6), sui raggi $y_0 Z_0$, $y_1 Z_1$ (primi estremi esclusi), risulta:

$$|\varphi_{n_h}(x)| < \frac{\eta'_h}{\delta^\omega(r-1)} |x - y_0| \quad |x - y_1| < \frac{\eta'_h}{\delta^\omega(r-1)} (r-1) \cdot 2r$$

e quindi

$$(10) \quad |\varphi_{n_h}(x)| < \frac{4\eta'_h}{\delta^\omega} \quad \text{sopra } \overline{y_0 Z_0} \text{ e } \overline{y_1 Z_1}.$$

Infine, sempre per la (6), sull'arco $\widehat{Z_0 Z_1}$, essendo $r = 1 + \delta/2$, risulta:

$$|\varphi_{n_h}(x)| < \frac{\eta'_h}{\delta^\omega \cdot \frac{\delta}{2}} |x - y_0| \quad |x - y_1| < \frac{2\eta'_h}{\delta^{\omega+1}} \cdot 3 \cdot 3$$

e quindi

$$(11) \quad |\varphi_{n_h}(x)| < \frac{18\eta'_h}{\delta^{\omega+1}}, \quad \text{sopra } \widehat{Z_0 Z_1}.$$

Nei punti $x = y_0$, $x = y_1$, la $\varphi_{n_h}(x)$ risulta continua e nulla.

Si ha allora, dalle (8), (9), (10), (11), che il massimo modulo μ_h della funzione $\varphi_{n_h}(x)$ sul contorno di S_δ non supera il massimo dei quattro numeri

$$\frac{8\varepsilon_h}{\delta}; \quad 2\varepsilon_h; \quad \frac{4\eta'_h}{\delta^\omega}; \quad \frac{18\eta'_h}{\delta^{\omega+1}}.$$

Indichiamo allora con $\eta_h/2\pi$ il massimo numero fra $8\varepsilon_h\delta_0^\omega$; $2\varepsilon_h\delta_0^{\omega+1}$; $4\eta'_h\delta_0$; $18\eta'_h$: è evidente che η_h non dipende dall'arco $\widehat{x_0, x_1}$ e che $\eta_h \rightarrow 0$ per $h \rightarrow +\infty$.

Dalla (7) si ricava allora, pei punti x dell'arco $\widehat{x_0, x_1}$, la disuguaglianza

$$|f(x) - f_{n_h}(x)| < 2\pi \frac{\eta_h}{2\pi\delta^{\omega+1}} / (\gamma + \delta)\delta$$

e quindi vale

$$(12) \quad |f(x) - f_{n_h}(x)| < \frac{\eta_h}{(\gamma + \delta)\delta^{\omega+2}}$$

per ogni x sull'arco $\widehat{x_0, x_1}$, e $\eta_h \rightarrow 0$ per $h \rightarrow +\infty$.

Si può ripetere per l'arco $\widehat{x_0, x_2}$ il medesimo ragionamento, giungendo al medesimo η_h ; la (12) vale uniformemente rispetto a x sull'intero arco $\widehat{x_1, x_2}$.

Il Teorema II resta così dimostrato.