Le serie lineari speciali sulle curve trigonali.

Memoria di ARTURO MARONI (a Firenze) (*).

Sunto. - *Introdotto. per le curve trigonali di dato genere. un altro carattere invariante per trasformazioni birazionali della curva (carattere che qui vien chiamato* la specie *della curva stessa), si procede alla determinazione delle serie lineari speciali complete su ogni curva trigonale di genere* p *e di specie* m, *precisandone la dimensione. In fine. come applicazione. si determinano le curve trigonali. di dato genere e di data specie, appartenenti ad un* S_r *e aventi il minimo ordine.*

1. Come è noto. si dice trigonale ogni curva algebrica non iperellittica, sulla quale esista una (o più di una (1)) g_3^1. Consideriamo una curva trigonale del genere p, e assumiamone come immagine una curva canonica, C_{2p-2}, di un S_{p-1}. Ciascun gruppo della g_3^1 appartenente alla curva, in quanto impone ai gruppi canonici che debbon contenerlo $3-1=2$ condizioni (2), appartiene ad una retta. Le ∞^1 rette contenenti gli ∞^1 gruppi della g_3^1 costituiscono una superficie rigata razionale normale (perchè è normale la C_{2p-2} in S_{p-1}) e quindi di ordine $p-2$, che indicheremo con V_2^{p-2}. Sia C_m la (o una) curva direttrice minima $\left(\text{dell' ordine } m \leq \dfrac{p-2}{2}\right)$, di questa V_2^{p-2}. Ciascuno degli S_{p-2} passanti per la C_m sega ulteriormente la V_2^{p-2} in $p-2-m$ generatrici; e questi gruppi di $p-2-m$ generatrici costituiscono. entro l'ente razionale delle generatrici, una serie lineare di dimensione $p-2-m$ (essendo ∞^{p-2-m} gli iperpiani passanti per lo spazio S_m cui appartiene la Cm): perciò tale serie lineare è completa. Essa sega (ossia gli stessi iperpiani passanti per la C_m segano) sulla C_{2p-2} una serie lineare speciale composta con la g_3^1 della curva, dell'ordine $3(p-2-m)$ e di dimensione $p-2-m$, cioè una $g_{3(p-2-m)}^{p-2-m}$. È facile vedere che: *Sulla* C_{2p-2}, *ogni serie lineare speciale, priva di punti fissi, e composta con la* g_3^1, *è contenuta (parzialmente o totalmente) entro questa* $g_{3(p-2-m)}^{p-2-m}$.

(*) Ricevuta in Redazione nel gennaio del 1945.

(1) Come è noto, una curva algebrica di genere p contiene ∞^1 g_3^1 per $p=3$ e ne contiene *due* per $p=4$. Per ogni $p>4$ non può contenere più di una g_3^1. Vedasi p. es. SEVERI, *Sul teorema di esistenza di Riemann*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », t. XLVI, 1922. p. 115, oppure: BERTINI, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico*, « Annali di Matematica », (2), t. XXII, 1894, n. 44.

Nel seguito, parlando della g_3^1 della curva intenderemo, nei casi $p=3$ e $p=4$, di considerarne una ad arbitrio.

(2) La g_3^1 è completa, perchè se fosse contenuta in una g_3^2, la residua di un punto della curva rispetto a questa g_3^2 sarebbe una g_2^1, e allora la curva sarebbe iperellittica. Inoltre la g_3^1 è anche speciale, altrimenti sarebbe $p=3-1=2$, e la curva sarebbe ancora iperellittica.

Infatti, ad una g^r_{3n}, della C_{2p-2}, composta con la g^1_3 corrisponde una g^r_n nell'ente costituito dalle generatrici della V_2^{p-2}; e ciascun gruppo di n generatrici appartenente a questa serie deve esser contenuto in almeno un iperpiano, per l'ipotesi che la g^r_{3n} sia speciale. Un tale iperpiano sega ulteriormente la V_2^{p-2} in una curva direttrice dell'ordine $p-2-n$; perciò deve essere: $p-2-n \geq m$, ossia: $n \leq p-2-m$. Ne segue che, nell'ente costituito dalle generatrici della rigata, la g^r_n suddetta è contenuta (parzialmente o totalmente) nella g^{p-2-m}_{p-2-m}; e quindi, sulla C_{2p-2}, la g^r_{3n} è contenuta nella $g^{p-2-m}_{3(p-2-m)}$ sopra considerata, c. v. d.

Diremo che *questa* $g^{p-2-m}_{3(p-2-m)}$ *è la massima serie lineare speciale composta con la* g^1_3, *esistente sulla* C_{2p-2}.

2. Per il fatto che la $g^{p-2-m}_{3(p-2-m)}$ è speciale, deve essere:

$$3(p-2-m) \leq 2p-2$$

cioè:

$$m \geq \frac{p-4}{3}.$$

Il numero m deve dunque soddisfare alle limitazioni:

$$\frac{p-4}{3} \leq m \leq \frac{p-2}{2}. \tag{1}$$

Distingueremo le curve trigonali di genere p in *specie*, dicendo *della specie* m quelle per le quali la massima serie speciale composta con la g^1_3 ha l'ordine $3(p-2-m)$ e la dimensione $p-2-m$. Di tali specie ne sono possibili tante per quanti sono gli interi m soddisfacenti le limitazioni (1). È evidente che, essendo $p-2-m$ la dimensione della massima serie speciale composta con la g^1_3, *la specie* m è invariante per trasformazioni birazionali della curva.

3. Dimostriamo inversamente che:

per ogni intero m *soddisfacsnte le* (1) *esistono curve trigonali del genere* p *e della specie* m.

Sia, infatti, m un intero soddisfacente le (1). Si consideri, in un S_{p-1}, una V_2^{p-2} avente come curva direttrice minima una $\left(o \infty, \text{ se } m = \frac{p-2}{2}\right) C_m$. Sulla V_2^{p-2}, le curve direttrici dell'ordine $p-2-m$ costituiscono un sistema lineare $|C_{p-2-m}|$ che (essendo $p-2-(p-2-m) = m$) è irriducibile e senza punti base [3], la cui dimensione è: $p-1-2m$ $\Big(\geq 1$, per l'ipotesi che

---

[3] V. Bertini. *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, *Cap. 14, n. 6*. Ivi è dimostrato che: le curve direttrici di ordine $r-1-k$. di una V_2^{r-1} di S_r, a direttrice minima di ordine m, quando $k \leq m$ costituiscono un sistema lineare *irriducibile* (cioè privo di curva o generatrici fisse), di dimensione $r-2k$. La stessa dimostrazione serve anche per

sia $m \leq \frac{p-2}{2}\Big)$. Anche il sistema $|C_{2m+2}|$, costituito dalle curve direttrici di ordine $2m+2$, è irriducibile e privo di punti base, perchè $\Big($essendo per ipotesi $m \geq \frac{p-4}{3}\Big)$ si ha: $p-2-(2m+2) \leq m$. Allora il sistema $|2C_{p-2-m} + C_{2m+2}|$ è anch'esso irriducibile [4] e senza punti base. La sua curva generica è una curva dell'ordine $2p-2$, trisecante le generatrici della V_2^{p-2}, ed è di genere p, essendo priva di punti multipli. Difatti il numero delle intersezioni di due C_{p-2-m} è: $2(p-2-m)-(p-2)=p-2m-2$, e quindi il genere della curva generica del sistema $|2C_{p-2-m}|$ è: $0+0+p-2m-2-1 = p-2m-3$; il numero dei punti comuni ad una curva di quest'ultimo sistema con una C_{2m+2} è: $2(p-2-m+2m+2-(p-2))=2m+4$, e allora il genere della curva generica del sistema $|2C_{p-2-m}+C_{2m+2}|$ risulta: $p-2m-3+0+2m+4-1=p$. Su una tale curva gli iperpiani dell'S_{p-1} segano la serie canonica, e le generatrici della rigata segano una g_3^1; inoltre questa curva è della specie m, perchè appunto la direttrice minima della V_2^{p-2} è dell'ordine m. Così la proposizione enunciata al principio di questo numero resta dimostrata.

4. Procediamo, ora, ad esaminare le serie speciali appartenenti ad una curva trigonale di genere p e di specie m Come immagine della curva assumeremo sempre la curva canonica C_{2p-2}.

Sia g_n^r una serie lineare speciale, completa, priva di punti fissi (quindi $r>0$) e non composta con la g_3^1, appartenente alla C_{2p-2}. Consideriamo un gruppo, G_{2p-2-n}, delle serie residua della g_n^r rispetto alla serie canonica, e sia h (≥ 0) il numero dei gruppi della g_3^1 che esso contiene. Sarà evidentemente: $2p-2-n \geq 3h$, cioè:

$$n \leq 2p-2-3h. \tag{2}$$

Il gruppo G_{2p-2-n} appartiene ad un S_{p-2-r} (perchè gli iperpiani per esso segano sulla C_{2p-2} la g_n^r, e quindi sono ∞^r); e questo S_{p-2-r} contiene h

---

provare che il sistema non ha punti base. Se, infatti, il sistema avesse un punto base P, lo spazio S_{2k-1}, passante per k generatrici arbitrarie, passerebbe per P; quindi lo spazio S_{2k}, determinato da questo S_{2k-1} e da un punto (diverso da P) appartenente alla generatrice uscente da P, conterebbe $k+1$ generatrici, le quali non sarebbero indipendenti; il che è assurdo essendo $k+1 \leq m+1$.

[4] Non può essere formato da una involuziene in un fascio, perchè nel caso estremo che sia $m=\frac{p-2}{2}$, e quindi il sistema $|C_{p-2-m}|$ sia un fascio, il sistema $|C_{2m+2}|$ non può coincidere con lo stesso fascio, altrimenti sarebbe: $2m+2=p-2-m$, cioè $m=\frac{p-4}{3}$, mentre non può essere simultaneamente $m=\frac{p-2}{2}$ ed $m=\frac{p-4}{3}$ (il che darebbe $p=-2$).

generatrici della V_2^{p-2}, in corrispondenza degli h gruppi della g_3^1 appartenenti al G_{2p-2-n} (5). Un iperpiano generico passante per questo S_{p-2-r} sega ulteriormente (cioè fuori delle h generatrici) la V_2^{p-2} in una curva direttrice C_{p-2-h} (di ordine $p-2-h$), contenente un gruppo G_n, della g_n^r; e tale curva C_{p-2-h} sarà irriducibile (se l'iperpiano non ha posizioni particolari) altrimenti la g_n^r o avrebbe punti fissi o sarebbe composta con la g_3^1, contrariamente alle ipotesi fatte (6). Essendo $r>0$, non può essere $n \leq p-1-h$: infatti, se così fosse, il gruppo G_n, della g_n^r, che sta sulla C_{p-2-h}, sarebbe costituito da punti indipendenti e cioè imporrebbe ai gruppi canonici che debbon contenerlo proprio n condizioni; e allora sarebbe: $n-r=n$, cioè $r=0$. Dunque deve essere:

(3) $$n > p-1-h.$$

Allora il G_n appartiene allo spazio S_{p-2-h} cui appartiene la C_{p-2-h} (e non ad uno spazio di dimensione inferiore); cioè il gruppo G_n, che è un gruppo della g_n^r, impone ai gruppi canonici che debbon contenerlo precisamente $p-1-h$ condizioni, e quindi è:

$$n-r=p-1-h$$

ossia:

(4) $$r=n-p+h+1.$$

Si vede facilmente che il numero h non può superare la specie m. Infatti, se fosse $h>m$, lo spazio S_{p-2-r}, contenente un gruppo della serie residua della g_n^r rispetto alla serie canonica, contenendo h generatrici avrebbe h $(>m)$ punti comuni con la direttrice minima. C_m, della V_2^{p-2}, perciò la conterrebbe per intero; e allora la g_n^r sarebbe composta con la g_3^1, contro l'ipotesi. Deve dunque essere:

(5) $$0 \leq h \leq m.$$

Si conclude con la seguente proposizione:

Sulla C_{2p-2}, *ogni serie lineare speciale completa,* g_n^r, *che sia priva di punti fissi e non sia composta con la* g_3^1 *della curva, ha l'ordine* n *e la dimensione* r *soddisfacenti le relazioni* (2), (3), (4); *nelle quali* h *indica il numero dei gruppi della* g_3^1 *contenuti in uno (e quindi in ciascun) gruppo della serie residua della* g_n^r *rispetto alla serie canonica. Questo numero* h *è compreso fra* 0 *ed* m, *gli estremi inclusi.*

(5) Lo spazio S_{p-2-r} potrebbe contenere una o più ulteriori generatrici se il G_{2p-2-n} contenesse, oltre gli h gruppi completi della g_3^1, anche una o più coppie di punti appartenenti ad altrettanti gruppi della g_3^1 medesima: ma in tal caso, il terzo punto di ciascuno di tali gruppi della g_3^1 sarebbe fisso per la g_n^r, mentre per ora questa serie si è supposta senza punti fissi.

(6) Infatti, il sistema lineare $|C_{p-2-h}|$, segato sulla $V_2{}^{p-2}$ dagli iperpiani per l'S_{p-2-r}, non può aver generatrici fisse, altrimenti la g_n^r avrebbe come fissi i punti comuni a queste generatrici e alla C_{2p-2}, e non può avere una curva direttrice fissa, altrimenti la g_n^r risulterebbe composta con la g_3^1.

Come risulta manifestatamente dalla (4), l'indice di specialità della serie è uguale ad $h+1$.

Osservazione. - Le h generatrici contenenti gli h gruppi della g_3^1 esistenti nel G_{2p-2-n}, e gli ulteriori $2p-2-n-3h$ punti che (insieme ai $3h$ appartenenti alle h generatrici) completano questo gruppo, appartengono ad un S_{p-2-r}, la cui dimensione è, per la (4):

$$p-2-r=p-2-(n-p+h+1)=2p-2-n-3h+2h-1.$$

Se ne deduce che: *quelle* h *generatrici e quei* $2p-2-n-3h$ *punti sono indipendenti.*

5. Dimostriamo ora che:

Se gli interi n, r, h *soddisfano le relazioni* (2), (3), (4), (5), *esistono sulla* C_{2p-2} *serie lineari speciali complete, prive di punti fissi e non composte con la* g_3^1, *aventi l'ordine* n *e la dimensione* r.

A questo scopo consideriamo h generatrici arbitrarie della V_2^{p-2}: gli iperpiani passanti per esse segano sulla rigata un sistema lineare $|C_{p-2-h}|$ che, essendo $h\leq m$, è irriducibile e di dimensione $p-1-2h$ (v. la nota (³) a pag. 342). Sia C^*_{p-2-h} una curva non spezzata di questo sistema, e fra i $2p-2-3h$ punti nei quali essa incontra la C_{2p-2} consideriamone (ad arbitrio) $2p-2-3h-n$, il cui gruppo indicheremo con A (per la (2) che supponiamo verificata il numero $2p-2-3h-n$ è ≥ 0). Le curve del sistema $|C_{p-2-h}|$ passanti per il gruppo A (ossia gli iperpiani passanti per le h generatrici e per i punti del gruppo A) segano sulla C_{2p-2} una serie lineare dell'ordine n, che non è composta con la g_3^1, altrimenti la C^*_{p-2-h} dovrebbe avere come componenti delle generatrici. Inoltre, questa serie ha la dimensione >0, perchè per la (3), che supponiamo verificata, è; $p-1-2h>$ $>2p-2-3h-n$. E infine, la serie stessa non ha punti fissi: perchè questi punti fissi, se esistessero, dovrebbero essere punti fissi anche per la serie segata sulla C^*_{p-2-h} dalle curve del sistema $|C_{p-2-h}|$ passanti per il gruppo A. Ma la serie caratteristica segata dal sistema $|C_{p-2-h}|$ sulla curva C^*_{p-2-h} è la g_{p-2-2h}^{p-2-2h} completa, e quindi è completa anche la serie residua del gruppo A rispetto ad essa; ed una serie completa su di una curva razionale non ha punti fissi. Ne segue che la suddetta serie di ordine n, segata sulla C_{2p-2-n} dalle curve del sistema $|C_{p-2-h}|$ passanti per il gruppo A, ha, per quanto si è visto al n. 4, la dimensione espressa dalla formula (4), cioè uguale al numero r assegnato. Così la proposizione è dimostrata.

6. Si consideri ora, sulla C_{2p-2}, una serie lineare g_n^r, di dimensione $r>0$, speciale, completa, non composta con la g_3^1, e dotata di l punti fissi. Abbandonando questi punti fissi si ottiene una g_{n-l}^r priva di punti fissi, ancora speciale, completa, non composta con la g_3^1 e di dimensione $r>0$; sicchè valgono per essa le relazioni analoghe alle (2), (3), (4), (5), cioè si ha:

$$p - 1 - h < n - l \leq 2p - 2 - 3h \tag{6}$$

$$r = n - l - p + h + 1 \tag{7}$$

e valgono le (5). Inoltre, poichè la g_n^r è speciale, il suo indice di specialità (che, per la (7), è $h - l + 1$) deve essere ≥ 1, e perciò deve essere $h - l \geq 0$; si ha dunque:

$$0 < l \leq h \leq m. \tag{8}$$

Nelle relazioni (6), (7), (8) s'intende che h rappresenta il numero dei gruppi della g_3^1 appartenenti ad un gruppo residuo della g_{n-l}^r rispetto alla serie canonica; ossia il numero delle generatrici della V_2^{p-2} contenute nello spazio S_{p-2-r} cui appartiene un gruppo, $G_{2p-2-n+l}$, residuo della g_{n-l}^r rispetto alla serie canonica. Questo S_{p-2-r} è lo stesso spazio cui appartiene un gruppo, G_{2p-2-n}, residuo della g_n^r rispetto alla serie canonica: esso deve evidentemente passare per gli l punti fissi della g_n^r in conseguenza del passaggio per il G_{2p-2-n}. Di più risulta che gli l punti fissi medesimi debbono stare ciascuno in una delle h generatrici suddette: infatti, se così non fosse, queste h generatrici ed i $2p - 2 - n + l - 3h$ punti i quali, insieme con i $3h$ appartenenti alle h generatrici, costituiscono il $G_{2p-2-n+l}$, sarebbero dipendenti; e ciò contraddice alla *osservazione* fatta alla fine del n. 4. Si conclude con la proposizione seguente:

Su di una curva trigonale di genere p *e di specie* m, *una serie lineare* g_n^r $(r > 0)$ *speciale, completa, non composta con la* g_3^1 *della curva e dotata di* l *punti fissi, ha l'ordine e la dimensione soddisfacenti le relazioni* (6), (7), (8); *nelle quali:* $h - l$ *è il numero dei gruppi della* g_3^1 *appartenenti interamente ad un gruppo della serie residua della* g_n^r *rispetto alla serie canonica; ed* l *è il numero dei gruppi della* g_3^1 *ciascuno dei quali contiene una coppia di punti del suddetto gruppo residuo. Gli* l *punti fissi della serie sono gli* l *punti ciascuno dei quali completa un gruppo della* g_3^1 *con una delle coppie suddette.*

Inversamente:

Se gli interi n, r, h, l $(r > 0)$ *soddisfano le relazioni* (6), (7), (8), *su ogni curva trigonale di genere* p *e di specie* m *esistono serie lineari speciali, complete, non composte con la* g_3^1 *della curva, dell'ordine* n *e della dimensione* r, *dotate di* l *punti fissi.*

Infatti, la proposizione del n. 5 assicura che, essendo verificate le relazioni (6), (7), (8), esistono sulla curva serie lineari g_{n-l}^r, speciali, complete, non composte con la g_3^1 e prive di punti fissi. Un gruppo della serie residua di una tale g_{n-l}^r, rispetto alla serie canonica, contiene h gruppi della g_3^1: se prendiamo l punti, ciascuno appartenente ad uno di questi h gruppi della g_3^1, e li aggiungiamo alla g_{n-l}^r, si ottiene appunto una g_n^r che ha quegli l punti come fissi ed è speciale, completa e non composta con la g_3^1.

7. Nel caso, finora escluso, di una g_n^0 speciale completa, è evidente che si ha: $n \leq p-1$. E, inversamente, per ogni $n \leq p-1$, esistono sulla C_{2p-2}, g_n^0 speciali complete. Basta infatti, p. es., considerare n punti fra le intersezioni della C_{2p-2} con una C_{p-2} irriducibile, sezione iperpiana della V_2^{p-2}: tali n punti sono certo indipendenti perchè situati sulla C_{p-2} ed in numero non superiore a $p-1$, perciò essi costituiscono, sulla C_{2p-2}, una g_n^0 completa.

Qualora, dato sulla C_{2p-2} un gruppo G_n di n punti ($n \leq p-1$), si voglia stabilire se esso costituisce o meno una g_n^0 completa, si consideri un qualsiasi gruppo residuo del G_n rispetto alla serie canonica, e suppongasi che sia $h-l$ il numero dei gruppi della g_3^1 contenuti totalmente in questo gruppo residuo, ed l il numero delle coppie di punti, appartenente ciascuna ad un gruppo della g_3^1, contenute pure nel gruppo residuo del G_n. Vale la proposizione: *Condizione necessaria e sufficiente perchè il* $\mathrm{G_n}$ *costituisca una* $\mathrm{g_n^0}$ *completa è che esso non contenga gruppi della* $\mathrm{g_3^1}$ (7), *e che si abbia: o:*

(9) $$h > m$$

ovvero:

(10) $$h \leq m \text{ ed } n-l \leq p-1-h.$$

Infatti, se il G_n costituisce una g_n^0 completa e non è verificata la (9) (quindi $h \leq m$), non può essere: $n-l > p-1-h$, altrimenti (v. n. 6) la serie completa determinata dal G_n avrebbe dimensione > 0 (8).

Inversamente, se vale la (9), la serie completa cui appartiene il G_n non può aver dimensione > 0, altrimenti (n. 6) dovrebbe essere $h \leq m$; e se invece valgono le (10), parimenti la serie completa cui appartiene il G_n non può aver dimensione > 0, altrimenti, (n. 6) dovrebbe essere: $n-l > p-1-h$.

Si osserverà che: *se vale la* (9) *deve essere:* $\mathrm{h} = p-2-m$, $\left(\text{e quindi: } m < \frac{p-2}{2}\right)$. Infatti. l'iperpiano passante per un gruppo residuo del G_n rispetto alla serie canonica, contenendo h ($< m$) generatrici della V_2^{p-2}, incontra la C_m direttrice minima in più di m punti, e quindi la contiene interamente. Questo iperpiano sega ulteriormente la V_2^{p-2} in $p-2-h-m$ generatrici, e poichè si suppone che il G_n non contenga gruppi della g_3^1, deve essere: $p-2-h-m=0$, cioè: $h=p-2-m$.

(7) È evidente che se il G_n contiene uno o più gruppi della g_3^1, la dimensione della serie completa da esso individuata è > 0.

(8) La condizione: $n-l \leq 2p-2-3h$ (che figura nella proposizione del n. 6) è ora conseguenza del fatto supposto che il G_n sia un gruppo speciale e quindi passi per esso almeno un iperpiano, il quale contenga h generatrici delle quali l passino per altrettanti punti del G_n.

8. Consideriamo infine, sulla C_{2p-2}, una serie lineare, g_n^r, speciale, completa e composta con la g_3^1, la quale g_n^r supponiamo anche, per generalità, che abbia l punti fissi ($l \geq 0$). Si avrà evidentemente:

$$n = 3r + l \tag{11}$$

ad anche (perchè la serie è speciale e completa): $r \geq 3r + l - p + 1$; cioè:

$$r \leq \frac{p-1-l}{2}. \tag{12}$$

Dunque: *Su di una curva trigonale di genere* p, *ogni serie lineare completa,* g_n^r, *chè sia composta con la* g_3^1 *ed abbia* l *punti fissi, ha i numeri* n, r, l *soddisfacenti le relazioni* (11) e (12).

Inversamente:

Se gli interi n, r, l *soddisfano le relazioni* (11) *e* (12), *esistono sulla curva serie lineari* g_n^r, *complete, speciali, composte con la* g_3^1 *e aventi* l *punti fissi.*

Infatti, per r generatrici della V_2^{p-2}, prese ad arbitrio, passa almeno un iperpiano, essendo per la (12): $2r - 1 \leq p - 2$; ed un tale iperpiano sega ulteriormente la V_2^{p-2} in una curva direttrice C_{p-2-r} (irriducibile o no), appartenente ad un S_{p-2-r}. Fra i $2p - 2 - 3r$ punti nei quali questa C_{p-2-r} incontra la C_{2p-2}, consideriamone $2p - 2 - 3r - l$ (numero certo ≥ 0: infatti, essendo $\frac{p-1-l}{2} \leq \frac{2p-2-l}{3}$, per la (12) si ha: $r \leq \frac{2p-2-l}{3}$ e quindi: $2p - 2 - 3r - l \geq 0$) (9). Gli iperpiani passanti per questi $2p - 2 - 3r - l$ punti segano sulla C_{2p-2} una serie lineare speciale, completa, dell'ordine: $3r + l$ ($= n$ per la (11)); la quale serie vogliamo provare che ha la dimensione r, ha l punti fissi, ed è composta con la g_3^1 della curva. E difatti, i suddetti $2p - 2 - 3r - l$ punti, che stanno sulla C_{p-2-r}, appartengono proprio allo spazio S_{p-2-r} cui appartiene questa curva, e non ad uno di dimensione minore, perchè per la (12) è: $2p - 2 - 3r - l > p - 1 - r$: dunque la serie segata da quegli iperpiani ha la dimensione r. Inoltre, poichè il detto S_{p-2-r} contiene la C_{p-2-r}, ne segue che la serie segata dagli iperpiani passanti per esso, sulla C_{2p-2}, è composta con la g_3^1 ed ha come fissi gli l punti

(9) Di questi $2p - 2 - 3r - l$ punti ne va preso uno su ciascuna delle generatrici che entrano eventualmente a comporre la C_{p-2-r}, e fuori della rimanente curva direttrice. Ciò è possibile perchè, se la C_{p-2-r} si spezza in una curva direttrice C_{p-2-r_1} ($r_1 > r$) ed in $r_1 - r$ generatrici, si ha: $2p - 2 - 3r - l > r_1 - r$, ossia $r < \frac{2p-2-l-r_1}{2}$. Infatti, dovendo essere $p - 2 - r_1 \geq 0$ ne segue $\frac{p-1-l}{2} < \frac{2p-2-l-r_1}{2}$ e quindi, per la (12): $r < \frac{2p-2-l-r_1}{2}$. I rimanenti $2p - 2 - 3r - l - (r_1 - r)$ punti, che van presi sulla C_{p-2-r_1} sono in numero $\geq p - 1 - r_1$, sempre in virtù della (12).

che, insieme con i $2p-2-3r-1$ completano l'intersezione della C_{r-2-r} con la C_{2p-2}. E ciò è quanto volevasi dimostrare.

Qualora la g_n^r sia priva di punti fissi, la condizione (12) diviene:

$$r \leq \frac{p-1}{2}. \tag{12'}$$

Si osserverà che questa non è in contraddizione con quanto si è visto al n. 1, per il quale, se una g_n^r è priva di punti fissi e composta con la g_3^1, deve essere $r \leq p-2-m$. Infatti, se p è un numero dispari il massimo valore che può avere m è $\frac{p-3}{2}$, e allora è: $\frac{p-1}{2} \leq p-2-m$; e se invece p è pari, il massimo valore che può avere r per la (12') è $\frac{p-2}{2}$, ed è: $\frac{p-2}{2} \leq p-2-m$ $\left(\text{essendo } m \leq \frac{p-2}{2}\right)$.

9. Per fare una applicazione delle cose esposte, proponiamoci di determinare le curve trigonali, di genere p e di specie m, appartenenti ad un S_r e aventi il minimo ordine. È ovvio che il problema equivale a determinare, sull'ente algebrico, le g_n^r (prive di punti fissi e non composte con la g_3^1 [10]) di data dimensione r e di ordine minimo. Una tale g_n^r evidentemente deve essere completa, perchè, se fosse contenuta totalmente in una g_n^{r+1}, la residua di un punto della curva rispetto ad essa, sarebbe una g_{n-1}^r, della stessa dimensione r e di ordine minore di n. Inoltre, possiamo limitare la ricerca alle serie g_n^r di dimensione non superiore a $p-1$, perchè, per $r > p-1$ la serie essendo non speciale *ogni* g_n^r completa ha sempre l'ordine $n = p + r$. E, infine, si osserverà che una g_n^r completa. con $r \leq p-1$, se deve avere l'ordine n minimo, deve essere speciale; altrimenti sarebbe $n = p + r$, mentre la residua rispetto alla serie canonica di $p-1-r$ punti generici della curva è una g_{p+r-1}^r.

Supponiamo dunque $r \leq p-1$ e proponiamoci di determinare, su di una curva trigonale di genere p e di specie m, le g_n^r speciali, complete, prive di punti fissi e non composte con la g_3^1, di data dimensione r, aventi il minimo ordine. Dalle proposizioni dei n. 4 e 5 risulta che condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano, sulla nostra curva, tali g_n^r è che siano verificate le relazioni (2), (3), (4), (5). Dalla (4) si ha:

$$n = r + p - 1 - h \tag{4'}$$

[10] Una g_n^r composta con la g_3^1, dovendo esser completa come è detto in seguito, ha sempre per immagine in S_r una curva tripla di una curza razionale normale dell'S_r, e quindi dell'ordine r.

dalla quale risulta che il minimo di n si ha per il massimo valore di h. In virtù della (4′) la (3) è senz'altro verificata per ogni $r > 0$. La (2), per la (4′) diviene:

$$r + p - 1 - h \leq 2p - 2 - 3h$$

la quale dà:

$$h \leq \frac{p-1-r}{2}. \tag{2'}$$

Poichè h deve soddisfare simultaneamente la (2′) e le (5), basterà che sia:

$$0 \leq h \leq m$$

se:

$$m \leq \frac{p-1-r}{2}. \tag{13}$$

E, invece, basterà che sia:

$$0 \leq h \leq \frac{p-1-r}{2}$$

se:

$$m > \frac{p-1-r}{2}. \tag{14}$$

Se ha luogo la (13), il minimo valore di n (che, come si è osservato, si ha dalla (4′) ponendovi il massimo valore di h) è:

$$\text{min. } n = r + p - 1 - m. \tag{15}$$

Se invece, vale la (14), si ha:

$$\text{min. } n = r + p - 1 - \left(\frac{p-1-r}{2} - \varepsilon\right) = \frac{p-1+3r}{2} + \varepsilon \tag{16}$$

ove $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ovvero $\varepsilon = 0$ secondo che, rispettivamente, p ed r sono della stessa parità o di parità diversa.

10. Supponiamo che valga la (13). In questa ipotesi si ha dunque, che in un S_r le curve trigonali di genere p e di specie m aventi il minimo ordine sono curve dell'ordine: $r + p - 1 - m$. Ricordando (v. n. 5) come si costruisce, sulla curva canonica, una g_n^r speciale completa, priva di punti fissi e non composta con la g_3^1, quando siano verificate le relazioni (2), (3), (4), (5); si deduce che, nella ipotesi fatta, una curva, $C_{r+p-1-m}$, dell'ordine minimo $r + p - 1 - m$, in S_r, si ottiene proiettando su di un S_r la curva canonica, C_{2p-2} di S_{p-1}, da un S_{p-2-r} determinato da $h = m$ generatrici della V_2^{p-2} e da $2p - 2 - 3m - (r + p - 1 - m) = p - 1 - r - 2m$ [11] punti della C_{2p-2}

[11] Per la (13), che supponiamo verificata, questo numero è ≥ 0.

(i punti del gruppo A del n. 5). Lo spazio S_{p-1-r} che dal suddetto S_{p-2-r} proietta un punto M della C_m direttrice minima della V_2^{p-2}, contiene per intero questa C_m, perchè oltre M contiene gli m punti nei quali la C_m è incontrata dalle m generatrici contenute nell' S_{p-2-r}: perciò la C_m stessa viene proiettata in un unico punto, O, dell' S_r. In questo punto O cadono le proiezioni dei $3m-p+4$ punti nei quali la C_{2p-2} è incontrata dalla C_m, e anche le proiezioni delle ulteriori coppie di punti della C_{2p-2} situate sulle generatrici uscenti dai punti del gruppo A: infatti lo spazio che dall'S_{p-2-r} proietta un punto di una tale coppia contiene la corrispondente generatrice, e quindi anche la C_m. Il punto O risulta quindi multiplo, per la curva $C_{r+p-1-m}$ (proiezione della C_{2p-2} in S_r) secondo il numero:

$$3m-p+4+2(p-1-r-2m)=p-2r-m+2 \text{ (}^{12}\text{)}.$$

Le generatrici della V_2^{p-2} sono proiettate, dall' S_{p-2-r} nell' S_r, secondo rette uscenti da O, costituenti un cono di ordine $r-1$. Infatti, un S_{p-2} dell'S_{p-1} contenente l'S_{p-2-r} proiettante e passante per la C_m, sega la V_2^{p-2} in $p-2-m$ generatrici fra le quali vi sono: le $p-1-r-2m$ generatrici uscenti dai punti del gruppo A, e le m generatrici contenute nell' S_{p-2-r}; sicchè l' S_{r-1}, in cui tale S_{p-2} sega l' S_r, contiene appunto:

$$p-2-m-(p-1-r-2m)-m=r-1$$

generatrici del cono.

Le generatrici di questo cono segano la $C_{r+p-1-m}$, fuori di O, esclusivamente in gruppi della g_3^1; il che è provato dal fatto che un S_{r-1} per O sega la $C_{r+p-1-m}$, fuori del punto O, in:

$$r+p-1-m-(p-2r-m+2)=3(r-1) \text{ punti.}$$

Lo spazio S_{p-r} che, dall' S_{p-2-r} proiettante, proietta la tangente alla S_{2p-2} in uno, B_1, dei due punti ulteriori (B_1 e B_2) in cui la stessa C_{2p-2} è incontrata dalla generatrice della V_2^{p-2} uscente da un punto, B, del gruppo A, contiene questa generatrice, quindi anche la C_m, quindi anche la generatrice infinitamente vicina a quella uscente da B, e per conseguenza contiene anche la tangente alla C_{2p-2} nell'altro punto, B_2, che essa ha in comune con la generatrice uscente da B. Ne segue che, nello spazio S_r, la generatrice del cono di vertice O, che si ottiene segando un tale S_{p-r} con l' S_r, ha due intersezioni con la $C_{p+r-m-1}$ infinitamente vicine ad O. Dunque, questa $C_{p+r-m-1}$ ha: $p-1-r-2m$ punti doppi infinitamente vicini ad O (cioè tanti quanti sono i punti del gruppo A), oltre il punto multiplo O.

---

(12) Dalla (13) e dalla relazione: $m \geq \frac{p-4}{3}$, segue: $\frac{p-4}{3} \leq \frac{p-1-r}{2}$, da cui: $r \leq \frac{p+5}{3}$. Allora si ha: $\frac{p-1-r}{2} \leq p-2r+2$ e quindi anche: $m \leq p-2r+2$ ossia; $p-2r+2-m \geq 0$.

Riepilogando, concludiamo:

In un S_r, *le curve trigonali di genere* p *e di specie* $m \leq \frac{p-1-r}{2}$, *aventi il minimo ordine, sono curve speciali normali dell'ordine:* $r+p-1-m$. *Ciascuna di esse giace su di un cono (razionale normale) dell'ordine* $r-1$, *ha un punto di molteplicità* $p-2r-m+2$ *nel vertice di questo cono, ed ha inoltre* $p-1-r-2m$ *punti doppi infinitamente vicini al vertice del cono stesso. Su di una tale curva, le generatrici del cono segano, fuori del vertice, i gruppi della* g_3^1.

In particolare si ha, per $r=2$, che:

Le curve piane trigonali, di genere p *e di specie* $m \leq \frac{p-3}{2}$, *aventi il minimo ordine, sono curve, (normali, speciali) dell'ordine:* $p+1-m$, *aventi un punto* O *di molteplicità:* $p-2-m$, *ed altri* $p-3-2m$ *punti doppi, infinitamente vicini ad* O [13]. *La* g_3^1 *è segata su una tale curva dalle rette del fascio di centro* O.

11. Supponiamo ora che valga la (14), cioè che sia $m > \frac{p-1-r}{2}$. In questo caso le curve trigonali di genere p e di specie m, di un S_r, aventi il minimo ordine, sono curve (speciali, normali) dell'ordine: $n = \frac{p-1+3r}{2} + \varepsilon$ $\left(\varepsilon = 0 \text{ o } \varepsilon = \frac{1}{2}\right.$ secondo che p ed r sono di parità diversa o della stessa parità$\left.\right)$. Una tale curva si ottiene proiettando su di un S_r la curva canonica, C_{2p-2} di S_{p-1}, da un S_{p-2-r} determinato da $\frac{p-1-r}{2} - \varepsilon$ generatrici della V_2^{p-2} e dai punti del gruppo A (v. n. 5), che sono ora in numero di:

$$2p-2-3\left(\frac{p-1-r}{2} - \varepsilon\right) - \left(\frac{p-1+3r}{2} + \varepsilon\right) = 2\varepsilon .$$

Cioè il gruppo A è ora inesistente se $p-r$ è dispari ($\varepsilon = 0$), e si riduce ad un sol punto se $p-r$ è un numero pari $\left(\varepsilon = \frac{1}{2}\right)$.

Nel 1º caso, in cui cioè $p-r$ è dispari, si ha in S_r una curva dell'ordine: $\frac{p-1+3r}{2}$, che è trisecante le generatrici di una rigata (proiezione della V_2^{p-2}) dell'ordine: $p-2-2\,\frac{p-1-r}{2} = r-1$. Su questa rigata la C_m è proiettata in una curva dell'ordine $m - \frac{p-1-r}{2}$.

---

[13] Una di queste curve non ha altre singolarità, perchè si ha precisamente:

$$\frac{(p-m)(p-m-1)}{2} - \frac{(p-2-m)(p-3-m)}{2} - (p-3-2m) = p.$$

Nel 2° caso, in cui cioè $p-r$ è pari, si ha in S_r una curva dell'ordine: $\frac{p+3r}{2}$ proiezione della C_{2p-2} da un S_{p-2-r} contenente $\frac{p-2-r}{2}$ generatrici della V_2^{p-2} ed un ulteriore punto A della C_{2p-2}. Questa $C_{\frac{p+3r}{2}}$ è trisecante le generatrici di una rigata (razionale normale) dell'ordine $r-1$ (proiezione della V_2^{p-2}) ed ha un punto P doppio (proiezione dei due punti ulteriori in cui la C_{2p-2} è incontrata dalla generatrice della V_2^{p-2} uscente da A).

In conclusione si ha che:

In un $\mathrm{S_r}$, *le curve trigonali di genere* p *e di specie* $\mathrm{m} > \frac{\mathrm{p}-1-\mathrm{r}}{2}$, *aventi il minimo ordine. sono curve dell'ordine* $\frac{\mathrm{p}+3\mathrm{r}-1}{2}+\varepsilon\left(\varepsilon=0 \text{ o } \varepsilon=\frac{1}{2}\right.$ *secondo che* $\mathrm{p}-\mathrm{r}$ *è dispari o pari*$\left.\right)$, *trisecanti le generatrici di una rigata (razionale, normale) dell'ordine* $\mathrm{r}-1$, *e dotate di un punto doppio se* $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Nel caso di $r=2$, la (14) dà $m>\frac{p-3}{2}$, e poichè m non può superare $\frac{p-2}{2}$, ne segue che è proprio $m=\frac{p-2}{2}$. In tal caso p è pari come r, quindi $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Inoltre, la V_2^{p-2} contiene un fascio lineare di curve direttrici minime C_m, una delle quali passa per il punto A. Proiettando, su di un piano π, la V_2^{p-2} dall'$S_{p-2-r}=S_{p-4}$ determinato da $\frac{p-4}{2}$ generatrici e dal punto A, le generatrici della rigata vengono proiettate nelle rette di un fascio avente per centro il punto, O, proiezione della C_m passante per A (questa C_m è proiettata in un punto, perchè l'S_{p-3} che, dall'S_{p-4} suddetto, proietta un punto di detta $C_m=C_{\frac{p-2}{2}}$, ha con essa $\frac{p-4}{2}+2=\frac{p-2}{2}+1$ punti comuni, e quindi la contiene interamente). E la C_{2p-2} viene proiettata, su π, in una curva dell'ordine $\frac{p+6}{2}$ $(=p+2-m)$ avente nel punto O la molteplicità: $3\frac{p-2}{2}+2p-2-3(p-2)-1=\frac{p}{2}$ (tante essendo le intersezioni, fuori di A, della $C_{\frac{p-2}{2}}$ passante per A con la C_{2p-2}), ed avente un punto doppio, P, proiezione dei due punti ulteriori comuni alla C_{2p-2} e alla generatrice uscente da A. Dunque:

Le curve piane trigonali di genere p *e di specie* $\mathrm{m}=\frac{\mathrm{p}-2}{2}$, *aventi il* *minimo ordine, sono curve dell' ordine* $\frac{p+6}{2}$ *con un punto* O *di molteplicità* $\frac{p}{2}$, *ed un punto doppio* P [14].

Le rette del piano uscenti da O *segano su una tale curva la* g_3^1, *mentre le rette uscenti da* P *segano sulla curva una* $g^1_{\frac{p+2}{2}}$, *immagine della serie segata sulla curva canonica dalle* C_m *minime della* V_2^{p-2} [15].

---

[14] Questi modelli di curve trigonali normali del piano sono stati determinati, per primo, da F. AMODEO, *Courbes normales trigonales du plan.* « Comptes Rendus » 130, 1900; e *Curve di gonalità* k *con punti fissi nella* $(k-1)^{ma}$ *serie canonica, e curve normali trigonali del piano,* « Rend. Acc. Sc. di Napoli » (3) 6, 1900. B. SEGRE nella memoria: *Sui moduli delle curve poligonali, e sopra un complemento al teorema di esistenza di Riemann,* « Math. Annalen » Bd 100, Heft 4 und 5, 1928, ne ha messo esplicitamente in evidenza la proprietà di *curve del minimo ordine.*

[15] Anche questa $g^1_{\frac{p+2}{2}}$ è, fra le serie speciali complete ∞^1, una serie di ordine minimo. Infatti, nel caso $r=1$ vale sempre la (13), $\left(\text{che diviene } m \leq \frac{p-2}{2}\right)$ e quindi il minimo dell'ordine è $1+p-1-m=p-m$, che, per $m=\frac{p-2}{2}$, risulta uguale a $\frac{p+2}{2}$.