Sul teorema di reciprocità per le correnti elettriche variabili(*).

Memoria di DARIO GRAFFI (a Bologna).

Sunto. - *Mediante la trasformazione di LAPLACE, si stabilisce un teorema di reciprocità per le correnti elettriche che, comunque variabili nel tempo, percorrono una o più reti di fili conduttori. Dal suddetto teorema, supposte nulle le condizioni iniziali, si deduce, in particolare, una formula per il calcolo della corrente in un ramo della rete generata da una forza elettromotrice posta in un altro ramo, qualora sia nota la corrente in questo ultimo, generata da una forza elettromotrice continua o alternata posta nel primo.*

1. I teoremi di reciprocità del DONATI ⁽¹⁾, per le correnti elettriche, continue o alternate, nelle reti di fili conduttori, verranno estesi, in questa memoria, alle correnti elettriche variabili col tempo in modo qualsiasi ⁽²⁾.

Come in altro nostro lavoro ⁽³⁾ dedicato ai teoremi di reciprocità faremo anche qui uso sistematico della trasformazione di LAPLACE ⁽⁴⁾. Però, il procedimento della memoria citata limiterebbe il teorema di reciprocità al caso interessante, ma particolare, di correnti dovute a due sistemi di forze elettromotrici proporzionali ad una medesima funzione del tempo; cioè a due sistemi differenti solo, in sostanza, per una diversa distribuzione delle forze elettromotrici nei rami delle reti. Invece il metodo che ora seguiremo non imporrà alcuna restrizione sulle forze elettromotrici che potranno perciò variare, col trascorrere del tempo, in modo del tutto indipendente l'una dall'altra. Riassumiamo ora brevemente i risultati conseguiti in questa ricerca.

Noi consideriamo una o più reti chiuse ⁽⁵⁾; sia m il numero totale dei loro rami che ordineremo in modo opportuno. Un ramo generico verrà indi-

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(1) L. DONATI, *Leggi di reciprocità delle correnti elettriche nelle reti di fili conduttori*. Memorie e note scientifiche, Bologna, Zanichelli, 1925, pagg. 121-133. In queste pagine sono riunite tre note presentate all'Accademia delle Scienze di Bologna nel novembre 1899, febbraio 1900, maggio 1910 e inserite nei relativi Rendiconti. Si veda anche la nota dello stesso A. negli Atti del Congresso Internazionale di Matematica, Bologna, 1928, Tomo V, pagg. 95-102.

(2) Le correnti devono però variare in modo non eccessivamente rapido così da poter applicare le equazioni usuali dell'elettrotecnica.

(3) D. GRAFFI, *Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni dipendenti dal tempo*, Annali di Matematica pura e applicata, Serie IV, Tomo XVIII, 1939, pagg. 173-200.

(4) Le proprietà e le applicazioni della trasformazione di LAPLACE sono esposte nella recente monografia di A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, Bologna, Zanichelli, 1943. A questo libro faremo spesso riferimento citandolo, per brevità, solo col nome dell'A.

(5) Noi consideriamo solo reti chiuse e complete; il DONATI considera anche reti aperte, o meglio porzioni di reti. L'estensione delle nostre considerazioni al caso del DONATI non offre però alcuna difficoltà.

cato con le lettere h , s , o k . Siano poi $E_h(t)$, $E'_h(t)$ due sistemi di forze elettromotrici funzioni del tempo t (ovviamente $E_h(t)$, $E'_h(t)$ saranno inserite nel ramo generico h), $I_h(t)$, $I'_h(t)$ (⁶) le correnti generate nel ramo h rispettivamente dal primo e dal secondo sistema di forze elettromotrici. Dopo aver verificato l'applicabilità della trasformazione di LAPLACE alle equazioni dei circuiti elettrici, troveremo, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle (⁷), la seguente espressione del teorema di reciprocità:

$$(1) \quad \sum_1^m \int_0^t E_h(t-\tau) I'_h(\tau) d\tau = \sum_1^m \int_0^t E'_h(t-\tau) I_h(\tau) d\tau$$

che, nel corso di questa ricerca, verrà generalizzata supponendo diverse dallo zero le condizioni iniziali.

Se le $E_h(t)$, $E'_h(t)$ sono proporzionali alla stessa funzione del tempo, cioè, in sostanza, quando le forze elettromotrici variano nello stesso modo, la (1) assume la forma più semplice:

$$(2) \quad \sum_1^m E_h(t) I'_h(t) = \sum_1^m E'_h(t) I_h(t)$$

supponendo ancora nulle, s'intende, le condizioni iniziali. La (2) è identica al teorema del DONATI per le correnti continue che viene così esteso, fra l'altro, al periodo transitorio delle correnti stesse.

Dalla (1) dedurremo infine un risultato che ci sembra, eventualmente, di interesse anche pratico. Sempre supponendo le condizioni iniziali nulle, nota (ovviamente anche nel periodo transitorio) la corrente nel ramo k dovuta ad una forza elettromotrice alternativa (e, in particolare, continua) posta nel ramo h , è possibile determinare la corrente in quest'ultimo ramo dovuto ad una forza elettromotrice qualunque inserita in k . Di questi ultimi risultati si può dare una semplice giustificazione mediante il calcolo operatorio funzionale di G. GIORGI, ma su ciò torneremo in altra occasione.

Così pure in altra occasione ci riserviamo di estendere ai sistemi continui i metodi del presente lavoro.

2. Scriviamo ora le equazioni dei circuiti a rete. A questo scopo indichiamo con C_h la capacità del condensatore eventualmente inserito nel ramo h , con R_h la sua resistenza, con $M_{h,k}$ l'induttanza mutua fra i rami h e k , sicchè $M_{h,h}$ sarà l'induttanza propria del ramo h . I nodi delle reti verranno indicati con lettere greche e α e β saranno gli estremi del ramo h orientato da α verso β ; V_α e V_β i potenziali in α e β . Infine la forza elettromotrice inserita nel ramo h verrà indicata con $\bar{E}_h(t)$ (o più brevemente con $\bar{E}_h$); per

(⁶) Spesso però, per brevità, correnti e forze elettromotrici verranno indicate con I_h , I'_h , E_h , E'_h .

(⁷) Cioè quando all'istante iniziale sono nulle le correnti in tutti i rami delle reti e le cariche su tutti i condensatori eventualmente inseriti nelle reti stesse.

brevità di scrittura porremo $E_h = \bar{E}_h - \frac{Q_{0h}}{C_h}$ essendo Q_{0h} la carica all'istante iniziale sul condensatore C_h ; E_h coincide con la forza elettromotrice nel ramo h se, inizialmente, la carica è nulla. Avremo allora per ogni ramo h :

$$(4) \quad \sum_1^m M_{h,k} \frac{dI_k}{dt} + R_h I_h + \frac{\int_0^t I_h dt}{C_h} = V_\alpha - V_\beta + E_h$$

e per ogni nodo α :

$$(5) \quad \sum_s \eta_s I_s = 0$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i rami che hanno un estremo in α ; η_s vale poi $+1$ o -1 a seconda che il senso positivo del ramo è diretto verso α o in senso contrario.

Noi faremo poi le seguenti ipotesi largamente verificate nella pratica. La forma quadratica:

$$(6) \quad T = \frac{1}{2} \sum_1^m \sum_{h,k} M_{h,k} I_h I_k,$$

che rappresenta l'energia magnetica, verrà supposta definita positiva per tutte le correnti che soddisfano alle (5); in quanto che T si annulla solo se in tutti i rami della rete non passa corrente. Le $E_h(t)$ (o che è lo stesso le forze elettromotrici) verranno supposte, in ogni intervallo finito, funzioni generalmente continue e a variazione limitata. Inoltre, poichè, dal punto di vista pratico, a noi interessa conoscere la corrente solo in un intervallo $(0, \theta)$ grande come si vuole, ma finito, e poichè come si intuisce facilmente (e come si dimostra rigorosamente col teorema di unicità⁽⁸⁾) le correnti nel suddetto intervallo non dipendono dal valore delle $E_h(t)$ per $t > \theta$, non costituisce alcuna restrizione, l'ammettere, per questi valori del tempo, le $E_h(t)$ identicamente nulle.

3. Ciò posto, è facile dimostrare che le correnti I_h , le loro derivate prime e i potenziali ai nodi V_α sono trasformabili secondo LAPLACE⁽⁹⁾ come, ovviamente le E_h . A questo scopo ricordiamo che le $I_h(t)$ sono funzioni continue del tempo⁽¹⁰⁾ e perciò limitate in tutto l'intervallo $(0, \theta)$. Per $t > \theta$, essendo tutte le E_h nulle dal teorema di conservazione dell'energia abbiamo:

$$(7) \quad \frac{d(T+U)}{dt} + \sum_1^m R_h I_h^2 = 0$$

⁽⁸⁾ Si confronti per questo teorema il § 4 pag. 378 della mia memoria: *Sull'applicazione del calcolo operatorio funzionale ai circuiti elettrici*, Commentationes Pontificia Academia Scientiarum, Anno III, Vol. III, N. 11, 1939, pagg. 369-402. Questa memoria verrà in seguito indicata A. C. O.

⁽⁹⁾ Per il significato di questa locuzione e altre proprietà si veda il § 2 (Parte I) del citato libro del GHIZZETTI.

⁽¹⁰⁾ A. C. O. § 4 pag. 383.

dove U indica l'energia elettrostatica, o più precisamente U vale l'espressione (positiva o al più nulla):

$$(8) \quad U = \frac{1}{2} \sum_h \frac{\left(\int_0^t I_h dt \right)^2}{C_h}.$$

Poichè $R_h > 0$ la derivata che compare a primo membro di (7) è negativa, $T + U$ sarà perciò per $t > \theta$ decrescente, quindi potremo scrivere:

$$(9) \quad T + U < T_\theta + U_\theta$$

dove T_θ e U_θ sono i valori di T e U all'istante θ .

Ed essendo $U \geq 0$

$$(10) \quad T < T_\theta + U_\theta$$

la T è perciò limitata per $t > \theta$.

Essendo questa forma definita positiva le $I_h(t)$ saranno esse pure limitate per $t > \theta$ e, per quanto si è detto, in tutto l'intervallo $(0, \infty)$. Allora le I_h e le loro derivate prime ⁽¹¹⁾ sono trasformabili secondo LAPLACE assieme agli integrali di I_h da 0 a t ⁽¹²⁾.

Dalle (4) risultano allora trasformabili secondo LAPLACE tutte le differenze di potenziale $V_\alpha - V_\beta$ fra gli estremi di ogni ramo. Ma, in ogni rete, vi è un nodo che indicheremo con ω che si può assumere come punto di riferimento per i potenziali della rete; quindi $V_\omega = 0$ in ogni istante. Ora si può passare da α a ω (supposti sulla stessa rete) percorrendo un certo numero di rami limitati, per esempio, dai nodi $\beta, \gamma \dots \epsilon$, sicchè potremo scrivere:

$$(10) \quad V_\alpha = (V_\alpha - V_\beta) + (V_\beta - V_\gamma) \dots (V_\epsilon - V_\omega)$$

e poichè a secondo membro di (10) tutti i termini sono trasformabili secondo LAPLACE sarà tale anche V_α , cioè il potenziale di ogni nodo. Quanto si è detto in principio di questo numero risulta perciò completamente provato.

⁽¹¹⁾ Si osservi infatti che, indicando con p un numero reale o complesso, ma con parte reale positiva, si ha:

$$\int_0^\theta e^{-pt} \frac{dI_h}{dt} dt = e^{-p\theta} I_h(\theta) - I_h(0) + p \int_0^\theta e^{-pt} I_h(t) dt$$

essendo I_{h0} il valore di I_h per $t=0$. Ora poichè $I_h(t)$ è limitata, per $\theta \rightarrow \infty$ esiste il limite del secondo membro dell'equazione ora scritta. Esisterà perciò anche il limite del primo membro, quindi $\frac{dI_h}{dt}$ è trasformabile secondo LAPLACE come I_h .

⁽¹²⁾ Essendo $I_h(t)$ limitata esisterà un numero M tale che $|I_h(t)| < M$, sarà allora $\left| \int_0^t I_h(t) dt \right| \leq Mt$ perciò è trasformabile secondo LAPLACE $\int_0^t I_h(t) dt$.

4. I risultati del numero precedente ci permettono di trasformare secondo LAPLACE le (4) e (5).

Basterà perciò moltiplicarle per e^{-pt} (p numero complesso con parte reale positiva) e integrare ambo i membri da 0 a ∞ . Posto ⁽¹³⁾

$$(11) \quad i_h = \int_0^\infty e^{-pt} I_h(t) dt \quad e_h = \int_0^\infty e^{-pt} E_h(t) dt \quad v_x = \int_0^\infty e^{-pt} V_x(t) dt$$

(cioè i_h , e_h , V_x : sono le trasformate di I_h , E_h , V_x) e ricordando che ⁽¹⁴⁾ (se I_{h0} indica il valore di I_h per $t=0$):

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{dI_h}{dt} dt = pi_h - I_{h0} \quad \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t I_h dt = \frac{i_h}{p}$$

troveremo come trasformate delle (4) e (5):

$$(12) \quad \sum_1^m M_{h,k} p i_k + R_h i_h + \frac{i_h}{p C_h} = v_x - v_\beta + e_h + \sum_1^m M_{h,k} I_{k0}$$

$$(13) \quad \sum \eta_s i_s = 0.$$

Si consideri ora un altro sistema di forze elettromotrici E'_h ⁽¹⁵⁾ inserite nei rami h della rete. Siano I'_h e V'_x rispettivamente le correnti e i potenziali ai nodi dovute a queste forze elettromotrici. Siano poi i'_h , e'_h , v'_x le trasformate secondo LAPLACE di I'_h , E'_h , V'_x che si otterranno dalla (11) ponendo queste tre grandezze rispettivamente in luogo di I_h , E_h , V_x .

Ovviamente i'_h , e'_h , v'_x soddisferanno le (12) e (13), purchè in luogo di I_{k0} si ponga I'_{k0} valore iniziale di I'_k . Avremo allora:

$$(14) \quad \sum_1^m M_{h,k} p i'_k + R_h i'_h + \frac{i'_h}{p C_h} = v'_x - v'_\beta + e'_h + \sum_1^m M_{h,k} I'_{k0}$$

$$(15) \quad \sum_s \eta_s i'_s = 0.$$

Moltiplichiamo ora la (12) per i'_h la (14) per i_h , sommiamo poi le due equazioni così ottenute su tutti i rami h . Otteniamo, tenendo presente le (13) e (15):

$$(16) \quad \sum_{h,k}^m M_{h,k} p i_k i'_h + \sum_h^m R_h i_h i'_h + \sum_h^m \frac{i_h i'_h}{p C_h} = \sum_h^m e_h i'_h + \sum_{h,k}^m M_{h,k} I_{k0} i'_h$$

$$(17) \quad \sum_{h,k}^m M_{h,k} p i'_k i_h + \sum_h^m R_h i'_h i_h + \sum_h^m \frac{i'_h i_h}{p C_h} = \sum_h^m e'_h i_h + \sum_{h,k}^m M_{h,k} I'_{k0} i_h.$$

Ora essendo $M_{h,k} = M_{k,h}$ i due primi membri di (16) e (17) sono uguali.

⁽¹³⁾ Non si confonderà la e_h , trasformata della forza elettromotrice E_h con la base e dei numeri naturali. Del resto la prima è sempre munita di un indice h , l'altra di un certo esponente.

⁽¹⁴⁾ GHIZZETTI, Parte I, § 3, n. 2, pag. 26 e n. 3 pag. 29.

⁽¹⁵⁾ A rigore $E'_h = \bar{E}'_h - \frac{Q'_{0h}}{C_h}$ essendo $\bar{E}'_h$ la forza elettromotrice inserita nel ramo h e Q'_{0h} la carica iniziale sul condensatore C_h .

Avremo allora:

$$(18) \quad \sum_1^m e_h i'_h + \sum_1^m M_{h,k} I_{k0} i'_h = \sum_1^m e'_h i_h + \sum_1^m M_{h,k} I_{k0} i_h$$

e questa equazione esprime il teorema di reciprocità per le trasformate delle tensioni e delle correnti.

5. Indichiamo ora, per brevità, con $E_h * I_h$ e con $E'_h * I_h$ il prodotto integrale ⁽¹⁶⁾ (faltung) delle due coppie di funzioni $E_h(t)$, $I_h(t)$, $E'_h(t)$, $I_h(t)$ cioè:

$$(19) \quad E_h * I_h = \int_0^t E_h(t-\tau) I_h(\tau) d\tau \quad E'_h * I_h = \int_0^t E'_h(t-\tau) I_h(\tau) d\tau.$$

Allora, ricordando il teorema del prodotto integrale ⁽¹⁷⁾, la (18) si può scrivere:

$$(20) \quad \int_0^\infty e^{-pt} \left(\sum_1^m E_h * I_h + \sum_1^m M_{h,k} I_{k0} I_h \right) dt = \int_0^\infty e^{-pt} \left(\sum_1^m E'_h * I_h + \sum_1^m M_{h,k} I_{k0} I_h \right) dt$$

e, per il teorema di LERCH ⁽¹⁸⁾, le funzioni integrande nei due membri di (20) sono uguali quindi, ricordando (19), abbiamo:

$$(21) \quad \sum_1^m \int_0^t E_h(t-\tau) I_h(\tau) d\tau + \sum_1^m M_{h,k} I_{k0} I_h = \sum_1^m \int_0^t E'_h(t-\tau) I_h(\tau) d\tau + \sum_1^m M_{h,k} I_{k0} I_h$$

questa relazione esprime il teorema di reciprocità delle correnti elettriche nella forma più generale. Se le condizioni iniziali sono nulle ($I_{h0} = I_{h0} = 0$, $Q_{h0} = Q'_{h0} = 0$ e ciò per ogni h) la E_h ed E'_h coincidono con le forze elettromotrici e la (21) si riduce alla (1).

6. Se le condizioni iniziali sono nulle e le E_h ed E'_h sono tutte proporzionali ad una stessa funzione $G(t)$ cioè se:

$$E_h = G(t) c_h \quad E'_h = G(t) c'_h$$

dove c_h e c'_h sono costanti, eventualmente anche nulle, la (21) (o meglio la (1)) diventa:

$$\int_0^t G(t-\tau) \left(\sum_1^m c_h I_h(\tau) - \sum_1^m c'_h I_h(\tau) \right) d\tau = 0$$

da cui essendo $G(t) \neq 0$.

$$\sum_1^m c_h I_h(t) = \sum_1^m c'_h I_h(t)$$

⁽¹⁶⁾ GHIZZETTI, Parte I, § 3, n. 4, pagg. 29 e segg.

⁽¹⁷⁾ GHIZZETTI, Parte I, § 3, n. 5, pag. 32.

⁽¹⁸⁾ GHIZZETTI, Parte I, § 4, n. 2, pag. 38.

⁽¹⁹⁾ Si applica il teorema. Se $G(t) \neq 0$ se:

$$\int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau = 0$$

per ogni t è $f(t) = 0$. Questa proprietà si dimostra subito applicando la trasformazione di

ossia moltiplicando per $G(t)$ si ha :

$$(22) \quad \sum_1^m E_h(t) I_h(t) = \sum_1^m E'_h(t) I_h(t)$$

che coincide con la (2). Se le forze elettromotrici sono costanti, dopo il periodo transitorio, anche le I_h diventano costanti e la (22) si riduce al teorema di DONATI per le correnti continue. Si potrebbe anche dalla (22) dedurre il teorema di DONATI per le correnti alternate, ma su ciò non insistiamo.

7. Supponiamo ora che le E'_h si riducano ad una sola forza elettromotrice costante, posta nel ramo h , che, con opportuna scelta delle unità di misura, si può sempre ritenere unitaria.

L'altro sistema si riduca ad una sola forza elettromotrice $E_k(t)$ posta nel ramo k e del resto variabile, in modo qualunque. La (21) diventa, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle :

$$(24) \quad \int_0^t E_k(t-\tau) I_h(\tau) d\tau = \int_0^t I_h(\tau) d\tau$$

da cui derivando :

$$(25) \quad I_h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t E_k(t-\tau) I_h(\tau) d\tau = E_k(0) I_h(t) + \int_0^t \frac{d}{dt} (E_k(t-\tau)) I_h(\tau) d\tau$$

l'ultimo passaggio è però lecito solo nel caso in cui $E_k(t-\tau)$ sia derivabile.

La (25) permette, conforme a quanto si è annunciato nell'introduzione, il calcolo della corrente I_h nel ramo h generato da una qualsiasi forza elettromotrice posta nel ramo k , quando sia nota la corrente in k dovuta a una forza elettromotrice costante e unitaria posta in h ; supponendo però, in ambedue i casi, nulle le condizioni iniziali.

8. Supponiamo ora che il sistema delle E'_h si riduca ad una sola forza elettromotrice alternata, di ampiezza unitaria. Per evitare calcoli complicati ricorremo al seguente artificio. Porremo :

$$(26) \quad E'_h = e^{j(\omega t + \gamma)} = \cos(\omega t + \gamma) + j \sin(\omega t + \gamma)$$

dove ω , γ sono costanti, j , come si usa in elettrotecnica, è l'unità immaginaria.

LAPLACE all'equazione ora scritta. Si ha infatti per il teorema del prodotto integrale :

$$\int_0^\infty e^{-p't} G(t) dt \cdot \int_0^\infty e^{-p''t} f(t) dt = 0.$$

Ossia essendo $G(t) \neq 0$.

$$\int_0^\infty e^{-p''t} f(t) dt = 0$$

e per il teorema di LERCH :

$$f(t) = 0.$$

Questa forza elettromotrice è, per la presenza dell'immaginario, fittizia, comunque intenderemo per corrente I_k generata da E_k nel ramo k , le soluzioni delle (4) e (5) in cui le forze elettromotrici hanno il valore (26) e le condizioni iniziali sono nulle. Però, per la linearità delle suddette equazioni, si potrà scrivere:

$$(27) \quad I_k = I_1 + jI_2$$

dove I_1 e I_2 sono le correnti nel ramo k dovute alle forze elettromotrici (reali) $\cos(\omega t + \gamma)$ e $\sin(\omega t + \gamma)$ poste in h .

Applichiamo allora la (21), supponendo che il primo sistema di forze elettromotrici si riduca, come nel numero precedente, ad una sola forza reale E_k , variabile in modo qualunque e ammettendo, s'intende, nulle le condizioni iniziali.

Si ha subito:

$$(28) \quad \int_0^t E_k(t - \tau) I_k(\tau) d\tau = e^{j(\omega t + \gamma)} \int_0^t e^{-j\omega\tau} I_h(\tau) d\tau.$$

Derivando questa equazione otteniamo:

$$(29) \quad \frac{d}{dt} \int_0^t E_k(t - \tau) I_k(\tau) d\tau = j\omega e^{j(\omega t + \gamma)} \int_0^t e^{-j\omega\tau} I_h(\tau) d\tau + e^{j\gamma} I_h(t)$$

da cui tenendo presente (28):

$$(30) \quad I_h(t) = e^{-j\gamma} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t E_k(t - \tau) I_k(\tau) d\tau - j\omega \int_0^t E_k(t - \tau) I_k(\tau) d\tau \right).$$

Da questa formula nota I_k cioè I_1 e I_2 si può calcolare la corrente nel ramo h . Ma si può dimostrare che basta la conoscenza di I_1 per determinare I_2 , quindi I_k e, per la (30), I_h .

A questo scopo si osservi che $I_h(t)$ corrente generata da una forza elettromotrice reale deve essere reale. Perciò sarà nulla la parte immaginaria a secondo membro di (30). Sostituiamo perciò in questa equazione la (27) e separiamo la parte reale dalla immaginaria. Si ha, dopo facili calcoli:

$$(31) \quad \begin{aligned} I_h(t) = & \frac{d}{dt} \int_0^t E_k(t - \tau) (\cos \gamma I_1(\tau) + \sin \gamma I_2(\tau)) d\tau - \\ & - \omega \int_0^t E_k(t - \tau) (\sin \gamma I_1(\tau) - \cos \gamma I_2(\tau)) d\tau + \\ & + j \frac{d}{dt} \int_0^t E_k(t - \tau) (\cos \gamma I_2(\tau) - \sin \gamma I_1(\tau)) d\tau - \\ & - j\omega \int_0^t E_k(t - \tau) (\cos \gamma I_1(\tau) + \sin \gamma I_2(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Ora, tenendo presente l'equazione ⁽²⁰⁾

$$(32) \quad \frac{d}{dt} \int_0^t E_k(t-\tau) (\cos \gamma I_2(\tau) - \sin \gamma I_1(\tau)) d\tau = \int_0^t E_k(t-\tau) \left(\cos \gamma \frac{dI_2}{d\tau} - \sin \gamma \frac{dI_1}{d\tau} \right) d\tau$$

e che la parte immaginaria di (31) deve essere nulla si ottiene:

$$(33) \quad \int_0^t E_k(t-\tau) \left(\cos \gamma \left(\frac{dI_2}{d\tau} - \omega I_1 \right) - \sin \gamma \left(\frac{dI_1}{d\tau} + \omega I_2 \right) \right) d\tau = 0.$$

Da cui:

$$(34) \quad \cos \gamma \left(\frac{dI_2}{d\tau} - \omega I_1 \right) - \sin \gamma \left(\frac{dI_1}{d\tau} + \omega I_2 \right) = 0.$$

Da questa equazione si ricava facilmente I_2 nota I_1 . Supponiamo dapprima $\cos \gamma \neq 0$ si ha:

$$(35) \quad \frac{dI_2}{d\tau} = \omega \tan \gamma I_2 + \tan \gamma \frac{dI_1}{d\tau} + \omega I_1$$

da cui, tenendo presente $I_2(0) = 0$ si ha:

$$(36) \quad I_2(t) = \int_0^t e^{\omega \tan \gamma (t-u)} \left(\tan \gamma \frac{dI_1}{du} + \omega I_1 \right) du$$

dove u è una nuova variabile d'integrazione. Integrando per parti si ha:

$$(37) \quad I_2(\tau) = \tan \gamma I_1(\tau) + \omega \int_0^\tau \frac{e^{\omega \tan \gamma (t-u)}}{\cos^2 \gamma} I_1(u) du.$$

La (37) si semplifica notevolmente quando $\gamma = 0$. Si ha allora:

$$(38) \quad I_2(\tau) = \omega \int_0^\tau I_1(u) du.$$

Se invece $\cos \gamma = 0$ e per esempio $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (ad analoghi risultati si giunge

⁽²⁰⁾ Per provare questa equazione del resto ben nota basterà dimostrare che:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \int_0^t E_k(t-\tau) I_2(\tau) d\tau = \int_0^t E_k(t-\tau) \frac{dI_2}{d\tau} d\tau$$

perchè in modo analogo si procede per l'altro termine a primo membro di (31).

Si osservi intanto che per le proprietà del prodotto integrale (GHIZZETTI, pag. 30)

$$\int_0^t E_k(t-\tau) I_2(\tau) d\tau = \int_0^t E_k(\tau) I_2(t-\tau) d\tau$$

e poichè per le (4) (cfr. anche A. C. O. pag. 384) $I_2(t-\tau)$ è derivabile, e $I_2(0) = 0$ si ha derivando l'ultima equazione:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t E_k(t-\tau) I_2(\tau) d\tau = \int_0^t E_k(\tau) \frac{dI_2(t-\tau)}{dt} d\tau$$

e posto $t-\tau = v$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t E_k(t-\tau) I_2(\tau) d\tau = \int_0^t E_k(t-v) \frac{dI_2}{dv} dv$$

e allora sostituendo a v , τ si ottiene subito la (1).

se $\gamma = \frac{3}{2}\pi$ si ha subito dalle (34):

$$(39) \quad I_2 = -\frac{1}{\omega} \frac{dI_1}{d\tau}.$$

In questo caso, con una integrazione per parti, si ottiene, supponendo però E_k derivabile:

$$(40) \quad \begin{aligned} \int_0^t E_k(t-\tau) I_2(\tau) d\tau &= -\frac{1}{\omega} \int_0^t E_k(t-\tau) \frac{dI_1}{d\tau} d\tau = \\ &= -\frac{1}{\omega} E_k(0) I_1(t) - \frac{1}{\omega} \int_0^t \frac{dE_k(t-\tau)}{dt} I_1(\tau) d\tau \end{aligned}$$

e sostituendo sulla (31):

$$(41) \quad I_h(t) = -\frac{1}{\omega} E_k(0) \frac{dI_1}{dt} - \frac{1}{\omega} \int_0^t \frac{dE_k(t-\tau)}{dt} \frac{dI_1(\tau)}{d\tau} d\tau - \omega \int_0^t E_k(t-\tau) I_1(\tau) d\tau.$$

Questa formula o la (31) (assieme alle (37) o (38)) permettono — almeno in linea concettuale — di risolvere il risultato accennato alla fine del primo paragrafo, cioè il calcolo della corrente nel ramo h dovuta ad una forza elettromotrice posta nel ramo k , qualora sia nota la corrente in k dovuta alla fase elettromotrice alternativa $\cos(\omega t + \gamma)$ inserita nel ramo h .