

# Premesse topologiche allo studio dei fasci reali di curve algebriche sopra una superficie algebrica reale.

Memoria di LUIGI BRUSOTTI (a Pavia).

**Sunto.** - *Si costruisce una teoria topologica dei fasci di curve grafiche sopra una superficie, in vista delle applicazioni che essa può trovare nello studio dei fasci reali di curve algebriche sopra una superficie algebrica reale, di tali applicazioni facendo pur breve cenno.*

In alcuni miei precedenti lavori <sup>(1)</sup> ho studiato i fasci reali di curve piane algebriche in relazione colla teoria topologica dei fasci di curve grafiche del piano proiettivo.

Tali studi trovano una loro naturale estensione in quelli concernenti i fasci reali di curve algebriche sopra una superficie algebrica reale, come già prova un mio breve saggio dedicato ai fasci reali di curve algebriche sopra una quadrica reale <sup>(2)</sup>.

Ma a più ampi sviluppi giovano alcune premesse topologiche di cui appunto ho inteso occuparmi nella presente Memoria.

Sorgono analogie ed interferenze con ricerche rivolte ai più vari scopi, come quelle di A. CAYLEY e di J. C. MAXWELL sulla configurazione del tereno <sup>(3)</sup>, quelle di H. POINCARÉ sulle curve definite da un'equazione diffe-

---

<sup>(1)</sup> L. BRUSOTTI, *a) Discriminanti e fasci nella topologia proiettiva del piano* [Rend. R. Ist. Lomb., (2), 51 (1918), pag. 367-373]; *b) Esistono fasci di curve piane d'ordine  $n$  a punti-base e centri critici tutti reali* [Ibid., pag. 612-618]; *c) Sui fasci di curve grafiche* (lit.) [Succ. Bruni, Pavia 1919, pag. 1-204]; *d) Un teorema sui fasci reali di curve algebriche* [Rend. R. Acc. Lincei, (5), 28 (1919), pag. 251-253]; *e) Sulle curve piane algebriche reali prive di punti reali* [Ibid., pag. 322-324]; *f) Sopra un notevole fascio reale di cubiche piane* [Rend. R. Ist. Lomb., (2), 53 (1920), pag. 188-192]; *g) Sui centri critici di un fascio reale di curve piane algebriche* [Atti R. Ist. Veneto, 80 (1920-21), P. 2<sup>a</sup>, pag. 791-820]; *h) Sui fasci reali di cubiche piane dotati di un solo punto-base reale* [Note e Memorie di Matematica (Catania), 1 (1921), pag. 242-244].

Sui fasci reali di cubiche piane sono pure da ricordarsi: J. E. WRIGHT, *Nodal cubics through eight given points* [Proc. London Math. Soc., (2), 6 (1908), pag. 52-57]; H. MOHRMANN, *Ueber das Büschel von ebenen Kurven 3. Ordnung mit neun reellen Grundpunkte* [Math. Ann., 74 (1913), pag. 319-340].

<sup>(2)</sup> L. BRUSOTTI, *Fasci reali di curve algebriche sopra una quadrica reale* [Rend. R. Ist. Lomb., (2), 72 (Scienze, 1938-39), pag. 3-9].

<sup>(3)</sup> A. CAYLEY, *On Contour and slope Lines* [Philosophical Magazine, (4), 18 (1859), pag. 264-268, oppure *Collected Mathematical Papers*, 4 (Cambridge 1891), pag. 108-111]; J. C. MAXWELL, *On Hills and Dales* [Philosophical Magazine, (4), 40 (1870), pag. 421-427, oppure *Scientific Papers*, 2 (Cambridge 1890), pag. 233-240].

A questi possono raccostarsi i lavori di J. C. BARRÉ DE SAINT VENANT, di J. BOUSSINESQ,

renziale <sup>(4)</sup>, quelle di W. DYCK <sup>(5)</sup> sull'interpretazione topologica della caratteristica di un sistema di funzioni introdotta da L. KRONECKER <sup>(6)</sup>, quelle infine dei moderni cultori del « Calcolo delle variazioni in grande » <sup>(7)</sup>.

Ho peraltro preferito una trattazione indipendente da tali ricerche e commisurata al fine, che mi propongo, di applicarla allo studio dei fasci reali di curve algebriche.

### § 1. I continui $\psi$ aperti e serrati <sup>(8)</sup>.

1. Si consideri in un piano il continuo aperto  $\eta$  dei cerchi concentrici di raggio  $r$ , con :

$$(1) \quad a < r < b, \quad (a > 0).$$

Ogni continuo di circuiti omeomorfo a quello (qualunque sia lo spazio di appartenenza) si dirà un continuo  $\psi$  aperto.

di C. JORDAN, e di C. SOMIGLIANA. Cfr., anche per citazioni, C. SOMIGLIANA, *Sur une classification des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables* [Annales École Norm. Sup., (3), 31 (1914), pag. 87-97, oppure *Memorie scelte* (Torino 1936) pag. 395-406]; e, per ulteriori indicazioni, A. COMESSATTI, *Geometria descrittiva ed applicazioni*, in L. BERZOLARI, G. VIVANTI e D. GIGLI, *Enciclopedia delle Matematiche elementari*, 2<sub>2</sub> (Milano, 1938), pag. 307-375, a pag. 363.

<sup>(4)</sup> H. POINCARÉ, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* [Journal de Mathématiques, (3), 7 (1881), pag. 375-442, specialmente pag. 394-409, oppure *Oeuvres*, 1 (Paris 1928), pag. 3-84, specialmente pag. 20-33]; *Sur les courbes définies par une équation différentielle* [Journal de Mathématiques, (4), 1 (1885), pag. 167-244, specialmente pag. 203-208, oppure *Oeuvres*, 1 (Paris 1928), pag. 90-158, specialmente pag. 121-125]. Sull'argomento cfr. pure le comunicazioni nei Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 90 (1880), pag. 673-675; 98 (1884), pag. 287-289 [oppure *Oeuvres*, 1, pag. 1-2; pag. 87-89].

<sup>(5)</sup> W. DYCK, *Beiträge zur Analysis situs, I Aufsatz, Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten* [Math. Ann., 32 (1888), pag. 457-512, specialmente pag. 501, form. (26)]; *II Aufsatz, Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen* [Math. Ann., 37 (1890), pag. 273-316].

<sup>(6)</sup> L. KRONECKER, *Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variablen* [Monatsberichte der K. Preussische Akademie der Wissenschaften, 1869, pag. 159-193, pag. 688-698, oppure *Werke*, 1 (Leipzig 1896), pag. 175-212, pag. 213-226; *Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen* [Monatsberichte (cit), 1873, pag. 117-154, oppure *Werke*, 1 (cit) pag. 303-348]; *Ueber Sturm'sche Functionen* [Monatsberichte (cit), 1878, pag. 95-121, oppure *Werke*, 2 (Leipzig 1897), pag. 37-70]; *Ueber die Charakteristik von Function-Systemen* [Monatsberichte (cit), 1878, pag. 145-152, oppure *Werke*, 2 (cit), pag. 71-82].

<sup>(7)</sup> Vedansi perciò: M. MORSE, *The calculus of variations in the large* (New York 1934), specialmente pag. 142-191; H. SEIFERT und W. THRELFALL, *Variationsrechnung im Grossen* (Leipzig und Berlin 1938), specialmente pag. 21-28; ed i lavori di A. B. BROWN, H. HOPF, F. JOHN, T. H. KIANG, M. MORSE, D. E. RICHMOND, W. M. WHYBURN, ..., citati nella bibliografia annessa al trattato di M. MORSE (pag. 359-366).

<sup>(8)</sup> L'attributo « serrato » è qui usato nel senso introdotto in circostanze analoghe da F. SEVERI.

Dal continuo  $\eta$  aperto si può passare ad un continuo  $\eta$  serrato, sostituendo alla (1) la :

$$(2) \quad a \leq r \leq b,$$

ed, estendendo l'omeomorfismo, si può così serrare anche il continuo  $\psi$ .

Ma saranno qui introdotti anche continui  $\psi$  serrati con « estremi » che non siano circuiti privi di punti multipli.

I tipi che si presenteranno per un estremo sono i seguenti :

I. Circuito privo di punti multipli.

II. Circuito dotato di punto nodale (*intreccio*).

III. Coppia di circuiti privi di punti multipli e secantisi in un punto (*incrocio*).

IV. Punto.

2. Si passi ora ad uno studio più approfondito dei singoli tipi di estremo.

Per il tipo IV vedasi Fig. 1, ove sono tracciati circuiti del continuo  $\psi$  prossimi all'estremo.

Per i tipi rimanenti occorrono distinzioni ulteriori.

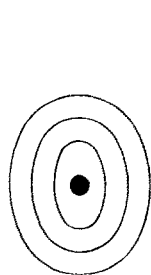


Fig. 1

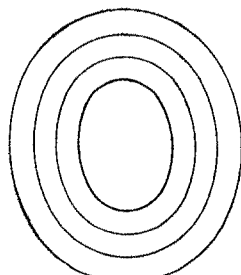


Fig. 2

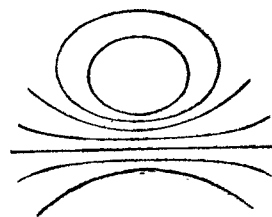


Fig. 3

Così per il tipo I si hanno due alternative, secondo che il circuito estremo, come forma-limite di quello corrente, sia da contarsi :

I<sub>a</sub>. Una volta (Fig. 2).

I<sub>b</sub>. Due volte (Fig. 3).

Invece il tipo II, per il quale è da tenersi presente che il circuito dotato di punto nodale si può decomporre in due circuiti parziali, dà luogo a tre casi, in quanto la forma limite del circuito corrente può essere costituita :

II<sub>a</sub>. Dal circuito totale contato una volta (Fig. 4).

II<sub>b</sub>. Dai due circuiti parziali contati l'uno una volta, l'altro due volte (Fig. 5).

II<sub>c</sub>. Dal circuito totale contato due volte (Fig. 6).

E per il tipo III si hanno pure tre casi, potendo la forma limite del circuito corrente essere costituita :

III<sub>a</sub>. Dalla coppia estremo contata una volta (Fig. 7).

III<sub>b</sub>. Dalla coppia estremo contata due volte secondo il percorso (Fig. 8)

$$OAA'OB B'OAA'OB'B.$$

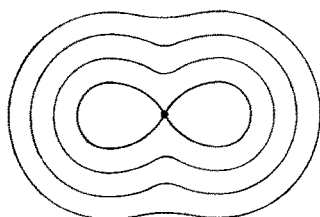


Fig. 4

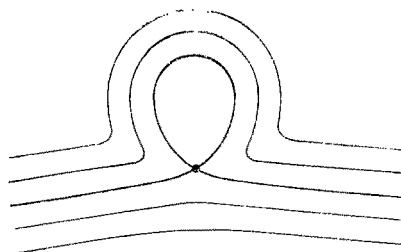


Fig. 5

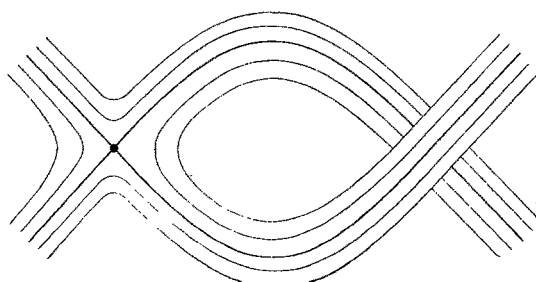


Fig. 6

III<sub>c</sub>. Dalla coppia estremo contata due volte secondo il percorso (Fig. 9):

$$OAA'OB B'OA'AOB'B.$$

Con  $O$  si è indicato il punto comune ai due circuiti della coppia, con  $A, A'$  (risp.  $B, B'$ ) si sono indicati punti del primo (risp. del secondo) circuito.

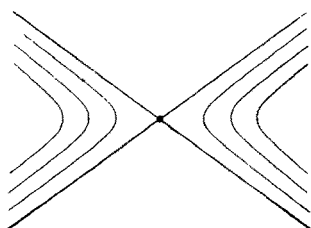


Fig. 7

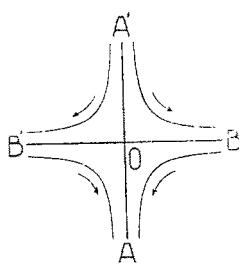


Fig. 8

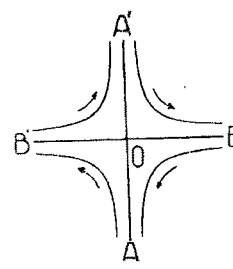


Fig. 9

## § 2. Il fascio $\varphi$ di circuiti privo di punti-base sopra una superficie $\Sigma$ .

3. I circuiti di un continuo  $\varphi$  serrato si possono rappresentare coi punti di un « segmento » (cellula unidimensionale), essendo gli estremi di questo le immagini degli estremi del continuo  $\varphi$ .

Si consideri allora un *singramma*  $S$ , i cui vertici siano d'ordine  $\leq 3$  <sup>(9)</sup>.

Ogni spigolo si interpreti come immagine di un continuo  $\psi$  ed un vertice  $V$  come immagine di un estremo, il quale (in un senso che sarà precisato) risulti totalmente o parzialmente comune ai continui  $\psi$  rappresentati dagli spigoli uscenti da  $V$ ; ma fra i continui  $\psi$  non intervengano interferenze all'infuori di quelle così stabilite (s'intende astrattamente o, se si vuole, colla

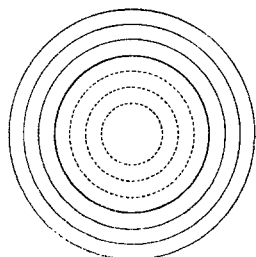


Fig. 10

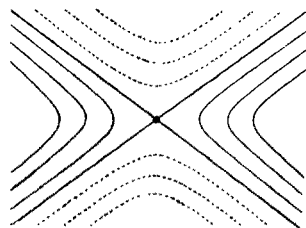


Fig. 11

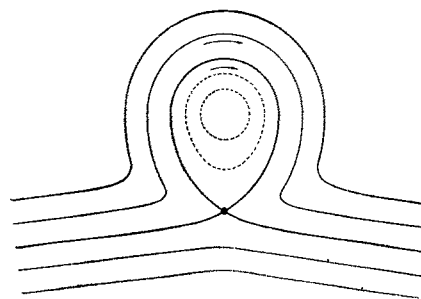


Fig. 12

convenzione che eventuali interferenze in un modello si considerino come non esistenti).

Precisamente, in  $S$ , un vertice d'ordine uno (vertice terminale) sia immagine di un estremo d'uno dei tipi  $I_b$ ,  $II_c$ ,  $III_b$ ,  $III_c$ ,  $IV$ .

Un vertice d'ordine due sia immagine di un estremo di tipo  $I_a$  o  $III_a$ , comune ai due continui nel modo illustrato dalle Fig. 10 ed 11, in cui i circuiti di uno dei due continui sono segnati con tratto punteggiato; oppure di un circuito dotato di punto nodale, essendo la coppia di circuiti parziali diversamente contati estremo di tipo  $II_b$  per uno dei continui  $\psi$  ed un circuito

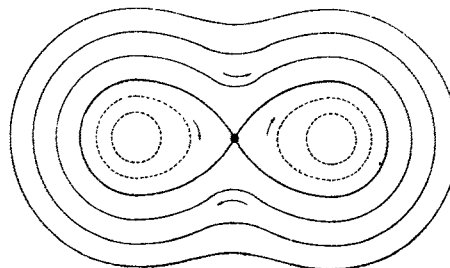


Fig. 13

parziale estremo di tipo  $I_a$  per l'altro continuo  $\psi$ , nel modo illustrato da Fig. 12.

Infine un vertice d'ordine tre sia immagine di un circuito dotato di punto nodale, essendo il circuito totale estremo di tipo  $II_a$  per uno dei tre continui  $\psi$  ed i due parziali estremi di tipo  $I_a$  risp. per i rimanenti due, come è illustrato da Fig. 13.

<sup>(9)</sup> «Singramma» è qui introdotto come equivalente italiano di *Streckencomplex* o *Graph* degli autori tedeschi, di *graph* degli anglosassoni, di *réseau* dei francesi.

Per le proprietà più elementari dei singrammi cfr. M. DEHN und P. HEEGAARD, *Analysis situs*, in *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*,  $\mathfrak{3}_1$ , pag. 153-220, specialmente pag. 171-178. Per un'esposizione più larga cfr. D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig 1936).

Qui tacitamente si suppone che vertici e spigoli del singramma siano in numero finito.

4. Il sistema  $\varphi$  di circuiti così costruito copre una superficie  $\Sigma$ , priva di singolarità e di orli, connessa se è connesso  $S$ , composta di più superficie connesse qualora di altrettanti singrammi connessi sia composto  $S$ .

Per un punto  $P$  di  $\Sigma$  passa un solo circuito di  $\varphi$ , quando si escludano i punti d'incrocio per cui ne passano due ed i punti isolati per i quali il circuito degenera in un punto; il punto  $P$  è semplice per il circuito (od i circuiti) cui appartiene, fatta eccezione per i punti d'intreccio.

Perciò  $\varphi$  si dirà un *fascio di circuiti sulla  $\Sigma$ , privo di punti-base, topologicamente generico* [dicendosi « punto-base » di un sistema un punto per cui ne passino infiniti circuiti e l'attributo « generico » riferendosi all'esclusione di singolarità superiori <sup>(10)</sup>].

Reciprocamente, sopra una superficie priva di singolarità e di orli, un fascio di circuiti, privo di punti-base, topologicamente generico, cioè un sistema di circuiti soddisfacente alle condizioni ora esposte, può interpretarsi come un sistema  $\varphi$  composto di continui  $\psi$  nel modo disciplinato da un singramma  $S$ , in conformità ai criteri adottati.

I punti d'intreccio e d'incrocio e quelli isolati si diranno *centri critici* <sup>(11)</sup> del fascio ed il loro numero s'indicherà costantemente con  $c$ .

Si distinguerà fra *centri critici nodali* (d'intreccio e d'incrocio) e *centri critici isolati*, indicandone risp. il numero con  $c'$  e con  $c''$ .

5. Sorge il problema di *individuare  $\varphi$  a meno di omeomorfismi*.

Giova la conoscenza del singramma  $S$ , ma non basta, come subito risulta dalla varia interpretazione ammessa per i vertici.

Convorrà dunque intanto introdurre, per ciascuno di questi, indicazioni atte a determinare il corrispondente tipo di estremo per i continui  $\psi$  rappresentati dagli spigoli ivi concorrenti.

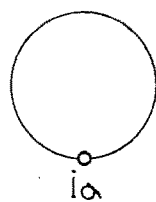


Fig. 14

Data l'unicità del tipo, tale indicazione sarà apposta al vertice, quando questo sia d'ordine  $\leq 3$ , esclusi i vertici d'ordine due rispondenti al terzo caso.

Ma invece per ciascun vertice d'ordine due del terzo caso dovrà segnalarsi quale dei due spigoli ivi concorrenti rappresenti il continuo  $\psi$  cui compete l'estremo di tipo  $II_b$  (anzichè  $I_a$ ) e per ciascun vertice d'ordine tre quale dei tre spigoli ivi concorrenti rappresenti il continuo  $\psi$  cui compete l'estremo di tipo  $II_a$  (anzichè  $I_a$ ) e tale notazione si apporrà allo spigolo in prossimità del vertice.

Le indicazioni stabilite non sono però sempre sufficienti a caratterizzare  $\varphi$ .

Basti considerare l'esempio offerto dal singramma di Fig. 14, il quale

<sup>(10)</sup> Per l'intervento dei punti-base cfr. § 4; per quello di singolarità superiori cfr. § 6.

<sup>(11)</sup> La denominazione « centro critico » introdotta nel caso algebrico da A. CAYLEY, è stata da me usata in senso topologico. Cfr. A. CAYLEY, *On the theorie of involution* [Trans. Cambridge Phil. Soc., 11, P. 1 (1886), pag. 21-33; oppure *Collected Mathematical Papers*, 5 (Cambridge 1892), pag. 295-312]; L. BRUSOTTI, (4), c), pag. 71.

ammette per  $\varphi$  due interpretazioni topologicamente distinte, a seconda che il circuito orientato, che descrive  $\varphi$  a partire da una posizione iniziale, ritorni a questa coll'orientamento iniziale o coll'opposto.

Ed allora occorrono complementi; ma di questi si dirà nei num. seguenti, 6 e 7.

6. Si supponga per semplicità il singramma  $S$  connesso, avvertendo che in caso contrario le considerazioni qui svolte possono riferirsi ai singoli singrammi connessi componenti.

L'ordine di connessione del singramma  $S$  è:

$$(3) \quad z = \beta_1 - \beta_0 + 1,$$

ove con  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  si indichi il numero risp. dei vertici e degli spigoli di  $S$ .

Se con  $t$  si indica il numero dei continui  $\psi$  costituenti  $\varphi$  e con  $g$  il numero dei circuiti  $\gamma$  non contenenti centri critici ma aventi ufficio d'estremi, sarà:

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} \beta_0 = c + g, \\ \beta_1 = t, \end{array} \right\}$$

onde:

$$(5) \quad z = t - g - c + 1.$$

È però da osservarsi che i circuiti  $\gamma$  estremi di tipo  $I_a$  possono eliminarsi fondendo in un solo due continui  $\psi$  consecutivi, quando si escluda il caso di un fascio  $\varphi$  cui corrisponda un singramma del tipo di Fig. 14.

Si avverta ora che, quando il punto-immagine percorrendo il singramma attraversa un vertice, corrispondentemente in  $\varphi$  il circuito, che si suppone orientato, attraversa un estremo; e, se questo non è un circuito  $\gamma$ , nasce una discontinuità che pone il quesito sulla possibilità di un raccordo continuo fra gli orientamenti precedente e seguente.

Se si escludono gli incroci di tipo  $III_a$ , tale raccordo è possibile come risulta dalle piccole frecce introdotte in Fig. 12 e 13.

Per il tipo  $III_a$  l'orientamento dei due circuiti componenti l'incrocio può dar luogo a  $2 \times 2 = 4$  scelte, delle quali due son tali che ciascuna possa raccordarsi per continuità con un certo orientamento del circuito precedente l'incrocio e le altre due si comportano similmente col seguente. Precisamente il passaggio da un orientamento del circuito precedente ad uno qualunque del seguente esige una discontinuità di orientamento su uno (ed uno solo) dei due componenti l'incrocio.

La scelta dell'orientamento per il circuito seguente è dunque ambigua, ma un cambio di scelta corrisponde ad uno scambio fra i due circuiti componenti l'incrocio, inessenziale nella identificazione topologica di  $\varphi$ .

Si può togliere l'ambiguità formale ordinando in ciascun estremo di tipo  $III_a$  i due circuiti dell'incrocio (cosicchè possa distinguersi fra un primo e

secondo circuito), indi convenendo di stabilire il raccordo degli orientamenti per quanto riguarda il primo.

7. Dopo ciò si rammenti che nel singramma  $S$  (connesso) è possibile sopprimere  $z$  spigoli in modo che la parte residua sia un *albero* (cioè un singramma connesso d'ordine di connessione nullo) i cui vertici siano quelli di  $S$ . Così, soppressi  $z$  spigoli  $\tau$ , sia  $T$  l'albero residuo.

Fissato un punto  $O$  interno ad uno spigolo di  $T$ , comunque se ne assuma un altro  $M$ , pure interno ad uno spigolo di  $T$ , è unico il percorso (senza ripetizioni) che, utilizzando spigoli di  $T$ , da  $O$  conduca ad  $M$ .

Saranno  $O$  ed  $M$  immagini di circuiti,  $\omega$  e  $\mu$ , generici di  $\varphi$  e, mantenute le convenzioni del num. prec., ne seguirà che fissato in  $\varphi$  l'orientamento di  $\omega$ , risulta pure individuato per continuità quello di  $\mu$ .

Invece un punto  $N$  (immagine di  $\nu$ ) interno ad uno degli spigoli  $\tau$ , può, a partire da  $O$ , raggiungersi in due distinti modi con un percorso pertinente a  $T$ , integrato da un segmento di quello spigolo  $\tau$ , onde a  $\nu$  spettano per continuità due distinti orientamenti che possono risultare o concordi o discordi.

Si distinguano i due casi contrassegnando lo spigolo risp. col segno  $+$  o  $-$ ; così contrassegnati gli  $z$  spigoli  $\tau$ , sarà individuato a meno di omeomorfismi  $\varphi$ .

Mutando la scelta dell'origine  $O$  o l'orientamento del circuito  $\omega$ , i segni permangono.

Può invece mutare taluno dei segni quando si scambino fra loro i due circuiti di qualcuno fra gli incroci  $III_a$ .

Se però uno spigolo  $\tau$  fa parte entro  $S$  di un circuito esente da vertici immagini di incroci  $III_a$ , la segnatura è, per tale spigolo, certamente essenziale, nel senso che essa risulta od individuata od almeno vincolata, negli eventuali mutamenti, a quella di altri spigoli  $\tau$ .

Nel caso eccezionale in cui  $T$  riducasi all'unico vertice di  $S$ , l'unico spigolo di  $S$ , è spigolo  $\tau$  ed interni ad esso si assumeranno  $O$  ed  $N \neq O$ , procedendo ancora alla segnatura di  $\tau$ .

Un singramma  $S$  ai cui vertici siano apposte le indicazioni descritte al num. 5 e di cui  $z$  spigoli  $\tau$  siano, quando occorra, contrassegnati, si dirà brevemente un *singramma annotato*.

Ed allora (estesi, come è lecito, nomenclatura e risultati anche ai singrammi non connessi) concludendo si avrà:

*Un fascio  $\varphi$  di circuiti privo di punti-base e topologicamente generico è individuato a meno di omeomorfismi da un suo singramma annotato.*

E con ciò si può intendere che, assunto comunque un singramma (i cui vertici siano al più d'ordine tre) e debitamente annotato, sempre esiste ed è, a meno d'omeomorfismi, unico il corrispondente fascio  $\varphi$ .

Invero, costruiti, secondo le annotazioni, gli opportuni continui  $\psi$ , se ne possono connettere gli estremi in conformità alla struttura del singramma ed



eventualmente alle segnature, tale connessione riducendosi astrattamente a stabilire fra circuiti totali o parziali opportuni omeomorfismi.

Il fascio però non individua il suo singramma annotato, perchè la scelta degli spigoli  $\tau$  in  $S$  od in ciascuna sua parte connessa, e le modalità della relativa eventuale segnatura non sono di regola univoche.

### § 3. I caratteri topologici del fascio $\varphi$ privo di punti-base in relazione con quelli della superficie $\Sigma$ .

8. Il presente § è inteso a caratterizzare a meno di omeomorfismi una superficie  $\Sigma$ , partendo dalla conoscenza dei caratteri topologici di un fascio  $\varphi$  di circuiti, privo di punti-base (e topologicamente generico), su di essa tracciato, ossia (num. 7) da quella del relativo singramma annotato.

Per semplicità si supponrà il singramma connesso, quindi (num. 4) connessa la  $\Sigma$ , avvertendo che in caso contrario le considerazioni si intendono applicate a ciascuna delle componenti connesse di  $\Sigma$  e corrispondentemente a ciascuno dei singrammi connessi componenti il dato.

Dopo ciò sulla  $\Sigma$  si assumano le  $t$  regioni  $R$  coperte dai singoli continui  $\phi$  costituenti  $\varphi$  e su ciascuno dei  $g$  circuiti  $\gamma$  non contenenti centri critici ma aventi ufficio di estremi per almeno un continuo  $\phi$  si segni un punto  $G$ .

Dicansi complessivamente punti  $Q$  i  $c$  centri critici di  $\varphi$  ed i  $g$  punti  $G$ , indi si osservi che il contorno di una regione  $R$  consta di due parti (taluna delle quali può ridursi ad un punto isolato) e che su ciascuna delle due parti giace un punto  $Q$ .

Sopra ognuna delle  $t$  regioni  $R$  si congiungano i due punti  $Q$  del contorno con un segmento  $\theta$  da interpretarsi come un taglio (e che, se si vuole, può assumersi unisecante i circuiti del corrispondente sistema  $\phi$ ). La  $R$  così tagliata acquista il carattere di un « pezzo » (cellula bidimensionale).

Cosicchè col descritto procedimento si viene a distendere sulla  $\Sigma$  un poliedro le cui facce sono le  $t$  regioni  $R$  in tal modo tagliate ed i cui vertici sono i  $c+g$  punti  $Q$  (quando il termine « poliedro » s'intenda in senso largo, ammettendo facce adiacenti a se stesse e spigoli ad estremi coincidenti).

Riguardo agli spigoli ne provengono:

I. Uno da ciascuno dei  $t$  segmenti  $\theta$ .

II. Uno da ciascuno dei  $g$  circuiti  $\gamma$ , pensato come un segmento cogli estremi coincidenti nel relativo punto  $G$ .

III. Due da ciascuno dei  $c'$  centri critici nodali, quando per un intreccio ciascuno dei circuiti parziali e per un incrocio ciascuno dei circuiti componenti venga interpretato come segmento coi due estremi coincidenti nel centro critico.

Segue che per il poliedro il numero dei vertici, degli spigoli, delle facce è risp.:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= c + g = c' + c'' + g, \\ \alpha_1 &= t + g + 2c', \\ \alpha_2 &= t,\end{aligned}$$

onde l'ordine di connessione

$$Z = -\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 + 2$$

di  $\Sigma$  è fornito dalla:

$$(6) \quad Z = c' - c'' + 2.$$

Dalle:

$$(7) \quad \begin{cases} c' + c'' = c \\ c' - c'' = Z - 2, \end{cases}$$

seguono le

$$(8) \quad \begin{cases} c' = \frac{c + Z - 2}{2}, \\ c'' = \frac{c - Z + 2}{2}, \end{cases}$$

talora utili <sup>(12)</sup>.

9. Se il valore di  $Z$  fornito dalla (6) è dispari, la  $\Sigma$  risulta non orientabile e da tale valore caratterizzata a meno di omeomorfismi.

Ma se la (6) per  $Z$  fornisce un valore pari, occorrono rilievi ulteriori per distinguere fra i due casi di  $\Sigma$  orientabile e non orientabile.

La trattazione ha interesse anche per sè e viene quindi svolta indipendentemente dal valore di  $Z$ .

Convieni intanto riprendere in esame quegli estremi di continui  $\psi$  che non siano punti isolati ed indagare per ciascuno dei circuiti che vi intervengono il relativo carattere bilatero od unilatero sulla  $\Sigma$ .

Si trova allora:

I<sub>a</sub>. Unico circuito bilatero (Fig. 2).

I<sub>b</sub>. Unico circuito unilatero (Fig. 3).

II<sub>a</sub>. Circuiti parziali bilateri (Fig. 4).

II<sub>b</sub>. Circuiti parziali uno bilatero l'altro unilatero (Fig. 5).

II<sub>c</sub>. Circuiti parziali unilateri (Fig. 6).

III<sub>a</sub>. Circuiti componenti unilateri (Fig. 7).

III<sub>b</sub>. Circuiti componenti l'uno bilatero l'altro unilatero (Fig. 8).

III<sub>c</sub>. Circuiti componenti bilateri (Fig. 9).

Ora, poichè basta la presenza di un circuito unilatero sulla  $\Sigma$  per garantirne la non orientabilità, segue:

*Se nella struttura di  $\varphi$  intervengono estremi di uno dei tipi*

$$(9) \quad I_b, II_b, II_c, III_a, III_b,$$

*la  $\Sigma$  è non orientabile e, in quanto è tale, caratterizzata a meno di omeomorfismi dal valore di  $Z$ .*

<sup>(12)</sup> Per  $Z=1$ , cioè per il caso del « piano proiettivo », cfr. L. BRUSOTTI, <sup>(4)</sup>, c), p. 90.

Rimane così da esaminarsi il caso in cui figurano soltanto estremi di tipo:

$$(10) \quad I_a, II_a, III_c, IV.$$

In esso, per il relativo singramma, gli eventuali vertici d'ordine pari (d'ordine due) sono tutti e soli quelli rispondenti a circuiti  $\gamma$ ; mentre ciascun vertice d'ordine dispari (uno o tre) corrisponde ad un certo centro critico di  $\varphi$ .

E, poichè in un singramma il numero dei vertici d'ordine dispari è pari <sup>(13)</sup>, così ne scende

$$c = c' + c'' = \text{numero pari}$$

e perciò anche, applicando la (6):

$$Z = c' - c'' + 2 = \text{numero pari,}$$

onde l'ulteriore indagine è sempre qui necessaria.

Essa verrà svolta nel num. seguente.

10. Sia dunque  $\varphi$  un fascio in cui intervengano solo estremi di tipo (10). Poichè fra i tipi (9) esclusi vi è l'incrocio  $III_a$ , così estratto dal relativo singramma  $S$  l'albero  $T$ , la segnatura degli  $z$  spigoli  $\tau$  soppressi è ora sempre essenziale.

Introdotti ancora sugli spigoli  $\tau$  i rispettivi punti  $N$  immagini di circuiti  $\nu$ , si interpretino i punti  $N$  ed i circuiti  $\nu$  risp. come nuovi vertici e come nuovi estremi in  $S$  ed in  $\varphi$ , modificando in conformità il poliedro su  $\Sigma$  disteso.

Indi si tagli  $S$  nei punti  $N$ , traendone un albero  $S'$ , e si tagli  $\Sigma$  lungo i circuiti  $\nu$ , traendone una superficie  $\Sigma'$  dotata di orli.

Dico che  $\Sigma'$  è orientabile.

Intanto a due spigoli del singramma  $S$  modificato aventi in comune un vertice, corrispondono di regola su  $\Sigma$  due facce del poliedro aventi uno ed un solo spigolo comune; fa eccezione, per un vertice d'ordine tre del singramma, la coppia di spigoli immagini dei due continui  $\psi$  aventi per estremi i circuiti parziali del relativo intreccio, trattandosi allora di due facce non già contigue fra loro ma ad una stessa, colla quale ciascuna ha in comune uno ed un solo spigolo.

Però in ogni caso, assunte due facce rispondenti a due spigoli consecutivi del singramma, sempre l'orientamento dell'una individua quello dell'altra, quando nel caso generale si utilizzi la loro mutua contiguità ed in quello eccezionale invece la contiguità alla terza faccia, cui s'attribuisca ufficio di intermediaria.

Ciò posto, si osservi che, assunto uno spigolo dell'albero  $S'$ , ogni altro può essergli collegato con una successione di spigoli (pertinente ad  $S'$  e priva di ripetizioni) in uno ed in un sol modo.

<sup>(13)</sup> Cfr. D. KÖNIG, (9), p. 21.

Se ne trae che, sulla  $\Sigma'$ , fissato l'orientamento per una faccia, questo risulta individuato per ogni altra, appena si utilizzi la successione di facce rispondente a quella di spigoli dianzi introdotta; e ne scende, come volevasi, l'orientabilità di  $\Sigma'$ .

Ripresa ormai la superficie  $\Sigma$ , alle due parti di uno spigolo  $\tau$  del singramma corrispondono attualmente due facce aventi in comune lo spigolo proveniente dal relativo circuito  $v$  e si presentano due alternative secondochè gli orientamenti già stabiliti sulle due facce risultino o concordi o discordi.

In corrispondenza potrà apporsi allo spigolo  $\tau$  risp. il segno  $+$  od il segno  $-$ , procedendo così ad una *seconda segnatura* dell'antico singramma  $S$ .

Se la seconda segnatura di  $S$  consta di soli segni  $+$ , allora  $\Sigma$  risulta (come  $\Sigma'$ ) orientabile.

Se invece, sempre in seconda segnatura, esiste almeno uno spigolo  $\tau$  con segno  $-$ , allora esiste sulla  $\Sigma$  un ciclo di facce che inverte l'indicatrice, onde  $\Sigma$  è non orientabile.

Si può riassumere il risultato conseguito affermando:

*Perchè  $\Sigma$  sia orientabile è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le due condizioni:*

I. *Intervengano solo estremi di tipi (10).*

II. *La seconda segnatura degli spigoli  $\tau$  consti soltanto di segni  $+$*

11. La trattazione del num. prec. richiede però un complemento.

Invero si è qui convenuto di ricondurre ogni proprietà topologica di  $\varphi$  (quindi anche di  $\Sigma$ ) alla sola conoscenza del singramma annotato nel senso di num. 7, ed occorre dunque un criterio atto a dedurne la « seconda segnatura » degli spigoli  $\tau$ .

Si riprendano allora il punto  $O$  ed il circuito  $\omega$  e, sopra uno spigolo  $\tau$ , il punto  $N$ , indi i due cammini che da  $O$  conducono ad  $N$ , utilizzando spigoli di  $T$  e le parti di tale spigolo  $\tau$ .

Allorchè  $M$  percorre un cammino, il corrispondente circuito  $\mu$  si muove su  $\Sigma$  descrivendone una parte, in ciascun punto generico della quale si può introdurre una indicatrice costituita da due frecce uscenti dal punto, una spiccata da un circuito  $\mu$  verso il seguente, l'altra adagiata sul primo in accordo coll'orientamento di questo.

Se  $M$ , percorrendo uno dei due cammini, attraversa un vertice di ordine tre utilizzando due spigoli costituenti coppia eccezionale nel senso del num. prec., tale passaggio si dirà un *ripiegamento*.

Escludasi dapprima l'intervento di ripiegamenti,

Allora l'indicatrice varia con continuità per ciascun cammino.

Di più, in relazione ai due cammini, si hanno all'inizio indicatrici discordi o concordi, secondo che siano essi totalmente distinti o presentino invece un tratto iniziale comune, ed al termine indicatrici discordi o concordi secondo che la prima segnatura comporti segno  $+$  o segno  $-$ .

Se dunque si conviene di indicare risp. con

$$\text{sign } \tau, \text{ sign}^* \tau$$

il segno che compete allo spigolo  $\tau$  in prima od in seconda segnatura e con

$$\text{sign } O$$

il segno  $+$  o  $-$  secondo che i cammini siano totalmente distinti od abbiano tratto iniziale comune, segue nel caso attuale:

$$(11) \quad \text{sign}^* \tau = \text{sign } O \cdot \text{sign } \tau.$$

Ma, se in uno dei cammini s'incontra un ripiegamento, sulla  $\Sigma$  l'indicatrice si inverte, come si rileva da Fig. 15, la quale si riferisce ad un intreccio  $J$  ed è da interpretarsi schematicamente come una doppia proiezione di  $\Sigma$ , cosicchè le singole proiezioni dei circuiti  $\mu$  si presentano in essa come segmenti, mentre le indicatrici debbono entrambe riferirsi ad uno stesso foglio, p. es. il superiore, di  $\Sigma$ .

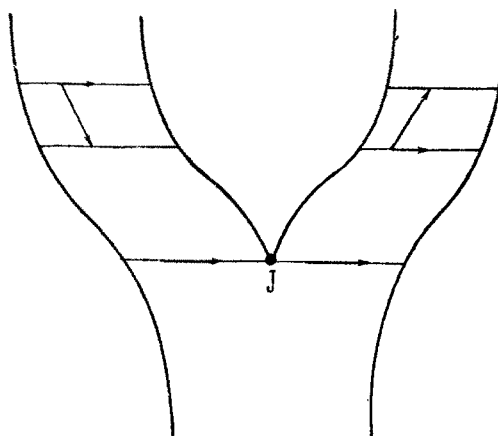


Fig. 15

Se allora è  $r_1$  (risp.  $r_2$ ) il numero dei ripiegamenti del primo (risp. del secondo) cammino, e si pone

$$r = r_1 + r_2,$$

si giunge alla

$$(12) \quad \text{sign}^* \tau = (-1)^r \text{sign } O \cdot \text{sign } \tau,$$

nella quale, per  $r = 0$ , rientra la (11).

Così in ogni caso la semplice ispezione del singramma annotato è sufficiente ad individuare  $\Sigma$  a meno di omeomorfismi.

#### § 4. Il fascio $\varphi$ di circuiti dotato di punti-base.

12. Sopra una superficie  $\Sigma$ , priva di singolarità e di orli, si consideri un fascio  $\varphi$  di circuiti, dotato di punti-base e topologicamente generico, cioè un sistema  $\varphi$  di circuiti tale che per un punto di  $\Sigma$  passi un solo circuito di  $\varphi$  e vi passi semplicemente, fatta eccezione per un numero finito di punti, dei tipi seguenti:

$\alpha$ ) Punti d'intreccio, per ciascuno dei quali il punto è doppio nodale (anzichè semplice) per un circuito di  $\varphi$ , circuito non dotato di ulteriori singolarità.

$\beta$ ) Punti d'incrocio, ciascuno dei quali è semplice (anzichè per uno) per due circuiti di  $\varphi$ , che ivi si attraversino, ma siano privi di singolarità e di ulteriori intersezioni.

$\gamma$ ) *Punti isolati*, per ciascuno dei quali non passa alcun circuito di  $\varphi$ .

$\delta$ ) *Punti-base*, per ciascuno dei quali passano (e semplicemente) infiniti circuiti di  $\varphi$ , che nell'intorno abbiano comportamento omeomorfo a quello delle rette di un fascio nell'intorno del centro <sup>(14)</sup>.

I punti eccezionali dei tipi  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) conserveranno la denominazione di *centri critici* e con

$$c \geq 0$$

si indicherà ancora il loro numero.

Si manterrà la loro distinzione in *nodali* [tipi  $\alpha$   $\beta$ ] ed *isolati* [tipo  $\gamma$ ], sempre denotando con  $c'$ ,  $c''$  i rispettivi numeri.

Si dirà  $b$  il numero dei punti-base e si supporrà generalmente

$$b > 0,$$

il caso  $b = 0$  essendo già trattato nei precedenti paragrafi.

13. Per semplicità di discorso si supponga ancora  $\Sigma$  connessa, d'ordine di connessione  $Z$ .

Siano

$$B_1, B_2, \dots, B_b$$

i punti-base di  $\varphi$  e, con  $\Sigma$ , si consideri la superficie  $\Sigma_0$  che se ne trae interpretando ciascun punto  $B_h$  come un foro circolare infinitesimo sull'orlo del quale si identifichino punti diametralmente opposti.

Di  $\Sigma_0$  si può costruire un modello in cui i  $b$  fori  $B_h$  siano sostituiti da altrettanti circuiti unilateri

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b,$$

privi di singolarità e a due a due non secantisi; ed a tale modello si farà sempre riferimento.

Se sulla  $\Sigma$  si distende un poliedro  $\Pi$  utilizzando i punti  $B_h$  come vertici, si potrà indicare risp. con

$$\alpha_0 + b, \alpha_1, \alpha_2$$

il numero dei vertici, degli spigoli, delle facce di  $\Pi$  e sarà:

$$Z = -\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 - b + 2.$$

Sulla  $\Sigma_0$  viene allora indotto un poliedro  $\Pi_0$  che, prescindendo dagli elementi provenienti dai punti  $B_h$ , possiede  $\alpha_0$  vertici,  $\alpha_1$  spigoli ed  $\alpha_2$  facce, mentre ciascun vertice  $B_h$  dà luogo su  $\beta_h$  ad  $s_h$  vertici ed  $s_h$  spigoli di  $\Pi_0$ , se  $s_h$  è il numero degli spigoli di  $\pi$  concorrenti in  $B_h$  (e se, come è lecito supporre, nessuno di questi ha entrambi gli estremi coincidenti in  $B_h$ , mentre gli  $s_h$  corrispondenti escono da punti distinti di  $\beta_h$ ).

<sup>(14)</sup> Per maggior chiarezza è lecito anzi ricorrere ad un modello per cui  $\Sigma$  sia dotata di piano tangente nel punto-base e ciascuno dei circuiti di  $\varphi$  che vi passano sia ivi dotato di tangente, essendo tali tangenti (tutte distinte) le rette di un fascio.

Ne segue che l'ordine di connessione di  $\Sigma_0$  è:

$$Z_0 = -\alpha_2 + \alpha_1 + \sum_{h=1}^b s_h - \alpha_0 - \sum_{h=1}^b s_h + 2 = -\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 + 2,$$

onde subito scende:

$$(13) \quad Z = Z_0 - b.$$

Ma d'altra parte il fascio  $\varphi$  di  $\Sigma$ , interpretato sulla  $\Sigma_0$ , si traduce in un fascio  $\varphi_0$  privo di punti-base, in quanto circuiti di  $\varphi$  passanti per  $B_h$  si interpretano in  $\varphi_0$  come circuiti unisecanti  $\beta_h$ .

I centri critici, nodali ed isolati, si riproducono in altrettanti di  $\varphi_0$ , e la (6) di num. 8 permette perciò di scrivere:

$$Z_0 = c' - c'' + 2,$$

da cui, per la (13), si deduce:

$$(14) \quad Z = c' - c'' - b + 2.$$

Da questa, per le:

$$(15) \quad \begin{cases} c' + c'' = c, \\ c' - c'' = Z + b - 2, \end{cases}$$

si ricavano le:

$$(16) \quad \begin{cases} c' = \frac{c + b + Z - 2}{2}, \\ c'' = \frac{c - b - Z + 2}{2}. \end{cases}$$

Nelle (14), (15), (16) rientrano, per  $b=0$ , le (6) (7) (8) di num. 8 <sup>(15)</sup>.

OSSERVAZIONE 1<sup>a</sup>. - Dalle (15) segue:

$$(17) \quad b - c \equiv Z \pmod{2},$$

onde sopra una superficie d'ordine di connessione pari (risp. dispari), per un fascio di circuiti topologicamente generico, il numero dei punti-base e quello dei centri critici hanno eguale (risp. diversa) parità.

In particolare ( $b=0$ ), in un fascio di circuiti topologicamente generico e privo di punti-base il numero dei centri critici è pari (risp. dispari) per  $Z$  pari (risp. dispari).

OSSERVAZIONE 2<sup>a</sup>. - Se il fascio è privo di centri critici, colla  $c=0$  si ha pure  $c' = c'' = 0$  e, per la (14), anche

$$Z = 2 - b,$$

onde

$$Z \leq 2.$$

<sup>(15)</sup> Nel caso  $Z=1$  (piano proiettivo) le (14) (15) (16) riduconsi a formule già stabilite in L. BRUSOTTI, (4), c), pag. 164-165.

Si è così condotti ad uno dei tre seguenti casi :

I.  $Z = 0, \quad b = 2$

(di cui è un modello, sulla sfera, il fascio di cerchi meridiani).

II.  $Z = 1, \quad b = 1$

(di cui è un modello, nel piano proiettivo, il fascio di rette).

III.  $Z = 2, \quad b = 0,$

che dà luogo a due alternative rispondenti ai due singrammi annotati (num. 7) di Fig. 16; il primo dei due tipi trova un modello nel fascio dei cerchi meridiani di un toro, mentre l'altro lo trova nell'analogo fascio di circuiti sulla superficie non orientabile di ordine di connessione due. Trattasi dei soli due tipi di fasci privi ad un tempo di punti-base e di centri critici.

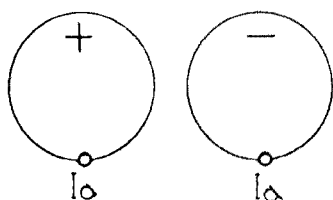


Fig. 16

OSSERVAZIONE 3<sup>a</sup>. - In un fascio di circuiti, topologicamente generico e privo di punti-base, il circuito generico è bilatero, come risulta dalla stessa definizione di continuo  $\psi$  (num. 1).

Se il fascio possiede invece  $b > 0$  punti-base, un circuito generico di esso risulta bilatero od unilatero, secondo che sia pari o dispari il numero dei punti-base giacenti sul circuito stesso.

Per i circuiti in qualche modo eccezionali, in particolare per quelli totali o parziali di intrecci o componenti di incroci, vale una distinzione in casi che può dedursi da quella di num. 9, applicabile a  $\varphi_0$ , coll'avvertenza che nel passaggio da  $\varphi_0$  a  $\varphi$ , il circuito mantiene o muta il proprio carattere, secondo che, in  $\varphi$ , il numero dei punti-base su di esso giacenti sia pari (eventualmente nullo) oppure dispari.

OSSERVAZIONE 4<sup>a</sup>. - È noto che, se  $\Sigma$  non è connessa, si suole assumere per essa come ordine di connessione l'espressione :

$$Z = Z_1 + \dots + Z_m - 2m + 2$$

ove  $Z_1, \dots, Z_m$  siano gli ordini di connessione delle singole componenti connesse (ed  $m$  il loro numero), dopo di che  $Z$  conserva la propria espressione mediante gli elementi di un poliedro su di essa disteso (ma può assumere anche valori negativi) <sup>(16)</sup>.

Ne segue che le (14) (15) (16) ed, in assenza di punti-base, le (6) (7) (8) sono valide anche per fasci  $\varphi$  giacenti sopra superficie  $\Sigma$  non connesse.

Lo stesso dicasi della (17) e dell'intera Oss. 1<sup>a</sup>. Così per l'Oss. 3<sup>a</sup>.

<sup>(16)</sup> Cfr. A. COMESSATTI. *Sulla connessione delle superficie razionali reali* [Annali di Matematica (3), 23 (1914), pag. 215-283. a pag. 238].



Invece il risultato di Oss. 2<sup>a</sup>. va modificato nel senso che per  $c = 0$ , ciascuno dei fasci componenti  $\varphi$ , e giacenti sulle singole componenti connesse di  $\Sigma$ , rientri in uno dei tipi ivi elencati.

14. Se si vuole caratterizzare a meno di omeomorfismi un fascio  $\varphi$  topologicamente generico, dotato di  $b$  punti-base e giacente sopra una superficie  $\Sigma$  (che ancora si supporrà connessa), si potrà intanto così caratterizzare mediante un singramma  $S$  annotato (num. 7) il relativo fascio  $\varphi_0$  sulla  $\Sigma_0$  (num. prec.).

Fissato per un circuito di  $\varphi_0$  l'orientamento, l'annotazione del singramma  $S$  lo determina per ciascun altro di  $\varphi_0$  e l'omeomorfismo fra circuiti di  $\varphi_0$  e di  $\varphi$  lo induce su ogni circuito di  $\varphi$ .

Perchè però tale affermazione non soffra eccezioni, converrà in  $S$ , internamente a ciascun spigolo  $\tau$  segnato con segno  $-$ , introdurre il punto  $N$ , immagine di un circuito  $\nu$ , giungendo al quale, in  $\varphi_0$ , l'orientamento debba subire inversione.

Ad uno spigolo di  $S$  corrisponderà in  $\varphi_0$  un continuo  $\psi$  ed a questo in  $\varphi$  un continuo di circuiti su ciascuno dei quali giacciono gli stessi punti-base nel medesimo ordine ciclico, individuato quando i circuiti si orientino nel modo già convenuto.

Se ancora i punti-base di  $\varphi$  dicansi

$$B_1, B_2, \dots, B_b,$$

ad ogni spigolo di  $S$  potrà apporsi l'indicazione di un *ciclo*

$$(j_1, j_2, \dots, j_w)$$

di indici, intendendosi con ciò che su ciascun circuito del corrispondente continuo si trovino i punti-base

$$B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_w},$$

nell'ordine ciclico scritto, l'assenza di indicazione rispondendo a quella di punti-base ( $w = 0$ )

In armonia con un precedente rilievo a ciascun spigolo  $\tau$  affetto da segno  $-$  si dovranno però apporre successivamente due cicli, l'uno inverso dell'altro (almeno per  $w > 2$ ).

Aggiunta alle precedenti indicazioni quella (appena introdotta) dei cicli, si conserverà (ma ormai in relazione al fascio  $\varphi$ ) la denominazione di « singramma annotato ». E si potrà concludere:

*Un fascio  $\varphi$  di circuiti, dotato di punti-base e topologicamente generico, è individuato a meno di omeomorfismi da un suo singramma annotato.*

15. L'enunciato col quale si chiude il num. prec. può anche intendersi nel senso che, assegnato un singramma  $S$  debitamente annotato, esiste un fascio  $\varphi$  da esso rappresentato.

Ma per affermare ciò occorre qualche considerazione atta a stabilire esplicitamente i criteri ai quali l'annotazione del singramma deve attenersi.

Essi sono i seguenti:

I. L'annotazione anteriore all'introduzione dei cicli  $(j_1, \dots, j_v)$  e riferibile quindi a  $\varphi_0$ , deve assicurare (num. 10 ed 11) la non orientabilità di  $\Sigma_0$ .

II. La apposizione dei cicli  $(j_1, \dots, j_v)$  deve essere fatta in modo che gli spigoli del singramma ai quali sia apposto un ciclo contenente un determinato indice  $j$ , fra gli indici

$$1, 2, \dots, b,$$

formino circuito e che, su  $\Sigma_0$ , le facce, del poliedro costruito col metodo di num. 8, rispondenti ai detti spigoli costituiscano un foglio di MÖBIUS, il che può desumersi dalle annotazioni del singramma, assicuranti la contiguità delle facce ciclicamente successive e l'inversione dell'indicatrice, cogli stessi mezzi usati al num. 11. Invero si può allora solcare il foglio di MÖBIUS con un circuito unilatero unisecante i circuiti di  $\varphi_0$  tracciati nelle regioni  $R$  (num. 8) che, opportunamente tagliate forniscono le facce utilizzate.

III. Supposto [cfr. form. (13)]:

$$b \leq Z_0,$$

sulla  $\Sigma_0$  è a priori possibile tracciare  $b$  circuiti  $\beta_j$  unilateri ( $j = 1, 2, \dots, b$ ) a due a due non secantisi<sup>(17)</sup>; tuttavia perchè tali siano i  $b$  circuiti  $\beta_j$  introdotti in II, i relativi circuiti estratti dal singramma dovranno soddisfare alla condizione che in uno stesso del singramma ne coincidano al più due fra quelli da considerarsi, perchè sulla  $\Sigma_0$  utilizzati i segmenti di un circuito  $\beta_j$  per tagliare le regioni  $R$  in maniera da ridurle a « pezzi » il risultante foglio di MÖBIUS non potrà essere solcato da due distinti circuiti  $\beta_j$  unilateri e non secantisi. Però due circuiti del singramma s'intenderanno distinti anche quando presentino tratti comuni.

IV. Ma, in rapporto agli eventuali tratti comuni, per assicurare che i relativi circuiti  $\beta_j$  su  $\Sigma_0$  non si taglino, sono da aggiungere nuove norme, riguardanti l'apposizione dei cicli e direttamente prevedibili per il comportamento dei punti-base sui circuiti di  $\varphi$  in relazione alla comparsa di un centro critico.

Precisamente:

$\alpha$ ) Agli spigoli terminali non si appongano cicli.

$\beta$ ) A spigoli aventi in comune un vertice di secondo ordine, che non risponda al tipo III<sub>a</sub>, si appongano cicli identici (eventualmente nulli).

$\gamma$ ) Per due spigoli aventi in comune un vertice di secondo ordine rispondente al tipo III<sub>a</sub> i cicli apposti ai due spigoli siano suscettibili di

<sup>(17)</sup> Cfr. p. es. A. COMESSATTI, *Sui circuiti dispari delle curve algebriche reali tracciate sopra superficie razionali* [Boll. Unione mat. italiana, (1), 12 (1933), pag. 289-293].

assumere i seguenti aspetti

$$\begin{aligned} & (j_1, j_2, \dots, j_v, j_{v+1}, \dots, j_{w-1}, j_w), \\ & (j_1, j_2, \dots, j_v, j_w, j_{w-1}, \dots, j_{v+1}), \end{aligned}$$

dove la seconda successione di indici si costruisce spezzando la prima in due parziali da ricomporsi dopo averne invertita una.

δ) Riguardo ai tre spigoli concorrenti in un vertice d'ordine tre, la scelta delle notazioni possa farsi in modo che, apposto a quello portante in prossimità l'indicazione  $\Pi_a$  (cfr. num. 5) il ciclo:

$$(j_1, \dots, j_v, j_{v+1}, \dots, j_w),$$

i cicli da apporsi agli altri due siano del tipo:

$$(j_1, \dots, j_v), \quad (j_{v+1}, \dots, j_w),$$

ottenuti cioè spezzando la successione in due parti ed utilizzandole risp. per i due cicli.

S'intende che in  $\gamma$ ),  $\delta$ ) non è da escludersi il caso  $w=0$ , con assenza di cicli, nè lo sono in  $\gamma$ ), con  $w \neq 0$ , i casi  $w=v$ ,  $v=0$  sostanzialmente identici per la già constatata ambiguità d'orientamento, nè in  $\delta$ ), con  $w \neq 0$ , i casi sostanzialmente identici  $v=w$ ,  $v=0$ , in cui viene a mancare uno dei cicli parziali.

Le norme esposte in  $\alpha$ ) e (per il tipo  $\Pi_b$ ) in  $\beta$ ) sono in rapporto colla circostanza che punti-base non possono cadere nè in punti isolati nè giacere su circuiti (eventualmente parziali) che da quello generico siano in  $\varphi$  avvicinati da doppia banda, appena si tenga presente la genericità di  $\varphi$  come fu convenuta.

Le norme esposte in  $\gamma$ ) ed in  $\delta$ ) rispondono invece al comportamento degli orientamenti dei circuiti in prossimità di incroci e di intrecci, deducibili in  $\varphi$  da quello convenuto in  $\varphi_0$  (coi criteri di num. 6).

Concludendo, assunto colle norme prescritte il singramma annotato, esso, prescindendo dai cicli, individua  $\varphi_0$  su  $\Sigma_0$ , mentre l'apposizione dei cicli è predisposta in modo che sia possibile tracciare su  $\Sigma_0$  i  $b$  circuiti unilateri  $\beta_h$  a due a due non secantisi e, nel senso spiegato, riducibili a fori in opportuno modello; dopo di che, sostituiti i fori con punti-base (cioè sostituita a  $\Sigma_0$  la  $\Sigma$ ) si ottiene su  $\Sigma$  il fascio  $\varphi$ .

È così raggiunto il fine proposto all'inizio del presente num.

## § 5. Il fascio $\Phi$ di curve grafiche sopra una superficie $\Sigma$ .

16. Si consideri un singramma  $S$ , o connesso o costituito da più parti connesse e sia esso debitamente annotato.

Se ne potrà sempre costruire un modello nello spazio proiettivo a tre dimensioni.

Esso potrà anzi supporre tale che un piano generico lo tagli in un numero finito, eventualmente nullo, di punti.

Si introduca allora un fascio  $F$  di piani, ciascuno dei quali sia in tal senso generico rispetto al singramma.

Se per *curva grafica* s'intende un sistema di circuiti e di punti isolati in numero finito <sup>(48)</sup>, ad ogni piano di  $F$ , effettivamente secante il singramma, corrisponde una curva grafica costituita dai circuiti (ed eventuali punti isolati) del fascio  $\varphi$ , rappresentato dal singramma annotato, aventi risp. per immagini i punti d'intersezione del piano col singramma.

L'insieme di tali curve grafiche si dirà un *fascio  $\Phi$  di curve grafiche* (composto con un fascio  $\varphi$  topologicamente generico di circuiti); si diranno poi punti-base e centri critici di  $\Phi$  quelli di  $\varphi$ .

Il fascio  $\Phi$  non verrà però detto topologicamente generico se non intervengano restrizioni ulteriori, da intendersi rivolte ai tre seguenti scopi:

A) Evitare che, variando con continuità il piano in  $F$ , circuiti (eventualmente parziali) di una curva  $\Gamma$  di  $\Phi$  siano avvicinati (da uno o più circuiti correnti) da doppia banda, cosicchè sotto tale aspetto debbano considerarsi come « doppi » per la curva  $\Gamma$  (e come *circuiti critici* per  $\Phi$ ).

B) Evitare che qualche punto-base risulti multiplo per qualche curva  $\Gamma$  di  $\Phi$  (perchè comune a più circuiti di  $\Gamma$ ).

C) Evitare che qualche curva di  $\Phi$  possieda due o più punti doppi (considerandosi come tali anche gli isolati).

Ed allora:

In relazione ad A):

α) Nell'annotazione del singramma non dovranno figurare indicazioni dei tipi:

$$I_b, II_b, II_c, III_b, III_c.$$

β) Dovrà escludersi che qualche piano di  $F$  tocchi il singramma (cioè che abbia in comune col singramma un punto non terminale e nell'intorno di questo lasci il singramma tutto da una banda).

γ) Il piano di  $F$  passante per un vertice d'ordine tre dovrà nell'intorno lasciare da una banda lo spigolo coll'indicazione  $II_a$  e dall'altra i due rimanenti.

In relazione a B):

δ) Gli spigoli del singramma a cui siano apposti cieli contenenti uno stesso indice  $j$  dovranno formare un circuito incontrato in uno ed in un sol punto da ciascun piano di  $F$ .

In relazione a C):

ε) Nessun piano di  $F$  potrà contenere più di un vertice del singramma con notazioni dei tipi  $II_a, III_a, IV$ .

<sup>(48)</sup> Per l'uso di questa nomenclatura nel piano proiettivo cfr. L. BRUSOTTI, (4), c).

OSSEVAZIONE. - Tenuto presente il comma  $\alpha$ ), nel singramma annotato le indicazioni

$$I_a, II_a, III_a$$

si potranno sostituire colle più semplici

$$I, II, III.$$

17. Le considerazioni sui punti-base e sui centri critici svolte al num. 13, in particolare le form. (14) (15) (16) (17), possono senz'altro riferirsi, anzichè al fascio  $\varphi$  di circuiti, al fascio  $\Phi$  di curve grafiche.

Ma è lecito ora aggiungere qualche complemento.

Si assuma perciò un fascio  $\varphi$  di circuiti topologicamente generico e di più soddisfacente alla condizione del comma  $\alpha$ ) di num. prec.

Allora un centro critico di  $\varphi$  è risp. un intreccio, un incrocio od un punto isolato secondo che il vertice rispondentegli nel singramma sia d'ordine tre, due od uno.

Conservata per il numero dei centri critici isolati la notazione  $c''$  ed indicato risp. con  $c'_1, c'_2$  il numero degli intrecci e degli incroci, sarà dunque  $c'_1 + c''$  quello dei vertici d'ordine dispari del singramma, quando si rifletta che gli eventuali vertici cui non corrisponda alcun centro critico sono d'ordine due.

Ed allora, per una proprietà dei singrammi già richiamata [cfr. <sup>(13)</sup> di num. 9], sarà:

$$(18) \quad c'_1 + c'' \equiv 0 \pmod{2}.$$

D'altra parte, per la (17) del num. 13, è:

$$(19) \quad c'_1 + c'_2 + c'' \equiv Z - b \pmod{2},$$

onde segue:

$$(20) \quad c'_2 \equiv Z - b \pmod{2},$$

ossia: *In un fascio  $\varphi$  di circuiti topologicamente generico e soddisfacente alla condizione  $\alpha$ ) di num. prec., il numero degli incroci è pari o dispari secondo che l'ordine di connessione di  $\Sigma$  ed il numero dei punti-base di  $\varphi$  abbiano o non abbiano la stessa parità.*

Se ne deduce senz'altro che:

*In un fascio  $\Phi$  di curve grafiche topologicamente generico, il numero degli incroci è pari o dispari secondo che l'ordine di connessione di  $\Sigma$  ed il numero dei punti-base di  $\Phi$  abbiano o non abbiano la stessa parità.*

Dai due enunciati scende poi (sempre nelle attuali ipotesi) il corollario:

*Se l'ordine di connessione di  $\Sigma$  ed il numero dei punti-base di  $\varphi$  (risp. di  $\Phi$ ) hanno diversa parità, esiste almeno un incrocio <sup>(19)</sup>.*

<sup>(19)</sup> Per le proposizioni del presente num. nel caso in cui  $\Sigma$  sia il piano proiettivo cfr. L. BRUSOTTI, <sup>(1)</sup>, c), pag. 166-167, od anche (ma limitatamente al caso algebrico) <sup>(1)</sup>, a), pag. 370-371.

OSSERVAZIONE. - Giova esplicitamente notare che, per Oss. 4<sup>a</sup>. a num. 13, le proposizioni dimostrate nel presente num. sono valide anche per il caso di  $\Sigma$  non connessa.

18. Ripresa ora la trattazione di num. 16, convengono per il seguito alcuni rilievi ulteriori.

Si supponga dapprima che ogni piano di  $F$  abbia col singramma punti comuni.

Nasce allora una corrispondenza biunivoca e continua fra i piani di  $F$  e le curve di  $\Phi$ .

Ciò può analiticamente esprimersi affermando che vi è corrispondenza biunivoca e continua fra le curve di  $\Phi$  ed i valori di un parametro reale ( $\infty$  compreso) e topologicamente affermando che vi è corrispondenza biunivoca e continua fra le curve di  $\Phi$  ed i punti di un circuito  $\xi$ .

Il fascio  $\Phi$  si presenta dunque come un *continuo rientrante in sè*, essen. done elemento la curva grafica.

È da osservarsi che, per il comma  $\delta$ ) di num. 16, qualora  $\Phi$  (topologicamente generico) sia dotato di punti-base, il singramma è incontrato da ogni piano di  $F$ , onde  $\Phi$  risulta rientrante in sè.

Se  $\Phi$  è privo di punti-base, non è escluso che ogni piano di  $F$  tagli il singramma; può peraltro anche avvenire che  $F$  sia composto di « segmenti proiettivi » in numero pari ed alternativamente costituiti da piani secanti e non secanti il singramma.

Gli estremi di tali « segmenti proiettivi » saranno piani proiettanti singoli vertici terminali del singramma, per i commi  $\alpha$ ),  $\beta$ ) ed  $\epsilon$ ) di num. 16.

Ne segue che, nel caso attuale,  $\Phi$  si compone di un numero finito di continui. Ciascuno di questi ha per estremi curve ridotte ad un punto isolato, e può (analiticamente) porsi in corrispondenza biunivoca e continua coi valori reali di un intervallo serrato e (topologicamente) coi punti di un « segmento » o cellula unidimensionale.

Se il singramma è connesso (vale a dire lo è il fascio  $\varphi$  di circuiti da cui  $\Phi$  proviene), tali continui si riducono necessariamente ad uno solo.

Così per un fascio  $\Phi$  di curve grafiche sopra una superficie  $\Sigma$  connessa due sole alternative risultano possibili:

I. Il fascio  $\Phi$  *rientrante in sè*.

II. Il fascio  $\Phi$  *dotato di (due) estremi* <sup>(20)</sup>.

Qualunque sia  $\Sigma$ , in talune circostanze può essere opportuno presentare come rientrante in sè un fascio  $\Phi$  di curve grafiche anche se tale non sia. Basterà, in corrispondenza ai piani di  $F$  non secanti il singramma, introdurre

<sup>(20)</sup> Per il caso del piano proiettivo cfr. L. BRUSOTTI (1 e), pag. 52, pag. 57; (4 e), pag. 322.

« curve grafiche nulle » e per convenzione considerare come distinte curve nulle rispondenti a piani distinti.

19. Ha poi interesse lo studio del comportamento dei singoli spigoli del singramma col fascio  $F$  e delle conseguenti interpretazioni per il fascio  $\Phi$ .

Uno spigolo a cui sia apposto un ciclo, per il comma  $\delta$ ) di num. 16, non potrà essere incontrato da un piano di  $F$  in più di un punto; ed in  $F$  si avranno due « segmenti proiettivi », uno di piani secanti, l'altro di non secanti, limitati dai piani proiettanti i vertici estremi dello spigolo; se questi coincidono, dei due « segmenti proiettivi » manca il secondo.

Inteso il singramma come immagine di  $\varphi$ , lo spigolo è immagine di un continuo composto di circuiti sostenenti gli stessi punti-base nello stesso ordine e limitato da estremi, ciascuno dei quali implica, di regola, l'intervento di un incrocio oppure quello totale o parziale di un intreccio (almeno quando si supponga operata in  $\varphi_0$  la semplificazione di cui è fatto cenno a num. 6 e quindi la conseguente in  $\varphi$ ).

Mentre il circuito descrive in  $\varphi$  tale continuo, la curva grafica di cui esso fa parte descrive in  $\Phi$  il continuo corrispondente al primo dei due « segmenti proiettivi » già presentatisi in  $F$ ; ma la curva possiede in generale altri circuiti, il cui numero può anche variare entro il continuo per l'intervento di eventuali piani di  $F$  proiettanti vertici del singramma.

Uno spigolo invece a cui non sia apposto ciclo sarà immagine di un continuo  $\psi$  (§ 1), subordinato a  $\varphi$ ; e di tale caso ora si dirà.

Per comma  $\beta$ ) di num. 16, quando  $F$  è descritto dal piano corrente, si avrà variazione nel numero delle intersezioni collo spigolo solo quando il piano venga a coincidere con uno di quelli proiettanti gli estremi e la variazione sarà di un'unità.

Segue che  $F$  si scompone in due « segmenti proiettivi » di piani secanti lo spigolo risp. in  $m \geq 0$  punti ed in  $m + 1$  punti, onde corrispondentemente  $\Phi$  in due continui di curve grafiche aventi in  $\psi$  risp.  $m$  ed  $m + 1$  circuiti (ed altri eventuali fuori di  $\psi$ ); nel caso di coincidenza dei due estremi dello spigolo, il che implica  $m > 0$ , il secondo « segmento proiettivo » (risp. il secondo continuo) risulta nullo.

In modo più espressivo si può dire che quando il circuito corrente descrive il continuo  $\psi$ , la curva grafica di cui il circuito fa parte descrive  $\Phi$  per intero  $m$  volte, descrivendone poi ancora una volta il continuo (eventualmente nullo) delle curve corrispondenti ai piani, di  $F$ ,  $(m + 1)$ -secanti lo spigolo.

Il numero  $m$  sarà detto *classe* dello spigolo rispetto ad  $F$  (e del continuo  $\psi$  in  $\Phi$ ).

La Fig. 17 riproduce il comportamento di uno spigolo  $PQ$  di classe zero, supposto  $F$  di piani paralleli (orizzontali) e l'improprio non secante lo spigolo.

Le Fig. 18 e 19 riproducono invece quello di uno spigolo  $PQ$  di classe

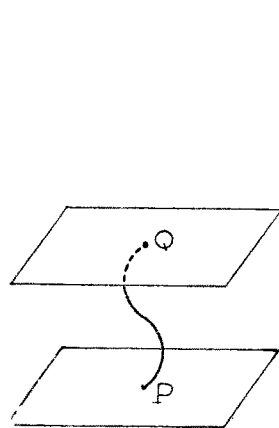


Fig. 17

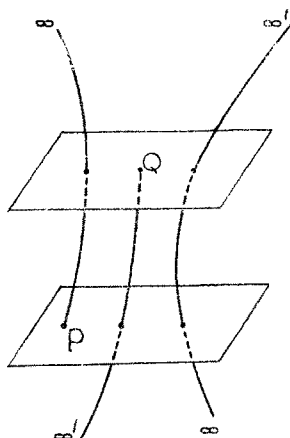


Fig. 18

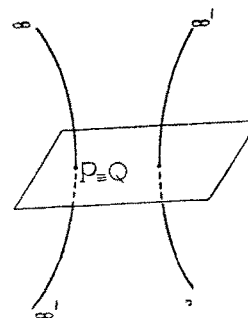


Fig. 19

due, colla medesima scelta di  $F$  e col piano improprio bisecante, risp. nei due casi degli estremi distinti e coincidenti.

20. Si aggiungono ora alcune considerazioni intese a svincolare la nozione di fascio di curve grafiche dall'uso del particolare modello proiettivo finora adottato per il singramma.

Orientato  $F$ , viene indotto un orientamento su ciascuno spigolo. Invero assunto uno spigolo del singramma, per la condizione del comma  $\beta$ ) di num. 16, quando un piano descrive  $F$  in verso positivo, le sue tracce descrivono lo spigolo in un medesimo verso, che si assumerà come positivo, cosicchè quando un punto descrive lo spigolo in tale verso, in  $F$  il piano proiettante si muove costantemente nel verso positivo.

L'orientamento che ne consegue per gli spigoli del singramma, in relazione ai commi  $\beta$ ) e  $\gamma$ ) di num. 16, soddisfa alle seguenti norme:

A) Due spigoli separati da un vertice di secondo ordine sono orientati in modo concorde (onde, rispetto a tale vertice, uno di essi risulta convergente e l'altro divergente).

B) Dei tre spigoli concorrenti in un vertice di terzo ordine, quello segnato con II è convergente (o risp. divergente) rispetto a tale vertice, ed i rimanenti due sono divergenti (o risp. convergenti).

Nessuna norma vincola il comportamento degli spigoli terminali rispetto al vertice di primo ordine (cioè terminale).

L'apposizione di *freccie* ai singoli spigoli ne indicherà i rispettivi orientamenti.

Ad un mutamento di verso in  $F$  (in  $\Phi$ ) corrisponde un mutamento di verso di tutti gli spigoli del singramma.

Se ora descrivendo  $F$  in verso positivo, si assume come iniziale il piano proiettante un vertice, sarà individuato l'ordinamento dei piani proiettanti  $\bar{\imath}$



vertici rimanenti, il che si potrà indicare apponendo ai vertici (a cominciare dall'iniziale) i numeri

$$1, 2, \dots, \beta_0,$$

che si diranno le loro *quote*.

Veramente nell'ultima affermazione è implicito che in  $F$  i piani proiettanti i vertici siano tutti distinti; ma tale circostanza per il comma  $\epsilon$ ) di num. 16 generalmente si avvera e le eventuali eccezioni così dovute a vertici contrassegnati con  $I$  ( $\equiv I_a$ ) possono suppersi rimosse spostando, com'è lecito, tali vertici sostanzialmente scambiabili con punti generici del singramma, gli uni e gli altri immagini di circuiti generici di  $\varphi$ .

Infine a ciascuno spigolo a cui non sia apposto ciclo si apporrà l'indicazione della rispettiva *classe m* (num. prec.).

Quando ad un singramma si appongano anche le nuove indicazioni (frece, quote, classi) il singramma si dirà *annotato e quotato*.

21. Premesso tutto ciò, si assuma del singramma un qualunque modello e lo si supponga debitamente annotato e quotato, ove la clausola « debitamente » ha significato già acquisito per il modo d'annotare il singramma e ne acquista uno per il modo di quotarlo in virtù del num. prec.

Si proverà come sia possibile allora costruirne un modello proiettivo del tipo fin qui utilizzato, onde il singramma così annotato e quotato risulterà atto a rappresentare un fascio  $\Phi$  di curve grafiche.

Nello spazio proiettivo a tre dimensioni si assumano, in un fascio  $F$  e nell'ordine scritto,  $\beta_0$  piani distinti

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{\beta_0}$$

e su di essi (in modo generico) risp. i punti:

$$V_1, V_2, \dots, V_{\beta_0}$$

da interpretarsi come vertici del modello da costruirsi, risp. di quota

$$1, 2, \dots, \beta_0.$$

Alla costruzione degli spigoli si premette che sopra una retta  $u$ , non incidente l'asse di  $F$ , viene indotto dal fascio un verso positivo, onde, introdotti sulla  $u$  due distinti punti  $H, K$ , dei due segmenti orientati aventi il primo estremo in  $H$  ed il secondo in  $K$ , uno risulterà di verso positivo. Esso verrà d'ora innanzi semplicemente indicato con  $\overline{HK}$ .

Si voglia ora costruire lo spigolo  $V_i V_j$  del modello, ove, supposto dapprima

$$i \neq j,$$

si intenda che  $V_i$  e  $V_j$  siano risp. primo e secondo estremo quando lo spigolo si orienti nel verso indicato dalla relativa freccia.

Se allo spigolo è apposto un ciclo oppure se esso è di classe zero, entro il modello proiettivo si può concretarlo nel segmento rettilineo  $\overline{V_i V_j}$ .

Se invece lo spigolo è di classe  $m > 0$ , assunti genericamente sul piano  $\pi_i$  i punti

$$P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}$$

e sul piano  $\pi_j$  i punti

$$Q_{j_1}, Q_{j_2}, \dots, Q_{j_m},$$

lo spigolo potrà concretarsi in una spezzata i cui lati siano ordinatamente:

$$\overline{V_i Q_{j_1}}, \overline{Q_{j_1} P_{i_1}}, \overline{P_{i_1} Q_{j_2}}, \overline{Q_{j_2} P_{i_2}}, \overline{P_{i_2} Q_{j_3}}, \\ \overline{Q_{j_3} P_{i_3}}, \dots, \overline{P_{i_{m-1}} Q_{j_m}}, \overline{Q_{j_m} P_{i_m}}, \overline{P_{i_m} V_j}.$$

In ogni caso il verso dei singoli segmenti rettilinei orientati coincide con quello indicato dalla freccia.

S'intende che se, come talora può accadere, i due vertici siano, nello stesso ordine, estremi di due distinti spigoli, si assumeranno una volta su  $\pi_i$  (risp.  $\pi_j$ ) certi punti  $P_{i_s}$  (risp.  $Q_{j_s}$ ) e l'altra certi punti  $P'_{i_t}$  (risp.  $Q'_{j_t}$ ) tutti distinti dai precedenti.

A tale accorgimento non si può ricorrere quando ciascuno dei due spigoli sia affetto da ciclo o sia di classe zero; si potrà allora realizzare uno degli spigoli con  $\overline{V_i V_j}$ , indi, assunto un punto interno a  $\overline{V_i V_j}$ , per esso il piano di  $F$ , e nel piano un generico punto  $P_i$ , realizzare l'altro spigolo nella spezzata di lati  $\overline{V_i P_i}, \overline{P_i V_j}$ .

Rimane ora a considerarsi l'alternativa

$$i = j,$$

in cui i due estremi dello spigolo coincidono.

Se allora allo spigolo è apposto ciclo oppure esso è di classe uno, una retta genericamente condotta per  $V_i \equiv V_j$ , assunta in verso positivo e pensata come segmento di estremi coincidenti in  $V_i$ , fornirà lo spigolo del modello.

Se invece lo spigolo è di classe  $m > 1$ , introdotto in  $F$  un piano  $\pi_i^* \neq \pi_i$ , ed assunti genericamente su  $\pi_i$  i punti

$$P_{i_1}, \dots, P_{i_{m-1}}$$

e su  $\pi_i^*$  i punti

$$Q_{i_1}, \dots, Q_{i_{m-1}}, Q_{i_m},$$

si concreterà lo spigolo nella spezzata di lati:

$$\overline{V_i Q_{i_1}}, \overline{Q_{i_1} P_{i_1}}, \overline{P_{i_1} Q_{i_2}}, \overline{Q_{i_2} P_{i_2}}, \overline{P_{i_2} Q_{i_3}}, \\ \overline{Q_{i_3} P_{i_3}}, \dots, \overline{Q_{i_{m-1}} P_{i_{m-1}}}, \overline{P_{i_{m-1}} Q_{i_m}}, \overline{Q_{i_m} V_i}.$$

Raggiunto ormai lo scopo, si può concludere che:

*Assegnato un singramma debitamente annotato e quotato, esso individua (a meno di omeomorfismi) il fascio  $\Phi$  di curve grafiche (topologicamente generico) del quale fornisce la rappresentazione.*

22. La conclusione del num. prec. richiede però un chiarimento, al quale qui si provvede.

Assunto un singramma con vertici di ordine  $\leq 3$ , è lecito, ed in più modi, annotarlo in maniera da renderlo atto a rappresentare un fascio  $\varphi$  di circuiti che sia topologicamente generico.

Ora, così annotato il singramma, si può chiedere se sia sempre possibile quotarlo debitamente, cioè in maniera da renderlo atto a rappresentare un fascio  $\Phi$  di curve grafiche topologicamente generico.

Tale quesito si può tradurre in quello più espressivo, se i circuiti di un fascio  $\varphi$  topologicamente generico possano sempre raggrupparsi in curve grafiche in tale maniera da formare un fascio  $\Phi$  topologicamente generico.

Ora la risposta è negativa, come risulta dalle considerazioni seguenti:

Intanto una condizione necessaria è già implicita nel comma  $\alpha$ ) di num. 16, escludente per  $\varphi$  continui provenienti da determinati tipi di continui  $\psi$  in  $\varphi_0$ , ossia determinate annotazioni per i vertici del singramma aventi ordine uno e due.

Ma essa non è sufficiente, come già prova il semplicissimo esempio offerto dal fascio  $\varphi$  rispondente al singramma annotato di Fig. 20, perchè, comunque si orienti lo spigolo avente gli estremi coincidenti, questo non può riuscire convergente (o divergente) in doppio modo rispetto all'unico estremo, come richiederebbe il comma  $B$ ) di num. 20.

In altri termini un fascio  $\Phi$  ricavato da  $\varphi$  deve possedere almeno un circuito critico, in opposizione a comma  $A$ ) di num. 16.

L'esempio già pone in luce come la difficoltà sia legata alla scelta che in ciascun vertice di terzo ordine del singramma si fa dello spigolo cui sia da apporre (in prossimità del vertice) l'indicazione II.

Ed inverò, se al singramma annotato di Fig. 20 si sostituisce quello di Fig. 21, in cui tale indicazione è spostata, è possibile orientare gli spigoli in modo che la condizione  $B$ ) del num. 20 sia soddisfatta, p. es. nel modo suggerito dalle frecce introdotte in figura.

Per porre chiaramente la questione conviene intanto scindere l'operazione del « quotare » in due parziali:

- $\alpha$ ) Apposizione delle frecce, ossia *orientamento del singramma* <sup>(24)</sup>.
- $\beta$ ) Apposizione delle quote e delle classi.

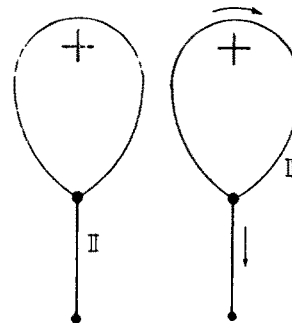


Fig. 20

Fig. 21

<sup>(24)</sup> La locuzione « orientamento del singramma » e le analoghe sono qui usate in senso più lato di quello consueto, nel quale il singramma, potendo possedere vertici d'ordine dispari, risulta di regola [cfr. D. KÖNIG, <sup>(9)</sup>, pag. 29] « non orientabile », non suscettibile cioè di essere « *continuirlich gerichtet* ».

Dopo di che sarà opportuno procedere nell'ordine seguente :

- I. Orientamento del singramma.
- II. Annotazione di questo.
- III. Apposizione delle quote e delle classi.

Riguardo all'orientamento si può dimostrare la proposizione :

*Dato un singramma i cui vertici siano di ordini  $\leq 3$ , è sempre possibile orientarlo convenientemente (e di regola in più modi essenzialmente distinti, cioè non deducibili l'uno dall'altro per inversione di tutti gli orientamenti).*

La clausola « convenientemente » va intesa nel senso che siano rispettate le condizioni imposte dai commi A) e B) di num. 20 e riguardanti risp. i vertici di secondo e di terzo ordine.

Basterà dimostrare il teorema per un singramma  $S$  connesso, perchè in caso contrario il procedimento si pensa applicato alle singole parti connesse.

Ciò posto, se il singramma  $S$  non possiede vertici d'ordine dispari, esso, possedendo solo vertici d'ordine due, si riduce ad un circuito; orientatolo, vengono indotti sui singoli spigoli orientamenti soddisfacenti alla A) di num. 20.

Se invece il singramma  $S$  possiede

$$2d = c'_1 + c'' > 0$$

vertici d'ordine dispari <sup>(22)</sup>, esso può (e generalmente in più modi) scomporsi in  $d$  cammini aperti <sup>(23)</sup>, aventi estremi forniti dai vertici d'ordine dispari, così distribuiti in  $d$  coppie.

Di tali cammini uno solo ne passa per ciascun vertice d'ordine uno o due; per un vertice d'ordine tre, oltre a quello che lo ha per estremo, ne passa un altro (eventualmente coincidente col primo).

Si orienti (arbitrariamente) ciascun cammino. Ciò sui singoli spigoli induce orientamenti che rispettano le condizioni A) e B) di num. 20, com'è immediato per i vertici d'ordine due e come risulta per quelli d'ordine tre, appena si osservi che dei due spigoli rispondenti al passaggio uno è convergente e l'altro divergente, onde la B) è soddisfatta comunque si comporti il terzo.

Dimostrato il teorema, è utile aggiungere che *reciprocamente ogni orientamento conveniente del singramma (connesso) può conseguirsi col procedimento descritto.*

Invero per gli spigoli di  $S$  siano assegnati orientamenti rispettanti le condizioni A) e B) di num. 20.

Se non si hanno vertici d'ordine dispari si presenta il caso ovvio del circuito.

Escluso questo, si premetta che ogni spigolo è divergente per un estremo e convergente per l'altro, onde il numero delle divergenze eguaglia quello delle convergenze. Poichè ogni vertice di second'ordine assorbe una diver-

<sup>(22)</sup> Cfr. <sup>(13)</sup> di num. 9 e form. (18) di num. 17.

<sup>(23)</sup> Riferimenti in M. DEHN und P. HEEGAARD <sup>(2)</sup>, pag. 173, ed in D. KÖNIG <sup>(3)</sup>, pag. 22.

genza ed una convergenza, ne segue che dei vertici d'ordine dispari (primo o terzo) tanti son quelli in cui il numero delle divergenze supera di uno il numero delle convergenze, quanti quelli di comportamento opposto.

A partire da uno dei vertici (d'ordine dispari) del primo tipo, si percorra un cammino seguendo il verso indicato dalle frecce, finchè s'incontri un vertice del secondo tipo. Indi, se esistono ulteriori vertici di primo tipo non ancora utilizzati come estremo, si riprenda l'operazione da uno di questi utilizzando nuovi spigoli e terminando con un nuovo vertice di secondo tipo; ecc. ecc. fino ad esaurimento dei vertici di primo tipo da assumersi come estremo.

Si è tacitamente supposto che ciascuno dei procedimenti parziali sia effettuabile; il che certo è, in quanto, per essere finito il numero degli spigoli, un tale procedimento deve arrestarsi, ma impedimento a proseguirlo non può insorgere nè in un vertice d'ordine pari, com'è ovvio nè in un vertice di terzo ordine di primo tipo od utilizzato come estremo o non utilizzato oppure di secondo tipo già utilizzato come estremo, sempre disponendosi di almeno uno spigolo divergente. I casi di un vertice del primo tipo d'ordine tre già utilizzato per un passaggio o d'ordine uno non s'incontrano, nessun nuovo spigolo convergendovi.

Coll'intero procedimento si saranno costruiti  $d$  cammini. Se essi esauriscono il singramma lo scopo è raggiunto; se non lo esauriscono, rimangono esclusi spigoli ordinabili, secondo l'indicazione delle frecce, in circuiti, ciascuno dei quali (per l'ipotesi di  $S$  connesso) passa per uno almeno dei vertici di ordine tre e può quindi aggregarsi ad uno dei cammini già tracciati, i quali così completati rispondono allo scopo.

Esaminata ormai sotto ogni aspetto la questione dell'orientamento del singramma, lo si supponga orientato.

Si procederà allora all'annotazione di questo, tenendo presente la restrizione  $\alpha$ ) di num. 16 (e l'Oss. al num. stesso). Si apporrà perciò ai vertici terminali l'indicazione IV ed a ciascun vertice d'ordine due l'una o l'altra delle I o III ad arbitrio. Riguardo ai vertici d'ordine tre l'intervento delle frecce già individua quello dei tre spigoli cui debba apporsi l'indicazione II, sempre per la condizione  $B$ ) di num. 20. Dopo di che si passi all'apposizione dei cicli in modo rispondente alle norme conseguenti alle indicazioni dei vertici e già note (cfr. num. 15).

Infine l'attribuzione delle quote ai vertici e delle classi agli spigoli sprovvisti di ciclo si può compiere in modo affatto arbitrario.

OSSERVAZIONE. - Il contenuto del presente num. può anche interpretarsi come un procedimento costruttivo di fasci  $\Phi$  di curve grafiche (topologicamente generici).

Perciò la risoluzione del problema di costruire fasci  $\Phi$  di cui siano assegnati caratteri topologici (numerativi od altrimenti qualitativi) si può considerare come virtualmente raggiunta.

### § 6. Generalizzazioni.

23. La trattazione svolta nei §§ 2-5 si riferisce a fasci  $\varphi$  di circuiti e  $\Phi$  di curve grafiche detti « topologicamente generici ».

Il criterio assunto per la genericità dei fasci  $\Phi$  troverà la sua giustificazione nell'applicazione al caso algebrico di cui si dirà nel seguente § 7.

Il criterio per la genericità dei fasci  $\varphi$  è stato peraltro assunto con qualche maggiore ampiezza di quanto corrisponda al caso dei fasci  $\varphi$  dai quali per conveniente aggruppamento di circuiti possano ricavarsi fasci  $\Phi$  topologicamente generici, e ciò per non anticipare quelle considerazioni sulla esclusione di circuiti critici che a rigore trovano il loro posto piuttosto nella teoria dei fasci  $\Phi$  che in quella dei fasci  $\varphi$ .

Un'impostazione delle trattazioni che avesse attribuito maggiore generalità ai fasci  $\varphi$  e  $\Phi$  avrebbe assunto sviluppo eccessivo senza rispondente vantaggio.

Tuttavia nel presente § si vuole far cenno di talune generalizzazioni, con riguardo speciale a quelle che possono interessare il caso algebrico.

24. Si inizi il processo di generalizzazione dai fasci  $\varphi$  privi di punti-base (§ 2), nel senso di costruirli coll'impiego di continui  $\psi$  ad estremi di tipi più generali di quelli introdotti nel § 1.

Assunto in  $\varphi$  genericamente un circuito, esso verrà ancora supposto privo di punti multipli e di intersezioni con altri circuiti di  $\varphi$ ; faranno eccezione, in numero finito, certi circuiti e questi si raggrupperanno in « sistemi connessi completi », dicendosi connesso completo un sistema di circuiti

$$\lambda_1, \dots, \lambda_a \quad (a \geq 1)$$

tale che ciascun circuito  $\lambda_i$  ( $i > 1$ ) intersechi almeno uno dei precedenti, ma non esista in  $\varphi$  alcun ulteriore circuito secante qualche  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, a$ ).

I punti multipli e le mutue intersezioni dei circuiti  $\lambda_j$  di un sistema connesso completo (centri critici per  $\varphi$ ) producono una suddivisione dei circuiti  $\lambda_j$  in segmenti, i quali, contati due volte, possono ordinarsi in circuiti

$$\mu_1, \dots, \mu_r,$$

che, eventualmente a gruppi, forniscono i contorni delle regioni determinate sulla  $\Sigma$  del sistema connesso completo, e si suppone in maniera da evitare per  $\Sigma$  punti singolari (come tacitamente si è fatto al § 2).

I circuiti  $\mu_k$  intervengono in  $\varphi$  come estremi di continui  $\psi$ , onde sarà  $r$  l'ordine per il corrispondente vertice del singramma  $S$ .

S'intende che possono intervenire come estremi di continui  $\psi$  anche circuiti  $\gamma$  privi di punti multipli e di intersezioni con altri circuiti  $\varphi$  (ogni volta con  $r = 2$ ) e punti isolati (con  $r = 1$ ).

Si potrà però anche rinunciare ad una precedente restrizione ed ammettere la eventuale comparsa in  $\Sigma$  di singolarità in relazione alla scelta degli estremi per i continui  $\psi$ .

Esemplificando, se, per un intreccio del tipo introdotto al num. 1, si suppone che ciascuno dei due circuiti parziali intervenga due volte come estremo di continui  $\psi$ , la  $\Sigma$  acquista un punto singolare che in opportuni modelli può presentarsi come punto doppio conico per essa.

E a tale singolarità si perverrà pure supponendo che un punto isolato sia assunto due volte come estremo di continui  $\psi$ .

Nei due esempi si avrà risp.  $r = 4$ ,  $r = 2$ .

OSSERVAZIONE. - Un'ulteriore estensione potrebbe attuarsi ammettendo che anche il circuito generico di  $\varphi$  possa presentare punti multipli (almeno per taluno dei continui  $\psi$ ); la  $\Sigma$  acquisterebbe allora linee multiple; ma ciò non avrebbe importanza per la topologia intrinseca di  $\Sigma$ , nella quale tali singolarità si possono considerare come inesistenti. Una considerazione analoga potrebbe svolgersi per linee multiple provenienti da intersezioni fra circuiti distinti.

25. Si passi ora a generalizzare la nozione di fascio  $\varphi$  dotato di punti-base, coll'introduzione di punti-base multipli.

Si faccia riferimento ancora alla superficie  $\Sigma_0$  (non orientabile) su cui sono tracciati  $b$  circuiti

$$\beta_1, \dots, \beta_b$$

unilateri, privi di singolarità e a due a due non secantisi, essendo allora  $\Sigma$  la superficie che si ottiene introducendo il modello di  $\Sigma_0$  in cui i  $b$  circuiti  $\beta_i$  sono sostituiti da altrettanti fori in punti  $B_i$ , indi sopprimendo tali fori (cfr. num. 13).

Sulla  $\Sigma_0$  si consideri ancora un fascio  $\varphi_0$  di circuiti privo di punti-base, ma si ammetta che i circuiti di  $\varphi_0$  secanti un circuito  $\beta_i$  possano anche tagliarlo in un numero (finito) di punti maggiore di uno, senza escludere che dei circuiti di  $\varphi_0$  taluni (in numero finito) possano toccare  $\beta_i$  (intendendo con ciò che nell'intorno di un punto comune il circuito giaccia tutto da una banda di  $\beta_i$ ), e che su  $\beta_i$  possano eventualmente giacere centri critici di  $\varphi_0$ .

Quando un circuito di  $\varphi_0$  descriva un continuo  $\psi$ , il numero delle intersezioni con  $\beta_i$  si manterrà costante finchè non intervenga un contatto, nel qual caso tale numero aumenterà o diminuirà di due unità.

Per i singoli segmenti di un sistema connesso completo il numero delle intersezioni con  $\beta_i$  è individuato dal comportamento dei circuiti appartenenti a sistemi  $\psi$  che in quello confluiscono, il che vincola mutuamente i sistemi  $\psi$ , ciascun segmento intervenendo sotto questo aspetto due volte.

In opportuni modelli, a rami di circuiti di  $\varphi_0$  secanti  $\beta_i$  in punti distinti corrispondono rami di circuiti di  $\varphi$  uscenti dal punto-base  $B_i$  con tangenti

distinte, a rami tangenti rami con cuspidi in  $B_i$ , a rami incrociantisi in un punto di  $\beta_i$ , rami che si toccano in  $B_i$  (onde ad un ordinario centro critico nodale su  $\beta_i$  un tacnodo in  $B_i$ ); infine ad un punto isolato giacente su  $\beta_i$  un punto isolato coincidente con  $B_i$  e limite di circuiti con nodo nel punto-base  $B_i$ , tendendo le tangenti nodali a coincidere in una certa retta uscente da  $B_i$ .

OSSERVAZIONE. - Per i fasci  $\varphi$  descritti nel presente num., rami di circuiti di  $\varphi$ , genericamente uscenti da un punto-base  $B_i$ , ivi si attraversano.

Si possono considerare anche fasci  $\varphi$  in cui per qualche  $B_i$  tali rami invece ivi si tocchino.

A ciò si potrebbe giungere partendo da fasci  $\varphi_0$  non già privi di punti-base, bensì con un punto-base (almeno) su qualche  $\beta_i$ . Ma più speditamente si possono presentare i nuovi fasci come casi-limiti degli antichi, supponendo che due punti-base siano venuti a coincidere in uno stesso  $B_i$ .

È però da osservarsi che, se in  $B_i$  non intervengono eccezioni, la superficie  $\Sigma$  presenta ivi un punto singolare (come nell'esempio elementare del fascio  $\varphi$  generato da un cerchio che ruota attorno ad una sua tangente). E questa eventualità è qui da escludersi.

Nei casi più semplici interverrà in  $B_i$ , come forma limite del comportamento generico, od un punto isolato od un nodo (dovuto questo o ad un intreccio o ad un incrocio). Esempi nel piano proiettivo sono il fascio di cerchi che in un punto  $B$  si toccano ed il fascio di coniche aventi in comune tre punti e la tangente in uno  $B$  di essi. Tali esempi possono essere utili per lo studio dei fasci  $\varphi$  che nell'intorno di un punto-base abbiano comportamento oméomorfo a quello nell'intorno di  $B$ .

26. Ai fasci  $\varphi$  intesi nel senso generalizzato dei precedenti num. 24 e 25 si possono estendere le proprietà numerative introdotte ai num. 8 e 13 per i fasci  $\varphi$  topologicamente generici.

Si supponga dapprima  $\varphi$  privo di punti-base (come già al num. 8).

Introducasi ancora su ciascuno degli eventuali  $g$  circuiti  $\gamma$  un punto  $G$  e dicansi promiscuamente punti  $Q$  i  $c$  centri critici di  $\varphi$  ed i  $g$  punti  $G$ .

Ognuna delle  $t$  regioni  $R$  coperte dai singoli continui  $\psi$  ha il contorno composto di due parti su ciascuna delle quali giace almeno un punto  $Q$ , onde nella regione potrà segnarsi un segmento  $\theta$  unisecante i circuiti del relativo continuo  $\psi$  ed avente gli estremi in due punti  $Q$  presi risp. sulle due parti del contorno.

Si sarà allora disteso sulla  $\Sigma$  un poliedro le cui facce sono le regioni  $R$  così tagliate ed i cui vertici sono i punti  $Q$ .

Ne sono spigoli i  $t$  segmenti  $\theta$ , i  $g$  segmenti prodotti sui circuiti  $\gamma$  dai rispettivi punti  $G$ , infine i segmenti in cui i circuiti dei sistemi connessi completi (num. 24) vengono ripartiti dai centri critici.

Se con  $s_i$  ( $i = 1, \dots, c$ ) si indica il numero dei rami uscenti dai singoli



centri critici (onde per un punto isolato sia  $s_i = 0$ ), sarà  $2s_i$  quello degli spigoli dell'ultimo tipo in essi risp. concorrenti; ma in tal modo ogni spigolo di tale tipo verrà nel computo complessivo contato due volte.

Da tutto quanto precede si deduce, colle consuete notazioni:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= c + g, \\ \alpha_1 &= t + g + \sum_{i=1}^c s_i, \\ \alpha_2 &= t,\end{aligned}$$

onde:

$$(21) \quad Z = 2 + \sum_{i=1}^c (s_i - 1).$$

Nella (21) rientra la (6) di num. 8, appena si osservi che per un centro critico ordinario nodale (risp. isolato) è  $s_i = 2$  (risp.  $s_i = 0$ ).

La (21) potrebbe del resto scriversi nella forma (6) qualora si convenisse che *un centro critico s-plo (con  $s \geq 2$ ) equivalga ad s-1 ordinari centri critici nodali.*

OSSERVAZIONE 1<sup>a</sup>. - Che un centro critico s-plo (con  $s \geq 2$ ) porti alla connessione  $Z$  di  $\Sigma$  contributo  $s-1$ , può ritrovarsi nel modo seguente.

Si scostino nell'intorno del centro critico gli  $s$  rami, così da produrre  $\binom{s}{2}$  intersezioni distinte dei rami a due a due e da introdurre, accanto alle regioni preesistenti per l'intervento del relativo sistema connesso completo, altre  $\binom{s-1}{2}$  regioni (del tipo « pezzo ») appartenenti all'intorno stesso <sup>(24)</sup>.

Nelle regioni provenienti dalle antiche si mantenga l'andamento dei circuiti di  $\varphi$ , ma in ciascuna delle nuove regioni si introduca un continuo  $\psi$  avente per estremi il contorno ed un punto isolato. Allora nel nuovo fascio il centro critico s-plo verrà sostituito da  $\binom{s}{2}$  centri critici ordinari nodali e da  $\binom{s-1}{2}$  centri critici isolati, portando quindi per la (6) a  $Z$  il contributo

$$\binom{s}{2} - \binom{s-1}{2} = s - 1,$$

come appunto volevasi.

OSSERVAZIONE 2<sup>a</sup>. - Nella precedente OSS. si è tacitamente ammesso che gli  $s$  rami a due a due si attraversino. La restrizione però non ha importanza perchè sotto l'aspetto puramente topologico i semirami possono sempre abbinarsi in modo che ciò avvenga, adattando allo scopo l'interpretazione del sistema connesso completo. Ma è pur lecito rispettare l'abbinamento che in

<sup>(24)</sup> Per il piano proiettivo e per rette cfr. L. BRUSOTTI, (4), b) pag. 615. Ma la proprietà subito si estende al caso generale.

determinati modelli sia consigliato da considerazioni proiettive od analitiche. Per esempio nel caso di un ordinario taenodo si potrà scostare uno dei rami in modo che nell'intorno bisechi l'altro e nella lunula così prodotta inserire il continuo  $\psi$  avente per estremi il contorno ed un punto isolato; ne seguirà (per l'intervento di due centri critici nodali e di uno isolato) il contributo  $2 - 1 = 1$ , come dev'essere.

27. Per un fascio  $\varphi$  dotato di punti-base, si introduca al solito il fascio  $\varphi_0$  privo di punti-base sulla  $\Sigma_0$  e si supponga dapprima che nessun centro critico di  $\varphi_0$  giaccia su alcun circuito  $\beta_n$ .

In tale caso vale integralmente la trattazione di num. 13 e perciò dalla (21) di num. prec. si può dedurre la

$$(22) \quad Z = 2 - b + \sum_{i=1}^c (s_i - 1),$$

se pure non si voglia mantenere la (14), interpretandola nel modo seguito al num. prec. per la (6).

Qualora poi sopra un circuito  $\beta_i$  il fascio  $\varphi_n$  possenga un centro critico  $s$ -plo (con  $s \geq 2$ ), nel corrispondente punto-base  $B_i$ , per opportuno modello, si hanno  $s$  rami che ivi si toccano (cfr. num. 25), il che potrà esprimersi dicendo che al punto-base  $B_i$  è infinitamente vicino un centro critico  $s$ -plo di  $\varphi$  nella direzione della tangente comune.

Se invece su  $\beta_i$  giace un centro critico isolato di  $\varphi_0$ , si hanno, in opportuno modello, circuiti di  $\varphi$  con nodo in  $B_i$ , i quali (num. 25) impiccolendosi tendono ad un punto isolato ( $\equiv B_i$ ), mentre le tangenti nodali tendono a coincidere in una retta uscente da  $B_i$ ; e ciò potrà esprimersi dicendo che a  $B_i$  è infinitamente vicino un centro critico isolato di  $\varphi$  nella direzione di tale retta.

Segue che la (22) potrà ritenersi valida anche in questi casi, purchè il sommatorio che in essa figura si estenda anche ai centri critici infinitamente vicini a punti-base.

OSSERVAZIONE. - Meno agevole è disciplinare il calcolo di  $Z$  per i fasci di cui è fatto cenno nell'Oss. al num. 25; ma la questione non sarà qui approfondita.

Solo si osserverà come nel primo (risp. nel secondo) degli esempi ivi trattati il contributo complessivamente portato dal punto  $B$  sia  $= -2$  (risp.  $= 0$ ).

Ora a tale risultato si può pervenire formalmente nel modo più semplice sommando algebricamente il contributo  $= -1$  di un singolo punto-base  $B$  con quello  $= -1$  (risp.  $= 1$ ) di un singolo centro critico ordinario  $B$  isolato (risp. nodale).

Ma si può ancora presentare il fascio come caso limite di un fascio  $\varphi$  con punti-base a comportamento generico, nel quale il contributo dei due punti-base confluenti in  $B$  sempre risulta  $= -2$ , ma durante il passaggio

al limite nel primo esempio, in assenza di centri critici nell'intorno, tale permane, mentre nel secondo esempio, algebricamente sommato col contributo  $= 2$  di due centri critici nodali pure confluenti in  $B$ , dà luogo ad un contributo complessivo  $= 0$ .

28. Si venga ora alla generalizzazione dei fasci  $\Phi$  di curve grafiche.

Già nell'ipotesi di  $\varphi$  topologicamente generico,  $\Phi$  si può generalizzare ammettendo l'eventuale esistenza:

I. Di circuiti critici.

II. Per  $b > 0$ , di curve grafiche dotate di punti multipli in punti-base, per il passaggio ivi di più circuiti componenti.

III. Di curve grafiche dotate di più punti doppi (per  $b > 0$  fuori dei punti-base).

Perciò, introdotto ancora del singramma annotato  $S$  il modello nello spazio proiettivo tridimensionale, basterà rinunciare alle clausole  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ),  $\delta$ ),  $\epsilon$ ) di num. 16.

Ma si può già supporre generalizzato  $\varphi$  nel senso dei num. 24, 25. E tuttavia del singramma  $S$  potrà introdursi un modello nello spazio proiettivo a tre dimensioni, col quale riferimento, mantenendo la massima generalità compatibile coll'indole della presente ricerca, basterà imporre che ogni piano del fascio  $F$  incontri  $S$  in un numero finito di punti.

Se si volesse invece conservare la restrizione  $A$ ) di num. 16 relativa all'assenza di circuiti critici, oltre all'escludere  $[\alpha]$  contatti di piani di  $F$  con  $S$ , si dovrebbero evitare sistemi connessi completi che inducano doppio avvicinamento [estensione di  $\beta$ ] ed altresì imporre un determinato comportamento al piano di  $F$  passante per un vertice di  $S$  rispetto agli spigoli uscenti dal vertice in relazione al significato di questi [estensione di  $\gamma$ ].

S'intende che tutto ciò dovrebbe presupporre annotazioni del singramma adeguate alla generalizzazione di  $\varphi$ .

Perciò, suppongasì dapprima  $\varphi$  privo di punti-base. Indicati allora con lettere i centri critici pertinenti ad uno stesso sistema connesso completo, questo dovrebbe sotto un certo aspetto caratterizzarsi mediante una tabella formata da cicli di lettere (con eventuali ripetizioni) in relazione alla disposizione dei centri critici sui singoli circuiti del sistema <sup>(25)</sup>; indi a ciascuno degli spigoli uscenti dal vertice immagine del sistema dovrebbe apporsi, in prossimità del vertice, il ciclo relativo all'ordine col quale i centri critici compaiono sul circuito  $\mu_i$  da cui si diparte il continuo  $\psi$  del quale lo spigolo offre l'immagine.

<sup>(25)</sup> Trattasi del criterio seguito per circuiti dotati di nodi nella costruzione degli « schemi di GAUSS »; cfr. C. F. GAUSS, *Werke*, 8 (Leipzig 1900), pag. 271-286 (*Nachlass*); cfr. pure G. LINDSBERG, *Beiträge zur Topologie geschlossener Kurven mit Knotenpunkte und zur Kroneckerschen Charakteristikentheorie* [Math. Ann., 70 (1911), pag. 563-579].

Sia ora  $\varphi$  dotato di punti-base. Converrà, prese le mosse da  $\varphi_0$ , introdurre nel relativo singramma come nuovi vertici (d'ordine due) le immagini dei circuiti  $\gamma^*$  tangenti a taluno dei circuiti  $\beta_i$ , da aggiungere alle immagini di eventuali circuiti  $\gamma$  privi di centri critici (nel che è implicita l'ipotesi che i  $\gamma^*$  non appartengano a sistemi connessi completi).

Con riferimento poi a  $\varphi$ , nei cicli delle tabelle ed in quelli prossimi ai rispettivi vertici, converrà inserire le indicazioni (mediante numeri) concernenti punti-base; e sui cicli (di numeri) apposti agli spigoli tener presente che ora essi possono presentare ripetizioni e di più che, se uno degli estremi è immagine di un sistema connesso completo, il ciclo è implicito (onde se lo sono entrambi nasce un controllo), ma, per un vertice proveniente da un circuito  $\gamma^*$  di  $\varphi_0$ , i cicli dei due spigoli in esso concorrenti sono deducibili l'uno dall'altro colla soppressione di due numeri eguali, elementi consecutivi del ciclo.

L'apposizione di frecce, quote e classi non offre difficoltà essenziali, purchè si convenga che l'immagine di ogni circuito critico si debba assumere come un vertice, in cui concorrano di regola due spigoli o entrambi convergenti o entrambi divergenti.

Infine è da porsi in rilievo che, per  $\Phi$  non rientrante in sè (num. 18), fra gli estremi dei singoli continui potranno figurare curve grafiche comunque composte di circuiti critici e di punti isolati.

Per uno studio più approfondito d'ogni singolo caso concreto, ulteriori suggerimenti potranno trarsi dai già noti sviluppi riflettenti i fasci  $\varphi$  e  $\Phi$  topologicamente generici.

## § 7. Il caso algebrico.

29. Si dica ora brevemente come la teoria dei fasci  $\Phi$  di curve grafiche possa applicarsi allo studio dei fasci reali di curve algebriche sopra una superficie algebrica reale.

Si ricordi perciò che (sotto l'aspetto proiettivo), in uno spazio  $S_r$  ad  $r$  dimensioni, un ente algebrico dicesi reale quando sia mutato in sè dal coniugio, ma che se un ente algebrico è reale, è reale anche ogni suo trasformato per trasformazioni birazionali reali, cioè a coefficienti reali (in particolare ogni suo trasformato per collineazioni reali).

Cio posto, in un  $S_r$  (con  $r \geq 3$ ), di una superficie algebrica reale  $\Omega$  si assuma un modello proiettivo che, per semplicità di discorso, verrà supposto privo di singolarità ad intorno reale, onde, prescindendo dalle eventuali singolarità reali isolate, la parte reale di  $\Omega$  (anche dopo ciò supposta esistente) si presenterà come una superficie  $\Sigma$  (generalmente non connessa) nel senso dei precedenti sviluppi; poi avvertendo come la trattazione possa, cogli opportuni adattamenti, riferirsi anche a modelli dotati

di singolarità ad intorno reale, purchè queste vengano opportunamente interpretate <sup>(26)</sup>.

Un fascio (razionale) reale  $f$  di curve algebriche giacente sulla  $\Omega$  (e supposto privo di parte fissa) si potrà pensare segnato (sul modello assunto) da un fascio reale di ipersuperficie di  $S$ , (scartando le eventuali intersezioni fisse); affermazione questa legata peraltro <sup>(27)</sup> all'ammessa esistenza della parte reale di  $\Omega$ .

Ed anzi le curve reali di  $f$  saranno quelle segnate da ipersuperficie reali.

Le parti reali delle curve reali di  $f$  (sempre a prescindere dall'apporto di eventuali singolarità reali isolate del modello di  $\Omega$ ) saranno allora le curve grafiche di un fascio  $\Phi$  tracciato sulla  $\Sigma$ , da intendersi però talora nel senso più generale introdotto nel precedente § 6.

Quando  $\Phi$  sia topologicamente generico si dirà *topologicamente generico* lo stesso  $f$ .

Il fascio  $f$  si dirà *algebricamente generico* quando i suoi punti-base siano tutti semplici e distinti ed i punti del suo *gruppo Jacobiano* [brevemente, colla nomenclatura di A. CAYLEY <sup>(28)</sup>, i suoi *centri critici*] siano punti doppi ordinari pertinenti ad altrettante distinte curve di  $f$ .

Risulta allora che un fascio  $f$  algebricamente generico è pure topologicamente generico.

Ed invero in tale ipotesi saranno semplici e distinti in particolare i punti-base reali (onde in ciascuno di essi le tangenti formano fascio) e saranno ordinari e pertinenti a curve reali distinte i centri critici reali, cosicchè per le parti reali delle curve reali di  $f$ , ossia per le curve grafiche di  $\Phi$ , saranno soddisfatte le condizioni richieste dalla genericità topologica (fra le quali l'assenza in  $\Phi$  di circuiti critici per l'assenza in  $f$  di curve reali con componenti reali multiple).

L'affermazione non si può peraltro invertire, in quanto  $f$  può risultare topologicamente ma non algebricamente generico per l'intervento di singolarità immaginario-coniugate d'indole superiore <sup>(29)</sup>.

**30.** Supposto  $f$  algebricamente generico, si indichi con  $b$ , risp. con  $c$ , il numero dei punti-base e dei centri critici di  $f$ .

Riprese allora precedenti notazioni per  $\Phi$  (num. 4, num. 12) ed indicato

<sup>(26)</sup> A tale proposito vedansi le considerazioni d'indole generale svolte in A. COMESSATTI, *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale* [Math. Ann., 73 (1912), pag. 1-72, a pag. 43]; ed in A. COMESSATTI, <sup>(16)</sup>, a pag. 281-283. E si ponga mente anche a qualche passo del presente lavoro (p. es. num. 24, OSS.)

<sup>(27)</sup> Cfr. perciò A. COMESSATTI, <sup>(25)</sup>, a pag. 8-9.

<sup>(28)</sup> Cfr. A. CAYLEY, <sup>(11)</sup>.

<sup>(29)</sup> Sulle relazioni fra genericità algebrica e topologica di  $f$  nel caso del piano proiettivo cfr. L. BRISOTTI, <sup>(1)</sup>, *c*), pag. 70, pag. 198; *g*), pag. 792.

risp. con  $\bar{b}$  e con  $\bar{c}$  il numero delle coppie di punti-base e di centri critici immaginario-coniugati, risulta:

$$(23) \quad b = b + 2\bar{b}$$

$$(24) \quad c = c + 2\bar{c} = c' + c'' + 2\bar{c}$$

da cui subito:

$$(25) \quad b \leq b,$$

$$(26) \quad c \leq c,$$

$$(27) \quad b \equiv b \pmod{2},$$

$$(28) \quad c \equiv c \pmod{2},$$

onde anche:

$$(29) \quad c' - c'' \equiv c \pmod{2}.$$

Ricordate la (6), (14) e l'Oss. 4<sup>a</sup>. di num. 13, si ha che per la parte reale  $\Sigma$  è:

$$(30) \quad Z = c' - c'' - b + 2.$$

Ma, introdotto per la  $\Omega$  l'invariante  $I$  di ZEUTHEN-SEGRE <sup>(30)</sup>, è pure:

$$(31) \quad I = c - b - 4p,$$

ove sia  $p$  il genere della generica curva di  $f$ .

Ed allora dalle (27) e (29) subito si deduce:

$$(32) \quad Z \equiv I \pmod{2},$$

relazione questa implicita in altre già note, stabilite peraltro con mezzi più elevati <sup>(31)</sup>.

In particolare nello spazio ordinario si introduca la superficie generale nel proprio ordine  $n$ .

Utilizzando un fascio generico di sezioni piane con

$$b = n, \quad c = n(n-1)^2, \quad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

trovasi allora

$$(33) \quad I = (n-2)[(n-1)^2 + 1]$$

onde anche

$$(34) \quad I \equiv n \pmod{2},$$

<sup>(30)</sup> C. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* [Atti Acc. delle Scienze di Torino, 31 (1896), pag. 485-501].

<sup>(31)</sup> Trattasi p. es. delle

$$Z = R_2 - 2h \\ R_2 = I + 4g + 2$$

per le quali (ed anche per il significato delle lettere) vedansi risp.: A. COMESSATTI, *Sulla connessione delle superficie algebriche reali* [Annali di Matematica (4), 5 (1927-28), pag. 299-317, a pag. 300] e S. LEFSCHETZ, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Paris 1924, a pag. 40.

e, se la superficie è reale, se ne trae <sup>(32)</sup>

$$(35) \quad Z \equiv n \pmod{2}.$$

OSSERVAZIONE. - Dalle:

$$-c \leq c' - c'' \leq c$$

$$b \geq b' \geq 0$$

e dalla (30), si trae pure la limitazione

$$(36) \quad -(b + c) \leq Z \leq c$$

sostituibile peraltro in casi singoli con una più espressiva.

**31.** Stabilito così il raccordo fra la teoria dei fasci  $\Phi$  di curve grafiche sopra una superficie  $\Sigma$  e quella dei fasci  $f$  reali di curve algebriche sopra una superficie  $\Omega$  algebrica reale, si può brevemente accennare ai problemi che ne scaturiscono partendo da assegnate proprietà di  $\Phi$  (risp. di  $f$ ); del che si dirà nel presente num. (risp. nel seguente).

Diasi  $\Phi$  (quindi  $\Sigma$ ) a meno di omeomorfismi.

Si può porre allora il problema dell'esistenza di un « *modello algebrico* » <sup>(33)</sup>

<sup>(32)</sup> Alla (35) può giungersi anche più elementarmente cfr. L. BRUSOTTI, *Sull'ordine di connessione delle superficie algebriche reali* [Rend. Ist. Lomb., (2), 78 (Scienze, 1944-45), pag. 360-366].

<sup>(33)</sup> In generale, caratterizzato od astrattamente od in uno spazio  $S$ , un ente sotto l'aspetto della Topologia, si può chiedere se esista un ente algebrico reale la cui parte reale sia topologicamente identificabile coll'ente assegnato (brevemente se ne esista un *modello algebrico*).

A tale ordine di problemi si riferiscono esplicitamente i lavori seguenti:

L. BRUSOTTI, *a) Sull'esistenza di modelli algebrici per ogni sistema di  $k$  circuiti al finito* Rend. R. Ist. Lomb., (2), 61 (1928), pag. 177-186; *b) Le curve gobbe algebriche reali come modelli nella topologia proiettiva dell'allacciamento* [Atti del Congresso internazionale dei Matematici (Bologna 1928), 4, pag. 139-145]; *c) Un teorema generale sull'esistenza di modelli algebrici per un sistema spaziale di  $k$  circuiti* [Rend. R. Ist. Lomb., (2), 61, (1928), pag. 767-783]; *d) Sul genere dei modelli algebrici di un sistema spaziale di  $k$  circuiti* [Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa (Sc. Fis. e Mat.), (2), 1 (1932), pag. 61-77]; *e) Sui modelli algebrici di un sistema di  $k$  falde* [Atti del 1° Congresso dell'Unione matematica italiana (Firenze 1937), Bologna 1938, pag. 251-253]; *f) Le superficie algebriche reali come modelli in questioni di isotopia* [Rend. R. Ist. Lomb., (2), 72 (Scienze, 1938-39), pag. 111-127]; L. TORRE, *Treccie di Artin e modelli algebrici* [Ibid, 74 (Scienze, 1940-41) pag. 501-514].

Si possono però intendere sotto tale aspetto anche gli studi sulle *Riemanniane algebriche*.

Per questi cfr. specialmente:

C. SEGRE, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* [Math. Ann., 40 (1892), pag. 413-467, specialmente a pag. 438, nota (\*\*)]; L. GASIOROWSKI, *Die Herstellung geschlossener singularitätenfreier algebraischer Flächen von beliebig hohem Zusammenhang* [Journal für die r. u. a. Mathematik. 146 (1916), pag. 156-160]; J. v. SZ. NAGY, *Über eine räumliche Darstellung Riemannscher Flächen von Geschlechte  $p$  mit  $p+1$  Symmetrielinien* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 26 (1917), pag. 109-113]; F. SEVERI, *Conferenze di Geometria algebrica*, raccolte da B. SEGRE, (lit., Roma 1927-1930), specialmente pag. 75-84; A. COMESSATTI, *Sulle riemanniane algebriche* [Rend. Circolo matematico di Palermo, 53 (1929) pag. 283-309]. Nelle ultime due pubblicazioni citate è ricordato pure un corso universitario di F. SEVERI (Padova 1910-11).

cioè di un fascio  $f$  (su di una  $\Omega$ ) tale che le parti reali delle curve reali di  $f$  formino un fascio omeomorfo a  $\Phi$ .

Si potrà supporre  $\Phi$  topologicamente generico e richiedere allora che  $f$  sia algebricamente generico.

Ma si potranno anche imporre ad  $f$  particolari limitazioni, sottoponendo od  $\Omega$ , od  $f$ , od entrambi a condizioni sia invarianti per trasformazioni birazionali reali (prive di elementi eccezionali reali), sia a condizioni proiettive (in relazione a modelli assunti in un certo  $S_r$ ).

E del resto potrà anche  $\Phi$  supporre non individuato a meno di omeomorfismi ma solo dotato di certe proprietà topologiche le quali debbano rispecchiarsi nelle parti reali delle curve di  $f$  <sup>(34)</sup>.

Più vasto problema sarebbe quello di determinare (almeno virtualmente) tutti i tipi algebricamente distinti di fasci  $f$  che offrano un modello algebrico del fascio  $\Phi$  assegnato a meno di omeomorfismi. Ma un tale problema, allo stato attuale degli studi, può reputarsi di troppo ampia portata.

Quando esso si limiti ai fasci di curve piane, può giovare l'osservazione <sup>(35)</sup> che, se esiste un modello fornito da curve d'ordine  $n$ , esistono modelli per ogni ordine  $n'$  soddisfacente alle:

$$\begin{aligned} n' &\geq n, \\ n' &\equiv n \pmod{2}. \end{aligned}$$

E considerazioni analoghe possono valere anche in condizioni più generali per fasci giacenti su di una qualsiasi  $\Omega$ .

**32.** Sia ora assegnato  $f$ , sotto l'aspetto puramente algebrico o a meno di trasformazioni birazionali (reali, anzi prive di elementi eccezionali reali) o in un determinato modello proiettivo (in un certo  $S_r$ ), s'intenda però sempre in senso qualitativo (e cioè senza introdurre i *moduli* da cui dipende l'identificazione del fascio).

Se si fa riferimento al modello proiettivo, si può chiarire la posizione del problema col supporre che  $f$  si assuma genericamente in una « *famiglia* » di fasci, dicendosi famiglia di fasci un sistema algebrico che, pensato il fascio come elemento, risulti irriducibile e non contenuto in un sistema algebrico irriducibile più ampio <sup>(36)</sup>.

<sup>(34)</sup> Così nel piano proiettivo si può di  $\Phi$  assegnare la cosiddetta « *seconda forma ridotta* » [cfr. L. BRUSOTTI, (1), c), pag. 148-157] e richiedere fasci  $f$  tali da dar luogo alla seconda forma ridotta assegnata [come in loc. cit., pag. 202-204].

<sup>(35)</sup> Cfr. L. BRUSOTTI, (1), c) pag. 198-202; una applicazione in L. BRUSOTTI, (1), g), pag. 820; altre in L. BRUSOTTI, (1), e), pag. 324. Si parte da un fascio ottenuto aggregando al modello d'ordine  $n$  una componente fissa, d'ordine  $n' - n$ , reale ma priva di punti reali, indi se ne trae un modello privo di componente fissa.

<sup>(36)</sup> Si attribuisce cioè al termine « *famiglia* » un significato analogo a quello usato p. e. per le curve algebriche; cfr. F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig und Berlin, 1921), Anhang G. pag. 353-354.



Proposto dunque  $f$  in uno dei modi indicati, il problema più esauriente sarà quello di determinare tutti i tipi a meno di omeomorfismi per il fascio  $\Phi$  delle parti reali delle curve di  $f$ .

Converrà però supporre  $f$  algebricamente generico, onde  $\Phi$  risulti (num. 29) topologicamente generico.

Il problema così presentato offre tuttavia difficoltà non lievi anche nei casi più semplici, come già prova il caso delle curve piane, ove  $f$  si pensi genericamente assunto fra i fasci reali di curve d'ordine  $n$  assegnato<sup>(37)</sup>.

Giova quindi sostituirlo con problemi meglio accessibili, p. es. tenendo presente il solo aspetto numerativo della questione.

Allora (num. 30) lo studio di  $f$  induce a tener presenti i caratteri

$$(37) \quad b, c, p, I,$$

quello di  $\Phi$  invece:

$$(38) \quad b, c, c', c'', Z.$$

I caratteri (37) peraltro possono ridursi a tre soli, ad es.:

$$(39) \quad b, c, I,$$

facendo uso della (31).

I caratteri (38) possono ridursi a tre opportunamente assunti, p. es.:

$$(40) \quad b, c, Z,$$

permettendo le (16) di ricavarne  $c'$  e  $c''$ , oppure:

$$(41) \quad b, c', c''.$$

essendo allora  $c$  e  $Z$  deducibili mediante le (15), (30).

Si assumano p. es. i caratteri (39) e (40); allora come condizioni necessarie perchè le parti reali delle curve reali di un fascio  $f$  di caratteri (39) formino un fascio  $\Phi$  di caratteri (40), in virtù delle (27), (28), (32), (25), (26), (36), si presentano le seguenti:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} b \equiv \bar{b} \pmod{2}, \\ c \equiv \bar{c} \pmod{2}, \\ Z \equiv I \pmod{2}, \\ b \leq \bar{b}, \\ c \leq \bar{c}, \\ -(b+c) \leq Z \leq c, \end{array} \right.$$

l'ultima delle quali (Oss. a num. 30) eventualmente sostituibile con altra più espressiva.

<sup>(37)</sup> Effettivamente il problema è risolto nella sua interezza solo per i casi elementari  $n=1, 2$ .

Per  $n=3$  esso è risolto soltanto nell'ipotesi che i punti-base siano tutti reali ( $b=9$ ) in H. MOHRMANN, (4), con un metodo non facilmente estendibile ai fasci per cui sia  $b < 9$ .

Ma in generale tali condizioni non risultano sufficienti, onde per ciascuna delle terne (40) soddisfacenti alle (42), od a quelle più espressive che possano sostituirle, sorge un problema esistenziale da risolversi con metodo appropriato al singolo caso; particolare interesse ha il « caso di massimo »:

$$b = b, \quad c = c$$

per opportuna scelta di  $Z$  <sup>(38)</sup>.

OSSERVAZIONE. - Le condizioni (42) (o quelle sempre d'indole numerativa che le sostituiscano) vincolano la struttura e la « annotazione » del singramma  $S$  rappresentante  $\Phi$ .

Ne vincola più propriamente la « quotazione » la diretta considerazione del genere  $p$  della generica curva di  $f$ , in relazione al teorema di HARNACK <sup>(39)</sup> per cui una curva reale di tal genere non può possedere più di  $p + 1$  circuiti.

Potrà bensì una singola curva reale di  $f$  possedere più di  $p + 1$  circuiti ma quando cessi di essere irriducibile e quindi in rispondenza ad uno dei vertici del singramma immagine di incrocio.

La restrizione imposta dal teorema di HARNACK si riconurrà alla circostanza che, nel modello proiettivo di num. 16, ciascun piano del fascio  $F$

<sup>(38)</sup> Per il fascio  $f$  di curve piane algebriche d'ordine assegnato  $n$ , si ha  $Z = 1$  e le (42) possono sostituirsi [L. BRUSOTTI, <sup>(1)</sup>,  $g$ ], pag. 793] colle condizioni necessarie più espressive:

$$(42)^* \quad \begin{cases} b \equiv c + 1 \equiv n \pmod{2} \\ b \leq n^2 \\ b - 1 \leq c \leq 3(n - 1)^2, \text{ per } b > 0 \\ 3 \leq c \leq 3(n - 1)^2, \text{ per } b = 0. \end{cases}$$

Così posto il problema numerativo, ha intanto risposta affermativa il quesito sul caso  $b = n^2$ ,  $c = 3(n - 1)^2$  di massimo [L. BRUSOTTI, <sup>(1)</sup>,  $b$ ]; <sup>(1)</sup>,  $g$ ], pag. 807] e pur quello sull'esistenza di fasci con numero minimo di punti-base reali ( $b = 0, 1$  risp. per  $n$  pari, dispari) e massimo  $c = 3(n - 1)^2$  di centri critici; anzi, per  $b = 0$  si dimostrano accettabili tutti i valori di  $c$  compatibili colle (42)\*. Per tutti questi e per ulteriori teoremi esistenziali più generali di meno breve enunciato cfr. ancora L. BRUSOTTI, <sup>(1)</sup>,  $g$ ).

Nel caso elementare  $n = 2$ , delle coppie  $b, c$  soddisfacenti alle (42)\* sono notoriamente accettabili soltanto le  $b = 0, c = 3$ ;  $b = 2, c = 1$ ;  $b = 4, c = 3$  e non la  $b = 2, c = 3$ .

Per il caso  $n = 3$ , la questione fu trattata nella dissertazione di laurea non pubblicata di G. GALLUS, *Sui fasci reali di cubiche piane*, Cagliari 1926-27, con risposta affermativa per tutte le coppie  $b, c$  soddisfacenti alle (42)\*, salvo per la  $b = 7, c = 12$ , la cui accettabilità rimane dubbia; per talune coppie di valori cfr. anche J. E. WRIGHT, <sup>(1)</sup>; H. MOHRMANN, <sup>(1)</sup>; L. BRUSOTTI, <sup>(1)</sup>  $f, g, h$ ).

L'esistenza del « caso di massimo » fu dimostrata per ogni famiglia di curve algebriche sulla quadrica a punti iperbolici ( $Z = 2$ ) in L. BRUSOTTI <sup>(2)</sup>. Il problema analogo per la quadrica a punti ellittici ( $Z = 0$ ), sulla quale sono da considerare solo fasci di intersezioni complete, dà risultato negativo per  $n = 2$  (colle sole coppie accettabili  $b = 2, c = 0$ ;  $b = 0, c = 2$ ); mentre per  $n = 4$  l'esistenza del « caso di massimo » si riconduce in proiezione stereografica a quella del ricordato caso dubbio per i fasci di cubiche piane.

<sup>(39)</sup> A. HARNACK *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven* [Math. Ann., 10 (1876), pag. 189-198].

tagli il singramma  $S$  in  $p + 1$  punti al più; ma essa potrà sempre tradursi in vincoli operanti sul singramma astratto.

Così, in relazione alla distribuzione delle quote, verrà limitata superiormente la classe per gli spigoli non affetti da ciclo.

Pressochè immediata è l'applicazione di tali criteri ai casi  $p = 0$  e  $p = 1$ , in cui i possibili singrammi annotati e quotati si riducono a tipi assai semplici.

33. I fasci reali di curve algebriche finora presi in esame, come è stato esplicitamente indicato (num. 29), sono *razionali*, ed in vista del loro studio è stata qui preordinata la teoria dei fasci di curve grafiche.

Tuttavia, cogli opportuni adattamenti, essa è applicabile anche ai fasci irrazionali.

Invero un fascio  $f$  irrazionale reale di curve algebriche sopra una superficie algebrica reale  $\Omega$ , considerate le curve come elementi ed inteso il fascio come ente algebrico  $\infty'$ , potrà assimilarsi ad una curva algebrica reale  $\Gamma$ , i cui punti siano immagini delle curve di  $f$ , curve reali avendo immagini reali.

Supposta  $\Gamma$  irriducibile di genere  $\pi$ , la sua parte reale conterà di  $a$  circuiti

$$\xi_1, \dots, \xi_a$$

con

$$0 < a \leq \pi + 1,$$

come risulta dal teorema di HARNACK [cfr. (39)], escludendosi il valore  $a = 0$ , quando, come qui sempre si è supposto, sia  $\Omega$  dotata di parte reale.

In generale tra i punti di un circuito  $\xi_j$ , tutti od alcuni saranno immagini di curve reali dotate di parte reale (ed anzi, nelle ipotesi attuali, ciò avverrà per uno almeno dei circuiti  $\xi_j$ ).

Allora le parti reali delle curve di  $f$  aventi come immagini i punti di  $\xi_j$  costituiranno un fascio  $\Phi_j$  di curve grafiche, secondo la definizione introdotta nel presente lavoro; se  $f$  è algebricamente generico, ciascuno dei fasci  $\Phi_j$  risulterà topologicamente generico.

Ogni fascio  $\Phi_j$  sarà rappresentabile con un singramma  $S_j$  annotato e quotato; ma le quotazioni di due distinti singrammi  $S_j$  dovranno considerarsi fra di loro affatto indipendenti.

Sotto l'aspetto così chiarito, le presenti premesse topologiche potranno utilizzarsi anche in tale campo più ampio.