Problemi relativi alle caratteristiche per sistemi di equazioni semilineari a derivate parziali (*).

Maria Cinquini Cibrario (Pavia)

Sunto. – *È considerato il sistema di tipo iperbolico di equazioni semilineari a derivate parziali*

$$\text{(I)} \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x,y)\big(p_j(x,y)+\varrho_i(x,y)q_j(x,y)\big)=f_i\big(x,y;z_1(x,y),\dots,z_m(x,y)\big)\,, \qquad (i=1,\dots,m)\,;$$

nella teoria delle curve caratteristiche del sistema (I), *intese in senso generalizzato, sono dimostrati un teorema di unicità e un teorema di dipendenza continua dai dati, considerando come soluzione* (*in senso generalizzato*) *del sistema* (I) *una m-pla di funzioni* $z_1(x,y),\dots,z_m(x,y)$ *lipschitziane nel complesso delle variabili e soddisfacenti il sistema* (I) *quasi ovunque nel proprio campo di definizione.*

Introduzione.

Molti anni fa mi ero occupata, in successivi lavori, della teoria delle caratteristiche per un sistema di tipo iperbolico di equazioni a derivate parziali in due variabili indipendenti, sia nel caso in cui le equazioni stesse siano quasi lineari, sia nel caso in cui esse siano non lineari; la teoria era sviluppata, partendo da alcuni teoremi di esistenza e di unicità, ottenuti nell'indirizzo classico (1).

Successive ricerche, sia mie che di S. Cinquini (2), sono state rivolte ad estendere alle equazioni a derivate parziali l'ordine di idee che C. Carathéodory (3) aveva introdotto per le equazioni differenziali ordinarie; in particolare ho ottenuto, sotto ipotesi molto ampie, teoremi di esistenza e di unicità relativi al problema di

---

(*) Entrato in Redazione il 18 giugno 1975.

(1) Una breve esposizione dei risultati di tali ricerche è contenuta nel volume M. Cinquini Cibrario, S. Cinquini [1] (i numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della presente memoria), Cap. V, § 4, nn. 13-17, pp. 430-441; § 5, n. 20, pp. 444-449. Per le indicazioni bibliografiche dei lavori di M. Cinquini Cibrario sull'argomento rinviamo per brevità ai l.c. di tale volume.

(2) Una esposizione di alcune di tali ricerche è contenuta nel volume citato in (1), Cap. IV, pp. 301-384, e anche, nel caso di due variabili indipendenti, Cap. V, § 2, n. 6, pp. 397-421. Cfr. anche M. Cinquini Cibrario [3]-[9], S. Cinquini [1]-[8]; si fa presente al lettore che nella bibliografia posta alla fine della presente Memoria sono citati soltanto i lavori di tali autori, posteriori al volume citato in (1); per i lavori anteriori si rimanda per brevità alla bibliografia posta alla fine dei Cap. IV e V di tale volume.

(3) C. Caratheodory [1], Cap. XI, pp. 665-688.

CAUCHY per il sistema di equazioni quasi lineari in $r+1$ variabili indipendenti

$$(a)\qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots))\left(\frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{r} \varrho_{ik}(\ldots)\frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial y_k}\right) = f_i(\ldots\ldots), \qquad (i=1, \ldots, m)$$

nel campo funzionale costituito dalle m-ple di funzioni $z_1(x, y_1, \ldots, y_r), \ldots, z_m(x, y_1, \ldots, y_r)$, assolutamente continue in x, lipschitziane nel complesso delle variabili $(y_1, \ldots, y_r)$ e soddisfacenti il sistema stesso quasi ovunque nel proprio campo di definizione; ho pure esteso i risultati a un sistema non lineare del tipo

$$(b)\qquad \frac{\partial z_i(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} = f_i(x, y_1, \ldots, y_r; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots.)), \qquad (i=1, \ldots, m).$$

D'altra parte S. CINQUINI ha dimostrato teoremi di unicità relativi al problema di CAUCHY per i sistemi (a) e (b) sotto ipotesi e in campi funzionali più ampi di quelli considerati da me.

Riprendendo i miei lavori citati in ([1]), relativi alla teoria delle caratteristiche nel caso di due variabili indipendenti, ho pensato di sviluppare tale teoria nell'ordine di idee dei lavori citati in ([2]); nel presente lavoro sono stabiliti un teorema di unicità e un teorema di dipendenza continua dai dati per il sistema di tipo iperbolico di equazioni semilineari a derivate parziali in due variabili indipendenti, già ridotto in forma caratteristica

$$(\mathrm{I})\qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y)(p_j(x, y) + \varrho_i(x, y) q_j(x, y)) =$$
$$= f_i(x, y; z_1(x, y), \ldots, z_m(x, y)), \qquad (i=1, \ldots, m),$$

dove

$$p_j(x, y) = \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x}, \qquad q_j(x, y) = \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial y}, \qquad (i=1, \ldots, m).$$

La natura dei problemi, studiati nel presente lavoro, ha richiesto ipotesi alquanto più restrittive, rispetto a quelle introdotte nelle ricerche, citate in ([2]). Nel § 1, dopo alcune considerazioni introduttive, è dimostrato un teorema di unicità, nel § 2 un teorema di dipendenza continua dai dati.

§ 1.

1. – Preliminari.

a) Nel presente lavoro è intesa come soluzione (in senso generalizzato) del sistema semilineare (I) in un campo Δ del piano (x, y) una m-pla di funzioni

$$(1)\qquad z_1(x, y), z_2(x, y), \ldots, z_m(x, y), \qquad ((x, y) \text{ in } \Delta),$$

le quali sono lipschitziane nel complesso delle variabili e soddisfano il sistema (I) quasi ovunque nel campo Δ ([4]).

b) Le funzioni

$$\varrho_1(x, y),\ \varrho_2(x, y), \ldots, \varrho_m(x, y) \tag{2}$$

sono, come è noto, le radici caratteristiche del sistema (I).

Le funzioni (2) siano continue nel loro campo di definizione, e inoltre valga una delle seguenti ipotesi

1) *Le m radici caratteristiche* (2) *siano a due a due distinte in ogni punto del loro campo di definizione.*

2) *Se le radici caratteristiche* (2) *non sono tutte distinte, l'ordine di molteplicità di ognuna di esse sia costante in tutto il loro campo di definizione. Indicate con*

$$\sigma_1(x, y),\ \sigma_2(x, y), \ldots, \sigma_\mu(x, y) \tag{3}$$

le radici caratteristiche del sistema (I) *a due a due distinte e con $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu$ i loro ordini di molteplicità* $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\mu = m)$, *valgano le*

$$\left\{\begin{array}{llll} \varrho_1(x, y) & = \varrho_2(x, y) & = \ldots = \varrho_{\nu_1}(x, y) & = \sigma_1(x, y)\,, \\ \varrho_{\nu_1+1}(x, y) & = \varrho_{\nu_1+2}(x, y) & = \ldots = \varrho_{\nu_1+\nu_2}(x, y) & = \sigma_2(x, y)\,, \\ \multicolumn{4}{l}{\dotfill} \\ \varrho_{m-\nu_\mu+1}(x, y) & = \varrho_{m-\nu_\mu+2}(x, y) & = \ldots = \varrho_m(x, y) & = \sigma_\mu(x, y)\,. \end{array}\right. \tag{4}$$

Nel seguito, anche nel caso delle radici caratteristiche multiple, il sistema semilineare è scritto nella forma (I), tenendo presenti le posizioni (4).

c) Una $(m+1)$-pla di funzioni

$$y = \eta_1(x)\,, \qquad z_i = Z_i(x)\,, \qquad (i = 1, \ldots, m)\,, \tag{5}$$

definite in un intervallo (x', x''), con $\eta_1(x)$ di classe $C^{(1)}$ e $Z_i(x)$ lipschitziane in tale intervallo, è detta *curva caratteristica* (in senso generalizzato) del sistema (I) corrispondente alla radice caratteristica $\sigma_1(x, y)$ di molteplicità ν_1, se per ogni x di (x', x'') tutti i punti $(x, \eta_1(x), Z_1(x), \ldots, Z_m(x))$ appartengono al campo di definizione delle funzioni $A_{ij}(x, y)$, $\varrho_i(x, y)$, $f_i(x, y; z_1, \ldots, z_m)$ e inoltre la

$$\eta_1'(x) = \sigma_1(x, \eta_1(x)) \tag{6_1}$$

([4]) Il campo funzionale considerato è quindi meno ampio di quello introdotto nei lavori citati in ([2]) relativi al problema di Cauchy; ciò è nella natura dei problemi relativi alla teoria delle caratteristiche, nella quale le variabili (x, y) hanno lo stesso ufficio.

è soddisfatta per ogni x di (x', x''), e le

$$(6_2) \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, \eta_1(x)) Z_j'(x) = f_i(x, \eta_1(x); Z_1(x), \ldots, Z_m(x)), \qquad (i = 1, \ldots, \nu_1)$$

sono soddisfatte per quasi tutti gli x di (x', x'') (5).

d) Si dice che la curva caratteristica (5) appartiene all'integrale (1) del sistema (I), se esiste un intervallo (x_1, x_2), con $x' \leqslant x_1 < x_2 \leqslant x''$), tale che l'arco di curva $y = \eta_1(x)$, (x_1, x_2) appartiene al campo Δ e inoltre valgono le

$$(7) \qquad z_i(x, \eta_1(x)) = Z_i(x), \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

2. – Teorema di unicità.

Le funzioni $A_{ij}(x, y)$, $(i, j = 1, \ldots, m)$ *siano definite nel campo*

$$D_\infty: \ -a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \qquad -\infty < y + \infty, \qquad (a_1 > 0, \ a_2 > 0)$$

e siano ivi lipschitziane nel complesso delle variabili. Se A *è il determinante, i cui elementi sono* $A_{ij}(x, y)$, $(i, j = 1, \ldots, m)$, *in tutto* D_∞ *sia*

$$(8) \qquad A = 1.$$

Le funzioni $\varrho_i(x, y)$, $(i = 1, \ldots, m)$ *siano definite nel campo* D_∞ *e siano ivi continue nel complesso delle variabili; in ogni punto del campo* D_∞ *esistano finite le derivate* $\partial\varrho_i(x, y)/\partial y$, $(i = 1, \ldots, m)$, *le quali, in corrispondenza ad ogni* y *reale sono quasi continue in* x *in* $(-a_1, a_2)$, *e, in corrispondenza ad ogni* x *di* $(-a_1, a_2)$, *sono continue in* y*; esistano due funzioni* $M(x)$, $L(x)$, *quasi continue, non negative e integrabili* (6), *tali che, in corrispondenza a quasi tutti gli* x *di* $(-a_1, a_2)$, *sia*

$$(9) \qquad |\varrho_i(x, y)| \leqslant M(x), \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

per tutti gli y *reali, e*

$$(10) \qquad |\varrho_i(x, y) - \varrho_i(x, \bar{y})| \leqslant L(x)|y - \bar{y}|, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

per tutte le coppie $(y, \bar{y})$ *di numeri reali, così che, per quasi tutti gli* x *di* $(-a_1, a_2)$, *è*

$$(11) \qquad \left|\frac{\partial\varrho_i(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant L(x), \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

(5) Nella teoria sviluppata nei nostri lavori indicati in (1) le $Z_i(x)$ sono supposte di classe $C^{(1)}$ in (x', x''), e le (6_2) sono supposte soddisfatte *in ogni punto* dell'intervallo (x', x'').

(6) L'integrabilità è intesa nel senso di Lebesgue.

Le funzioni

(12) $$f_i(x, y; z_1, \ldots, z_m), \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

siano definite nel campo

$$C_\infty: -a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z_1 < +\infty, \ldots, \quad -\infty < z_m < +\infty,$$

e siano ivi continue nel complesso delle variabili; esista una costante L_1 *tale che, in corrispondenza ad ogni punto* (x, y) *del campo* D_∞, *valgano le*

(13) $$|f_i(x, y; z_1, \ldots, z_m) - f_i(x, y; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)| \leqslant L_1 \sum_{j=1}^{m} |z_j - \bar{z}_j|, \quad (i = 1, \ldots, m)$$

per tutte le coppie di m-ple reali $(z_1, \ldots, z_m)$, $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)$.

Valga l'ipotesi 1) *o più in generale* 2) *del n.* 1 *b*); *sia* ν_1 *l'ordine di molteplicità della radice caratteristica* $\sigma_1(x, y)$, *così che valgano le prime* ν_1 *tra le* (4), *e per* $-a_1 \leqslant x \leqslant a_2$ *sia*

(5) $$y = \eta_1(x), \qquad z_i = Z_i(x), \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

una curva caratteristica del sistema corrispondente a tale radice con $\eta_1(x)$ *di classe* $C^{(1)}$ *e* $Z_i(x)$ *lipschitziane in* $(-a_1, a_2)$.

La funzione di classe $C^{(1)}$ *in* $(-a_1, a_2)$

(14) $$y = \eta_2(x), \qquad (-a_1 \leqslant x \leqslant a_2)$$

soddisfi in tutto $(-a_1, a_2)$ *l'equazione differenziale ordinaria*

(15) $$\eta_2'(x) = \sigma_2(x, \eta_2(x)).$$

Valga inoltre la [7]

(16) $$\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0.$$

Siano assegnate in $(-a_1, a_2)$ *le funzioni continue* $b_{ij}(x)$, $(i = 1, \ldots, \nu_1; j = 1, \ldots, m)$, $G_i(x)$, $(i = 1, \ldots, \nu_1)$, *soddisfacenti in tutto* $(-a_1, a_2)$ *la*

(17) $$\begin{vmatrix} b_{11}(x) \ldots b_{1m}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{\nu_1 1}(x) \ldots b_{\nu_1 m}(x) \\ A_{\nu_1+1,1}(x) \ldots A_{\nu_1+1,m}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m,1}(x) \ldots A_{m,m}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

---

[7] La condizione (16) evidentemente non è restrittiva; è imposto che le curve $y = \eta_1(x)$, $y = \eta_2(x)$ si incrocino in un punto interno all'intervallo $(-a_1, a_2)$.

e inoltre le

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij}(0) Z_j(0) = G_i(0) , \qquad (i = 1, \ldots, \nu_1) . \tag{18}$$

In tali ipotesi non può esistere più di una m-pla di funzioni

$$z_1 = z_1(x, y),\ z_2 = z_2(x, y),\ \ldots,\ z_m = z_m(x, y) , \tag{1}$$

le quali sono definite in un opportuno campo Δ (8), *sono ivi lipschitziane, soddisfano in quasi tutto Δ il sistema*

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y)\big(p_j(x, y) + \varrho_i(x, y) q_j(x, y)\big) = \tag{I}$$
$$= f_i(x, y; z_1(x, y), \ldots, z_m(x, y)) , \qquad (i = 1, \ldots, m) ,$$

e inoltre soddisfano le

$$z_i(x, \eta_1(x)) = Z_i(x) , \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{19}$$

identicamente in $(-a_1, a_2)$, *e nei punti della curva* (14) *appartenenti al campo Δ soddisfano le*

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x) z_j(x, \eta_2(x)) = G_i(x) , \qquad (i = 1, \ldots, \nu_1) , \tag{20}$$

cioè non può esistere più di un integrale del sistema (I) (*in senso generalizzato*), *a cui appartiene la curva caratteristica* (5), *e che soddisfa le ν_1 condizioni* (20) *nei punti della curva* (14), *appartenenti al campo Δ.*

a) Poichè $\sigma_1(x, y)$, $\sigma_2(x, y)$ sono distinte in tutto il campo D_∞, si supponga, per fissare le idee, che sia

$$\sigma_1(x, y) < \sigma_2(x, y) \tag{21}$$

in tutto D_∞; allora, tenuto conto della (16), le curve

$$\gamma_1\colon y = \eta_1(x) ,\ (-a_1 \leqslant x \leqslant a_2) ; \qquad \gamma_2\colon y = \eta_2(x),\ (-a_1 \leqslant x \leqslant a_2)$$

si incrociano nell'origine e non possono avere altri punti in comune (9); è dunque

$$\eta_1(x) > \eta_2(x) ,\ (-a_1 \leqslant x < 0) ; \qquad \eta_1(x) < \eta_2(x) ,\ (0 < x \leqslant a_2) . \tag{22}$$

---

(8) Il campo Δ viene definito nel corso della dimostrazione (cfr. capoverso *d*)).

(9) Cfr. M. CINQUINI CIBRARIO [1], § 1, Teorema III, pp. 27-28, e [2], Teorema I, pp. 115-116.

b) Indicate (qui e spesso nel seguito) con (X, Y) le coordinate correnti, sia $\sigma_r(X, Y)$ $(1 \leqslant r \leqslant \mu)$ una qualsiasi delle radici caratteristiche del sistema (I); in virtù dei noti teoremi di esistenza e di unicità di C. CARATHÉODORY [10], se (x, y) è un punto fissato del campo D_∞, l'equazione differenziale, scritta in forma integrale

$$g_r(X; x, y) = y + \int_x^X \sigma_r\big(t, g_r(t; x, y)\big)\, dt \tag{23}$$

ammette un'unica soluzione, definita nell'intervallo $-a_1 \leqslant X \leqslant a_2$; in particolare, in virtù delle (6_1), (15), (16) [11], risulta

$$\eta_1(X) = g_1(X; 0, 0)\,, \qquad \eta_2(X) = g_2(X; 0, 0)\,, \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2)\,. \tag{24}$$

Inoltre se è $1 \leqslant s \leqslant \mu$, $s \neq r$, le curve

$$Y = g_r(X; x, y)\,, \qquad Y = g_s(X; x, y)\,, \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2)$$

non hanno punti in comune nel campo

$$-a_1 \leqslant X \leqslant a_2\,, \qquad -\infty < Y < +\infty$$

all'infuori del punto (x, y) [12]. In tutto il campo

$$-a_1 \leqslant X \leqslant a_2, \quad -a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \quad -\infty < y < +\infty$$

esistono finite le derivate

$$\frac{\partial g_r(X; x, y)}{\partial x} = -\sigma_r(x, y) \exp\left[I_r(X; x, y)\right], \tag{25_1}$$

$$\frac{\partial g_r(X; x, y)}{\partial y} = \exp\left[I_r(X; x, y)\right], \tag{25_2}$$

dove

$$I_r(X; x, y) = \int_x^X \frac{\partial \sigma_r\big(t, g_r(t; x, y)\big)}{\partial Y}\, dt\,, \tag{26}$$

e tali derivate sono continue nel complesso delle variabili $(X; x, y)$ [13].

---

[10] C. CARATHÉODORY [1], Cap. XI, pp. 665-688; in particolare n. 582, pp. 672-674, n. 583, pp. 674-675; poichè le $\sigma_r(X, Y)$ sono supposte continue nel complesso delle variabili, $g_r(X; x, y)$ è soluzione della equazione differenziale in senso classico.

[11] Nelle (6_1), (15) va assunta X come coordinata corrente; la (6_1) è soddisfatta per $-a_1 \leqslant X \leqslant a_2$.

[12] Cfr. l.c. in [9].

[13] C. CARATHÉODORY [1], Cap. XI, nn. 589, 590, 591, pp. 682-687; M. VOLPATO [1], e anche E. J. MC SHANE [1], Cap. V, n. 39, pp. 216-217; Cap. IX, n. 69, pp. 348-365. I risultati citati devono essere completati con considerazioni, che tengono conto delle ipotesi fatte sulle $\sigma_r(x, y)$.

c) Tenute presenti le (24), si considerino le curve σ_1, σ_2 di equazioni rispettive

$$(27_1)\qquad Y = g_1(X;\, -a_1,\, \eta_2(-a_1))\,, \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2)\,,$$

$$(27_2)\qquad Y = g_1(X;\, a_2,\, \eta_2(a_2))\,, \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2)\,,$$

uscenti dagli estremi della curva γ_2, e le curve σ_3, σ_4 di equazioni

$$(27_3)\qquad Y = g_2(X;\, -a_1,\, \eta_1(-a_1))\,, \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2)\,,$$

$$(27_4)\qquad Y = g_2(X;\, a_2,\, \eta_1(a_2))\,, \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2)\,,$$

uscenti dagli estremi della curva γ_1.

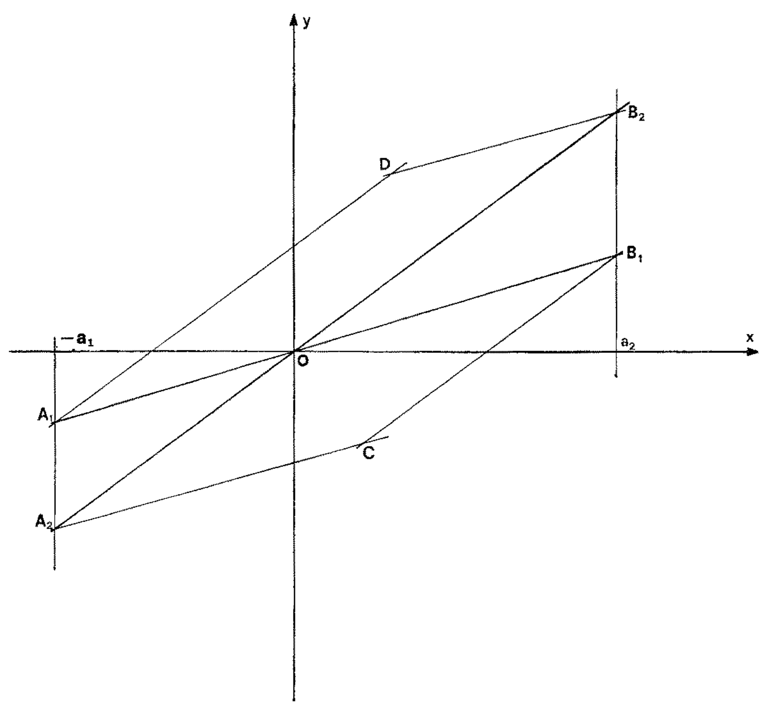

Figura 1

Con semplici considerazioni si prova che le curve (27_1) e (27_4) hanno un punto in comune di ascissa X_1, con $a_1 < X_1 < a_2$, e ordinata Y_1 con $Y_1 < \eta_1(X_1)$, $Y_1 < \eta_2(X_1)$, e analogamente che le curve (27_2) e (27_3) hanno un punto in comune di ascissa X_2, $(-a_1 < X_2 < a_2)$ e ordinata Y_2 con $Y_2 > \eta_1(X_2)$, $Y_2 > \eta_1(X_2)$. Indicate sempre con (X, Y) le variabili, sia $\Delta^{[1]}$ il campo chiuso (cfr. fig. 1), limitato da archi delle curve (27) e dai segmenti

$$X = -a_1\,, \quad \eta_2(-a_1) \leqslant Y \leqslant \eta_1(-a_1)\,; \qquad X = a_2\,, \quad \eta_1(a_2) \leqslant Y \leqslant \eta_2(a_2)\,.$$

Se (x, y) è un punto del campo $\Delta^{[1]}$, la curva

$$Y = g_2(X; x, y), \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2)$$

incontra la curva γ_1 in un unico punto di ascissa $X = \psi(x, y)$, e la curva

$$Y = g_1(X; x, y), \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2)$$

incontra la curva γ_2 in un unico punto di ascissa $X = \chi(x, y)$ ([14]).

Tenuto conto delle (24), le funzioni $\psi(x, y)$, $\chi(x, y)$ soddisfano le

$$(28_1) \qquad g_2(\psi(x, y); x, y) = \eta_1(\psi(x, y)),$$

$$(28_2) \qquad g_1(\chi(x, y); x, y) = \eta_2(\chi(x, y)).$$

Le ipotesi fatte circa le funzioni $\sigma_1(x, y)$, $\sigma_2(x, y)$ assicurano che le funzioni $\psi(x, y)$, $\chi(x, y)$ sono continue, assieme alle loro derivate prime nel campo $\Delta^{[1]}$; con qualche calcolo, tenuto conto delle (25), si ottengono le

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} = \dfrac{-\sigma_2(x, y)\exp\left[I_2(\psi(x, y); x, y)\right]}{\sigma_1(\psi(x, y), \eta_1(\psi(x, y))) - \sigma_2(\psi(x, y), \eta_1(\psi(x, y)))}, \\[2ex] \dfrac{\partial\psi(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\exp\left[I_2(\psi(x, y); x, y)\right]}{\sigma_1(\psi(x, y), \eta_1(\psi(x, y))) - \sigma_2(\psi(x, y), \eta_1(\psi(x, y)))}, \\[2ex] \dfrac{\partial\chi(x, y)}{\partial x} = \dfrac{-\sigma_1(x, y)\exp\left[I_1(\chi(x, y); x, y)\right]}{\sigma_2(\chi(x, y), \eta_2(\chi(x, y))) - \sigma_1(\chi(x, y), \eta_2(\chi(x, y)))}, \\[2ex] \dfrac{\partial\chi(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\exp\left[I_1(\chi(x, y); x, y)\right]}{\sigma_2(\chi(x, y), \eta_2(\chi(x, y))) - \sigma_1(\chi(x, y), \eta_2(\chi(x, y)))}. \end{cases}$$

d) Indicate ancora con (X, Y) le coordinate correnti, distinguiamo quattro casi, tenendo presente la (21) e il fatto che le $\sigma_r(X, Y)$, $(r = 1, \ldots, \mu)$ sono tutte distinte.

1) Sia $\sigma_1(X, Y) < \sigma_2(X, Y) < \sigma_r(X, Y)$, $(r = 3, \ldots, \mu)$ in tutto il campo $-a_1 \leqslant \leqslant X \leqslant a_2$, $-\infty < Y < +\infty$; allora, se (x, y) è un punto qualsiasi del campo $\Delta^{[1]}$, la curva $Y = g_r(X; x, y)$ (dove r è uno qualsiasi dei numeri $3, \ldots, \mu$) incontra in un punto di ascissa $X = \psi_r(x, y)$ la curva γ_1, come si può vedere immediatamente; nel presente caso il campo Δ, in cui viene dimostrato il teorema di unicità, coincide con il campo $\Delta^{[1]}$, definito nel capoverso *c*) (cfr. fig. 1; il campo $\Delta \equiv \Delta^{[1]}$ è il campo ([15]) $A_1A_2CB_1B_2D$).

([14]) Ciò segue da semplici considerazioni circa l'andamento delle curve in questione e anche dai risultati citati in ([9]).

([15]) Nelle figure, per semplicità, le curve caratteristiche sono rappresentate da rette; inoltre nei campi $\Delta^{(1)}$ e Δ sono assunte come coordinate correnti (x, y).

2) Esistono alcune tra le $\sigma_r(X, Y)$, $(r = 3, ..., \mu)$ minori di $\sigma_1(X, Y)$ e sia $\sigma_h(X, Y)$ la massima tra esse; sia inoltre $\sigma_k(X, Y)$ la minima tra le $\sigma_r(X, Y)$ maggiori di $\sigma_1(X, Y)$; nel presente caso 2) sia $k > 2$; si considerino le curve

$$(30_1) \qquad Y = g_k(X; -a_1, \eta_1(-a_1)), \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2),$$

$$(30_2) \qquad Y = g_h(X; a_2, \eta_1(a_2)), \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2),$$

delle quali la seconda incontra certamente in un punto M_1 l'arco della curva $Y = \eta_2(X)$, corrispondente a $X > 0$, la prima può incontrarlo in un punto M_2 oppure no; nel primo caso si indichi con M quello tra i punti M_1, M_2 di ascissa minore, nel secondo si indichi con M il punto M_1. Indicate con $(x_3, \eta_2(a_3))$ le coordinate del punto M e supposto, p. es., che il punto M appartenga alla curva (30_2), si consideri l'arco della curva

$$(31) \qquad Y = g_1(X; a_3, \eta_2(a_3)), \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2),$$

corrispondente a $-a_1 \leqslant X \leqslant a_3$, il quale incontra certamente in un punto la curva (30_1) ([16]). In modo analogo si considerino le curve

$$(32_1) \qquad Y = g_h(X; -a_1, \eta_1(-a_1)), \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2),$$

$$(32_2) \qquad Y = g_k(X; a_2, \eta_1(a_2)), \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2),$$

delle quali la prima incontra in un punto N_1 l'arco della curva $Y = \eta_2(X)$, corrispondente a $X < 0$, la seconda può incontrarlo in un punto N_2 oppure non incontrarlo; nel primo caso si indichi con N quello tra i punti N_1 e N_2, che ha minore il valore assoluto dell'ascissa, nel secondo si indichi con N il punto N_1; siano $(a_4, \eta_2(a_4))$ le coordinate del punto N. Supposto, p. es., che N appartenga alla curva (32_1) si consideri l'arco della curva

$$(33) \qquad Y = g_1(X; a_4, \eta_2(a_4)), \qquad (-a_1 \leqslant X \leqslant a_2),$$

corrispondente ad $a_4 \leqslant X \leqslant a_2$, il quale incontra in un punto K la curva (32_2) ([17]). Il campo Δ è il campo, del cui contorno fanno parte gli archi considerati delle curve (30_1), (30_2), (31), (32_1), (32_2), (33) (cfr. fig. 2, campo A_1NKB_1MH).

3) Valgano le ipotesi del precedente capoverso, ma sia $k = 2$; in tale caso il punto M coincide con il punto M_1 e il punto N con il punto N_1; considerati ancora l'arco della curva (31) corrispondente a $-a_1 \leqslant X \leqslant a_3$, e l'arco della curva (33) corrispondente ad $a_4 \leqslant X \leqslant a_2$, essi incontrano rispettivamente le curve (27_3) e (27_4) nei punti H e K; il campo Δ è limitato da archi delle curve di equazioni (27_3), (27_4), (30_2), (31), (32_1), (33).

([16]) Se M appartiene alla curva (30_1), si considera l'arco della curva (31) corrispondente ad $a_3 \leqslant X \leqslant a_2$, il quale incontra in un punto H la curva (30_2).

([17]) Se N appartiene alla curva (32_2), si considera l'arco della curva (33), corrispondente a $-a_1 \leqslant X \leqslant a_4$, il quale incontra in un punto K la curva (32_1).

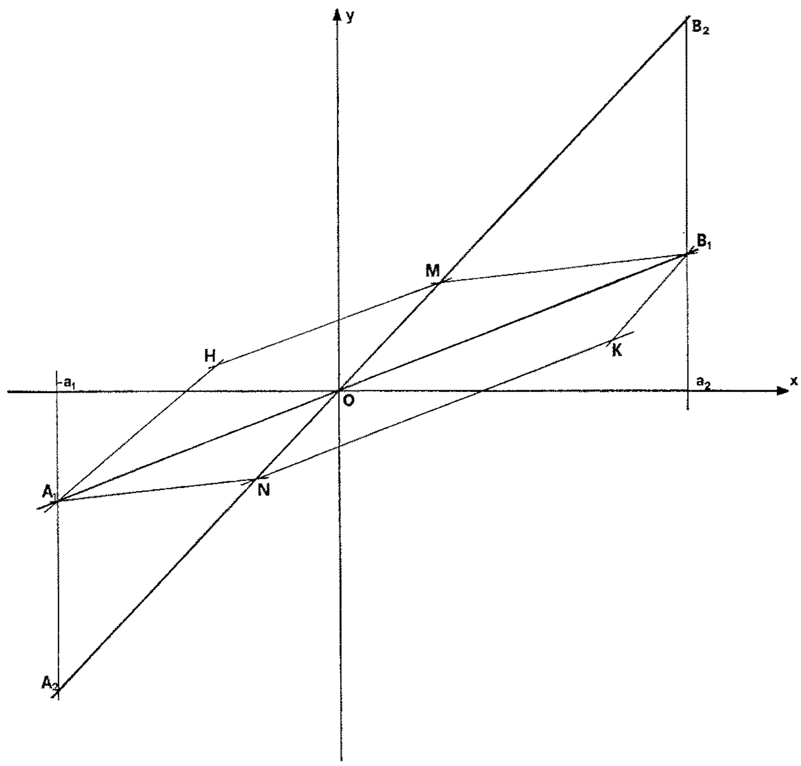

Figura 2

4) Sia $\sigma_1(X, Y) < \sigma_r(X, Y)$, $(r = 2, \ldots, \mu)$; sia $\sigma_k(X, Y)$ la minima tra le $\sigma_r(X, Y)$, $(r = 2, \ldots, \mu)$, e sia inoltre $k > 2$ ([18]). Se la curva di equazione (30_1) incontra in un punto $M(a_3, \eta_2(a_3))$ l'arco della curva $Y = \eta_2(X)$ corrispondente a $0 < X \leqslant a_2$, si considerano l'arco della curva (31) corrispondente ad $a_3 \leqslant X \leqslant a_2$ e il punto K di coordinate $(a_2, g_1(a_2;\, a_3, \eta_2(a_3)))$; se la curva (30_1) non incontra la curva $Y = \eta_2(X)$, incontra certamente in un punto $K^{[1]}$ la curva di equazione (27_2). Analogamente se la curva di equazione (32_2) incontra in un punto $N(a_4, \eta_2(a_4))$ l'arco della curva $Y = \eta_2(X)$ corrispondente a $-a_1 \leqslant X < 0$, si considerano l'arco della curva di equazione (33) corrispondente a $-a_1 \leqslant X \leqslant a_4$ e il punto H di coordinate $(-a_1,\, g_1(-a_1;\, a_4, \eta_2(a_4)))$; se la curva di equazione (32_1) non incontra la curva $Y = \eta_2(X)$, incontra in un punto $H^{[1]}$ la curva di equazione (27_1). Il campo Δ è limitato nella parte corrispondente a $Y \geqslant \eta_1(X)$, $(-a_1 \leqslant X \leqslant a_2)$ da archi delle curve (30_1), (31) oppure (30_1), (27_2) (cioè dagli archi A_1M e MK oppure $A_1K^{[1]}$ e $K^{[1]}B_2$), e nella parte corrispondente a $Y \leqslant \eta_2(X)$, $(-a_1 \leqslant X \leqslant a_2)$ da archi delle curve (32_2), (33) oppure (32_2), (27_1) (cioè dagli archi HN e NB_1 oppure $A_2H^{[1]}$ e $H^{[1]}B_1$) ([18 bis]).

([18]) Il caso $k = 2$ è stato considerato in 1).

([18 bis]) Si lascia al lettore di tracciare la figura.

e) In ognuno dei casi esaminati in *d*), il campo Δ appartiene al campo $\Delta^{[1]}$ (in 1) coincide con $\Delta^{[1]}$). Inoltre considerazioni, fatte direttamente caso per caso, assicurano che, se (x, y) è un punto qualsiasi del campo Δ, la curva $Y = g_r(X; x, y)$, $(r = 2, \dots, \mu)$ incontra la curva $Y = \eta_1(X)$ in un punto $X = \psi_r(x, y)$, dove $\psi_r(x, y)$ è definito dalla

$$(34) \qquad g_r(\psi_r(x, y); x, y) = \eta_1(\psi_r(x, y)) , \qquad (r = 2, \dots, \mu) ;$$

i punti $(X, g_r(X; x, y))$, corrispondenti a valori di X, compresi tra $\psi(x, y)$ e x, appartengono al campo Δ; tenuto conto della (28_1) (cfr. capoverso *c*)) è $\psi_2(x, y) = \psi(x, y)$. Inoltre, se (x, y) è un punto qualsiasi del campo Δ, la curva $Y = g_1(X; x, y)$, $(-a_1 \leqslant \leqslant X \leqslant a_2)$ incontra la curva $Y = \chi(X)$ in un punto di ascissa $X = \chi(x, y)$, definita dalla (28_2), e i punti $(X, g_1(X; x, y))$ corrispondenti a valori di X, compresi tra $\chi(x, y)$ e x, appartengono al campo Δ.

f) Assunte di nuovo (x, y) come coordinate correnti nel campo $\Delta^{[1]}$, si faccia in esso il cambiamento di variabili

$$(35) \qquad u = \psi(x, y) , \qquad v = \chi(x, y) \qquad ((x, y) \text{ in } \Delta^{[1]}) ,$$

il quale, in base a quanto rilevato nel capoverso *c*), stabilisce una corrispondenza biunivoca tra il campo $\Delta^{[1]}$ del piano (x, y) e un campo $\delta^{[1]}$ del piano (u, v) ([19]); nei punti della curva $y = \eta_1(x)$, $(-a_1 \leqslant x \leqslant a_2)$ è $u = x$, $v = 0$, e nei punti della curva $y = \eta_2(x)$, $(-a_1 \leqslant x \leqslant a_2)$ è $u = 0$, $v = x$.

In virtù delle (29), le funzioni $\psi(x, y)$, $\chi(x, y)$ sono continue in $\Delta^{[1]}$ assieme alle loro derivate prime e risulta

$$(36) \qquad J\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} = \frac{\exp[I_1(\chi(x, y); x, y)] \exp[I_2(\psi(x, y); x, y)][\sigma_2(x, y) - \sigma_1(x, y)]}{[\sigma_2(\psi(x, y), \eta_1(\psi(x, y))) - \sigma_1(\dots)][\sigma_2(\chi(x, y), \eta_2(\chi(x, y))) - \sigma_1(\dots)]} .$$

In tutto il campo $\Delta^{[1]}$ è dunque

$$(37) \qquad J\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \neq 0 ,$$

e dalle (35) si possono ottenere le

$$(35_1) \qquad x = \xi(u, v) , \qquad y = \eta(u, v) , \qquad ((u, v) \text{ in } \delta^{[1]}) ,$$

([19]) Il campo $\delta^{[1]}$ del piano (u, v) è limitato dai segmenti $u = -a_1$, $0 \leqslant v \leqslant a_2$; $-a_1 \leqslant u \leqslant 0$, $v = a_2$; $0 \leqslant u \leqslant a_2$, $v = -a_1$; $u = a_2$, $-a_1 \leqslant v \leqslant 0$, e dagli archi di curva, definiti in forma parametrica (assumendo y come parametro)

$$u = \psi(-a_1, y) , \qquad v = \chi(-a_1, y) , \qquad (\eta_2(-a_1) \leqslant y \leqslant \eta_1(-a_1)) ,$$
$$u = \psi(a_2, y) , \qquad v = \chi(a_2, y) , \qquad (\eta_1(a_2) \leqslant y \leqslant \eta_2(a_2)) ;$$

dalle prime due equazioni si ricava $v = v_1(u)$, $(-a_1 \leqslant u \leqslant 0)$, e dalle altre due $v = v_2(u)$, $(0 \leqslant u \leqslant a_2)$, dove le funzioni $v_1(u)$, $v_2(u)$ sono decrescenti nei rispettivi intervalli di definizione. Si lascia al lettore il tracciare la semplice figura.

dove le funzioni $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ sono continue assieme alle loro derivate prime nel campo $\delta^{[1]}$, ed è

$$\xi(u, 0) = u\,, \qquad \eta(u, 0) = \eta_1(u)\,, \qquad \xi(0, v) = v\,, \qquad \eta(0, v) = \eta_2(v)\,.$$

Al campo $\varDelta$ appartenente al campo $\varDelta^{[1]}$ le (35), (35_1) fanno corrispondere biunivocamente un campo δ appartenente a $\delta^{[1]}$.

g) Considerato l'integrale (1) del sistema (I) soddisfacente le condizioni del teorema, si ponga

$$\zeta_i(u, v) = z_i\big(\xi(u, v), \eta(u, v)\big)\,, \qquad (i = 1, \ldots, m)\,. \tag{38}$$

Le funzioni $z_i(x, y)$, $(i = 1, \ldots, m)$ sono, per ipotesi, lipschitziane nel complesso delle variabili (x, y) in tutto il campo $\varDelta$, e quindi sono differenziabili in quasi tutto il campo $\varDelta$ ([20]); in virtù delle (36), (37), ad un insieme di misura nulla del campo $\varDelta$ le (35), (35_1) fanno corrispondere un insieme di misura nulla del campo δ ([21]).

In quasi tutti i punti del campo δ esistono allora le derivate

$$\frac{\partial \zeta_i(u, v)}{\partial u}\,, \qquad \frac{\partial \zeta_i(u, v)}{\partial v}\,,$$

le quali sono limitate nel campo δ, ed inoltre valgono le

$$\frac{\partial \zeta_i(u, v)}{\partial u} = p_i\big(\xi(u, v), \eta(u, v)\big)\frac{\partial \xi(u, v)}{\partial u} + q_i(\ldots)\frac{\partial \eta(u, v)}{\partial u}\,,$$
$$\frac{\partial \zeta_i(u, v)}{\partial v} = p_i\big(\xi(u, v), \eta(u, v)\big)\frac{\partial \xi(u, v)}{\partial v} + q_i(\ldots)\frac{\partial \eta(u, v)}{\partial v}\,.$$

Tenuto conto delle (29) e delle posizioni (4), il cambiamento di variabili (35), (35_1) muta il sistema (I) nel sistema

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(u, v)\frac{\partial \zeta_j(u, v)}{\partial u} = F_i\big(u, v;\, \zeta_i(u, v), \ldots, \zeta_m(u, v)\big)\,, \qquad (i = 1, \ldots, \nu_1)\,,\\ &\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(u, v)\frac{\partial \zeta_j(u, v)}{\partial v} = F_i\big(u, v;\, \zeta_1(u, v), \ldots, \zeta_m(u, v)\big)\,,\\ &\qquad\qquad (i = \nu_1 + 1, \ldots, \nu_1 + \nu_2)\,,\\ &\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(u, v)\left(\frac{\partial \zeta_j(u, v)}{\partial u} + R_i(u, v)\frac{\partial \zeta_j(u, v)}{\partial v}\right) = F_i\big(u, v;\, \zeta_1(u, v), \ldots, \zeta_m(u, v)\big)\,,\\ &\qquad\qquad (i = \nu_1 + \nu_2 + 1, \ldots, m)\,, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

([20]) Cfr. H. RADEMACHER [1], Parte I, n. 3, Teorema I, p. 347.
([21]) Cfr. H. RADEMACHER [1], Parte I, n. 7, pp. 354-355; n. 9, p. 359.

dove si è posto

$$(40_1) \qquad a_{ij}(u, v) = A_{ij}(\xi(u, v), \eta(u, v)) , \qquad (i, j = 1, \dots, m) .$$

$$(40_2) \qquad R_i(u, v) = \left[\frac{\chi_x(x, y) + \varrho_i(x, y)\chi_y(x, y)}{\psi_x(x, y) + \varrho_i(x, y)\psi_y(x, y)}\right]_{x=\xi(u,v),\, y=\eta(u,v)}, \qquad (i = \nu_1 + \nu_2 + 1, \dots, m) ,$$

$$(40_3) \qquad \begin{cases} F_i(u, v; \zeta_1, \dots, \zeta_m) = \left[\dfrac{f_i(x, y; z_1, \dots, z_m)}{\psi_x(x, y) + \varrho_i(x, y)\psi_y(x, y)}\right]_{x=\xi(u,v),\, y=\eta(u,v)}, \\ \qquad\qquad (i = 1, \dots, \nu_1;\ \nu_1 + \nu_2 + 1, \dots, m) , \\ F_i(u, v; \zeta_1, \dots, \zeta_m) = \left[\dfrac{f_i(x, y; z_1, \dots, z_m)}{\chi_x(x, y) + \varrho_i(x, y)\chi_y(x, y)}\right]_{x=\xi(u,v),\, y=\eta(u,v)}, \\ \qquad\qquad (i = \nu_1 + 1, \dots, \nu_1 + \nu_2) . \end{cases}$$

Le funzioni $a_{ij}(u, v)$, $R_i(u, v)$ sono definite nel campo $\delta^{[1]}$, e le funzioni $F_i(u, v; \zeta_1, \dots, \zeta_m)$ sono definite per (u, v) nel campo $\delta^{[1]}$ e per tutte le m-ple $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ reali. Le funzioni (38) soddisfano il sistema (39) quasi ovunque nel campo δ. Nelle (40_2) sono tenute presenti le posizioni (4); in virtù di queste ultime possiamo porre

$$(41) \qquad \begin{cases} R_{\nu_1+\nu_2+1}(u, v) = R_{\nu_1+\nu_2+2}(u, v) = \dots = R_{\nu_1+\nu_2+\nu_3}(u, v) = S_3(u, v) , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R_{m-\nu_\mu+1}(u, v) = R_{m-\nu_\mu+2}(u, v) = \dots = R_m(u, v) \qquad = S_\mu(u, v) . \end{cases}$$

Inoltre, in virtù delle ipotesi del teorema e di quanto è stato rilevato nei capoversi *e*), *f*), le funzioni $a_{ij}(u, v)$, $(i, j = 1, \dots, m)$ sono lipschitziane nel complesso delle variabili nel campo $\delta^{[1]}$ (22).

Le condizioni (19), (20) divengono rispettivamente

$$(19_1) \qquad \zeta_j(u, 0) = Z_j(u) , \qquad (-a_1 \leqslant u \leqslant a_2) \qquad \text{per } j = 1, \dots, m ,$$

$$(20_1) \qquad \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(v)\,\zeta_j(0, v) = G_i(v) , \qquad (i = 1, \dots, \nu_1) .$$

h) Indicate con (X, Y) le coordinate correnti nel campo Δ e con (λ, μ) le corrispondenti coordinate nel campo δ, così che

$$\lambda = \psi(X, Y) , \qquad \mu = \chi(X, Y) ,$$

(22) Le funzioni $A_{ij}(x, y)$ sono lipschitziane nel complesso delle variabili nel campo D_∞; le funzioni (35_1) hanno derivate parziali prime continue nel campo chiuso $\delta^{[1]}$; tenuto conto anche della forma di tale campo (cfr. nota (19)), ne segue che le funzioni $a_{ij}(u, v)$, definite dalle (40_1), sono lipschitziane nel complesso delle variabili nel campo $\delta^{[1]}$.

se (x, y) è un punto fissato in Δ, e (u, v) il punto corrispondente di δ, all'arco di curva $X = g_1(X; x, y)$, ottenuto per valori di X, compresi tra $\chi(x, y)$ e x corrisponde in δ il segmento $\mu = v$; $0 \leqslant \lambda \leqslant u$; all'arco della curva $Y = g_2(X; x, y)$, ottenuto per valori di X, compresi tra $\psi(x, y)$ e x, corrisponde in δ il segmento $\lambda = u$, $0 \leqslant \mu \leqslant v$; in corrispondenza ad ogni intiero i (con $i = \nu_1 + \nu_2 + 1, \dots, m$) [23], all'arco della curva

$$Y = g_i(X; x, y) \tag{42}$$

ottenuto per valori di X compresi tra $\psi_i(x, y)$ e x corrisponde in δ un arco della curva, definita dalle equazioni parametriche

$$\lambda = \psi(X, g_i(X; x, y)) , \qquad \mu = \chi(X, g_i(X; x, y)) \tag{43}$$

nel parametro X con X compreso tra $\psi_i(x, y)$ e x.

Dalle (43) segue

$$\frac{d\lambda}{dX} = \psi_X(X, g_i(X; x, y)) + \psi_Y(\dots)\varrho_i(X; x, y) ,$$

$$\frac{d\mu}{dX} = \chi_X(X, g_i(X; x, y)) + \chi_Y(\dots)\varrho_i(X; x, y) ;$$

tenuto conto delle (29) (nelle quali si ponga $(X, g_i(X; x, y))$ al posto di (x, y)) e delle (4), si verifica immediatamente che $d\lambda/dX \neq 0$, $d\mu/dX \neq 0$; quindi dalle (43), tenuto conto anche delle (35_1), si ottiene l'equazione dell'arco di curva corrispondente nel campo δ all'arco considerato della curva (42) del campo Δ nella forma

$$\mu = \gamma_i(\lambda; u, v) \tag{44}$$

o anche

$$\lambda = \gamma_i^*(\mu; u, v) . \tag{44'}$$

Al punto $(\psi_i(x, y), \eta_1(\psi_i(x, y)))$ della curva γ_1 corrisponde il punto $(\gamma_i^*(0; u, v), 0)$ del segmento $-a_1 \leqslant \lambda \leqslant a_2$, $\mu = 0$; per brevità poniamo

$$\gamma_i^*(0; u, v) = \varphi_i(u, v) , \tag{45}$$

[23] In conformità alle notazioni usate finora si fanno assumere a i i valori $\nu_1 + \nu_2 + 1, \dots, m$; tenuto conto delle (4) risulta

$$g_{\nu_1+\nu_2+1}(X; x, y) = g_{\nu_1+\nu_2+2}(X; x, y) = \dots =$$
$$= g_{\nu_1+\nu_2+\nu_3}(X; x, y), \dots, g_{m-\nu_\mu+1}(X; x, y) = g_{m-\nu_\mu+2}(X; x, y) = \dots = g_m(X; x, y) .$$

così che $\gamma_i(\varphi_i(u,v);\, u, v) = 0$. La funzione $\gamma_i(\lambda;\, u, v)$ è continua assieme alla sua derivata prima rispetto a λ, e risulta

$$\frac{d\gamma_i(\lambda;\, u, v)}{d\lambda} = R_i(\lambda, \gamma_i(\lambda;\, u, v))\,. \tag{46}$$

i) Nelle prime ν_1 tra le (39) si ponga λ al posto di u e si integri tra zero e u; si ottengono così le

$$\sum_{j=1}^{m}\int_0^u a_{ij}(\lambda, v)\frac{\partial\zeta_j(\lambda, v)}{\partial\lambda}\,d\lambda = \int_0^u F_i(\lambda, v;\, \zeta_1(\lambda, v), \ldots, \zeta_m(\lambda, v))\,d\lambda\,, \qquad (i = 1, \ldots, \nu_1)\,,$$

e con una integrazione per parti ([23 bis])

$$\begin{aligned}(47_1)\qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(u, v)\,\zeta_j(u, v) &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0, v)\,\zeta_j(0, v) + \\ &+ \sum_{j=1}^{m}\int_0^u \frac{\partial a_{ij}(\lambda, v)}{\partial\lambda}\,\zeta_j(\lambda, v)\,d\lambda + \int_0^u F_i(\lambda, v;\, \zeta_1(\lambda, v), \ldots, \zeta_m(\lambda, v))\,d\lambda\,, \qquad (i = 1, \ldots, \nu_1)\,.\end{aligned}$$

Le (47_1) per quasi tutti i valori v, tali che alle rette $v = \text{cost.}$ appartengano punti del campo δ, valgono per ogni u, con (u, v) appartenente al campo δ. Posto nelle successive ν_2 equazioni (39) μ al posto di v, integrando tra zero e v, si ottengono le

$$\sum_{j=1}^{m}\int_0^v a_{ij}(u, \mu)\frac{\partial\zeta_j(u, \mu)}{\partial\mu}\,d\mu = \int_0^v F_i(u, \mu;\, \zeta_1(u, \mu), \ldots, \zeta_m(u, \mu))\,d\mu\,, \qquad (i = \nu_1 + 1, \ldots, \nu_2)\,,$$

e con una integrazione per parti, tenendo conto delle (19_1),

$$\begin{aligned}(47_2)\qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(u, v)\,\zeta_j(u, v) &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(u, 0)\,Z_j(u) + \sum_{j=1}^{m}\int_0^v \frac{\partial a_{ij}(u, \mu)}{\partial\mu}\,\zeta_j(u, \mu)\,d\mu + \\ &+ \int_0^v F_i(u, \mu;\, \zeta_1(u, \mu), \ldots, \zeta_m(u, \mu))\,d\mu\,, \qquad (i = \nu_1 + 1, \ldots, \nu_1 + \nu_2)\,.\end{aligned}$$

Le (47_2), in corrispondenza a quasi tutti gli u, $(-a_1 \leqslant u \leqslant a_2)$ valgono per ogni v, tale che il punto (u, v) appartenga al campo δ.

([23 bis]) Le funzioni $a_{ij}(u, v)$ sono lipschitziane nel complesso delle variabili nel campo $\delta^{[1]}$ (cfr. nota ([22])); è quindi lecita l'integrazione per parti; osservazione analoga a proposito (più avanti) delle (47_2).

Poichè le funzioni $z_j(\lambda, \mu) = z_j(\xi(\lambda, \mu), \eta(\lambda, \mu))$ sono lipschitziane nel complesso delle variabili (λ, μ) nel campo δ ([24]), esistono m costanti K_j, $(j = 1, \ldots, m)$, tali che

$$(48) \qquad |\zeta_j(\lambda, \mu) - \zeta_j(\bar{\lambda}, \bar{\mu})| \leqslant K_j \{|\lambda - \bar{\lambda}| + |\mu - \bar{\mu}|\}, \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

per ogni coppia di punti (λ, μ), $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ del campo δ.

Tenuto conto delle (40_2), le funzioni $R_i(\lambda, \mu)$, $(i = \nu_1 + \nu_2 + 1, \ldots, m)$ sono continue e mai nulle in tutto il campo $\delta^{[1]}$; esistono quindi due costanti positive k e $M^{[1]}$, tali che in tutto il campo $\delta^{[1]}$ sia

$$(49) \qquad 1/k \leqslant |R_i(\lambda, \mu)| \leqslant M^{[1]}, \qquad (i = \nu_1 + \nu_2 + 1, \ldots, m);$$

in virtù delle (46) e (48) risulta allora

$$(50) \qquad |\zeta_j(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)) - \zeta_j(\bar{\lambda}, \gamma_i(\bar{\lambda}; u, v))| \leqslant K_j(1 + M^{[1]})|\lambda - \bar{\lambda}|,$$
$$(j = 1, \ldots, m;\ i = \nu_1 + \nu_2 + 1, \ldots, m).$$

In quasi tutti i punti della curva $\mu = \gamma_i(\lambda; u, v)$ appartenenti al campo δ esiste dunque la derivata

$$\frac{d\zeta_j(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{d\lambda}, \qquad (j = 1, \ldots, m;\ i = \nu_1 + \nu_2 + 1, \ldots, m).$$

Se i è uno tra i numeri $\nu_1 + \nu_2 + 1, \ldots, m$, posto $w = \varphi_i(u, v)$, l'equazione della curva $\mu = \gamma_i(\lambda; u, v)$, tenuto conto della (45), può essere scritta nella forma

$$(44'') \qquad \mu = \gamma_i(\lambda; w, 0), \qquad (-a_1 \leqslant w \leqslant a_2).$$

Si prova facilmente ([25]) che, in corrispondenza a quasi tutti i valori w di $(-a_1, a_2)$, per quasi tutti i valori di λ, compresi tra w e u è

$$(51) \qquad \frac{d\zeta_j(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{d\lambda} = \frac{\partial\zeta_j(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{\partial\lambda} + R_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)) \frac{\partial\zeta_j(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{\partial\mu},$$

([24]) Per ipotesi le funzioni $z_j(x, y)$, $(j = 1, \ldots, m)$ sono lipschitziane nel complesso delle variabili nel campo Δ; poichè le funzioni (35_1) hanno derivate parziali continue nel campo chiuso $\delta^{[1]}$ (a cui appartiene δ), tenuto anche conto della configurazione del campo δ (che sarebbe agevole disegnare), segue che le funzioni (38) sono lipschitziane nel complesso delle variabili (u, v) nel campo δ; si fa presente che nel seguito del presente capoverso sono assunte (λ, μ) come coordinate correnti nel campo δ, mentre (u, v) è un punto fissato del campo stesso (cfr. anche capoverso h)).

([25]) Al variare di w in $(-a_1, a_2)$ le curve $(44'')$ coprono tutto il campo δ (nel senso che per ogni punto di δ ne passa una e una sola); allora le

$$(*) \qquad \lambda = \lambda, \qquad \mu = \gamma_i(\lambda; w, 0),$$

e inoltre vale la i-esima tra le equazioni (39), nella quale si assumano come coordinate correnti λ, μ, e si ponga $\mu = \gamma_i(\lambda; u, v)$; tale equazione può dunque essere scritta nella forma

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)) \frac{d\zeta_j(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{d\lambda} = F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v); \zeta_1(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)), \dots, \zeta_m(\dots)) .$$

Integrando rispetto a λ tra $\varphi_i(u, v)$ e u si ottiene la

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} a_{ij}(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)) \frac{d\zeta_1(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{d\lambda} d\lambda =$$

$$= \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v); \zeta_1(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)), \dots, \zeta_m(\dots)) \, d\lambda ,$$

e con una integrazione per parti ([26]), tenendo conto delle (19_1),

$$(47_i) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(u, v)\zeta_j(u, v) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\varphi_i(u, v), 0) Z_j(\varphi_i(u, v)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} \frac{da_{ij}(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{d\lambda} \zeta_j(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)) \, d\lambda +$$

$$+ \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v); \zeta_1(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)), \dots, \zeta_m(\dots)) \, d\lambda , \qquad (i = v_1 + v_2 + 1, \dots, m) .$$

Le (47) valgono in quasi tutto il campo δ; considerazioni di tipo elementare permettono di provare che il secondo membro di ognuna delle (47) è funzione continua

---

fanno corrispondere al campo δ del piano (λ, μ) un campo T del piano (λ, w); la corrispondenza è biunivoca, e, poichè vale la (46), ed è $R_i(\lambda, \mu) \neq 0$ (cfr. le (40_2)), si prova immediatamente che è $\partial\gamma_i(\lambda; w, 0)/\partial w \neq 0$; è quindi $J\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & w \end{pmatrix} \neq 0$, e (cfr. nota ([21])) ad un insieme di misura nulla del campo δ corrisponde biunivocamente un insieme di misura nulla del campo T; quindi le derivate $\partial\zeta_j(\lambda, \mu)/\partial\lambda$, $\partial\zeta_j(\lambda, \mu)/\partial\mu$, $(j = 1, \dots, m)$, nelle quali si ponga $\mu = \varphi_i(\lambda; w, 0)$, esistono in quasi tutti i punti del campo T, e soddisfano l'equazione i-esima tra le (39); ne segue che per quasi tutti i valori w, $(-a_1 \leqslant w \leqslant a_2)$ tali derivate esistono in quasi tutti i punti della curva (44″), vale la (51) (dove si tenga conto che $\gamma_i(\lambda; u, v) = \gamma_i(\lambda; \varphi_i(u, v), 0)$ e si applichi un noto teorema di derivazione delle funzioni composte; cfr. G. SCORZA DRAGONI [1]), ed è soddisfatta la i-esima tra le (39).

([26]) Essendo le $a_{ij}(\lambda, \mu)$ lipschitziane nel complesso delle variabili nel campo $\delta^{[1]}$, considerazioni del tutto analoghe a quelle sviluppate per stabilire le (50) permettono di provare che, fissato il punto (u, v) in δ, le funzioni $a_{ij}(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))$ sono lipschitziane in λ nell'intervallo $(\varphi_i(u, v), u)$; è quindi lecita l'integrazione per parti.

nel complesso delle variabili (u, v) in ogni punto del campo δ ([27]), e, poichè il primo membro di ognuna delle (47) è pure funzione continua nel complesso delle variabili (u, v), le (47) valgono in tutto il campo δ.

j) Dal sistema delle m equazioni algebriche (47) lineari nelle $\zeta_j(u, v)$, $(j = 1, \dots, m)$, tenuto conto della (8) e delle (40_1), e indicato con $\alpha_{ij}(u, v)$ il comple-

([27]) Le ipotesi fatte, assieme alle (40_1), (40_3), assicurano la continuità nel complesso delle variabili (u, v) dei singoli termini, che compaiono a secondo membro delle (47), tranne per quanto riguarda i termini rispettivi

$$\int_0^u \frac{\partial a_{ij}(\lambda, v)}{\partial\lambda}\zeta_j(\lambda, v)\,d\lambda\,, \qquad \int_0^v \frac{\partial a_{ij}(u, \mu)}{\partial\mu}\zeta_j(u, \mu)\,d\mu\,, \qquad \int_{\varphi_i(u,v)}^u \frac{da_{ij}(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{d\lambda}\zeta_j(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))\,d\lambda\,.$$

Ora si ha, per esempio, supposto, per fissare le idee, che il punto (u, v) sia interno al campo δ,

$$\left|\int_0^{u+h}\frac{\partial a_{ij}(\lambda, v+k)}{\partial\lambda}\zeta_j(\lambda, v+k)\,d\lambda - \int_0^u \frac{\partial a_{ij}(\lambda, v)}{\partial\lambda}\zeta_j(\lambda, v)\,d\lambda\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_0^{u+h}\frac{\partial a_{ij}(\lambda, v+k)}{\partial\lambda}\zeta_j(\lambda, v+k)\,d\lambda\right| + \left|\int_0^u \frac{\partial[a_{ij}(\lambda, v+k) - a_{ij}(\lambda, v)]}{\partial\lambda}\zeta_j(\lambda, v+k)\,d\lambda\right| +$$
$$+ \left|\int_0^u \frac{\partial a_{ij}(\lambda, v)}{\partial\lambda}[\zeta_j(\lambda, v+k) - \zeta_j(\lambda, v)]\,d\lambda\right|.$$

Tenuto conto che

$$\left|\int_0^u \frac{\partial[a_{ij}(\lambda, v+k) - a_{ij}(\lambda, v)]}{\partial\lambda}\zeta_j(\lambda, v+k)\,d\lambda\right| \leqslant$$
$$\leqslant |a_{ij}(0, v+k) - a_{ij}(0, v)|\,|\zeta_j(0, v+k)| + |a_{ij}(\lambda, v+k) - a_{ij}(u, v)|\,|\zeta_j(u, v+k)| +$$
$$+ \left|\int_0^u |a_{ij}(\lambda, v+k) - a_{ij}(\lambda, v)|\right|\left|\frac{d\zeta_j(\lambda, v+k)}{d\lambda}\right| d\lambda\,,$$

e che le $a_{ij}(u, v)$, $\zeta_j(u, v)$ sono lipschitziane nel campo δ, segue immediatamente la continuità in (u, v) di

$$\int_0^u \frac{\partial a_{ij}(\lambda, v)}{\partial\lambda}\zeta_j(\lambda, v)\,d\lambda\,.$$

mento algebrico delle $a_{ij}(u, v)$ nel determinante A si ottengono le

$$(52)\qquad z_j(u, v) = \sum_{i=1}^{\nu_1} \alpha_{ij}(u, v) \left\{ \sum_{s=1}^{m} a_{is}(0, v)\zeta_s(0, v) + \right.$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} \int_0^u \frac{\partial a_{is}(\lambda, v)}{\partial \lambda} \zeta_s(\lambda, v)\, d\lambda + \left. \int_0^u F_i(\lambda, v; \zeta_1(\lambda, v), \dots, \zeta_m(\lambda, v))\, d\lambda \right\} +$$

$$+ \sum_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2} \alpha_{ij}(u, v) \left\{ \sum_{s=1}^{m} a_{is}(u, 0) Z_s(u) + \sum_{s=1}^{m} \int_0^v \frac{\partial a_{is}(u, \mu)}{\partial \mu} \zeta_s(u, \mu)\, d\mu + \right.$$

$$+ \left. \int_0^v F_i(u, \mu; \zeta_1(u, \mu), \dots, \zeta_m(u, \mu))\, d\mu \right\} +$$

$$+ \sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m} \alpha_{ij}(u, v) \left\{ \sum_{s=1}^{m} a_{is}(\varphi_i(u, v), 0) Z_s(\varphi_i(u, v)) + \right.$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} \frac{d a_{is}(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{d\lambda} \zeta_s(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))\, d\lambda +$$

$$+ \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v); \zeta_1(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)), \dots, \zeta_m(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)))\, d\lambda\,,$$

$$(j = 1, \dots, m)\,.$$

k) Le funzioni $\zeta_j(0, v)$, $(j = 1, \dots, m)$ soddisfano le (20_1); inoltre soddisfano le

$$(20_2)\qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0, v)\zeta_j(0, v) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0, 0) Z_j(0) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^v \frac{\partial a_{ij}(0, \mu)}{\partial \mu} \zeta_j(0, \mu)\, d\mu +$$

$$+ \int_0^v F_i(0, \mu; \zeta_j(0, \mu), \dots, \zeta_m(0, \mu))\, d\mu\,, \qquad (i = \nu_1 + 1, \dots, \nu_2)\,,$$

ottenute dalle (47_2) per $u = 0$, e le

$$(20_i)\qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0, v)\zeta_j(0, v) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\varphi_i(0, v), 0) Z_j(\varphi_i(0, v)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_i(0,v)}^{0} \frac{d a_{ij}(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v))}{d\lambda} \zeta_j(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v))\, d\lambda +$$

$$+ \int_{\varphi_i(0,v)}^{0} F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v); \zeta_1(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v)), \dots, \zeta_m(\dots))\, d\lambda\,, \qquad (i = \nu_1 + \nu_2 + 1, \dots, m)\,.$$

La (17), tenuto conto del cambiamento di variabili (35), (35_1) e delle (40_1), diviene

$$(17_1)\qquad \begin{vmatrix} b_{11}(v) \dots b_{1m}(v) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{\nu_1,1}(v) \dots b_{\nu_1,m}(v) \\ b_{\nu_1+1,1}(v) \dots b_{\nu_1+1,m}(v) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m,1}(v) \dots b_{m,m}(v) \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

avendo posto, per uniformità di notazioni, $b_{ij}(v) = a_{ij}(0, v)$, per $i = \nu_1 + 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$. Indicato allora con $\beta_{ij}(v)$ il complemento algebrico di $b_{ij}(v)$ nel determinante (17_1), diviso per il determinante stesso, dal sistema delle m equazioni algebriche (20_1), (20_2), (20_i) nelle incognite $z_j(0, v)$ si ottengono le

$$(53)\qquad \zeta_j(0, v) = \sum_{i=1}^{\nu_1} \beta_{ij}(v) G_i(v) + \sum_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2} \beta_{ij}(v) \Bigg\{ \sum_{s=1}^{m} a_{is}(0, s) Z_s(0) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{m} \int_0^v \frac{\partial a_{is}(0, \mu)}{\partial \mu} \zeta_s(0, \mu)\, d\mu + \int_0^v F_i(0, \mu; \zeta_1(0, \mu), \dots, \zeta_m(0, \mu))\, d\mu \Bigg\} +$$
$$+ \sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m} \beta_{ij}(v) \Bigg\{ \sum_{s=1}^{m} a_{is}(\varphi_i(0, v), 0) Z_s(\varphi_i(0, v)) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{m} \int_{\varphi_i(0,v)}^{0} \frac{d a_{is}(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v))}{d\lambda} \zeta_s(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v))\, d\lambda +$$
$$+ \int_{\varphi_i(0,v)}^{0} F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v); \zeta_1(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v)), \dots, \zeta_m(\dots))\, d\lambda \Bigg\}.$$

Le (53) valgono in un opportuno intervallo $-a_1' \leqslant v \leqslant a_2'$ (con $0 < a_1' \leqslant a_1$, $0 < a_2' \leqslant \leqslant a_2$), tale che i punti $(0, v)$ appartengano al campo δ.

l) Sia ora

$$(1^*)\qquad z_i = z_i^*(x, y)\,, \qquad (i = 1, \dots, m)$$

una m-pla di funzioni lipschitziane nel campo Δ, ivi soddisfacenti il sistema (I) quasi ovunque, e soddisfacente le

$$(19^*)\qquad z_i^*(x, \eta_1(x)) = Z_i(x)\,, \qquad (i = 1, \dots, m)\,,\ \text{per } -a_1 \leqslant x \leqslant a_2\,,$$

e le

$$(20^*)\qquad \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x) z_i^*(x, \eta_2(x)) = G_i(x)\,, \qquad (i = 1, \dots, \nu_1)$$

nei punti della curva $y = \eta_2(x)$ appartenenti al campo Δ.

Posto

$$(38^*) \qquad \zeta_i^*(u, v) = z_i^*(\xi(u, v), \eta(u, v)), \qquad (i = 1, \dots, m),$$

le funzioni $\zeta_i^*(u, v)$, $(i = 1, \dots, m)$ soddisfano relazioni del tutto analoghe alle (52), (53); sottraendo tali relazioni (che, per brevità, sono omesse) dalle corrispondenti relazioni (52), (53) e ponendo

$$(54) \qquad U_i(u, v) = \zeta_i(u, v) - \zeta_i^*(u, v), \qquad (i = 1, \dots, m),$$

si ottengono le

$$(55) \qquad U_j(u, v) = \sum_{i=1}^{\nu_1} \alpha_{ij}(u, v) \left\{ \sum_{s=1}^{m} a_{is}(0, v)\, U_s(0, v) + \sum_{s=1}^{m} \int_0^u \frac{\partial a_{is}(\lambda, v)}{\partial \lambda}\, U_s(\lambda, v)\, d\lambda + \right.$$
$$\left. + \int_0^u [F_i(\lambda, v; \zeta_1(\lambda, v), \dots, \zeta_m(\lambda, v)) - F_i(\lambda, v; \zeta_1^*(\lambda, v), \dots, \zeta_m^*(\lambda, v))]\, d\lambda \right\} +$$
$$+ \sum_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2} \alpha_{ij}(u, v) \left\{ \sum_{s=1}^{m} \int_0^v \frac{\partial a_{is}(u, \mu)}{\partial \mu}\, U_s(u, \mu)\, d\mu + \right.$$
$$\left. + \int_0^v [F_i(u, \mu; \zeta_1(u, \mu), \dots, \zeta_m(u, \mu)) - F_i(u, \mu; \zeta_1^*(u, \mu), \dots, \zeta_m^*(u, \mu))]\, d\mu \right\} +$$
$$+ \sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m} \alpha_{ij}(u, v) \left\{ \sum_{s=1}^{m} \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} \frac{d a_{is}(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{d\lambda}\, U_s(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))\, d\lambda + \right.$$
$$+ \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} [F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v); \zeta_1(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)), \dots, \zeta_m(\dots)) -$$
$$\left. - F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v); \zeta_1^*(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)), \dots, \zeta_m^*(\dots))]\, d\lambda \right\}, \qquad (j = 1, \dots, m).$$

$$(56) \qquad U_j(0, v) = \sum_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2} \beta_{ij}(v) \left\{ \sum_{s=1}^{m} \int_0^v \frac{\partial a_{is}(0, \mu)}{\partial \mu}\, U_s(0, \mu)\, d\mu + \right.$$
$$\left. + \int_0^v [F_i(0, \mu; \zeta_1(0, \mu), \dots, \zeta_m(0, \mu)) - F_i(0, \mu; \zeta_1^*(0, \mu), \dots, \zeta_m^*(0, \mu))]\, d\mu \right\} +$$
$$+ \sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m} \beta_{ij}(v) \left\{ \sum_{s=1}^{m} \int_{\varphi_i(0,v)}^{0} \frac{d a_{is}(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v))}{d\lambda}\, U_s(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v))\, d\lambda + \right.$$
$$+ \int_{\varphi_i(0,v)}^{v} [F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v)); \zeta_1(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v), \dots, \zeta_m(\dots)) -$$
$$\left. - F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v)); \zeta_1^*(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v), \dots, \zeta_m^*(\dots))]\, d\lambda \right\}, \qquad (j = 1, \dots, m).$$

Si indichino con H, H_1, H_2 costanti non negative, tali che in tutto il campo chiuso e limitato $\delta^{[1]}$ sia

$$(57) \qquad |a_{ij}(u, v)| \leqslant H\,, \qquad |\alpha_{ij}(u, v)| \leqslant H_1\,, \qquad |\beta_{ij}(v)| \leqslant H_2\,, \qquad (i, j = 1, \dots, m)\,,$$

costanti certo esistenti, per la continuità delle funzioni a primo membro delle (57) nel campo chiuso e limitato $\delta^{[1]}$.

Poichè le funzioni $a_{ij}(u, v)$ sono lipschitziane in $\delta^{[1]}$ (cfr. nota ([22])), si indichi con Λ la loro costante di Lipschitz; dalle (13) e (40_3) segue che le funzioni $F_i(u, v; \zeta_1, \dots, \zeta_m)$ sono lipschitziane nel complesso delle $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$; si indichi con Λ_1 la costante di Lipschitz corrispondente.

Posto

$$(58) \qquad \Lambda + \Lambda_1 = L_2\,,$$

tenuto conto delle (46), (49), dalle (55), (56) si ottengono le ([28])

$$(59) \qquad |U_j(u, v)| \leqslant H_1 \Bigg\{ \nu_1 H \sum_{s=1}^{m} |U_s(0, v)| + \nu_1 L_2 \left| \int_0^u \sum_{s=1}^{m} \left| U_s(\lambda, v) \right| d\lambda \right| +$$
$$+ \nu_2 L_2 \left| \int_0^v \sum_{s=1}^{m} \left| U_s(u, \mu) \right| d\mu \right| +$$
$$+ (L_2 + \Lambda M^{[1]}) \sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m} \left| \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} \sum_{s=1}^{m} \left| U_s(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)) \right| d\lambda \right| \Bigg\}, \qquad (j = 1, \dots, m)\,.$$

$$(60) \qquad |U_j(0, v)| \leqslant H_2 \Bigg\{ \nu_2 L_2 \left| \int_0^v \sum_{s=1}^{m} \left| U_s(0, \mu) \right| d\mu \right| +$$
$$+ (L_2 + \Lambda M^{[1]}) \sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m} \left| \int_{\varphi_i(0,v)}^{0} \sum_{s=1}^{m} \left| U_s(\lambda, \gamma_i(\lambda; 0, v)) \right| d\lambda \right| \Bigg\}, \qquad (j = 1, \dots, m)\,.$$

m) Si indichi con $U(v)$ il massimo di $\sum_{s=1}^{m} |U_s(u, v)|$ sul segmento della retta

([28]) Tenuto conto delle (46) e (49) risulta

$$|a_{ij}(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)) - a_{ij}(\bar\lambda, \gamma_i(\bar\lambda; u, v))| \leqslant$$
$$\leqslant \Lambda\{|\lambda - \bar\lambda| + |\gamma_i(\lambda; u, v) - \gamma_i(\bar\lambda; u, v)|\} \leqslant \Lambda(1 + M^{[1]})|\lambda - \bar\lambda|\,,$$

e quindi

$$\left| \frac{da_{ij}(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{d\lambda} \right| \leqslant \Lambda(1 + M^{[1]})\,.$$

$v=$ cost. appartenente al campo δ; allora dalle (60) si ottengono le

$$(61)\qquad |U_j(0,v)|\leqslant H_2\left\{\nu_2 L_2\left|\int_0^v \sum_{s=1}^m \left|U_s(0,\mu)\right| d\mu\right| + \right.$$

$$\left. + (L_2+AM^{[1]})\sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^m \left|\int_{\varphi_i(0,v)}^0 U(\gamma_i(\lambda;\,0,v))d\lambda\right|\right\}, \qquad (j=1,\dots,m).$$

Posto $\mu=\gamma_i(\lambda;\,0,v)$ e tenuto conto che $\gamma_i(\varphi_i(0,v);\,0,v)=0$, $\gamma_i(0;\,0,v)=v$ e che inoltre (cfr. le (46), (49))

$$\frac{d\mu}{d\lambda}=R_i(\lambda,\mu)\,, \qquad \left|\frac{d\mu}{d\lambda}\right|\geqslant\frac{1}{k},$$

risulta

$$\left|\int_{\varphi_i(0,v)}^0 U(\gamma_i(\lambda;\,0,v))d\lambda\right| = \left|\int_0^v U(\mu)\frac{d\lambda}{d\mu}d\mu\right|\leqslant k\left|\int_0^v U(\mu)\,d\mu\right|,$$

e sostituendo nelle (61)

$$|U_j(0,v)|\leqslant H_2\left\{\nu_2 L_2\left|\int_0^v \sum_{s=1}^m \left|U_s(0,\mu)\right| d\mu\right| + \right.$$

$$\left. + (L_2+AM^{[1]})(m-\nu_1-\nu_2)\,k\left|\int_0^v U(\mu)\,d\mu\right|\right\}, \qquad (j=1,\dots,m).$$

Sommando per $j=1,\dots,m$ e applicando il Lemma di Gronwall si ottiene successivamente

$$(62)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{j=1}^m |U_j(0,v)|\leqslant mH_2\left\{\nu_2 L_2\left|\int_0^v \sum_{j=1}^m \left|U_j(0,\mu)\right| d\mu\right| + \right.\\ &\qquad\qquad \left. + (L_2+AM^{[1]})(m-\nu_1-\nu_2)\,k\left|\int_0^v U(\mu)\,d\mu\right|\right\},\\ &\sum_{j=1}^m |U_j(0,v)|\leqslant mH_2(m-\nu_1-\nu_2)(L_2+AM^{[1]})k\left|\int_0^v \exp\left[mH_2\nu_2L_2|v-\mu|\right]U(\mu)d\mu\right|. \end{aligned}\right.$$

Dalle (59), tenuto conto delle (62) e del modo, nel quale è stata definita la funzione $U(v)$, si ottengono le

$$|U_j(u,v)| \leqslant H_1 \Big\{ mHH_2 \nu_1 (m-\nu_1-\nu_2)(L_2 + AM^{[1]})\, k \exp[mH_2L_2\nu_2 v_0] \cdot$$

$$\cdot \left| \int_0^v U(\mu)\, d\mu \right| + \nu_1 L_2 \left| \int_0^u \sum_{s=1}^m |U_s(\lambda, v)|\, d\lambda \right| + \nu_2 L_2 \left| \int_0^v U(\mu)\, d\mu \right| +$$

$$+ (L_2 + AM^{[1]}) \sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^m \left| \int_{\varphi_i(u,v)}^u U(\gamma_i(\lambda; u, v))\, d\lambda \right| \Big\}, \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

dove v_0 è il massimo di $|v|$ nel campo δ.

In modo analogo a quanto fatto più sopra, posto $\mu = \gamma_i(\lambda; u, v)$, e tenuto conto che $\gamma_i(\varphi_i(u,v); u, v) = 0$, $\gamma_i(u; u, v) = v$, si ottiene subito

$$\left| \int_{\varphi_i(u,v)}^u U(\gamma_i(\lambda; u, v)) d\lambda \right| = \left| \int_0^v U(\mu) \frac{d\lambda}{d\mu} d\mu \right| \leqslant k \left| \int_0^v U(\mu)\, d\mu \right|,$$

e quindi

$$|U_j(u,v)| \leqslant H_1 \left\{ \nu_1 L_2 \left| \int_0^u \sum_{s=1}^m \left| U_s(\lambda, v) \right| d\lambda \right| + K \left| \int_0^v U(\mu)\, d\mu \right| \right\}, \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{63}$$

dove K è una costante, di cui è facile scrivere l'espressione esplicita ([29]).

Sommando le (63) per $j = 1, \ldots, m$, si ottengono le

$$\sum_{j=1}^m \left| U_j(u,v) \right| \leqslant mH_1 \left\{ \nu_1 L_2 \left| \int_0^u \sum_{j=1}^m \left| U_j(\lambda, v) \right| d\lambda \right| + K \left| \int_0^v U(\mu)\, d\mu \right| \right\}.$$

In quest'ultima disuguaglianza si pensi u come variabile indipendente e v come un parametro; applicando il Lemma di Gronwall, e indicando con α il maggiore dei numeri a_1, a_2 risulta

$$\sum_{j=1}^m |U_j(u,v)| \leqslant mH_1 K \exp[mH_1\nu_1L_2\alpha] \left| \int_0^v U(\mu)\, d\mu \right|. \tag{64}$$

In corrispondenza ad ogni valore v, che sia ordinata di punti del campo δ, la (64) vale per ogni u, tale che il punto (u, v) appartenga al campo δ, e quindi vale, in

([29]) Risulta $K = (m-\nu_1-\nu_2)(L_2 + AM^{[1]})k(mHH_2\nu_1 \exp[mH_2L_2\nu_2v_0] + 1) + \nu_2 L_2$.

particolare, nel punto, in cui $\sum_{j=1}^{m} |U_j(u, v)|$ raggiunge il suo massimo $U(v)$; è dunque

$$U(v) \leqslant mH_1 K \exp [mH_1 \nu_1 L_2 \alpha] \left| \int_0^v U(\mu)\, d\mu \right| ,$$

da cui, come è noto, segue subito $U(v) = 0$ per ogni valore di v, che sia ordinata di punti del campo δ; quindi è identicamente in tutto δ

$$\sum_{j=1}^{m} |U_j(u, v)| = 0 \; ; \qquad \zeta_j(u, v) = \zeta_i^*(u, v) \, , \qquad (j = 1, \ldots, m) \, ,$$

vale a dire in tutto Δ è identicamente

$$z_j(x, y) = z_j^*(x, y) \, , \qquad (j = 1, \ldots, m) \, ,$$

ed è quindi provato il teorema di unicità.

OSSERVAZIONE. – Nell'enunciato del teorema di unicità le funzioni $f_i(x, y; z_1, \ldots, z_m)$ sono supposte lipschitziane nel complesso delle variabili $(z_1, \ldots, z_m)$, con costante L_1 indipendente da (x, y) (cf. la (13)); l'ipotesi può essere resa alquanto più ampia, nel senso che è sufficiente supporre che, comunque siano le costanti $Y_1^{(0)} > 0$, $\Omega_j^{(0)} > 0$, $(j = 1, \ldots, m)$, esiste una costante $L_1^{(0)}$, tale che per ogni x di $(-a_1, a_2)$, per ogni y con $|y| \leqslant Y^{(0)}$, e per tutte le coppie di m-ple reali $(z_1, \ldots, z_m)$, $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)$, soddisfacenti le $|z_j| \leqslant \Omega_j^{(0)}$, $|\bar{z}_j| \leqslant \Omega_j^{(0)}$, $(j = 1, \ldots, m)$, valgono le

$$|f_i(x, y; z_1, \ldots, z_m) - f_i(x, y; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)| \leqslant L_1^{(0)} \sum_{j=1}^{m} |z_j - \bar{z}_j| \, , \qquad (i = 1, \ldots, m) \, .$$

3. – Un caso particolare.

Per $-a_1 \leqslant x \leqslant a_2$ sia

$$b_{ij}(x) \equiv 0 \, , \qquad (i = 1, \ldots, \nu_1, \, j = 1, \ldots, m; \, i \neq j) \; ; \qquad b_{ii}(x) = 1 \, , \qquad (i = 1, \ldots, \nu_1),$$

Le condizioni (17), (18) divengono più semplicemente

$$\begin{vmatrix} A_{\nu_1+1,\nu_1+1}(x, \eta_2(x)) \ldots A_{\nu_1+1,m}(x, \eta_2(x)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{\nu_1+1,m}(x, \eta_2(x)) \ldots A_{m,m}(x, \eta_2(x)) \end{vmatrix} \neq 0 \, ,$$

in tutto l'intervallo $-a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, e

$$Z_i(0) = G_i(0) \, , \qquad (i = 1, \ldots, \nu_1) \, ,$$

e la (20) diviene

$$z_i(x, \eta_2(x)) = G_i(x) \, , \qquad (i = 1, .., \nu_1) \, , \tag{20'}$$

vale a dire nei punti della caratteristica $y=\eta_2(x)$ sono prefissati i valori di ν_1 tra le funzioni (1); il teorema di unicità assicura che non può esistere più di un integrale (in senso generalizzato) del sistema (I), tale che ad esso appartenga la curva caratteristica (5) e che nei punti della curva $y=\eta_2(x)$ soddisfi le condizioni (20′).

§ 2.

4. – Teorema di dipendenza continua dai dati.

Valgano le ipotesi del teorema di unicità (*n.* 2); *assieme alla curva caratteristica* (5) *del sistema corrispondente alla radice caratteristica* $\sigma_1(x, y)$, *sia assegnata la curva caratteristica dello stesso sistema*

$$(5^*)\qquad y=\eta_1(x),\ z_1=Z_1^*(x),\dots,z_m=Z_m^*(x)\,,\qquad(-a_1\leqslant x\leqslant a_2)\,,$$

dove le funzioni $Z_i^*(x)$, $(i=1,\dots,m)$ *sono lipschitziane in* $(-a_1, a_2)$; *siano assegnate le funzioni* $G_i^*(x)$, $(i=1,\dots,\nu_1)$, *continue in* $(-a_1, a_2)$ *e soddisfacenti le*

$$(18^*)\qquad \sum_{j=1}^m b_{ij}(0)Z_j^*(0)=G_i^*(0)\,,\qquad(i=1,\dots,\nu_1)\,.$$

Nel campo Δ (*definito nel n.* 2 *d*)) *siano definite le due m-ple di funzioni*

$$(1)\qquad z_1=z(x,y),\dots,z_m=z_m(x,y)\,;$$

$$(1^*)\qquad z_1=z_1^*(x,y),\dots,z_m=z_m^*(x,y)\,,$$

lipschitziane nel campo Δ, *e costituenti due soluzioni* (*in senso generalizzato*) *del sistema* (I); *assieme alle* (19), (20) *valgano le*

$$(19^*)\qquad z_i^*(x,\eta_1(x))=Z_i^*(x)\,,\qquad(i=1,\dots,m)\,,$$

per $-a_1\leqslant x\leqslant a_2$, *e*

$$(20^*)\qquad \sum_{j=1}^m b_{ij}(x)z_i^*(x,\eta_2(x))=G_i^*(x)\,,\qquad(i=1,\dots,\nu_1)\,,$$

nei punti della curva (14) *appartenenti al campo* Δ. *Allora, dato un numero* ε *positivo arbitrario, si può determinare un numero positivo* σ *in modo che, per*

$$(65)\qquad |Z_i(x)-Z_i^*(x)|<\sigma\,,\ (i=1,\dots,m);\qquad |G_i(x)-G_i^*(x)|<\sigma\,,\ (i=1,\dots,\nu_1)$$

in tutto $(-a_1, a_2)$, *risulti*

$$(66)\qquad \sum_{j=1}^m|z_j(x,y)-z_j^*(x,y)|<\varepsilon$$

in tutto il campo Δ.

a) Mediante il cambiamento di variabili stabilito dalle (35), (35_1) (cfr. n. 2 *f*)), si definiscono nel campo δ del piano (u, v) le funzioni

$$\zeta_i(u, v) = z_i(\xi(u, v), \eta(u, v)), \qquad (i = 1, \dots, m), \tag{38}$$

$$\zeta_i^*(u, v) = z_i^*(\xi(u, v), \eta(u, v)), \qquad (i = 1, \dots, m). \tag{38*}$$

Le funzioni $\zeta_i(u, v)$ soddisfano le relazioni (52), (53) (cfr. n. 2 *j*), *k*)), e le $\zeta_i^*(u, v)$ relazioni del tutto analoghe. Posto

$$U_i(u, v) = \zeta_i(u, v) - \zeta_i^*(u, v), \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{54}$$

e inoltre

$$\Phi_i(u) = Z_i(u) - Z_i^*(u), \qquad (i = 1, \dots, m), \tag{67}$$

$$\Psi_i(v) = G_i(v) - G_i^*(v), \qquad (i = 1, \dots, \nu_1), \tag{68}$$

sottraendo dalle (52), (53) le relazioni analoghe relative alle funzioni (38*) si trovano, nel caso attuale, le

$$\begin{aligned} U_j(u, v) = {} & \sum_{i=1}^{\nu_1} \alpha_{ij}(u, v) \Big\{ \sum_{s=1}^{m} a_{is}(0, v)\, U_s(0, v) + \\ & + \sum_{s=1}^{m} \int_0^u \frac{\partial a_{is}(\lambda, v)}{\partial \lambda} U_s(\lambda, v)\, d\lambda + \int_0^u [F_i(\lambda, v; \zeta_1(\lambda, v), \dots, \zeta_m(\lambda, v)) - \\ & - F_i(\lambda, v; \zeta_1^*(\lambda, v), \dots, \zeta_m^*(\lambda, v))]\, d\lambda \Big\} + \sum_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2} \alpha_{ij}(u, v) \Big\{ \sum_{s=1}^{m} a_{is}(u, 0)\, \Phi_s(u) + \\ & + \sum_{s=1}^{m} \int_0^v \frac{\partial a_{is}(u, \mu)}{\partial \mu} U_s(u, \mu)\, d\mu + \\ & + \int_0^v [F_i(u, \mu; \zeta_1(u, \mu), \dots, \zeta_m(u, \mu)) - F_i(u, \mu; \zeta_1^*(u, \mu), \dots, \zeta_m^*(u, \mu))]\, d\mu \Big\} + \\ & + \sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m} \alpha_{ij}(u, v) \Big\{ \sum_{s=1}^{m} a_{is}(\varphi_i(u, v), 0)\, \Phi_s(\varphi_i(u, v)) + \\ & + \sum_{s=1}^{m} \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} \frac{d a_{is}(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))}{d\lambda} U_s(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))\, d\lambda + \\ & + \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} [F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v); \zeta_1(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)), \dots, \zeta_m(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v))) - \\ & - F_i(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v); \zeta_1^*(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)), \dots, \zeta_m^*(\lambda, \gamma_i(\lambda; u, v)))]\, d\lambda \Big\}, \qquad (j = 1, \dots, m). \end{aligned} \tag{69}$$

$$(70)\qquad U_j(0,v)=\sum_{i=1}^{\nu_1}\beta_{ij}(v)\Psi_i(v)+\sum_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2}\beta_{ij}(v)\left\{\sum_{s=1}^{m}a_{is}(0,0)\Phi_s(0)+\right.$$

$$+\sum_{s=1}^{m}\int_0^v\frac{\partial a_{is}(0,\mu)}{\partial\mu}U_s(0,\mu)\,d\mu+\int_0^v[F_i(0,\mu;\zeta_1(0,\mu),\ldots,\zeta_m(0,\mu))-$$

$$\left.-F_i(0,\mu;\zeta_1^*(0,\mu),\ldots,\zeta_m^*(0,\mu))]\,d\mu\right\}+\sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m}\beta_{ij}(v)\left\{\sum_{s=1}^{m}a_{is}(\varphi_i(0,v),0)\Phi_s(\varphi_i(0,v))+\right.$$

$$+\sum_{s=1}^{m}\int_{\varphi_i(0,v)}^{0}\frac{da_{is}(\lambda,\gamma_i(\lambda;0,v))}{d\lambda}U_s(\lambda,\gamma_i(\lambda;0,v))\,d\lambda+$$

$$+\int_{\varphi_i(0,v)}^{0}[F_i(\lambda,\gamma_i(\lambda;0,v);\zeta_1(\lambda,\gamma_i(\lambda;0,v)),\ldots,\zeta_m(\lambda,\gamma_i(\lambda;0,v)))-$$

$$\left.-F_i(\lambda,\gamma_i(\lambda;v);\zeta_1^*(\lambda,\gamma_i(\lambda;0,v)),\ldots,\zeta_m^*(\lambda,\gamma_i(\lambda;0,v)))]\,d\lambda\right\},\qquad(j=1,\ldots,m)\,.$$

b) Dalle (69), (70), ragionando come nel n. 2 *l*), seguono subito le

$$(71)\qquad |U_j(u,v)|\leqslant H_1\left\{\nu_1H\sum_{s=1}^{m}|U_s(0,v)|+\right.$$

$$+\nu_1L_2\left|\int_0^u\sum_{s=1}^{m}\left|U_s(\lambda,v)\right|d\lambda\right|+m(m-\nu_1)H\sigma+\nu_2L_2\left|\int_0^v\sum_{s=1}^{m}\left|U_s(u,\mu)\right|d\mu\right|+$$

$$\left.+(L_2+\Lambda M^{[1]})\sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m}\left|\int_{\varphi_i(u,v)}^{u}\sum_{s=1}^{m}\left|U_s(\lambda,\gamma_i(\lambda;u,v))\right|d\lambda\right|\right\},\qquad(j=1,\ldots,m)\,.$$

$$(72)\qquad |U_j(0,v)|\leqslant H_2\left\{\nu_1\sigma+m(m-\nu_1)H\sigma+\nu_2L_2\left|\int_0^v\sum_{s=1}^{m}\left|U_s(0,\mu)\right|d\mu\right|+\right.$$

$$\left.+(L_2+\Lambda M^{[1]})\sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m}\left|\int_{\varphi_i(0,v)}^{0}\sum_{s=1}^{m}\left|U_s(\lambda,\gamma_i(\lambda;0,v))\right|d\lambda\right|\right\},\qquad(j=1,\ldots,m)\,.$$

Indicato, come nel n. 2 *m*), con $U(v)$ il massimo di $\sum\limits_{s=1}^{m}|U_s(u,v)|$ nel segmento della retta $v=\text{cost.}$ appartenente al campo δ, dalle (72) si ottengono le

$$(73)\qquad |U_j(0,v)|\leqslant H_2\left\{\nu_1\sigma+m(m-\nu_1)H\sigma+\nu_2L_2\left|\int_0^v\sum_{s=1}^{m}\left|U_s(0,\mu)\right|d\mu\right|+\right.$$

$$\left.+(L_2+\Lambda M^{[1]})\sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m}\left|\int_{\varphi_i(0,v)}^{0}U(\gamma_i(\lambda;0,v))\,d\lambda\right|\right\},\qquad(j=1,\ldots,m)\,.$$

Ragionando come nel n. 2 *m*), posto $\mu = \gamma_i(\lambda; 0, v)$, si trova

$$\left| \int_{\varphi_i(0,v)}^{0} U(\gamma_i(\lambda, 0, v)\, d\lambda \right| \leq k \left| \int_0^v U(\mu)\, d\mu \right| ;$$

sostituendo nelle (73), e poi sommando per $j = 1, \dots, m$, risulta

$$\sum_{j=1}^{m} |U_j(0, v)| \leq mH_2 \left\{ \nu_1 \sigma + m(m-\nu_1) H\sigma + \nu_2 L_2 \left| \int_0^v \sum_{j=1}^{m} \left| U_j(0, \mu) \right| d\mu \right| + \right.$$
$$\left. + (m-\nu_1-\nu_2)(L_2 + AM^{(1)}) k \left| \int_0^v U(\mu) d\mu \right| \right\},$$

da cui per il Lemma di Gronwall

$$\sum_{j=1}^{m} |U_j(0, v)| \leq mH_2 \left\{ (\nu_1 + m(m-\nu_1) H) \sigma \exp\left[mH_2 \nu_2 L_2 |v| \right] + \right.$$
$$\left. + (m-\nu_1-\nu_2)(L_2 + AM^{(1)}) k \left| \int_0^v \exp\left[mH_2 \nu_2 L_2 |v-\mu| \right] U(\mu)\, d\mu \right| \right\}.$$

In virtù di quest'ultima relazione, tenendo conto del modo, nel quale è stata introdotta la funzione $U(v)$, dalle (71) si ottengono le

$$(74) \qquad |U_j(u, v)| \leq H_1 \left\{ B\sigma + m\nu_1(m-\nu_1-\nu_2) HH_2 (L_2 + AM^{(1)}) k \cdot \right.$$
$$\cdot \left| \int_0^v \exp\left[mH_2 \nu_2 L_2 |v-\mu| \right] U(\mu)\, d\mu \right| + \nu_1 L_2 \left| \int_0^u \sum_{s=1}^{m} \left| U_s(\lambda, v) \right| d\lambda \right| +$$
$$\left. + \nu_2 L_2 \left| \int_0^v U(\mu)\, d\mu \right| + (L_2 + AM^{(1)}) \sum_{i=\nu_1+\nu_2+1}^{m} \left| \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} U(\gamma_i(\lambda; u, v))\, d\lambda \right| \right\}, \qquad (j = 1, \dots, m),$$

dove

$$B = m\nu_1 HH_2 (\nu_1 + m(m-\nu_1) H) \exp\left[mH_2 \nu_2 L_2 v_0 \right] + mH(m-\nu_1),$$

e v_0 indica il massimo di $|v|$ nel campo δ.

Come nel n. 2 *m*), posto $\mu = \gamma_i(\lambda; u, v)$, si trova

$$\left| \int_{\varphi_i(u,v)}^{u} U(\gamma_i(\lambda; u, v))\, d\lambda \right| \leq k \left| \int_0^v U(\mu)\, d\mu \right|, \qquad (i = \nu_1 + \nu_2 + 1, \dots, m).$$

Sostituendo nelle (74), e sommando queste ultime per $j=1,\ldots,m$, risulta

$$(75)\qquad \sum_{j=1}^{m}|U_j(u,v)|\leqslant mH_1\left\{B\sigma+v_1L_2\left|\int_0^u\sum_{j=1}^{m}\left|U_j(\lambda,v)\right|d\lambda\right|+K\left|\int_0^v U(\mu)d\mu\right|\right\},$$

dove K è la costante introdotta nel n. 2 m). Dalla (75), in cui si intenda u come variabile indipendente e v come parametro, si ottiene, per il Lemma di Gronwall

$$\sum_{j=1}^{m}|U_j(u,v)|\leqslant mH_1\left\{B\sigma+K\left|\int_0^v U(\mu)d\mu\right|\right\}\exp\left[mH_1v_1L_2\alpha\right],$$

dove α è il maggiore dei due numeri a_1, a_2; da questa segue immediatamente (cfr. n. 2 m))

$$U(v)\leqslant mH_1\left\{B\sigma+K\left|\int_0^v U(\mu)\,d\mu\right|\right\}\exp\left[mH_1v_1L_2\alpha\right],$$

da cui, applicando ancora il Lemma di Gronwall e ponendo $C=\exp\left[mH_1v_1L_2\alpha\right]$, si ottiene

$$U(v)\leqslant mH_1BC\exp\left[mH_1KCv_0\right]\sigma\,.$$

Allora per ogni v, che sia ordinata di punti del campo δ, risulta

$$U(v)<\varepsilon,\ \text{ se è }\ \sigma<\frac{\varepsilon}{mH_1CB}\exp\left[-mH_1KCv_0\right].$$

Tenuto conto delle (54) e del modo, nel quale è stata definita la funzione $U(v)$, in tutto δ è anche

$$\sum_{j=1}^{m}|\zeta_j(u,v)-\zeta_j^*(u,v)|<\varepsilon\,,$$

e quindi, in virtù delle (38), (38*), e del cambiamento di variabili (35), (35_1), risulta in tutto Δ

$$\sum_{j=1}^{m}|z_i(x,y)-z_i^*(x,y)|<\varepsilon\,,$$

se è

$$\sigma<\frac{\varepsilon}{mH_1CB}\exp\left[-mH_1KCv_0\right].$$

5. – Complementi.

a) Vale una osservazione del tutto analoga a quella fatta alla fine del n. 2.

b) Anche per il teorema di dipendenza continua dai dati si può enunciare facilmente il risultato particolare, contenuto nel n. 3. La (18*) diviene, in questo caso, $Z_i^*(0) = G_i^*(0)$, $(i = 1, \ldots, m)$ e la (20*)

$$z_i(x, \eta_2(x)) = G_i^*(x)\,, \qquad (i = 1, \ldots, \nu_1)\,.$$

BIBLIOGRAFIA

CARATHÉODORY C.:

[1] *Vorlesungen über reelle Funktionen,* Teubner, Leipzig, 1918.

CINQUINI CIBRARIO M. - CINQUINI S.:

[1] *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico,* Monografie Matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche, n. 12, Ed. Cremonese, Roma, 1964.

CINQUINI CIBRARIO M.:

[1] *Sui teoremi di esistenza e di unicità relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali,* Nota I, Rend. R. Accad. dei Lincei (VI), **13** (1931), pp. 26-31.

[2] *Sui teoremi di esistenza e di unicità relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali,* Nota II, Rend. R. Accad. dei Lincei (VI), **13** (1931), pp. 115-118.

[3] *Sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti,* Seminari dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, 1962-63, pp. 101-122.

[4] *Teoremi di esistenza per sistemi semilineari di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti,* Annali di Matematica (IV), **68** (1965), pp. 119-160.

[5] *Teoremi di esistenza per sistemi di equazioni quasi lineari a derivate parziali in più variabili indipendenti,* Annali di Matematica (IV), **75** (1967), pp. 1-46.

[6] *Proprietà delle soluzioni di sistemi di equazioni a derivate parziali,* Atti dell'VIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Trieste 1967, pp. 282-283.

[7] *Ulteriori risultati per i sistemi semilineari di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti,* Rend. Istituto Lombardo, **102** (1968), pp. 801-837.

[8] *Ulteriori risultati per sistemi di equazioni quasi lineari a derivate parziali in più variabili indipendenti,* Rend. Istituto Lombardo, **103** (1969), pp. 373-407.

[9] *Teoremi di esistenza per sistemi di equazioni non lineari a derivate parziali in più variabili indipendenti,* Rend. Istituto Lombardo, **104** (1970), pp. 795-829.

CINQUINI S.:

[1] *Teoremi di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali,* Seminario dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, 1962-63, pp. 206-215.

[2] *Sopra un teorema di unicità per un sistema non lineare di equazioni a derivate parziali del secondo ordine,* Atti del VII Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Genova 1963.

[3] *Sopra l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per sistemi di equazioni a derivate parziali quasi-lineari,* Atti del Convegno su le equazioni alle derivate parziali, Bologna 1967, pp. 52-57.

[4] *A proposito dei sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico,* Atti del Convegno su le equazioni alle derivate parziali, Bologna 1967, pp. 58-62.

[5] *Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali quasi-lineari,* Annali di Matematica (IV), **75** (1967), pp. 231-260.

[6] *Sopra i sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico,* Atti dell'VIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Trieste 1967, pp. 280-281.

[7] *Sopra l'iperbolicità dei sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti,* Rend. Accad. dei Lincei (VIII), Nota I, **43** (1967), pp. 288-292; Nota II, **43** (1967), pp. 464-468; Nota III, **44** (1968), pp. 9-14.

[8] *A proposito dei sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico in più variabili indipendenti,* Periodico di Matematica (IV), **46** (1968), pp. 100-106.

MC SHANE E. G.:

[1] *Integration,* Princeton University Press, 1967.

RADEMACHER H.:

[1] *Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über Transformation der Doppelintegrale,* Math. Annalen, I, **79** (1919), pp. 340-359; II, **81** (1920), pp. 52-63.

SCORZA DRAGONI G.:

[1] *Un'osservazione sulla derivata di una funzione composta,* Rend. Seminario Matematico della Università di Padova, **20** (1951), pp. 462-467.

VOLPATO M.:

[1] *Sulla derivabilità, rispetto a valori iniziali ed a parametri, delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine,* Rend. Seminario Matematico della Università di Padova, **28** (1958), pp. 71-106.