Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali (*) (**).

LUCIO BOCCARDO [1] (L'Aquila) - PAOLO MARCELLINI [2] (Firenze)

Sunto. – *Si considera una successione* $(A_n)_n$ *di operatori lineari ellittici del secondo ordine in forma variazionale G-convergente ad un operatore* A *dello stesso tipo. Si danno delle condizioni sul convesso* K *di* $H_0^1(\Omega)$ *(o di* $H^1(\Omega)$*) affinchè, qualunque sia* $\varphi \in L^2(\Omega)$, *la successione* $(u_n)_n$ *delle soluzioni delle disequazioni variazionali*

$$u_n \in K: \qquad \langle A_n u_n - \varphi, v - u_n \rangle \geqslant 0\,, \qquad \forall v \in K\,,$$

convenga in $L^2(\Omega)$ *alla corrispondente soluzione della disequazione variazionale per* A. *La prova si basa su di una caratterizzazione della G-convergenza di funzioni convesse.*

Summary. – *In this paper a sequence* $(A_n)_n$ *of variational second order linear elliptic operators G-convergent to an operator* A *of the same type is considered. We give sufficient conditions on the convex set* K *of* $H_0^1(\Omega)$ *(or* $H^1(\Omega)$*) in order that, for any fixed* $\varphi \in L^2(\Omega)$, *the sequence* $(u_n)_n$ *of solutions to the variational inequalities*

$$u_n \in K: \qquad \langle A_n u_n - \varphi, v - u_n \rangle \geqslant 0\,, \qquad \forall v \in K\,,$$

converge in $L^2(\Omega)$ *to the solution of the corresponding variational inequality for* A. *The proof essentially depends upon a characterization of the G-convergence for convex functions.*

1. – Introduzione.

La G-convergenza di operatori lineari ellittici del secondo ordine formalmente autoaggiunti è stata introdotta da SPAGNOLO [23].

Secondo SPAGNOLO si dice che una successione di operatori

$$A_n = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{1}$$

(*) Entrata in Redazione il 14 maggio 1975.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e Applicazioni del C.N.R.

(1) Istituto Matematico dell'Università, Via Roma 33, 67100 L'Aquila.

(2) Istituto Matematico dell'Università, Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze.

G-converge ad un operatore A dello stesso tipo se, per ogni φ con quadrato sommabile in un aperto limitato Ω di $\boldsymbol{R}^N$, la soluzione variazionale u_n, cioè $u_n \in H_0^1(\Omega)$, del problema di Dirichlet

$$A_n u_n = \varphi \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u_n = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \tag{2}$$

converge in $L^2(\Omega)$ alla soluzione u del problema

$$Au = \varphi \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega\,. \tag{3}$$

Nel lavoro di SPAGNOLO ed in quanto segue gli operatori A_n sono supposti equi-uniformemente ellittici, nel senso che esistono due costanti positive λ, Λ per cui

$$\lambda \sum_i \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}^{(n)}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda \sum_i \xi_i^2\,, \qquad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^N,\ \forall n\,, \qquad \text{q.o. in } \Omega\,. \tag{4}$$

Si può dimostrare (si veda il teorema 4.1) che questa nozione equivale alla simultanea convergenza degli autovalori e degli spazi di autofunzioni.

La definizione data può essere riformulata nel modo seguente: Per ogni $\varphi \in L^2(\Omega)$, il minimo di

$$f_n(v) - \int_\Omega \varphi v\, dx \tag{5}$$

converge al minimo di

$$f(v) - \int_\Omega \varphi v\, dx\,, \tag{6}$$

dove f_n ed f sono gli integrali di Dirichlet

$$f_n(v) = \frac{1}{2}\langle A_n v, v\rangle = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}^{(n)} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx\,,$$
$$f(v) = \frac{1}{2}\langle A v, v\rangle = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx\,,$$

ed il minimo è preso al variare di v in $H_0^1(\Omega)$.

Ciò è conseguenza del fatto che le soluzioni u_n ed u dei problemi (2) e (3) sono le minimanti dei funzionali (5) e (6) ed i valori minimi valgono rispettivamente

$$\min(5) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi u_n\, dx\,, \qquad \min(6) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi u\, dx\,.$$

Perciò la convergenza dei valori minimi è la convergenza debole in $L^2(\Omega)$ di $(u_n)_n$. Ma ciò implica la convergenza forte in $L^2(\Omega)$ dato che, per la (4), la successione $(u_n)_n$ è limitata in $H_0^1(\Omega)$.

Questa osservazione è il punto di partenza per una definizione più generale di G-convergenza (si veda [14]). Supponiamo che f_n ed f siano funzioni: (a) definite su di uno spazio di Banach riflessivo e separabile V a valori in $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$; ($b$) convesse e semicontinue inferiormente; (c) equilimitate superiormente in un punto fissato ed equilimitate inferiormente da una funzione convessa crescente all'infinito più rapidamente di ogni funzionale lineare. In queste ipotesi f_n G-converge ad f se e solo se

$$\lim_n f_n^*(v^*) = f^*(v^*)$$

per ogni v^*, elemento del duale topologico di V, dove f_n^* ed f^* sono le funzioni coniugate di f_n ed f, cioè

$$-f^*(v^*) = \min_V \{f(v) - \langle v^*, v\rangle\},$$

e analogamente f_n^* per ogni n.

Dimostriamo nel paragrafo 2 che la nozione di G-convergenza di funzioni convesse ha un aspetto differenziale analogo alla G-convergenza degli operatori A_n della (1). Precisamente, se f_n ed f sono funzioni strettamente convesse e differenziabili secondo Gateaux, normalizzate in modo che $\min_V f_n = \min_V f$, allora f_n G-converge ad f se e solamente se, per ogni v^*, la soluzione del problema

$$\nabla f_n(u_n) = v^*,$$

converge debolmente alla soluzione u del problema

$$\nabla f(u) = v^*.$$

In questo lavoro usiamo le funzioni convesse per lo studio di disequazioni variazionali. Infatti, come è noto, cercare la soluzione della disequazione variazionale

$$u \in K: \langle Au - \varphi, v - u\rangle \geqslant 0, \qquad \forall v \in K,$$

è equivalente a risolvere il problema di minimo

$$f(v) + \delta_K(v) = \text{minimo},$$

dove δ_K, funzione indicatrice di K, vale 0 se $v \in K$ e $+\infty$ altrimenti. Qui K è un convesso chiuso di uno spazio di Banach riflessivo e A è il gradiente di f.

Consideriamo il problema: *Data una successione* $(A_n)_n$ *di operatori lineari ellittici in forma variazionale come in* (1) *G-convergente ad un operatore A dello stesso tipo; dato un aperto limitato Ω di $\boldsymbol{R}^N$; per quali convessi chiusi K di $H_0^1(\Omega)$ la successione* $(u_n)_n$ *delle soluzioni delle disequazioni variazionali*

$$u_n \in K: \langle A_n u_n - \varphi, v - u_n\rangle \geqslant 0, \qquad \forall v \in K,$$

converge in $L^2(\Omega)$ *alla soluzione* u *della disequazione variazionale*

$$u \in K: \ \langle Au - \varphi, v - u \rangle \geqslant 0 , \qquad \forall v \in K ,$$

qualunque sia $\varphi \in L^2(\Omega)$?

Naturalmente ci si può porre lo stesso problema per convessi K di $H^1(\Omega)$, anzichè $H^1_0(\Omega)$, pur di sostituire gli operatori A_n con $A_n + c_n$, essendo c_n delle funzioni misurabili e tali che esistano due costanti positive γ_0, γ, indipendenti da n, per cui

$$\gamma_0 \leqslant c_n(x) \leqslant \gamma , \qquad \text{q.o. in } \Omega .$$

In [15] si è provato che il risultato è vero per il convesso

$$K_1 = \{v \in H^1_0(\Omega) : v \geqslant \psi \text{ su } E\} ,$$

essendo E un sottoinsieme compatto di Ω e $\Omega \subset \mathbf{R}$.

In [1], [2] si dà una risposta affermativa per il convesso

$$K_2 = \{v \in H^1_0(\Omega) : v \geqslant \psi \text{ in } \Omega\} .$$

Le tecniche usate nei lavori menzionati non sembrano potersi applicare al convesso K_1 se la dimensione N dello spazio è maggiore di 1.

In questo lavoro ci proponiamo tra l'altro di provare che il problema posto ha risposta positiva per il convesso K_1. Il metodo usato è applicabile anche ai convessi K_2 e

$$K_3 = \{v \in H^1(\Omega) : v \geqslant \psi \text{ su } E\} ,$$

dove E è un compatto di $\bar{\Omega}$.

Le prove di tali risultati, esposte nel paragrafo 4, si basano su di una caratterizzazione della G-convergenza di funzioni convesse come appare nel teorema 3.1.

Tale caratterizzazione si ricollega ad un tipo di convergenza introdotta e studiata da MOSCO [17]. Inoltre mette in luce il legame tra la G-convergenza e la convergenza di funzionali del tipo dell'area recentemente introdotta da DE GIORGI [6].

Ringraziamo i Professori Ennio DE GIORGI e Giorgio TALENTI con i quali abbiamo discusso i risultati di questo lavoro.

2. – Richiami e risultati preliminari.

Sia V uno spazio di Banach reale *riflessivo* e *separabile*, V^* il suo duale topologico e $\langle v^*, v \rangle = v^*(v)$ il valore che $v^* \in V^*$ assume in $v \in V$.

Indichiamo con $\mathcal{C}_0(V)$ la classe delle funzioni *convesse semicontinue inferiormente su* V *a valori in* $(-\infty, +\infty] = \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, *non identicamente* $+\infty$.

Indichiamo invece con $\mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$ la famiglia di funzioni di $\mathcal{C}_0(V)$

$$\mathcal{C}(\alpha, v_0, M) = \{f \in \mathcal{C}_0(V): f(v) \geqslant \alpha(v),\ \ \forall v \in V;\ f(v_0) \leqslant M\},$$

dove α è una funzione di $\mathcal{C}_0(V)$ con la proprietà che $\alpha(v) - \langle v^*, v\rangle$ assume minimo in V per ogni v^* in V^*; ciò equivale a dire che gli insiemi di livello di α, cioè gli insiemi

$$\{v \in V: \alpha(v) - \langle v^*, v\rangle \leqslant a\}$$

sono limitati qualunque siano $v^* \in V^*$ e $a \in \boldsymbol{R}$.

La *coniugata* f^* di $f \in \mathcal{C}_0(V)$ è la funzione definita su V^* da

$$f^*(v^*) = \sup_V \{\langle v^*, v\rangle - f(v)\}, \qquad v^* \in V^*. \tag{7}$$

Risulta $f^* \in \mathcal{C}_0(V^*)$ e $(f^*)^* = f$. Se inoltre $f \in \mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$ allora per ogni $v^* \in V^*$ f^* è finita e continua e l'estremo superiore della (7) è un massimo ([14], proposizione 1(ii)).

Si dice che $f \in \mathcal{C}_0(V)$ è *sottodifferenziabile* in u se esiste $v^* \in V^*$ per cui

$$f(v) \geqslant f(u) + \langle v^*, v - u\rangle, \qquad \forall v \in V. \tag{8}$$

$\partial f(u)$ è l'insieme dei v^* per cui vale la (8).

Se $\partial f(u) \neq \emptyset$ deve essere $f(u) < +\infty$ mentre viceversa non necessariamente f è sottodifferenziabile nei punti dove è finita. Vale comunque il seguente risultato di BRØNDSTED-ROCKAFELLAR [3]:

TEOREMA 2.1. – *Sia* $f \in \mathcal{C}_0(V)$. *Per ogni* v *per cui* $f(v) < +\infty$ *si può determinare una successione* $(v_n)_n$ *convergente in norma a* v *in modo che* f *sia sottodifferenziabile in* v_n *per ogni* n *e*

$$\lim_n f_n(v_n) = f(v).$$

Per maggiori dettagli sui risultati sopra esposti e sulla teoria delle funzioni convesse si può consultare MOREAU [16]. Richiamiamo ora la definizione di G-convergenza di funzioni convesse data in [14] e alcuni risultati di cui faremo uso in seguito.

DEFINIZIONE 2.2. – Se $(f_n)_n \in \mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$, diremo che f_n è *G-convergente* ad f ($f = G\text{-}\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, f_n$) se qualunque sia la successione $(f_{n_h})_h$ estratta da $(f_n)_n$ si ha

$$f = \sup_k \bigwedge_{h \geqslant k} f_{n_h},$$

dove si è posto

$$\bigwedge_{h\geq k} f_{n_h} = \sup\{g \in \mathcal{C}_0(V) : g(v) \leq f_{n_h}(v),\ \forall v \in V,\ \forall h \geq k\}.$$

TEOREMA 2.3. – *Se $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$, f_n G-converge ad f se e solo se*

$$\lim_n f_n^*(v^*) = f^*(v^*), \qquad \forall v^* \in V^*.$$

TEOREMA 2.4. – *Da ogni successione $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$ è possibile estrarre una sottosuccessione G-convergente.*

TEOREMA 2.5. – *Sia $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$ ed $f = G\text{-}\mathrm{Lim}_n f_n$. Comunque si scelga u_n minimizzante f_n su V, la successione $(u_n)_n$ è limitata e ogni sottosuccessione debolmente convergente tende ad un punto di minimo della f. Se inoltre f ha un unico punto di minimo u, la successione $(u_n)_n$ converge debolmente ad u.*

TEOREMA 2.6. – *Sia $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$ e g una funzione di $\mathcal{C}_0(V)$ con la proprietà che $\lim_n g(v_n) = g(v_0) < +\infty$ per ogni successione $(v_n)_n$ convergente debolmente a v_0. Se $(f_n)_n$ è una successione G-convergente, anche $(f_n + g)_n$ è G-convergente e*

$$G\text{-}\mathrm{Lim}_n (f_n + g) = G\text{-}\mathrm{Lim}_n f_n + g.$$

Le dimostrazioni dei teoremi 2.3, 2.4 e 2.5 sono in [14]; quella del teorema 2.6 in [15].

Proviamo ora un risultato che inverte il teorema 2.5.

TEOREMA 2.7. – *Siano $(f_n)_n$ ed f funzioni di $\mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$. Supponiamo che f sia strettamente convessa e che per ogni n $\min_V f_n = \min_V f$. Per ogni v^* indichiamo con $u_n(v^*)$ un vettore che realizza il minimo di*

$$f_n(v) - \langle v^*, v\rangle, \tag{9}$$

e con $u(v^*)$ l'unico vettore che realizza il minimo di

$$f(v) - \langle v^*, v\rangle. \tag{10}$$

Se per ogni $v^* \in V^*$ $(u_n(v^*))_n$ converge debolmente a $u(v^*)$ allora $(f_n)_n$ G-converge ad f.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $g = G\text{-}\mathrm{Lim}_k f_{n_k}$, dove $(f_{n_k})_k$ è una qualsiasi sottosuccessione di $(f_n)_n$ G-convergente, certo esistente per il teorema 2.4.

Cominciamo col provare che

$$\partial f(u) \subset \partial g(u), \qquad \forall u \in V. \tag{11}$$

A tal fine possiamo supporre che $\partial f(u) \neq \emptyset$. Se $v^* \in \partial f(u)$, per la (8) u minimizza la funzione di v

$$f(v) - \langle v^*, v \rangle .$$

Perciò, se per ogni k indichiamo con u_k un vettore minimizzante

$$f_{n_k}(v) - \langle v^*, v \rangle ,$$

per le ipotesi del teorema $(u_k)_k$ converge debolmente ad u. Dato che

$$g(v) - \langle v^*, v \rangle = G\text{-}\lim_k \left(f_{n_k}(v) - \langle v^*, v \rangle \right) ,$$

per il teorema 2.5 u minimizza $g(v) - \langle v^*, v \rangle$ e quindi $v^* \in \partial g(u)$. Ciò prova la (11).

Per un teorema di ROCKAFELLAR [19], la (11) implica che esiste una costante c per cui

$$g(v) = f(v) + c , \qquad \forall v \in V . \tag{12}$$

Applicando ora il teorema 2.3 con $v^* = 0$ e usando l'ipotesi di normalizzazione $\min_V f_{n_k} = \min_V f$ si ottiene $\min_V g = \min_V f$ che per la (12) implica $g(v) = f(v)$ per ogni $v \in V$.

Dall'arbitrarietà della sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ segue la tesi. ∎

OSSERVAZIONE 2.8. – Come conseguenza del teorema 2.5, l'ipotesi di convergenza dei vettori minimizzanti nel teorema sopra provato è condizione necessaria e sufficiente per la G-convergenza.

Inoltre, usando l'equicontinuità locale della successione $(f_n^*)_n$ ([15], proposizione 1), si può provare con una dimostrazione essenzialmente identica a quella sopra esposta che il teorema 2.7 continua a valere se per ogni n si sostituisce v^* con v_n^* e si suppone che la successione $(v_n^*)_n$ sia convergente a v^* nella topologia forte di V^*.

Notiamo infine che ci si può sempre ricondurre alla condizione $\min_V f_n = \min_V f$ pur di sostituire f_n ed f rispettivamente con

$$f_n'(v) = f_n(v) - \min_V f_n , \qquad f'(v) = f(v) - \min_V f . \quad ∎$$

Nel caso in cui f_n ed f sono differenziabili secondo Gateaux su V, cioè se per ogni $u \in V$ $\partial f_n(u)$ e $\partial f(u)$ si riducono all'ordinario gradiente $\nabla f_n(u)$ e $\nabla f(u)$, dal teorema 2.7 si ottiene:

COROLLARIO 2.9. – *Supponiamo che f_n ed f siano funzioni di $\mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$ differenziabili secondo Gateaux, $\min_V f_n = \min_V f$ ed f strettamente convessa.*

In tali ipotesi $f = G\text{-}\mathrm{Lim}_n f_n$ *se e soltanto se, indicando con* u_n *una soluzione del problema*

$$u_n \in V: \quad \nabla f_n(u_n) = v^*, \tag{13}$$

la successione $(u_n)_n$ *converge nella topologia debole di* V *alla soluzione di*

$$u \in V: \quad \nabla f(u) = v^*, \tag{14}$$

per ogni $v^* \in V^*$.

I risultati ottenuti si possono riformulare facendo uso della nozione di convergenza di insiemi di KURATOWSKI ([11], § 25, VI):

DEFINIZIONE 2.10. – Sia X uno spazio topologico e $(C_n)_n$ una successione di insiemi di X. Diremo che C_n converge a C se:

(i) Per ogni $v \in C$ esiste una successione $(v_n)_n$ convergente a v, con $v_n \in C_n$ per ogni n.

(ii) Per ogni sottosuccessione $(C_{n_k})_k$ di $(C_n)_n$, se $v_k \in C_{n_k}$ per ogni k e se v_k converge a v, allora $v \in C$.

Dai teoremi 2.5 e 2.7 si ottiene:

COROLLARIO 2.11. – *Siano* $(f_n)_n$ *ed* f *funzioni di* $\mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$ *con* f *strettamente convessa e* $\min_V f_n = \min_V f$. $f = G\text{-}\mathrm{Lim}_n f_n$ *se e soltanto se per ogni* $v^* \in V^*$ $\partial f_n^*(v^*)$ *converge nella topologia debole di* V *a* $\partial f^*(v^*)$ *secondo la definizione* 2.10.

Sempre dai teoremi 2.5 e 2.7 e tenendo presente l'osservazione 2.8 si ha:

COROLLARIO 2.12. – *Supponiamo che* f_n *ed* f *siano funzioni di* $\mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$, f *strettamente convessa e* $\min_V f_n = \min_V f$. $(f_n)_n$ *è G-convergente ad* f *se e soltanto se il grafico di* ∂f_n, *cioè l'insieme*

$$\{(v, v^*) \in V \times V^* \colon v^* \in \partial f_n(v)\},$$

converge in $V \times V^*$, *con la topologia prodotto della topologia debole di* v *e della topologia forte di* V^*, *all'insieme*

$$\{(v, v^*) \in V \times V^* \colon v^* \in \partial f(v)\}$$

grafico di ∂f.

3. – Una caratterizzazione della *G*-convergenza di funzioni convesse.

Ci proponiamo in questo paragrafo di provare il seguente teorema.

TEOREMA 3.1. – *Sia* $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$. f_n *G-converge ad* f *se e soltanto se valgono le condizioni*:

(i) *Per ogni* $v \in V$ *esiste una successione* $(v_n)_n$ *convergente debolmente a* v *tale che*

$$\lim_n f_n(v_n) = f(v) .$$

(ii) *Per ogni* $v \in V$ *e per ogni successione* $(v_n)_n$ *convergente debolmente a* v *risulta*

$$\liminf_n f_n(v_n) \geqslant f(v) .$$

Il teorema 3.1 è conseguenza dei teoremi 3.5 e 3.6 che seguono.

OSSERVAZIONE 3.2. – Si può provare come in ([17], lemma 1.10) che le condizioni (i) e (ii) del teorema 3.1 caratterizzano la convergenza, nella topologia debole di $V \times \boldsymbol{R}$, degli epigrafici delle funzioni, cioè degli insiemi

$$\operatorname{epi} f_n = \{(v, a) \in V \times \boldsymbol{R}\colon\ f_n(v) \leqslant a\} ,$$

secondo la definizione 2.10.

Facendo uso delle proposizioni 1 e 2 di [15] si potrebbe formulare il teorema 3.1 dicendo che $\operatorname{epi} f_n$ converge secondo la definizione 2.10 ad $\operatorname{epi} f$ nella topologia debole di $V \times \boldsymbol{R}$ se e soltanto se $\operatorname{epi} f_n^*$ converge, secondo la stessa definizione 2.10, ad $\operatorname{epi} f^*$ nella topologia forte di $V^* \times \boldsymbol{R}$. Risultati di questo tipo sono stati ottenuti da MOSCO [18] e JOLY [10].

Altri risultati concernenti convergenze del tipo di (i) e (ii) sono stati ottenuti da ZOLEZZI [27] senza ipotesi di convessità. ∎

OSSERVAZIONE 3.3. – Successioni verificanti le (i) e (ii) sono state prese in considerazione in [2] e [15] nello studio della stabilità della G-convergenza rispetto alla somma. Nei casi citati non si fa però l'ipotesi di limitatezza

$$f_n(v) \geqslant \alpha(v) , \qquad \forall v \in V ,$$

richiesta dal teorema 3.1. È quindi opportuno notare come senza l'ipotesi $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$ la tesi del teorema 3.1 sia generalmente falsa:

Si consideri per ogni n la funzione di una variabile reale

$$f_n(v) = \max\left\{\frac{1}{n} v ;\ \alpha_0\right\} , \qquad v \in \boldsymbol{R} ,$$

dove α_0 è un numero reale negativo.

Risulta

$$\alpha_0 = \sup_n \bigwedge_{h \geqslant n} f_h ,$$

mentre la funzione identicamente nulla verifica le (i) e (ii). ■

Nella prova del teorema 3.5 faremo uso tra l'altro del fatto ben noto che la topologia debole ristretta ad un limitato di uno spazio di Banach con duale separabile è metrizzabile (si veda ad esempio [9], theorem V.5.2). Anche allo scopo di chiarire le notazioni, poniamo ciò sotto forma di lemma.

Lemma 3.4. – *Sia d: $V \times V \to \boldsymbol{R}$ la funzione definita da*

$$d(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |\langle v_k^*, v - u \rangle| , \tag{15}$$

dove $(v_k^*)_k$ è una successione densa dell'insieme $\{v^* \in V^*: \|v^*\|_{V^*} = 1\}$. Si ha che v_n converge debolmente a v se e soltanto se la successione $(v_n)_n$ è limitata e $\lim_n d(v, v_n) = 0$.

Teorema 3.5. – *Se $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$ e $f = G\text{-}\mathrm{Lim}_n\, f_n$ allora valgono le* (i) *e* (ii) *del teorema* 3.1.

Dimostrazione. – Posto $g_h = \bigwedge_{n \geqslant h} f_n$, risulta

$$g_h(v) \leqslant f_n(v) , \qquad \forall v \in V, \ \forall n \geqslant h .$$

Per la semicontinuità inferiore di g_h, se $(v_n)_n$ converge debolmente a v si ha

$$g_h(v) \leqslant \liminf_n g_h(v_n) \leqslant \liminf_n f_n(v_n) , \qquad \forall h .$$

Per h tendente a $+\infty$ si ottiene la (ii).

Proviamo ora la (i) nei punti u dove f è sottodifferenziabile. Supponiamo perciò che esista $v^* \in V^*$ tale che

$$f(v) \geqslant f(u) + \langle v^*, v - u \rangle , \qquad \forall v \in V . \tag{16}$$

La (16) è equivalente ad affermare che la funzione di v

$$f(v) - \langle v^*, v \rangle$$

assume minimo in u.

Con le notazioni del lemma 3.4 consideriamo la funzione $d(u, v)$, che, come funzione di v, è convessa, nulla in u e positiva se $v \neq u$. Inoltre per la disuguaglianza triangolare

$$\lim_n d(u, v_n) = d(u, v_0)$$

ogniqualvolta v_n converge debolmente a v_0.

Per il teorema 2.6 si ha che

$$G\text{-}\mathrm{Lim}_n \{f_n(v) - \langle v^*, v\rangle + d(u, v)\} = f(v) - \langle v^*, v\rangle + d(u, v) .$$

Dato che la funzione di v

$$f(v) - \langle v^*, v\rangle + d(u, v)$$

assume minimo unico in u, per il teorema 2.5, se u_n è un vettore che realizza il minimo di

$$f_n(v) - \langle v^*, v\rangle + d(u, v) ,$$

u_n converge nella topologia debole a u e

$$\lim_n \{f_n(u_n) - \langle v^*, u_n\rangle + d(u, u_n)\} = f(u) - \langle v^*, u\rangle .$$

Ciò, per il lemma 3.4, implica che $\lim_n f_n(u_n) = f(u)$. La (i) vale quindi in tutti i punti dove f è sottodifferenziabile.

Supponiamo ora che v sia un qualsiasi punto di V tale che $f(v) < +\infty$. Il teorema 2.1 garantisce l'esistenza di una successione $(v^{(k)})_k$, con f sottodifferenziabile in $v^{(k)}$ per ogni k, tale che

$$\|v^{(k)} - v\|_V < \frac{1}{k}, \qquad |f(v^{(k)}) - f(v)| < \frac{1}{k}. \tag{17}$$

Per quanto sopra provato, per ogni k esiste una successione $(v_n^{(k)})_n$ convergente debolmente a $v^{(k)}$ tale che

$$\lim_n f_n(v_n^{(k)}) = f(v^{(k)}) , \qquad \forall k .$$

È quindi possibile determinare un intero $n(k)$ in dipendenza di k per cui

$$d(v_n^{(k)}, v^{(k)}) < \frac{1}{k}, \qquad |f_n(v_n^{(k)}) - f(v^{(k)})| < \frac{1}{k}, \qquad \forall n \geq n(k) . \tag{18}$$

Pur di cambiare $n(k)$ con $n'(k) = \max\{n(k); n(k-1)+1\}$, possiamo supporre $(n(k))_k$ crescente.

Qualunque sia l'intero $h \geq n(1)$ esiste quindi un unico k, che indichiamo con k_h, per cui $n(k_h) \leq h < n(k_h + 1)$. Poniamo $v'_h = v_h^{(k_h)}$. Con tale scelta dalle (17) e (18) si ottiene

$$d(v'_h, v) \leq d(v'_h, v^{(k_h)}) + \|v^{(k_h)} - v\|_V < \frac{2}{k_h}; \qquad |f_h(v'_h) - f(v)| < \frac{2}{k_h}.$$

Dato che $(k_h)_h$ è una successione di interi crescente con h, si conclude che

$$\text{(19)} \qquad \lim_h d(v'_h, v) = 0 ; \qquad \lim_h f_h(v'_h) = f(v) .$$

Per la seconda delle (19) risulta definitivamente

$$v'_h \in \{w : f_h(w) \leq f(v) + 1\} \subset \{w : \alpha(w) \leq f(v) + 1\} .$$

Essendo l'insieme $\{w : \alpha(w) \leq f(v) + 1\}$ limitato, anche la successione $(v'_h)_h$ è limitata e quindi, per la prima delle (19) e per il lemma 3.4, v'_h converge debolmente a v.

Ciò prova la (i) per ogni punto v per cui $f(v) < +\infty$. Ma dato che la (i) è ovvia conseguenza della (ii) se v è tale che $f(v) = +\infty$ il teorema è completamente provato. ■

Teorema 3.6. – *Sia $(f_n)_n$ una successione di $\mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$. Supponiamo che esistano una funzione $f: V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ ed un insieme $K_0 \subset V$ tali che:*

(j) *Per ogni v per cui $f(v) < +\infty$ esiste una successione $(v_n)_n$ convergente in norma a v, con $(v_n)_n \subset K_0$, tale che*

$$\lim_n f(v_n) = f(v) .$$

(jj) *Per ogni $v \in K_0$ esiste una successione $(v_n)_n$ convergente debolmente a v per cui*

$$\lim_n f_n(v_n) = f(v) .$$

(jjj) *Per ogni $v \in V$ e per ogni successione $(v_n)_n$ convergente debolmente a v si ha che*

$$\liminf_n f_n(v_n) \geq f(v) .$$

In queste ipotesi $f \in \mathcal{C}(\alpha, v_0, M)$, $(f_n)_n$ è G-convergente e $G\text{-}\lim_n f_n = f$.

Osservazione 3.7. – L'ipotesi del teorema 3.6 più complessa da verificare nelle applicazioni proposte nel paragrafo 4 è la (jj).

È chiaro che scegliendo K_0 «piccolo» la verifica della (jj) è facilitata. La (j) impone dei limiti a ciò; essa è infatti tanto più restrittiva quanto più K_0 è «piccolo».

Se $K_0 \not\supset \{v: f(v) < +\infty\}$ la (j) è una condizione intermedia tra la semicontinuità e la continuità in norma della funzione f. Più precisamente, se f è semicontinua, esiste un insieme K_0 per cui vale la (j), mentre ogni insieme K_0, con $\overline{K}_0 \supset \{v: f(v) < +\infty\}$, verifica la (j) se la restrizione di f all'insieme $\{v: f(v) < +\infty\}$ è una funzione continua. Quest'ultimo caso si verifica ad esempio se f è una funzione di $C_0(V)$ finita per ogni $v \in V$ ([20], corollary 7C).

Infine, se si sceglie $K_0 = V$ (nella (jj) del teorema 3.6 è equivalente scegliere $K_0 = V$ oppure $K_0 = \{v: f(v) < +\infty\}$ dato che la (jj) è conseguenza della (jjj) per ogni v per cui $f(v) = +\infty$,) la (j) di per sè non impone alcuna restrizione alla funzione f. Con tale scelta dai teoremi 3.5 e 3.6 si ottiene il teorema 3.1.

Notiamo anche che per $K_0 = V$ si può dare una dimostrazione diversa da quella sopra proposta usando il lemma 1 e le proposizioni 1 e 2 di [15]. ∎

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.6. – Per il teorema 2.4 di compattezza esiste una successione $(f_{n_k})_k$ estratta da $(f_n)_n$ G-convergente.

Sia $g = G\text{-}\operatorname{Lim}_k f_{n_k}$. Per il teorema 3.5 qualunque sia $v \in V$ si può determinare una successione $(v_k)_k$ convergente debolmente a v per cui

$$\lim_k f_{n_k}(v_k) = g(v)\,. \tag{20}$$

Ponendo $w_n = v_k$ per ogni n per cui $n_k \leq n < n_{k+1}$ e tenendo presente la (jjj), dalla (20) si ottiene

$$g(v) = \lim_k f_{n_k}(v_k) \geq \liminf_n f_n(w_n) \geq f(v)\,, \qquad \forall v \in V\,. \tag{21}$$

Inoltre, se $v \in K_0$ e $(v_n)_n$ è la successione convergente debolmente a v per cui vale la (jj), per il teorema 3.5 si ottiene

$$f(v) = \lim_n f_n(v_n) = \lim_k f_{n_k}(v_{n_k}) \geq g(v)\,, \qquad \forall v \in K_0\,. \tag{22}$$

Sia ora v tale che $f(v) < +\infty$ e $(v_n)_n$ la successione di K_0 per cui vale la (j). Per la (22) e per la semicontinuità inferiore di g si ottiene

$$f(v) = \lim_n f(v_n) \geq \liminf_n g(v_n) \geq g(v)\,, \qquad \forall v \in \{v: f(v) < +\infty\}\,. \tag{23}$$

Ovviamente $f(v) \geq g(v)$ per ogni v per cui $f(v) = +\infty$. Perciò dalle (21) e (23) segue che $f(v) = g(v)$ per ogni $v \in V$.

Quindi $G\text{-}\operatorname{Lim}_k f_{n_k} = f$. Ma dato che f non dipende dalla sottosuccessione scelta ne segue che $G\text{-}\operatorname{Lim}_n f_n = f$. ∎

4. – Convergenza delle soluzioni di disequazioni.

Sia $(A_n)_n$ una successione di operatori definiti sullo spazio di Sobolev $H_0^1(\Omega)$, con Ω aperto *limitato* di $\boldsymbol{R}^N$, del tipo

$$A_n = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{(n)}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + c_n(x)\,, \tag{24}$$

dove $a_{ij}^{(n)}$ e c_n sono funzioni misurabili e limitate in Ω e tali che esistano costanti positive λ, Λ, γ indipendenti da n per cui

$$\begin{cases} a_{ij}^{(n)}(x) = a_{ji}^{(n)}(x)\,, & i,j=1,\dots,N;\ \text{q.o. in } \Omega\,; \\ \lambda \sum_i \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}^{(n)}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda \sum_i \xi_i^2,\ \forall \xi \in \boldsymbol{R}^N, & \text{q.o. in } \Omega\,; \\ 0 \leqslant c_n(x) \leqslant \gamma\,, \quad \text{q.o. in } \Omega\,. \end{cases} \tag{25}$$

Secondo la definizione di SPAGNOLO [23] (cfr. [7], [14], [21]) $(A_n)_n$ G-converge ad A, operatore differenziale del tipo di (24) verificante le (25), se

$$\lim_n \|A_n^{-1}\varphi - A^{-1}\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 0\,, \tag{26}$$

per ogni $\varphi \in L^2(\Omega)$.

Il nesso fra la (26) e la definizione 2.2 è stato messo in evidenza nella introduzione. Per maggiore chiarezza riprecisiamo ciò nel teorema 4.1. Nello stesso teorema mostriamo come, nelle ipotesi sopra esposte, si possa caratterizzare la G-convergenza in termini di autovalori e di spazi di autofunzioni. A tal fine, indichiamo per ogni n con $(\lambda_n^{(k)})_k$ la successione non decrescente degli *autovalori* di A_n contati con la dovuta molteplicità e con $(u_n^{(k)})_k$ la successione delle relative *autofunzioni* $(\|u_n^{(k)}\|_{L^2(\Omega)} = 1)$. Indichiamo inoltre con $(\lambda^{(k)})_k$ e $(u^{(k)})_k$ le successioni degli autovalori e autofunzioni di A.

TEOREMA 4.1. – *Le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

(*a*) $f_n(v) = \langle A_n v, v\rangle$ *G-converge, nel senso della definizione* 2.2, *a* $f(v) = \langle Av, v\rangle$.

(*b*) $\lim_n \|A_n^{-1}\varphi - A^{-1}\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 0$, $\forall \varphi \in L^2(\Omega)$.

(*c*) $\lim_n \|A_n^{-1} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))} = 0$.

(*d*) *Valgono simultaneamente le* (i) *e* (ii):

(i) $\lim_n \lambda_n^{(k)} = \lambda^{(k)}$, $\forall k$; (*)

(*) La (*i*) è equivalente a $\lim_n 1/\lambda_n^{(k)} = 1/\lambda^{(k)}$ uniformemente al variare di k.

(ii) *se* $\lambda^{(k)}$ *ha molteplicità* ν $(\lambda^{(k-1)} < \lambda^{(k)} = \lambda^{(k+\nu-1)} < \lambda^{(k+\nu)})$, *la successione di spazi di dimensione* ν *generati per ogni* n *dalle autofunzioni* $u_n^{(k)}, \dots, u_n^{(k+\nu-1)}$, *converge in* $L^2(\Omega)$ *nel senso della definizione* 2.10 *allo spazio delle autofunzioni di* A *relativo a* $\lambda^{(k)}$.

DIMOSTRAZIONE. – Tenendo presente l'osservazione fatta nell'introduzione l'equivalenza di (a) e (b) segue dal teorema 2.3 (cfr. [14], proposizione 12).

Proviamo le seguenti implicazioni: $(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (b)$.

$(b) \Rightarrow (c)$: La (c) significa:

$$\lim_n \|A_n^{-1}\varphi - A^{-1}\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 0\,, \qquad \text{uniformemente per } \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant 1\,. \tag{27}$$

Ciò, per l'equicontinuità degli operatori $A_n^{-1}\colon H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ ($H^{-1}(\Omega)$ è il duale topologico di $H_0^1(\Omega)$) e per la compattezza dell'insieme $\{\varphi\colon \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant 1\}$ in $H^{-1}(\Omega)$, è equivalente alla (b).

$(c) \Rightarrow (d)$: La (i) è provata in ([9], lemma XI.9.5).

Sia k fissato e supponiamo che $\lambda^{(k)}$ abbia molteplicità $\nu \geqslant 1$ $(\lambda^{(k-1)} < \lambda^{(k)} = \lambda^{(k+\nu-1)} < \gamma^{(k+\nu)})$. Sia S lo spazio delle autofunzioni di A relative a $\lambda^{(k)}$ e S_n lo spazio lineare di dimensione γ generato dalle autofunzioni tra loro ortogonali $u_n^{(k)}, \dots, u_n^{(k+\nu-1)}$. Occorre provare che

$$\operatorname{Lim\,sup} S_n = \{v\colon \exists v_h \in S_{n_h},\ v_h \xrightarrow{L^2(\Omega)} v,\ (S_{n_h})_h \text{ sottosuccessione di } (S_n)_n\} \subset S\,; \tag{28}$$

$$\operatorname{Lim\,inf} S_n = \{v\colon \exists v_n \in S_n,\ v_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} v\} \supset S\,. \tag{29}$$

Come conseguenza delle (25) e della (i), per ogni $r = 0, 1, \dots, \nu - 1$, la successione $(u_n^{(k+r)})_n$ è limitata in $H_0^1(\Omega)$ e quindi relativamente compatta in $L^2(\Omega)$. Perciò per ogni r esiste una successione $(u_{n_h}^{(k+r)})_h$ estratta da $(u_n^{(k+r)})_n$ convergente in $L^2(\Omega)$ ad una funzione $u_r \in H_0^1(\Omega)$. Poichè

$$u_{n_h}^{(k+r)} = A_{n_h}^{-1}(\lambda_{n_h}^{(k+r)} u_{n_h}^{(k+r)})\,,$$

passando al limite per $h \to +\infty$, tenendo conto della ipotesi (c) e della (i) si ha che $u_r \in S$. Da ciò, con un procedimento diagonale si deduce che esiste una successione crescente di interi, che indichiamo ancora con $(n_h)_h$, per cui

$$\lim_h \|u_{n_h}^{(k+r)} - u_r\|_{L^2(\Omega)} = 0\,, \qquad r = 0, 1, \dots, \nu - 1\,, \tag{30}$$

e $u_1, \dots, u_{\nu-1}$ è una base di S.

Da ciò, per la linearità degli operatori A_n, segue facilmente la (28). Per la stessa ragione l'insieme $\operatorname{Lim\,sup} S_n$ nella (28) contiene uno spazio lineare di dimensione ν.

Dato che S è uno spazio lineare di dimensione ν, gli insiemi della (28) coincidono.

Supponiamo ora che $v \notin \operatorname{Lim\,inf} S_n$. Ciò significa che si può determinare un numero $\varepsilon_0 > 0$ ed una successione $(S_{n_h})_h$ estratta da $(S_n)_n$ per cui

$$\{w \in H_0^1(\Omega) \colon \|w - v\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon_0\} \cap S_{n_h} = \emptyset\,, \qquad \forall h\,.$$

Ma allora $v \notin \operatorname{Lim\,sup} S_{n_h}$. Ripetendo per la successione $(S_{n_h})_h$ il discorso precedentemente fatto, si ottiene $\operatorname{Lim\,sup} S_{n_h} = S$ e quindi $v \notin S$. Ciò prova la (ii).

$(d) \Rightarrow (b)$: È noto che per ogni n

$$\lim_k \frac{1}{\lambda_n^{(k)}} = 0\,. \tag{31}$$

Usando la monotonia della successione $(\lambda_n^{(k)})_k$ con un argomento analogo a quello del teorema di Dini si prova che il limite della (31) è uniforme al variare di n.

Per il teorema di rappresentazione spettrale di operatori compatti si ha che, in $L^2(\Omega)$

$$A_n^{-1}\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, u_n^{(k)})_{L^2(\Omega)}}{\lambda_n^{(k)}} u_n^{(k)}\,, \qquad \forall \varphi \in L^2(\Omega)\,. \tag{32}$$

Dato che qualunque sia k_0 si ha

$$\left\| \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(\varphi, u_n^{(k)})_{L^2(\Omega)}}{\lambda_n^{(k)}} u_n^{(k)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{(\varphi, u_n^{(k)})_{L^2(\Omega)}}{\lambda_n^{(k)}} \right)^2 \leqslant \frac{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2}{(\lambda_n^{(k_0)})^2}\,, \tag{33}$$

ne segue che le serie che compaiono nella (32) convergono in $L^2(\Omega)$ uniformemente al variare di n. Perciò, dato che, in $L^2(\Omega)$

$$A^{-1}\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, u^{(k)})_{L^2(\Omega)}}{\lambda^{(k)}} u^{(k)}\,, \qquad \forall \varphi \in L^2(\Omega)\,,$$

per avere la tesi basta provare che per ogni k, qualunque sia $\varphi \in L^2(\Omega)$, converge a zero la quantità

$$\left\| \sum_{r=0}^{\nu-1} \frac{(\varphi, u_n^{(k+r)})_{L^2(\Omega)}}{\lambda_n^{(k+r)}} u_n^{(k+r)} - \sum_{r=0}^{\nu-1} \frac{(\varphi, u^{(k+r)})_{L^2(\Omega)}}{\lambda^{(k+r)}} u^{(k+r)} \right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{34}$$

dove ν è la molteplicità di $\lambda^{(k)}$ $(\lambda^{(k-1)} < \lambda^{(k)} = \lambda^{(k+\nu-1)} < \lambda^{(k+\nu)})$. La (34) si può maggiorare con la somma delle due quantità (35) e (36)

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \sum_{r=0}^{\nu-1} \left| \frac{1}{\lambda_n^{(k+r)}} - \frac{1}{\lambda^{(k)}} \right|, \tag{35}$$

$$\frac{1}{\lambda^{(k)}} \left\| \sum_{r=0}^{\nu-1} (\varphi, u_n^{(k+r)})_{L^2(\Omega)} u_n^{(k+r)} - \sum_{r=0}^{\nu-1} (\varphi, u^{(k+r)})_{L^2(\Omega)} u^{(k+r)} \right\|_{L^2(\Omega)} \tag{36}$$

La (35) converge a zero per la (i). Rimane da provare che anche la (36) tende a zero per $n \to +\infty$. A tale scopo ricordiamo che la successione $(u_n^{(k+r)})_n$, $r = 0, 1, \ldots, \nu - 1$, è relativamente compatta in $L^2(\Omega)$; perciò, ponendo per semplicità

$$v_n = \sum_{r=0}^{\nu-1} (\varphi, u_n^{(k+r)})_{L^2(\Omega)} u_n^{(k+r)},$$

esiste una sottosuccessione $(v_{n_h})_h$ di $(v_n)_n$ convergente in $L^2(\Omega)$ ad una funzione v. Pur di passare ad una ulteriore sottosuccessione, per la (ii) possiamo supporre che siano verificate le (30), dove $u_0, \ldots, u_{\nu-1}$, è una base dello spazio generato da $u^{(k)}, \ldots, u^{(k+\nu-1)}$. Si trova così che

$$v = \sum_{r=0}^{\nu-1} (\varphi, u_r)_{L^2(\Omega)} u_r,$$

e quindi anche

$$v = \sum_{r=0}^{\nu-1} (\varphi, u^{(k+r)})_{L^2(\Omega)} u^{(k+r)}.$$

Al variare della successione $(v_{n_h})_h$ scelta si ha che tutta la successione $(v_n)_n$ converge a v e quindi la tesi. ∎

OSSERVAZIONE 4.2. - Se $\lambda^{(k)}$ è un autovalore semplice di A, cioè se $\nu = 1$, la (ii) del teorema 4.1 equivale a dire che, a meno del segno, la successione $(u_n^{(k)})_n$ converge in $L^2(\Omega)$ a $u^{(k)}$. Ciò è quanto si verifica per la successione delle prime autofunzioni, dato che il primo autovalore è semplice (si veda [5]).

Se la dimensione N dello spazio è 1 tutti gli autovalori sono semplici e, per la limitatezza a priori in $H_0^1(\Omega)$, la convergenza della successione $(u_n^{(k)})_n$ in $L^2(\Omega)$ è equivalente alla convergenza di $(u_n^{(k)})_n$ in $C_0(\bar{\Omega})$. Per $N = 1$ l'implicazione $(b) \Rightarrow (d)$ si trova in [22]. ∎

Consideriamo ora le *disequazioni variazionali*

$$u_n \in K: \langle A_n u_n - \varphi, v - u_n \rangle \geq 0, \qquad \forall v \in K, \tag{37}$$

$$u \in K: \langle A u - \varphi, v - u \rangle \geq 0, \qquad \forall v \in K, \tag{38}$$

dove $(A_n)_n$ è una successione di operatori differenziali come in (24) verificante le (25), G-convergente ad un operatore A dello stesso tipo, $\varphi \in L^2(\Omega)$ e K un convesso chiuso di $H_0^1(\Omega)$. Se K è un convesso chiuso di $H^1(\Omega)$, anziché $H_0^1(\Omega)$, supponiamo che, oltre alle ipotesi fatte, esista una costante positiva γ_0 tale che

$$\gamma_0 \leq c_n(x), \quad \gamma_0 \leq c(x), \quad \text{q.o. in } \Omega, \ \forall n. \tag{39}$$

È noto (si veda [12], [25]) che il problema (38) (ed anche il problema (37) per ogni n) ammette una unica soluzione. Nelle nostre ipotesi, dato che $a_{ij} = a_{ji}$,

$i, j = 1, \ldots, N$, tale soluzione si ottiene molto semplicemente risolvendo su K il problema di minimo

$$\tfrac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle \varphi, v\rangle = \text{minimo}\,. \tag{40}$$

Nella dimostrazione del teorema 4.3 facciamo uso di tale caratterizzazione. Prima di ciò, vogliamo dare tre esempi di convessi che soddisfano le ipotesi del teorema 4.3.

Consideriamo i seguenti convessi chiusi di $H_0^1(\Omega)$:

$$K_1 = \{v \in H_0^1(\Omega)\colon\ v \geqslant \psi \text{ su } E\}\,, \tag{41}$$

dove E è un sottoinsieme compatto di Ω e $\psi \in C^0(\Omega) \cap H^1(\Omega)$;

$$K_2 = \{v \in H_0^1(\Omega)\colon\ v \geqslant \psi \text{ in } \Omega\}\,, \tag{42}$$

dove $\psi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, $\psi \leqslant 0$ sulla frontiera di Ω.

Il significato della disuguaglianza $v \geqslant \psi$ è definito in modo naturale tenendo presente che $H_0^1(\Omega)$ è il completamento di $C_0^1(\Omega)$ nella norma $H^1(\Omega)$ (si veda ad esempio [13]).

Nel caso che la frontiera di Ω sia localmente lipschitziana consideriamo anche il convesso chiuso di $H^1(\Omega)$:

$$K_3 = \{v \in H^1(\Omega)\colon\ v \geqslant \psi \text{ su } E\}\,, \tag{43}$$

dove E è un sottoinsieme compatto di $\bar{\Omega}$ e $\psi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.

Tali insiemi godono della seguente proprietà (K sta per K_i, $i = 1, 2, 3$):

(44) *Esiste un insieme K_0 denso (fortemente) in K tale che, se A_n G-converge ad A, per ogni $v \in K_0$ si può determinare in K una successione $(v_n)_n$ convergente nella topologia debole di $H^1(\Omega)$ a v per cui*

$$\lim_n \langle A_n v_n, v_n\rangle = \langle Av, v\rangle\,.$$

La prova è nel teorema 4.5. La (44) è un'ipotesi fondamentale nel teorema seguente.

TEOREMA 4.3. – *Sia $(A_n)_n$ una successione di operatori come in* (24), *verificante le* (25) *e G-convergente ad un operatore A dello stesso tipo. Sia K un sottoinsieme convesso e chiuso di $H_0^1(\Omega)$, o di $H^1(\Omega)$ se valgono le* (39).

Supponiamo che per K valga la (44). *Allora la soluzione della disequazione variazionale* (37) *converge nella topologia debole di $H^1(\Omega)$ alla soluzione della disequazione variazionale* (38) *qualunque sia $\varphi \in L^2(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. – Dato che la soluzione u di (38) risolve su K il problema di minimo (40) (analogamente u_n per ogni n), per i teoremi 2.5 e 2.7 provare la tesi equivale a dimostrare che

$$f_n(v) = \langle A_n v, v \rangle + \delta_K(v), \qquad v \in H^1(\Omega),$$

G-converge a

$$f(v) = \langle Av, v \rangle + \delta_K(v), \qquad v \in H^1(\Omega),$$

dove $\delta_K(v)$, funzione indicatrice di K, vale 0 se $v \in K$ e $+\infty$ se $v \notin K$.

Ciò segue dal teorema 3.6. Infatti, per la (44), le ipotesi (j) e (jj) di quel teorema sono verificate essendo la forma quadratica $\langle Av, v \rangle$ continua in $H^1(\Omega)$.

La (jjj) si prova osservando che, dato che $\langle A_n v, v \rangle$ G-converge ad $\langle Av, v \rangle$ secondo la definizione 2.2 in $H^1(\Omega)$ oltre che in $H_0^1(\Omega)$ (si veda [24], theorem 10), per la (ii) del teorema 3.1, per ogni $v \in H^1(\Omega)$ e per ogni successione v_n convergente debolmente a v si ha che

$$\liminf_n \langle A_n v_n, v_n \rangle \geq \langle Av, v \rangle . \tag{45}$$

Inoltre, essendo K chiuso nella topologia debole,

$$\liminf_n \delta_K(v_n) \geq \delta_K(v) . \tag{46}$$

Dalle (45) e (46) segue che

$$\liminf_n \{\langle A_n v_n, v_n \rangle + \delta_K(v_n)\} \geq \langle Av, v \rangle + \delta_K(v)$$

cioè la (jjj) del teorema 3.6. Ciò completa la prova. ∎

OSSERVAZIONE 4.4. – Il minimo di $\langle Av, v \rangle$ al variare di v in K_1 o K_3, nel caso che l'ostacolo ψ sia uguale a 1 su E, è la *capacità* di E rispetto ad A e la funzione minimante è il *potenziale capacitario* (si veda rispettivamente [13] e [4], [8]). Dal teorema precedente si ottiene che, se A_n G-converge ad A, la capacità di E relativa ad A_n tende alla capacità di E relativa ad A ed il potenziale capacitario di E relativo ad A_n converge in $H^1(\Omega)$ debole al potenziale capacitario di E relativo ad A. ∎

Rimane da provare il seguente:

TEOREMA 4.5. – *La* (44) *vale per gli insiemi* K_1, K_2 *e* K_3.

DIMOSTRAZIONE. – $K = K_1$: Poniamo in questo caso

$$K_0 = \{v \in C_0^1(\Omega) \colon v > \psi \text{ su } E\} .$$

K_0 è denso in K_1. Sia $(A_n)_n$ una successione di operatori G-convergente ad A. Per ogni $v \in K_0$ indichiamo con $(v_n)_n$ la successione delle soluzioni dei problemi di Dirichlet

$$v_n \in H_0^1(\Omega): \ A_n v_n = Av .$$

Dato che A_n G-converge ad A, v_n converge a v debolmente in $H_0^1(\Omega)$ e fortemente in $L^2(\Omega)$. Inoltre, per il teorema di regolarità hölderiana ([26], théorème 7.2), la successione $(v_n)_n$ è equicontinua su E, così che, per il teorema di Ascoli-Arzalà, v_n converge a v uniformemente su E. Quindi definitivamente $v_n \geqslant \psi$ su E, cioè $v_n \in K_1$.

Inoltre ovviamente

$$\lim_n \langle A_n v_n, v_n \rangle = \lim_n \langle Av, v_n \rangle = \langle Av, v \rangle .$$

$K = K_2$: In questo caso poniamo

$$K_0 = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega): \ v > \psi \ \text{in} \ \Omega\} .$$

K_0 è denso in K_2. Fissato v in K_0, sia $(w_n)_n$ la successione delle soluzioni dei problemi di Dirichlet

$$w_n \in H_0^1(\Omega): \ A_n w_n = Av .$$

Si ha che

$$\lim_n \operatorname{mis} \{x \in \Omega: \ w_n(x) < \psi(x)\} = 0 . \tag{47}$$

Infatti, supponiamo per assurdo che esistano una costante positiva ε_0 e una sottosuccessione $(w_{n_h})_h$ di $(w_n)_n$ tali che

$$\operatorname{mis} \{x \in \Omega: \ w_{n_h}(x) < \psi(x)\} > \varepsilon_0 , \qquad \forall h . \tag{48}$$

Scegliamo allora un compatto $F \subset \Omega$ tale che

$$\operatorname{mis} (\Omega - F) < \varepsilon_0 .$$

Dato che per il teorema di regolarità hölderiana w_n converge a v uniformemente su F, risulta definitivamente

$$\{x \in \Omega: \ w_{n_h}(x) < \psi(x)\} \subset \Omega - F$$

in contraddizione con la (48).

Perciò, posto

$$v_n(x) = \max \{w_n(x); \psi(x)\} , \qquad x \in \Omega, \ \forall n ,$$

dalla (47) si deduce facilmente che v_n converge debolmente a v e che

$$\lim_n \langle A_n v_n, v_n \rangle = \langle Av, v \rangle .$$

Inoltre $v_n \in K_2$ per ogni n.

$K = K_3$: Il sottoinsieme di K_3

$$K_0 = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \colon v > \psi \text{ su } E\}$$

è denso in K_3. Se $v \in K_0$ indichiamo con v_n la soluzione del problema

$$v_n - v \in H_0^1(\Omega) \colon A_n v_n = Av .$$

Per un risultato di DE GIORGI-SPAGNOLO ([7], teorema 2.4), v_n converge debolmente a v e $\langle A_n v_n, v_n \rangle$ converge a $\langle Av, v \rangle$. Inoltre, per il teorema di regolarità in $H^1(\Omega)$ ([26], théorème 7.3), v_n converge uniformemente a v su E. Quindi $v_n \in K_3$ definitivamente. ∎

OSSERVAZIONE 4.6. – Gli stessi risultati valgono se i convessi sono definiti da ostacoli ψ_n che convergono a ψ sia in $H^1(\Omega)$ debole che uniformemente. Inoltre la tesi del teorema 4.3 continua a valere se si sostituisce φ con $(\varphi_n)_n \subset (H^1(\Omega))^*$ e si suppone che $(\varphi_n)_n$ converga a φ in $(H^1(\Omega))^*$. ∎

COMPLEMENTO AL TEOREMA 4.3. – In casi particolari è possibile dare una dimostrazione diretta del teorema 4.3; ad esempio, se $K \subset H_0^1(\Omega)$ e se la successione $(v_n)_n$ soddisfacente la condizione (44) è definita, per ogni $v \in K_0$, da

$$v_n \in H_0^1(\Omega) \colon \quad A_n v_n = Av. \tag{49}$$

In tal caso infatti, per il lemma di Minty, la soluzione u_n della disequazione variazionale (37) verifica anche

$$\langle A_n v - \varphi, v - u_n \rangle \geq 0 , \qquad \forall v \in K .$$

In particolare, scelto $v \in K_0$ e posto v_n come in (49), si ha

$$\langle Av - \varphi, v_n - u_n \rangle \geq 0 .$$

Indicando con u_0 il limite nella topologia debole di $H_0^1(\Omega)$ di una qualsiasi successione convergente estratta da $(u_n)_n$, otteniamo

$$\langle Av - \varphi, v - u_0 \rangle \geq 0 . \tag{50}$$

La (50) vale per ogni $v \in K_0$ e quindi, per la densità di K_0 in K, per ogni $v \in K$. Ma allora, utilizzando ancora il lemma di Minty, ne segue che u_0 è la soluzione della disequazione variazionale (38), che è quanto si voleva dimostrare.

L'ipotesi (49) è verificata dal convesso K_1, come è mostrato nella prova del teorema 4.5.

Cogliamo l'occasione per ringraziare il Prof. Jacques Louis LIONS che ci ha gentilmente segnalato la semplice dimostrazione su esposta.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BENSOUSSAN - J. L. LIONS - G. PAPANICOLAOU, *Some asymptotic results for solutions of variational inequalities with highly oscillatory periodic coefficients*, in corso di stampa.

[2] L. BOCCARDO - I. CAPUZZO DOLCETTA, *G-convergenza e problema di Dirichlet unilaterale*, Boll. Un. Mat. Ital., **12** (1975), pp. 115-123.

[3] A. BRØNDSTED - R. T. ROCKAFELLAR, *On the subdifferentiability of convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **16** (1965), pp. 605-611.

[4] M. CHICCO, *Confronto tra due modi di definire le disuguaglianze per le funzioni di* $H^{1,p}(\Omega)$, Boll. Un. Mat. Ital., **4** (1971), pp. 668-676.

[5] M. CHICCO, *Some properties of the first eigenvalue and the first eigenfunction of linear second order elliptic partial differential equations in divergence form*, Boll. Un. Mat. Ital., **5** (1972), pp. 245-254.

[6] E. DE GIORGI, *Sulla convergenza di alcune successioni d'integrali del tipo dell'area*, Rend. Mat. Roma, **8** (1975), pp. 277-294.

[7] E. DE GIORGI - S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine*, Boll. Un. Mat. Ital., **8** (1973), pp. 391-411.

[8] W.F. DONOGHUE, *A coerciveness inequality*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **20** (1966), pp. 589-593.

[9] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, Interscience, New York, 1958.

[10] J. L. JOLY, *Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue*, J. Math. Pures Appl., **52** (1973), pp. 421-441.

[11] C. KURATOWSKI, *Topologie*, Vol. 1, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1958.

[12] J. L. LIONS - G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), pp. 493-519.

[13] W. LITTMAN - G. STAMPACCHIA - H. F. WEINBERGER, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **17** (1963), pp. 45-79.

[14] P. MARCELLINI, *Su una convergenza di funzioni convesse*, Boll. Un. Mat. Ital., **8** (1973), pp. 137-158.

[15] P. MARCELLINI, *Un teorema di passaggio al limite per la somma di funzioni convesse*, Boll. Un. Mat. Ital., **11** (1975), pp. 107-124.

[16] J. J. MOREAU, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1966-67.

[17] U. MOSCO, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Advances in Math., **3** (1969), pp. 510-585.

[18] U. MOSCO, *On the continuity of the Young-Fenchel transform*, J. Math. Anal. Appl., **35** (1971), pp. 518-535.

[19] R. T. ROCKAFELLAR, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math., **17** (1966), pp. 497-510.

[20] R. T. ROCKAFELLAR, *Level sets and continuity of conjugate convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **123** (1966), pp. 46-63.

[21] C. SBORDONE, *Alcune questioni di convergenza per operatori differenziali del secondo ordine*, Boll. Un. Mat. Ital., **10** (1974), pp. 672-682.

[22] P. K. SENATOROV, *The stability of the eigenvalues and eigenfunctions of a Sturm-Liouville problem*, Differencial'nye Uravnenija, **7** (1971), pp. 1667-1671. Differential Equations, January 1974, pp. 1266-1269.

[23] S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **22** (1968), pp. 571-597.

[24] S. SPAGNOLO, *Convergence in energy for elliptic operators*, Proceedings of the Symposium on the numerical solution of partial differential equations, Maryland 1975, in corso di stampa.

[25] G. STAMPACCHIA, *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **258** (1964), pp. 4413-4416.

[26] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, **15** (1965), pp. 189-258.

[27] T. ZOLEZZI, *Su alcuni problemi fortemente ben posti di controllo ottimo*, Ann. Mat. Pura Appl., **95** (1973), pp. 147-160.