Sur les anneaux tels que tout produit de copies d'un module quasi-injectif soit un module quasi injectif. - II (*).

C. TISSERON (Lyon)

Résumé. – *On étudie dans cet article les anneaux noethériens commutatifs tels que tout produit de copies d'un module quasi injectif soit un module quasi-injectif, un tel anneau est produit fini d'anneaux locaux vérifiant certaines propriétés. On étudie également des anneaux noethériens commutatifs un peu plus généraux: les* $C1$*-anneaux, qui sont caractérisés comme étant des produits finis d'anneaux locaux* A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ *tels que tout idéal* $\mathfrak{A}'$ *du complété* $R(A_i)$*-adique* $\hat{A}_i$ *de* A_i *vérifie* $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}' \cap A_i)\hat{A}_i$. *On donne des exemples de tels anneaux.*

Ce travail fait suite à l'article [4]. Ici tout les anneaux considérés sont supposés noethériens et commutatifs. On dira qu'un anneau A est complet s'il est complet pour la topologie définie par son radical de Jacobson $\mathfrak{R}(A)$. Nous étudions dans le paragraphe 3 les anneaux A tels que tout produit de copies d'un A-module quasi-injectif soit un module quasi-injectif (un tel module est dit Π-quasi-injectif). Ces anneaux sont appelés des Q-anneaux. Nous les caractérisons dans le théorème 3.3 comme étant des produits finis d'anneaux locaux de dimension de Krull inférieure ou égale à 1 qui vérifient certaines propriétés.

Nous considérons dans le paragraphe 2 des anneaux un peu plus généraux dont l'étude est nécessaire pour caractériser les Q-anneaux; ce sont les $C1$-anneaux, définis de la façon suivante: si E est l'enveloppe injective d'une somme directe d'un module simple de chaque type, A est un $C1$-anneau si tout sous-module quasi-injectif de E est Π-quasi-injectif. Nous montrons que si A est un $C1$-anneau, pour tout sous-module N de E on a $N = r_E(l_A(N))$ (théorème 2.2). (Ici $l_A(N)$ désigne l'annulateur de N et $r_E(l_A(N)) = \{x \in E \mid \forall a \in l_A(N)\, ax = 0\}$). Nous caractérisons les $C1$-anneaux comme étant des produits finis d'anneaux locaux A_i tels que pour tout idéal $\mathfrak{a}$ du complété $\hat{A}_i$ de A_i on ait $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap A_i)\hat{A}$ (Corollaire 2.6). Pour montrer cela nous utilisons le fait qu'un anneau A est produit fini d'anneaux locaux si et seulement si tout idéal premier de A est contenu dans un seul idéal maximal (proposition 2.5), cette dernière condition est toujours vérifiée pour un $C1$-anneau.

Nous donnons dans le paragraphe 4 des exemples de Q-anneaux et de $C1$-anneaux. Nous montrons en particulier qu'un anneau de valuation (non nécessairement noethérien) est un $C1$-anneau, mais nous donnons un exemple d'un anneau de valuation de hauteur 2 qui n'est pas un Q-anneau (4.7).

(*) Entrata in Redazione il 12 febbraio 1975.

1. – Préliminaires.

Commençons par rappeller quelques résultats de MATLIS [3]. Soit A un anneau noethérien et poit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, soit $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ le complété de l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$, on a les résultats suivants:

1.1. LEMME.

a) *pour tout* $x \in E_A(A/\mathfrak{p})$ *il existe* n *tel que* $\mathfrak{p}^n x = 0$;

b) *les modules* $E_A(A/\mathfrak{p})$ *et* $E_{\hat{A}_{\mathfrak{p}}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\hat{A}_{\mathfrak{p}})$ *coïncident*;

c) *les anneaux* $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ *et* $\operatorname{End}_A(E_A(A/\mathfrak{p}))$ *sont isomorphes.*

Ceci résulte des théorèmes 3.4, 3.6 et 3.7 de [3].

Rappellons aussi le résultat suivant qui résulte du théorème 4.2 de [3].

1.2. LEMME. – *Soit A un anneau local et complet pour la topologie définie par son radical $\mathfrak{m}$, alors pour tout sous-module N de $E_A(A/\mathfrak{m}) = E$ on a $N = r_E(l_A(N))$.*

D'après ([4], II.2.4 et II.2.6), un $C1$-anneau noethérien est semi-local et par suite dans l'étude des $C1$-anneaux noethériens on peut se limiter au cas des anneaux semi-locaux. Soit donc A un anneau semi-local de radical $\mathfrak{R}$ et ayant pour idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$. Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_A(A/\mathfrak{m}_i)$ le cogénérateur minimal de Mod A et soit $\hat{A}$ le complété de A. On a le résultat suivant:

1.3. LEMME:

1) *Le A-module E est un $\hat{A}$-module et, comme $\hat{A}$-module E est le cogénérateur minimal de Mod $\hat{A}$;*

2) *Les anneaux $\hat{A}$ et $\operatorname{End}_A E$ sont isomorphes.*

1. – On montre immédiatement avec 1.1 (a) que tout élément de E est annulé par une puissance de $\mathfrak{R}$ et on peut considérer E comme un A-module de la façon suivante: soit $x \in E$ annulé par $\mathfrak{R}^n$ et soit $a \in \hat{A}$ tel que a soit limite d'une suite de Cauchy (a_n) de A, il existe p tel que pour $q \geqslant p$ on ait $a_q - a_p \in \mathfrak{R}_n$ et $a_q x = a_p x$. On pose alors $ax = a_p x$ et on vérifie immédiatement que ceci définit sur E une structure de $\hat{A}$-module. De plus, pour cette structure, les sous-$\hat{A}$-modules de E coïncident avec ses sous-A-modules. Montrons que E est le cogénérateur minimal de Mod. $\hat{A}$. D'après 1.1.b) le module $E_A(A/\mathfrak{m}_i)$ est un $\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ module injectif et comme $\hat{A}$ est isomorphe à $\prod_{i=1}^{n} \hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ ([1] chapitre 3, § 2, proposition 18) on vérifie aisément que E est un $\hat{A}$-module injectif et que la structure de $\hat{A}$-module de E ainsi obtenue est celle rappelée ci-dessus. Comme $\hat{A}$ est un anneau de Zariski, les idéaux maximaux de $\hat{A}$

sont $\hat{\mathfrak{m}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{m}}_n$ et on a $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}_i \simeq A/\mathfrak{m}_i$ donc A et $\hat{A}$ ont les mêmes modules simples et E est le cogénérateur minimal de Mod $\hat{A}$.

2. – On vérifie immédiatement que les anneaux $\mathrm{End}_A(E)$ et $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{End}_A(E_A(A/\mathfrak{m}_i))$ sont isomorphes. Comme $\hat{A}$ est isomorphe à $\prod_{i=1}^{n} \hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ l'isomorphisme de $\hat{A}$ avec $\mathrm{End}_A(E)$ résulte de 1.1.*c*).

Remarquons que tout sous-A-module de E est un sous-$\hat{A}$-module de E donc aussi un sous-A-module caractéristique de E puisque $\hat{A} = \mathrm{End}_A(E)$. En particulier, tout sous-A-module de E est quasi-injectif. En fait on peut obtenir des résultats plus précis donnés dans la proposition 2.1 du numéro suivant.

2. – $C1$-anneaux semi-locaux.

2.1. PROPOSITION. – *Soit A un anneau semi-local, soient $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ les idéaux maximaux de A et soit $\hat{A}$ le complété de A, alors pour tout sous-module N de*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_A(A/\mathfrak{m}_i) \qquad \textit{on a} \;\; N = r_E(l_{\hat{A}}(N)).$$

On a $\hat{A} = \prod_{i=1}^{n} \hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$. Si on identifie un élément a de $\hat{A}$ à son image (a_i) dans $\prod_{i=1}^{n} \hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ alors pour $x = x_1 + \ldots + x_n \in E$ où $x_i \in E_A(A/\mathfrak{m}_i)$ on a la relation $ax = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.

On peut trouver des idempotents orthogonaux (e_i) de $\hat{A}$ tels que $\hat{A}_{\mathfrak{m}_i} = \hat{A}e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\hat{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} \hat{A}e_i$, on a de plus $e_jE_A(A/\mathfrak{m}_i) = 0$ pour $j \neq i$ et $e_iE_A(A/\mathfrak{m}_i) = E_A(A/\mathfrak{m}_i) = e_iE$.

Soit N un sous-module de E, alors $N = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iN$ et il résulte des définitions que $l_{\hat{A}e_i}(e_iN) = l_{\hat{A}}(N)e_i$. Soit $x = x_1 + \ldots + x_n \in E$ avec $x_i \in E_A(A/\mathfrak{m}_i)$ tel que $l_{\hat{A}}(N)x = 0$, montrons que $x \in N$. Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $l_{\hat{A}}(N)e_ix_i = 0$ donc $l_{\hat{A}e_i}(e_iN)x_i = 0$ et $x_i \in r_{E_A(A/\mathfrak{m}_i)}(l_{\hat{A}e_i}(e_iN))$. D'après 1.1 le module $E_A(A/\mathfrak{m}_i)$ coïncide avec l'enveloppe injective du corps résiduel de l'anneau local complet $\hat{A}e_i$ et on a donc $x_i \in e_iN$ d'après 1.2. Ceci montre que $x \in N$ et termine la démonstration.

La proposition précédente va nous permettre de démontrer l'important résultat suivant:

2.2. THÉORÈME. – *Soit A un anneau semi-local, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *A est un $C1$-anneau;*

b) *pour tout sous-module N de E on a $N = r_E(l_A(N))$;*

c) *pour tout idéal $\mathfrak{a}'$ du complété $\hat{A}$ de A on a $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}' \cap A)\hat{A}$.*

Montrons que *a*) $\Rightarrow$ *b*). La démonstration se fait en plusieurs points.

1. – Soit $\mathfrak{m}$ un idéal premier d'un anneau A et soit N un sous-module de $E_A(A/\mathfrak{m})$, soit $l_A(N) = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$ une décomposition primaire réduite de $l_A(N)$ dans A. Alors pour $i = 1, \ldots, s$ la racine de Q_i est contenue dans $\mathfrak{m}$.

D'abord si $a \in A$ et $b \notin \mathfrak{m}$ sont tels que $baN = 0$ alors $aN = 0$ ([3] lemme 3.2) et $a \in l_A(N)$, ce qui montre que $l_A(N)$ est saturé pour $\mathfrak{m}$. Soit i fixé et soit $\mathfrak{p}_i$ la racine de Q_i. Comme $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass}(A/l_A(N))$ il existe $a \in A - l_A(N)$ tel que $\mathfrak{p}_i a \subset l_A(N)$ alors pour tout $x \in \mathfrak{p}_i$ on a $xa \in l_A(N)$ avec $a \notin l_A(N)$ donc $x \in \mathfrak{m}$ car $l_A(N)$ est saturé pour $\mathfrak{m}$, ainsi $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{m}$.

2. – Soit $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ deux idéaux maximaux distincts d'un anneau A et N un sous-module de $E_A(A/\mathfrak{m})$, si tout idéal premier de A est contenu dans un seul idéal maximal alors $(l_A(N))_\mathfrak{n} = A_\mathfrak{n}$.

Si $l_A(N) = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ est une décomposition primaire réduite de $l_A(N)$, la racine de Q_i est contenue dans $\mathfrak{m}$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$ donc cette racine n'est pas contenue dans $\mathfrak{n}$ et on a donc $(Q_i)_\mathfrak{n} = A_\mathfrak{n}$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$, donc aussi $(l_A(N))_\mathfrak{n} = A_\mathfrak{n}$.

3. – Soit A un Cl-anneau semi-local d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$. D'après ([4], III.*B*. corollaire 4.2) tout idéal premier de A est contenu dans un seul idéal maximal. Soit N un sous-module de $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_A(A/\mathfrak{m}_i)$, comme N est caractéristique, N est somme de ses composantes non nulles sur les $E_A(A/\mathfrak{m}_i)$ et, quitte à changer la numérotation des $\mathfrak{m}_i$ on peut supposer que $N = \bigoplus_{i=1}^{p} N_i$ avec $0 \neq N_i \subset E_A(A/\mathfrak{m}_i)$.

Soit j tel que $p+1 \leqslant j \leqslant n$ et soit $0 \neq x \in E_A(A/\mathfrak{m}_j)$, montrons que $l_A(N)x \neq 0$. On a $l_A(N) = \bigcap_{i=1}^{p} l_A(N_i)$ et il résulte de 2) et du choix des $\mathfrak{m}_j$ que $(l_A(N))_{\mathfrak{m}_j} = A_{\mathfrak{m}_j}$ donc $l_A(N) \not\subset \mathfrak{m}_j$. Comme $\operatorname{Ann}(x) \subset \mathfrak{m}_j$ on a $l_A(N) \not\subset \operatorname{Ann}(x)$ et $l_A(N)x \neq 0$.

Soit maintenant $x = x_1 + \ldots + x_n \in E$ avec $x_i \in E_A(A/\mathfrak{m}_i)$ tel que $l_A(N)x = 0$. D'après ce qui précède on a $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$ et $x \in \bigoplus_{i=1}^{p} E_A(A/\mathfrak{m}_i) = E_A(N)$. Comme A est un Cl-anneau, on a $N = r_{E_A(N)}(l_A(N))$ et ainsi $x \in N$, ce qui prouve que $N = r_E(l_A(N))$ et on a donc $a) \Rightarrow b)$.

L'implication $b) \Rightarrow a)$ est triviale. Montrons que $b) \Rightarrow c)$.

D'abord E est un $\hat{A}$-module et il est facile de vérifier que pour tout idéal de A on a $r_E(\mathfrak{a}) = r_E(\hat{\mathfrak{a}})$, d'après ([4] II.1.1), on a alors i) $\hat{\mathfrak{a}} = l_{\hat{A}}(r_E(\hat{\mathfrak{a}})) = l_{\hat{A}}(r_E(\mathfrak{a}))$.

Soit $\mathfrak{a}'$ un idéal de $\hat{A}$, en appliquant l'hypothèse $b)$ à $N = r_E(\mathfrak{a}')$ et en utilisant la formule i) on a les relations suivantes:

$$\mathfrak{a}' = l_{\hat{A}}(r_E(\mathfrak{a}')) = l_{\hat{A}}\Big(r_E\big(l_A(r_E(\mathfrak{a}'))\big)\Big) = \big(l_A(r_E(\mathfrak{a}'))\big)\hat{} = \big(l_{\hat{A}}(r_E(\mathfrak{a}')) \cap A\big)\hat{} = (\mathfrak{a}' \cap A)\hat{}\ ,$$

ce qui démontre $c)$.

Montrons que $c) \Rightarrow b)$.

Soit N un sous-module de E, comme $l_A(N) = l_{\hat{A}}(N) \cap A$ il résulte de (c) que $(l_A(N))^\wedge = l_{\hat{A}}(N)$ et comme pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A on a $r_E(\mathfrak{a}) = r_E(\hat{\mathfrak{a}})$, il résulte de 2.1 que $N = r_E(l_{\hat{A}}(N)) = r_E(l_A(N))$. Ceci montre $b)$ et achève la démonstration.

2.3. COROLLAIRE. – *Soit A un C1-anneau de complété $\hat{A}$, alors la correspondance $\mathfrak{a} \to \hat{\mathfrak{a}}$ est une bijection entre les idéaux de A et les idéaux de $\hat{A}$ et cette bijection conserve les idéaux premiers.*

L'anneau A est un anneau de Zariski pour la topologie $\mathfrak{R}$-adique et pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A on a $\mathfrak{a} = \hat{\mathfrak{a}} \cap A$. Il résulte de 2.2 que pour tout idéal $\mathfrak{a}'$ de $\hat{A}$ on a $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}' \cap A)^\wedge$ et $\mathfrak{a} \to \hat{\mathfrak{a}}$ est une bijection entre l'ensemble des idéaux de A et l'ensemble des idéaux de $\hat{A}$ dont $\mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}' \cap A$ est la bijection réciproque. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de A et si $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ on a $\hat{\mathfrak{c}} = \hat{\mathfrak{a}}\hat{\mathfrak{b}}$ ([1] chapitre 3, § 3, n. 4, corollaire 1) et avec cette relation on vérifie immédiatement que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A l'idéal $\hat{\mathfrak{p}}$ est premier dans $\hat{A}$. Comme pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de $\hat{A}$ l'idéal $\mathfrak{p}' \cap A$ est premier dans A, le corollaire est démontré.

2.4. COROLLAIRE. – *Soit A un C1-anneau réduit (i.e. sans éléments nilpotents) alors $\hat{A}$ est réduit.*

Tout idéal premier minimal de $\hat{A}$ s'écrit $\hat{\mathfrak{p}}$ pour un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A (2.3), comme 0 est l'intersection des idéaux premiers minimaux de A ceci montre que 0 est aussi l'intersection des idéaux premiers minimaux de $\hat{A}$ et ainsi $\hat{A}$ est réduit.

On va maintenant démontrer qu'un C1-anneau se décompose en un produit fini d'anneaux locaux. On peut déduire facilement ce résultat du fait que $\hat{A}$ est produit fini d'anneaux locaux et de ce que $\mathfrak{a} \to \hat{\mathfrak{a}}$ est une bijection entre les idéaux de A et les idéaux de $\hat{A}$ (2.3). Nous procédons ici d'une façon différente en démontrant l'existence d'une telle décomposition comme un corollaire du résultat plus général suivant:

2.5. PROPOSITION. – *Soit A un anneau noethérien, alors A est produit fini d'anneaux locaux si et seulement si tout idéal premier de $\hat{A}$ est contenu dans un seul idéal maximal.*

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Remarquons d'abord que l'ensemble des idéaux premiers minimaux de l'anneau noethérien A est fini, donc si tout idéal premier de A est contenu dans un seul idéal maximal il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux. On montre maintenant que la condition est suffisante en plusieurs étapes.

1. – Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal d'un anneau A et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier contenu dans $\mathfrak{m}$, on a $\mathfrak{p} = l_A(r_F(\mathfrak{p}))$ où $F = E_A(A/\mathfrak{m})$.

On a d'abord $F = E_{A_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}A_\mathfrak{m})$ ([3] page 522) et on peut considérer F comme le cogénérateur minimal de Mod $A_\mathfrak{m}$, ce qui donne la relation $\mathfrak{p}A_\mathfrak{m} = l_{A_\mathfrak{m}}(r_F(\mathfrak{p}A_\mathfrak{m}))$.

On vérifie facilement que $r_F(\mathfrak{p}) = r_F(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}})$. Soit maintenant $a \in A$ tel que $ar_F(\mathfrak{p}) = 0$, on a aussi $(a/1)r_F(\mathfrak{p}) = 0$ et $(a/1)\,r_F(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}) = 0$ donc $a/1 \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ et $a \in \mathfrak{p}$. Ceci montre que $l_A(r_F(\mathfrak{p})) \subset \mathfrak{p}$, et comme l'autre inclusion est toujours vraie on a $\mathfrak{p} = l_A(r_F(\mathfrak{p}))$.

2. – Soient $\mathfrak{m}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ les idéaux maximaux de A, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ posons $E_i = E_A(A/\mathfrak{m}_i)$ et $\mathfrak{b}_i = l_A(E_i)$. Soit Spec A l'ensemble des idéaux premiers de A et pour un idéal $\mathfrak{a}$ de A soit $V(\mathfrak{a})$ l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ tels que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Montrons que $(V(\mathfrak{b}_i))$ $1 \leqslant i \leqslant n$ est une partition de Spec A.

D'abord pour tout i, $V(\mathfrak{b}_i) \neq \emptyset$ car $\mathfrak{b}_i \neq A$. Montrons maintenant que $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^{n} V(\mathfrak{b}_i)$. Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ et soit $\mathfrak{m}_i$ l'unique idéal maximal contenant $\mathfrak{p}$. D'après 1 et l'inclusion $0 \subset \mathfrak{p}$ on peut écrire les relations suivantes $\mathfrak{p} = l_A r_{E_i}(\mathfrak{p}) \supset l_A(r_{E_i}(0)) = \mathfrak{b}_i$ qui montrent que $p \in V(\mathfrak{b}_i)$ et $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^{n} V(\mathfrak{b}_i)$. Il reste à démontrer que pour $i \neq j$ on a $V(\mathfrak{b}_i) \cap V(\mathfrak{b}_j) = \emptyset$. Supposons qu'il existe $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b}_i) \cap V(\mathfrak{b}_j)$ pour deux indices i et j. Soit $\mathfrak{m}_k = \mathfrak{n}$ l'unique idéal maximal contenant $\mathfrak{p}$. On a les relations: $l_A(E_i) = \mathfrak{b}_i \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{n}$. Supposons que $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}_i$ alors d'après la partie 2 de la démonstration de $a) \Rightarrow b)$ du théorème 2.2 on a $(l_A(E_i))_{\mathfrak{n}} = A_{\mathfrak{n}}$ et $l_A(E_i) \not\subset \mathfrak{n}$, ce qui est absurde, donc $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_i$. De la même façon on montre que $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_j$ d'où $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_j$ et $V(\mathfrak{b}_i) = V(\mathfrak{b}_j)$.

3. – On montre maintenant que A est produit fini d'anneaux locaux.

D'après la proposition 15 du chapitre 2 de (1) il existe une famille finie $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'idéaux de A telle que A soit somme directe des $\mathfrak{a}_i$, donc A est produit des anneaux $\mathfrak{a}_i$ car A est commutatif. On vérifie facilement que les idéaux maximaux de A sont de la forme $\mathfrak{n} \times \prod_{j \neq i} \mathfrak{a}_j$ où $\mathfrak{n}$ est un idéal maximal de l'anneau $\mathfrak{a}_i$. Comme A a n idéaux maximaux, chaque $\mathfrak{a}_i$ a au plus un idéal maximal donc chaque $\mathfrak{a}_i$ est un annau local et la proposition est démontrée.

2.6. COROLLAIRE. – *Soit A un anneau noethérien commutatif, les assertions suivantes sont équivalentes*:

a) A est un $C1$-anneau;

b) A est produit fini d'anneaux locaux A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ tels que pour $1 \leqslant i \leqslant n$ tout idéal $\mathfrak{a}$ du complété $\hat{A}_i$ de A_i pour la topologie $\mathfrak{R}(A_i)$-adique vérifie la relation $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap A_i)^\wedge$.

$a) \Rightarrow b)$. Si A est un $C1$-anneau noethérien commutatif alors A est un anneau semi-local. Comme tout idéal premier de A est contenu dans un seul idéal maximal ([4] III.*B*. corollaire 4.2) il résulte de 2.5 que A est produit fini d'anneaux locaux A_i. Chaque A_i est un $C1$ anneau et vérifie la condition de $b)$ d'après 2.2.

$b) \Rightarrow a)$. Les anneaux A_i de l'assertion $b)$ sont des $C1$-anneaux d'après 2.2 donc A est un $C1$-anneau d'après ([4] II.2.1.)

Nous terminons ce paragraphe avec quelques résultats sur les $C1$-anneaux locaux intégres.

2.7. PROPOSITION. – *Soit A un anneau local intègre de dimension* 1, *les assertions suivantes sont équivalentes*:

a) *A est un Q-anneau*;

b) *A est un $C1$-anneau*;

c) *le complété $\hat{A}$ de A pour la topologie $\mathfrak{R}(A)$-adique est intègre.*

L'implication $a) \Rightarrow b)$ est claire. L'implication $b) \Rightarrow c)$ résulte de 2.3. Montrons que $c) \Rightarrow a)$. D'après le théorème 3.1 de ([4] III.B) un $C1$-anneau local intègre de dimension 1 est un Q-anneau et il suffit de montrer que A est un $C1$-anneau. Soit $\mathfrak{m}$ le radical de A et $E = E_A(A/\mathfrak{m})$. Soit N un sous module quasi-injectif de E. Montrons que $N = r_E(l_A(N))$. Si $l_A(N) = \mathfrak{a} \neq 0$ alors l'anneau $A/\mathfrak{a}$ est artinien donc est un Q-anneau ([4] II.2.1.) et le $A/\mathfrak{a}$-module quasi-injectif et fidèle N est injectif donc coïncide avec son enveloppe injective sur $A/\mathfrak{a}$ qui n'est autre que $r_E(\mathfrak{a}) = r_E(l_A(N))$. Si $l_A(N) = 0$ montrons que $l_{\hat{A}}(N) = 0$. Sinon il existe n tel que $(\hat{\mathfrak{m}})^n = \hat{\mathfrak{m}}^n \subset l_{\hat{A}}(N)$ donc $\mathfrak{m}^n \subset l_{\hat{A}}(N) \cap A = l_A(N)$ et ceci contredit $l_A(N) = 0$. On a donc $l_{\hat{A}}(N) = 0$ et $N = r_E(l_{\hat{A}}(N)) = E$ (2.1). Dans tous les cas on a donc $N = r_E(l_A(N))$ et A est un $C1$-anneau, ce qui termine la démonstration de la proposition.

2.8. PROPOSITION. – *Soit A un anneau local intègre, les assertions suivantes sont équivalentes*:

a) *A est un $C1$-anneau*;

b) *pour tout $x \in \hat{A}$ il existe $y \in \hat{A}$ tel que y soit inversible dans $\hat{A}$ et $yx \in A$.*

$a) \Rightarrow b)$. Si A est un $C1$-anneau local intègre alors $\hat{A}$ est intégre (2.3). Soit $x \in \hat{A}$ et posons $\mathfrak{a} = \hat{A}x \cap A$, on a $\hat{\mathfrak{a}} = \hat{A}x$ (2.2) donc l'idéal $\mathfrak{a}$ est principal ([1] chapitre 3, § 3, n. 5 corollaire 3). Posons $\mathfrak{a} = Aa$, on a alors $\hat{A}x = \hat{A}a$ et il existe unélément inversible y de $\hat{A}$ tel que $yx = a \in A$.

$b) \Rightarrow a)$. Tout idéal de $\hat{A}$ est fermé dans $\hat{A}$ donc complet et si $\mathfrak{a}'$ est un idéal de $\hat{A}$ on a $(\mathfrak{a}' \cap A)\hat{} \subset \mathfrak{a}'$. Soit $x \in \mathfrak{a}'$, montrons que $x \in (\mathfrak{a}' \cap A)\hat{}$. Par hypothèse il existe $y \in \hat{A}$ tel que $yx \in A$ et y est inversible dans $\hat{A}$. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de Cauchy de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = y^{-1}$. On a $a = yx \in \mathfrak{a}' \cap A$, donc pour tout n $a_n a \in \mathfrak{a}' \cap A$ et $x = y^{-1}a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n a \in (\mathfrak{a}' \cap A)\hat{}$. On a donc $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}' \cap A)\hat{}$ et A est un $C1$-anneau d'après 2.2.

2.9. COROLLAIRE. – *Soit A un $C1$-anneau local, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A l'anneaux $\hat{A} \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})$ est un corps.*

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, notons k le corps $A_\mathfrak{p}/pA_\mathfrak{p}$ et soient $x \to x/1$ et $y \to \bar{y}$ les applications canoniques de A dans $A_\mathfrak{p}$ et de $A_\mathfrak{p}$ sur k respectivemnt. Tout élément non nul de k s'écrit sous la forme $(\overline{a/1})(\overline{1/b})$ avec $a \notin \mathfrak{p}$ et $b \notin \mathfrak{p}$. Soit $x \in \hat{A} \otimes_A k$,

$x \neq 0$, on vérifie facilement que x peut s'écrire $x = a' \otimes \overline{1/b}$ avec $a' \in \hat{A} - \mathfrak{p}\hat{A}$ et $b \in A - \mathfrak{p}$. On montre maintenant que $x = a' \otimes \overline{1/b}$ est inversible.

Identifions $\widehat{A/\mathfrak{p}}$ avec $\widehat{A/\mathfrak{p}}$ et soit $i: A/\mathfrak{p} \to \widehat{A/\mathfrak{p}}$ l'application canonique. En appliquant le résultat de 2.8 au $C1$-anneau local intégre $A/\mathfrak{p}$ on voit qu'il existe $c \in \hat{A}$ et $a \in A$ tels que $a'c \notin \hat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}\hat{A}$ et $a'c - a \in \hat{\mathfrak{p}}$. Ceci montre d'abord que $a \notin \mathfrak{p}$, ensuite si on pose $a'c - a = p' \in \hat{\mathfrak{p}}$ on a $p' \otimes \overline{1/a} = 0$, et les relations suivantes $x(c \otimes \otimes \overline{b/a}) = a'c \otimes \overline{1/a} = a \otimes \overline{1/a} = 1 \otimes \overline{1}$ montrent que $c \otimes \overline{b/a}$ est l'inverse de x dans l'anneau $\hat{A} \otimes_A k$, d'où le corollaire.

On ne sait pas si cette dernière propriété est caractéristique des $C1$-anneaux locaux (noethériens).

3. – Q-anneaux semi-locaux.

Dans ce paragraphe nous précisons ce que deviennent les résultats précédents lorsque A est un Q-anneau.

Commençons par rappeler qu'on dit que l'anneau A vérifie la condition Co si pour tout idéal premier minimal et non maximal $\mathfrak{p}$ de A tout module injectif et indécomposable F tel que $\operatorname{Ass} F = \{\mathfrak{p}\}$ n'a pas de sous-module quasi-injectif propre non nul ([4] III, B,2.2). Démontrons maintenant deux lemmes.

3.1. LEMME. – *Pour un anneau noethérien A les conditions suivantes sont équivalents*:

a) *A vérifie la condition* Co;

b) *tout idéal premier minimal et non maximal de A est dans la décomposition primaire de* 0 *dans A.*

1. – Commençons par faire une remarque. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal et non maximal de A. Tout injectif indécomposable F tel que $\{\mathfrak{p}\} = \operatorname{Ass} F$ est isomorphe à $E(A/\mathfrak{p})$ ([3] proposition 3.1). Le sous-module quasi-injectif $N_\mathfrak{p} = r_{E(A/\mathfrak{p})}(\mathfrak{p})$ de $E(A/\mathfrak{p})$ est le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$ ([3] théorème 3.4) donc $N_\mathfrak{p}$ n'a pas de sous-module quasi-injectif propre non nul comme on le vérifie aisément et $N_\mathfrak{p}$ est le plus petit sous-module quasi-injectif non nul de $E(A/\mathfrak{p})$. Autrement dit A vérifie la condition Co si et seulement si pour tout idéal premier minimal et non maximal $\mathfrak{p}$ de A on a $E(A/\mathfrak{p}) = N_\mathfrak{p}$ i.e. $\mathfrak{p}E(A/\mathfrak{p}) = 0$.

2. – Montrons maintenant que $a) \Leftrightarrow b)$.

$a) \Rightarrow b)$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal et non maximal de A, d'après a) et la remarque précédente on a $\mathfrak{p}E(A/\mathfrak{p}) = 0$ d'où $\mathfrak{p} = l_A(E(A/\mathfrak{p}))$, or $l_A(E(A/\mathfrak{p})) = \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{p}^{(n)}$ où $\mathfrak{p}^{(n)}$ est la n-ième puissance symbolique de $\mathfrak{p}$ ([3] théorème 3.4), donc $\mathfrak{p}$ coïncide avec le saturé de 0 pour $\mathfrak{p}$ dans A et $\mathfrak{p}$ est le seul idéal $\mathfrak{p}$-primaire d'où b).

$b) \Rightarrow a)$. Si un idéal premier minimal et non maximal $\mathfrak{p}$ est dans la décomposition primaire de 0 dans A alors $\mathfrak{p}$ est le saturé de 0 pour $\mathfrak{p}$ dans A et $\mathfrak{p}$ est le seul idéal $\mathfrak{p}$-primaire. On a alors $\mathfrak{p}E(A/\mathfrak{p}) = 0$ d'après le lemme 3.2 de [3] et l'implication $b) \Rightarrow a)$ résulte de la remarque précédente.

3.2. LEMME. – *Soit A un anneau semi-local tel que* $\dim_K A = 1$, *si A vérifie* Co *alors*:

1) *pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *l'anneau* $A_\mathfrak{m}$ *vérifie* Co;

2) *le complété* $\hat{A}$ *de* A *vérifie* Co.

1. – La première assertion résulte immédiatement de la caractérisation $b)$ de 3.1 et du fait qu'une décomposition primaire de 0 dans $A_\mathfrak{m}$ s'obtient en localisant une décomposition primaire de 0 dans A et en enlevant de la décomposition ainsi obtenue les termes égaux à $A_\mathfrak{m}$ ([1] chapitre 4, § 2, n. 4, proposition 6).

2. – Les idéaux maximaux de $\hat{A}$ sont exactement les idéaux $\hat{\mathfrak{m}}$ où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A et on a $\mathfrak{m} = \hat{\mathfrak{m}} \cap A$ car A est un anneau de Zariski, donc si $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier minimal et non maximal de $\hat{A}$, $\mathfrak{p}' \cap A$ est un idéal premier minimal et non maximal de A. Comme A vérifie Co il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{p}' \cap A \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{a} = 0$. On a donc aussi $\hat{\mathfrak{p}}' \cap \hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}' \cap \hat{\mathfrak{a}} = 0$ dans $\hat{A}$ et $\mathfrak{p}'$ figure dans la décomposition primaire de 0 dans $\hat{A}$; ce qui prouve 2).

3.3. THÉORÈME. – *Soit A un anneau semi-local, les assertions suivantes sont équivalentes*:

$a)$ *A est un Q-anneau*;

$b)$ *A vérifie les conditions suivantes*:

- i) *tout idéal premier minimal et non maximal de A est dans la décomposi tion primaire de* 0;
- ii) $\dim_K A \leqslant 1$;
- iii) *pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *du complété* $\hat{A}$ *de* A *on a* $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap A)\hat{}$;

$c)$ *A est produit fini d'anneaux locaux A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, tels que pour $1 \leqslant i \leqslant n$ chaque anneau A_i vérifie l'analogue des conditions* i), ii), iii).

$a) \Rightarrow b)$. Si A est un Q-anneau alors A vérifie les conditions i) et ii) d'après le lemme 3.1 ci-dessus et la proposition 2.3 de ([4] III.*B*.), de plus A est un $C1$-anneau donc vérifie iii) d'après 2.2.

$b) \Rightarrow c)$. La condition iii) montre que A est un $C1$-anneau (2.2) donc d'après 2.6, A est produit fini d'anneaux locaux A_i qui vérifient l'analogue de la condition iii).

Si $\dim_K A \leqslant 1$ il est clair que pour $1 \leqslant i \leqslant n$ on a ausi $\dim_K A_i \leqslant 1$. Enfin, si $\mathfrak{m}_i$ est le radical de A_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on peut considérer A_i comme le localisé de $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ en l'idéal maximal $\mathfrak{m}_i \times \prod_{j \neq i} A_j$ et, d'après 3.1 et 3.2, chaque anneau A_i vérifie l'analogue de la condition i) de b). L'implication $b) \Rightarrow c)$ est donc démontrée.

$c) \Rightarrow a)$. Comme un produit fini de Q-anneaux est un Q-anneau ([4] II.2.1), il suffit de montrer que chaque anneau local A_i est un Q-anneau. Soit i fixé, A_i est un $C1$-anneau (2.2) de dimension $\leqslant 1$. Si $\dim_K A_i = 0$ alors A_i est artinien donc est un Q-anneau ([4] II.2.1). Sinon si $\dim_K A_i = 1$ on remarque que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A_i tel que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}_i = \mathfrak{R}(A_i)$ le module $E_{A_i}(A_i/\mathfrak{p})$ coincide avec le corps des fractions de $A_i/\mathfrak{p}$ d'après la remarque 1 de la démonstration de 3.1; A_i est alors un Q-anneau d'après le théorème 3.1 de ([4] III.B.) et la démonstration du théorème est terminée.

3.4. COROLLAIRE. – *Soit A un Q-anneau alors le complété $\hat{A}$ de A est un Q-anneau.*

Il suffit de montrer que si A vérifie les conditions i) à iii) de 3.3 alors $\hat{A}$ vérifie des conditions analogues. La seule condition qui n'est pas trivialement vérifiée est la condition *i*) mais elle résulte du lemme 3.2 et le corollaire est démontré.

4. – Remarques et exemples.

Soit A un anneau semi-local de dimension 1 et réduit, soit $\mathfrak{R}$ le radical de A et soit $\hat{A}$ le complété $\mathfrak{R}$-adique de A.

1. – Si A est un anneau complet alors d'après 3.3, A est un Q-anneau.

2. – Si A n'est pas complet il résulte de ce qui précède que $\hat{A}$ est un Q-anneau dès que $\hat{A}$ est réduit. Ceci se produit par exemple lorsque l'anneau A est excellent ([2], 7.8.2) cependant même dans ce cas il peut arriver que A ne soit pas un Q-anneau comme le montre l'exemple suivant.

3. – Soit B l'anneau $\mathbf{C}[X, Y]$ et soit $p = X(X^2 + Y^2) + X^2 - Y^2$, l'idéal principal pB est premier dans B; l'idéal $M = XB + YB$ est maximal dans B et l'anneau $A = (B/pB)_{M/pB}$ est local, intégre et de dimension 1. Le complété $\hat{A}$ de A pour la topologie $\mathfrak{R}(A)$-adique s'identifie au complété de B/pB pour la topologie M/pB-adique, i.e. à $\hat{B}/p\hat{B}$ où $\hat{B} = \mathbf{C}[\![X, Y]\!]$. l'anneau A est excellent d'après [2] (7.8.3 ii) et iii)). L'anneau $\hat{A} = \hat{B}/p\hat{B}$ n'est pas intègre car dans $\hat{B}$ on peut écrire les relations

$$p = (X-1)\,Y^2 + X^2(X+1) = (X-1)\big(Y^2 - X^2(X+1)(1+X+X^2+\ldots)\big)\,.$$

Il résulte donc de 2.7 que A n'est pas un Q-anneau bien que $\hat{A}$ soit un Q-anneau d'après la remarque précédente. En particulier le corollaire 3.4 n'adment pas de réciproque.

4. – Donnons maintenant un exemple de Q-anneau local intègre et de dimension 1 qui n'est pas un anneau de valuation discrète. Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soit $p = X^2 - Y^3 \subset K[X, Y] = B$. Le polynôme p est premier dans B et est même un élément premier de l'anneau $K[\![X, Y]\!]$ ([1] chapitre 3, § 2, exercice 2). Prenons pour A le localisé en $(XB + YB)/pB$ de B/pB. L'anneau A est local intègre et de dimension 1 et le complété $\mathfrak{R}(A)$-adique de A s'identifie à $\hat{B}/p\hat{B}$ où $\hat{B} = K[\![X, Y]\!]$. Comme p est premier dans $\hat{B}$ l'anneau $\hat{A} = \hat{B}/p\hat{B}$ est intègre et A est un Q-anneau d'après 2.7.

Il reste à voir que A n'est pas un anneau de valuation discrète. Pour cela on montre que A n'est pas intégralement clos. Soient x et y les images canoniques de X et Y dans A. Dans le corps des fractions de A on a la relation $x^2/y^2 - y = 0$ qui montre que x/y est entier sur A, de plus $x/y \notin A$ comme on peut le montrer aisément et par conséquent A n'est pas intégralement clos.

5. – Dans les exemples précédents les anneaux considérés sont tels que toute chaîne d'idéaux premiers a au plus deux éléments. Nous montrons maintenant que tout anneau de valuation est un $C1$-anneau, ceci montre qu'il existe des $C1$-anneaux (en général non noethériens) dont les chaînes d'idéaux premiers ont un nombre arbitrairement grand, voire une infinité, d'éléments. Le fait qu'un anneau de valuation soit un $C1$ anneau résultera de la proposition plus générale suivante:

4.6. PROPOSITION. – *Soit A un anneau (on ne suppose pas que A est commutatif ni que A est noethérien) tel que l'ensemble des idéaux à gauche soit totalement ordonné, alors tout A-module quasi-injectif dont le socle est essentiel est Π-quasi-injectif.*

Soit M un A-module quasi-injectif dont le socle est essentiel, montrons que $M = r_{E(M)}(l(M))$. On a toujours $M \subset r_{E(M)}(l(M))$. Soit $y \in E(M)$ tel que $l(M)y = 0$, montrons que $y \in M$. Si $l(M) = \mathrm{Ann}\,(y)$ alors $A/l(M) \simeq Ay$ a un socle non nul et il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{a}/l(M)$ soit simple. Comme $l(M) = \bigcap_{x\in M} \mathrm{Ann}(x)$ on voit aisément qu'il existe $x \in M$ tel que $\mathrm{Ann}(x) = l(M) = \mathrm{Ann}(y)$. Si $l(M) \subsetneqq \mathrm{Ann}(y)$ alors il existe $x \in M$ tel que $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(y)$ car sinon on aurait les relations $l(M) \subsetneqq \mathrm{Ann}(y) \subset \bigcap_{x\in M} \mathrm{Ann}(x)$, ce qui est absurde. Dans tous les cas il existe $x \in M$ tel que $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(y)$, on a alors un morphisme $u\colon E(M) \to E(M)$ tel que $u(x) = y$. Comme M est quasi-injectif on a $u(M) \subset M$ et $y = u(x) \in M$ ce qui termine la démonstration.

On montre maintenant qu'un anneau qui vérifie les hypothèses de 4.6 n'est pas nécessairement un Q-anneau.

4.7. *Un anneau de valuation qui n'est pas un Q-anneau.*

Désignons par G le groupe additif $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ordonné lexicographiquement. On sait qu'il existe un anneau de valuation ayant G pour groupe des ordres (cf. [1] chapitre 6, § 3, n. 4, exemple 6). On peut par exemple construire A de la façon suivante:

Soit k un corps commutatif et $K = k(X, Y)$ le corps des fractions rationnelles à deux indéterminées X et Y sur k. Soit C la sous-k-algèbre de K engendrée par l'unité de K et par les éléments $X^p Y^q$ pour $(p, q) \geqslant (0, 1)$. Alors K coïncide avec le corps des fractions de C car $k[X, Y] \subset C$. On définit maintenant une valuation sur C. Pour $x = \sum a_{pq} X^p Y^q \in C - \{0\}$ on pose $v(x) = \min\{(p, q) : a_{pq} \neq 0\}$ (le minimum étant calculé dans G), et $v(0) = +\infty$. On vérifie alors immédiatement que pour tout $x, y \in C$ on a $v(xy) = v(x) + v(y)$ et $v(x + y) \geqslant \inf(v(x), v(y))$, donc v est une valuation de C qui se prolonge en une valuation du corps des fractions K de C encore notée v. Si A est l'anneau de la valuation v de K, i.e. $A = \{x \in K : v(x) \geqslant 0\}$ alors A est un anneau de valuation dont le groupe des ordres est évidemment G.

On va montrer que A n'est pas un Q-anneau.

On étudie maintenant A un peu plus en détail.

Remarquons que $(0, 1)$ est le plus petit élément de l'ensemble G_+ des éléments positifs de G, et que pour tout $(p, q) \geqslant (0, 1)$ on $X^p Y^q \in A$. Remarquons également que la relation $v(xy) = v(x) + v(y)$ montre aisément que pour des éléments a et b de A on a $Aa \subset Ab$ si et seulement si $v(a) \geqslant v(b)$; en particulier $Aa = Ab$ si et seulement si $v(a) = v(b)$. Soit maintenant $a \in A$, si a n'est pas inversible dans A alors $v(a) = (p, q) > (0, 0)$, i.e. $(p, q) \geqslant (0, 1)$ et $v(a) = v(X^p Y^q)$ donc $Aa = AX^p Y^q$. Ceci montre que les idéaux principaux propres de A sont exactement les idéaux $AX^p Y^q$ pour $(p, q) \geqslant (0, 1)$.

Déterminons les idéaux non principaux. Soit $\mathfrak{b} \neq A$ un idéal non principal. Posons $D = \{p \geqslant 0, \exists q \in \mathbf{Z} : (p, q) \in v(\mathfrak{b})\}$. L'ensemble D est non vide donc possède un plus petit élément $n \geqslant 0$. En fait $n > 0$, car si $n = 0$, il existe $q \in \mathbf{Z}$ tel que $(0, q) \in v(\mathfrak{b})$ et en supposant q minimal pour cette relation, on montre aisément que $\mathfrak{b} = AY^q$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\mathfrak{b}$. On a donc $n > 0$, et on a alors $a \in \mathfrak{b}$ si et seulement si il existe $q \in \mathbf{Z}$ tel que $v(a) \geqslant (n, q) = v(X^n Y^q)$, c'est-à-dire si et seulement si $a \in AX^n Y^q$; donc $\mathfrak{b} = \bigcup_{q \in \mathbf{Z}} AX^n Y^q$. Comme pour q, $q' > 0$, on a $AX^n Y^q \subset$ $\subset A(X^n / Y^{q'})$, on a aussi $\mathfrak{b} = \bigcup_{q \geqslant 1} A(X^n / Y^q)$.

Posons $\mathfrak{a} = \bigcup_{q \geqslant 1} A(X / Y^q)$, on montre aisément que $\bigcup_{q \geqslant 1} A(X^n / Y^q) = \mathfrak{a}^n$ et ce qui précède montre que $a \in \mathfrak{a}^n$ si et seulement si $v(a) = (p, q)$ avec $p \geqslant n$. On peut maintenant écrire la suite de tous les idéaux de A:

$$A \supset AY \supset \ldots \supset AY^q \supset \ldots \supset \mathfrak{a} \supset \ldots \supset A\frac{X}{Y^q} \supset \ldots \supset AX \supset \ldots \supset AXY^q$$
$$\supset \ldots \supset \mathfrak{a}^2 \supset \ldots \supset AX^2 Y^q \supset \ldots \qquad \text{où } q \geqslant 1 .$$

Remarquons que l'idéal $\mathfrak{a}$ est premier car pour $a, b \in A$ avec $v(a) = (p, q)$ et $v(b) = (r, s)$ on a $v(ab) = (p + r, q + s)$ et si $ab \in \mathfrak{a}$ on a $p + r \geqslant 1$ donc $p \geqslant 1$ ou $q \geqslant 1$ et $a \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$. Il est clair que $\mathfrak{m} = AY$ et $\mathfrak{a}$ sont les seuls idéaux premiers non nuls de A.

Soit $E = E_A(A/\mathfrak{m})$ le cogénérateur minimal de $\operatorname{Mod} A$, et posons $F = r_E(\mathfrak{a})$, on va maintenant démontrer en plusieurs étapes que le module $M = r_E(\mathfrak{a}^2) \oplus (r_E(\mathfrak{a}^2)/F)$ *est un module quasi-injectif qui n'est pas Π-quasi-injectif*, ce qui prouvera que A n'est pas un Q-anneau.

D'abord A est un Cl-anneau ([4] IV.4.6) donc les correspondances $\mathfrak{a} \to r_E(\mathfrak{a})$ et $Q \to l_A(Q)$ sont des bijections réciproques entre idéaux de A et sous-modules quasi-injectifs de E ([4] II.2.6).

1-*er point.* On a $E = \bigcup_{n\geqslant 1} r_E(\mathfrak{a}^n)$ et $r_E(\mathfrak{a}^2) = \bigcup_{n\geqslant 1} r_E(XY^n)$.

Le module $Q = \bigcup_{n\geqslant 1} r_E(\mathfrak{a}^n)$ est un sous-module quasi-injectif de E et on a $l_A(Q) = \bigcap_{n\geqslant 1} l_A(r_E(\mathfrak{a}^n)) = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathfrak{a}^n = 0$, donc $Q = r_E(l_A(Q)) = r_E(0) = E$. Pour démontrer la seconde formule on remarque d'abord que $\mathfrak{a}^2 = \bigcap_{n\geqslant 1} AXY^n$ ce qui se vérifie immédiatement et on fait pour le module quasi-injectif $Q = \bigcup_{n\geqslant 1} r_E(XY^n)$ un raisonnement analogue au précédent.

2-*ème point.* Pour tout $x \in E/F$, $x \neq 0$, il existe $n > 0$ tel que $\mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{a}^n$. Soit $x \in E/F$, $x \neq 0$, il existe $y \in E - F$ tel que $x = y + F$. On a $\mathfrak{a} \not\subset \mathrm{Ann}(y)$ donc $\mathrm{Ann}(y) \subsetneqq \mathfrak{a}$ et il existe $n \geqslant 1$ tel que $\mathfrak{a}^{n+1} \subset \mathrm{Ann}(y) \subsetneqq \mathfrak{a}^n$. Montrons que $\mathfrak{a}^n = \mathrm{Ann}(x)$. Pour $a \in A$, la relation $ax = 0$ équivant à $ay \in F$, i.e. à $\mathfrak{a}a \subset \mathrm{Ann}(y)$. L'idéal principal Aa est de la forme AX^qY^p, donc il existe un élément inversible $u \in A$ tel que $a = X^pY^qu$ et on vérifie alors aisément que $\mathfrak{a}a = \mathfrak{a}X^pY^qu = \mathfrak{a}^{p+1}Y^qu = \mathfrak{a}^{p+1}u = \mathfrak{a}^{p+1}$. On a donc $a = X^pY^qu \in \mathrm{Ann}(x)$ si et seulement si $\mathfrak{a}^{p+1} \subset \mathrm{Ann}(y)$ i.e. $p \geqslant n$; soit encore $a \in \mathfrak{a}^n$ d'où le résultat.

3-*ème point.* On a $E/F = E_A(P)$ où $P = r_E(\mathfrak{a}^2)/F$.

Montrons d'abord que E/F est injectif. Soit $p: E \to E/F$ l'application canonique. Soit $f: \mathfrak{a}' \to E/F$ un morphisme non nul d'un idéal $\mathfrak{a}' \neq 0$ de A dans E/F. Distinguons deux cas. Si $\mathfrak{a}'$ est principal alors $\mathfrak{a}'$ est projectif et f se relève en $g: \mathfrak{a}' \to E$ qui se prolonge en $h: A \to E$ tel que $p \circ h$ prolonge f. Si $\mathfrak{a}'$ n'est pas principal, il existe n tel que $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}^n$. Comme $\mathfrak{a}^n = \bigcup_{m\geqslant 1} A(X^n/Y^m)$ il existe m_0 tel que $f(X^n/Y^{m_0}) \neq 0$. D'après le cas où $\mathfrak{a}'$ est principal la restriction de f à $A(X^n/Y^m)$ se prolonge à A et il existe $x_m \in E/F$ tel que $f(X^n/Y^m) = (X^n/Y^m)x_m$. Soit alors m_0 fixé et $m > m_0$, on a

$$\frac{X^n}{Y^{m_0}} = Y^{m-m_0}\frac{X^n}{Y^m} \quad \text{d'où} \quad \frac{X^n}{Y^{m_0}}x_{m_0} = Y^{m-m_0}\frac{X^n}{Y^m}x_m = \frac{X^n}{Y^{m_0}}x_m\,.$$

Considérons $a = (X^n/Y^m)(x_m - x_{m_0}) \in E/F$, si $a \neq 0$, alors d'après le second point il existe $n > 0$ tel que $\mathrm{Ann}(a) = \mathfrak{a}^n$, mais ceci est absurde car on a par ailleurs $Y^{m-m_0}a = 0$, donc $a = 0$ et on vérifie alors aisément que f se prolonge à A par $a \to ax_{m_0}$.

Il reste à démontrer que P est essentiel dans E/F, or, si $y + F \in E/F - \{0\}$ il existe n tel que $y \in r_E(\mathfrak{a}^{n+1}) - r_E(\mathfrak{a}^n)$, si $n = 1$, on a $y + F \in P$ et si $n > 1$ on vérifie aisément que $X^{n-1}y \in r_E(\mathfrak{a}^2) - F$, i.e. $X^{n-1}(y + F) \in P - \{0\}$ ce qui montre que P est essentiel dans F.

4-ème point. Le module $M = r_E(\mathfrak{a}^2) \oplus P$ est quasi-injectif.

Pour montrer que M est quasi-injectif il suffit de vérifier que pour tout morphisme $f: E \to E/F$ et tout morphisme $g: E/F \to E$ on a $f(r_E(\mathfrak{a}^2)) \subset P$ et $g(P) \subset r_E(\mathfrak{a}^2)$. Soient donc $f: E \to E/F$ et $g: E/F \to E$. Soit $x \in r_E(\mathfrak{a}^2)$, alors d'après le 1er point il existe m tel que $x \in r_E(XY^m)$ et on a alors $AXY^m \subset \mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}\, f(x)$, or $f(x) \in E/F$ donc $\mathrm{Ann}\, f(x)$ est de la forme $\mathfrak{a}^n$ si $f(x) \neq 0$, mais $AXY^m \subset \mathfrak{a}^n$ implique $n = 1$, on a donc $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}\, f(x)$ et il est facile de voir que ceci signifie que $f(x) \in P$; donc $f(r_E(\mathfrak{a}_2)) \subset P$. Soit maintenant $x \in P$ on a $\mathfrak{a}^2 \subset \mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}\, g(x)$ donc $g(x) \in r_E(\mathfrak{a}^2)$ et $g(P) \subset$ $\subset r_E(\mathfrak{a}^2)$. Ceci démontre que M est quasi-injectif et pour achever la démonstration il reste à montrer que M n'est pas Π-quasi-injectif.

5-ème point. M n'est pas Π-quasi-injectif.

D'après ([4] I.2.3.1), le module M est Π-quasi-injectif si et seulement si $l_A(M) \in I_M$ (notation de [4] I.2.1). On a $l_A(M) = l_A(r_E(\mathfrak{a}^2)) \cap l_A(P) = \mathfrak{a}^2 \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$. Montrons que $\mathfrak{a}^2 = l_A(M) \notin I_M$, pour cela il faut trouver un idéal $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}^2$ et un morphisme $f: \mathfrak{b} \to M$ tel que $f(\mathfrak{a}^2) = 0$, qui ne se prolonge pas à A. Soit $x \in r_E(\mathfrak{a}^2) - F$, alors $\mathrm{Ann}(x + F) = \mathfrak{a}$ et soit $f: AX \to P \subset M$ défini par $f(X) = x + F$. On a d'abord $\mathfrak{a}^2 \subset AX$ et $f(\mathfrak{a}^2) = 0$, en effet si $a \in \mathfrak{a}^2$ alors $a = X^{s+2} Y^q u$ avec $s \geqslant 0$, $q \in \mathbf{Z}$ et u inversible dans A, donc $f(a) = X^{s+1} Y^q u(x + F)$, comme $\mathrm{Ann}(x + F) = \mathfrak{a}$ on a $f(a) = 0$ et $f(\mathfrak{a}^2) = 0$. Il reste à montrer que f ne se prolonge pas à A. En effet si f se prolonge à A, il existe $y \in r_E(\mathfrak{a}^2) - F$ tel que $x + F = X(y + F)$ ce qui est absurde car on a alors $\mathrm{Ann}(y) = \mathfrak{a}$ et $x + F = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann.

[2] Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique IV*, 2-ème partie, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., no. 24 (1965).

[3] Matlis, *Injective modules over noetherian rings*, Pac. J. Math., **8** (1958), pp. 511-528.

[4] Tisseron, *Sur les anneaux tels que tout produit de copies d'un module quasi-injectif soit un module quasi-injectif*, à paraître aux Annali di matematica pura ed applicata.