Valutazione dell'errore nella formula di MC MAHON per gli zeri della funzione $J_0(kz)Y_0(z) - J_0(z)Y_0(kz)$.

Nota di LUIGI GATTESCHI (a Firenze).

Sunto. - Della funzione $J_0(k, z) = J_0(kz)Y_0(z) - J_0(z)Y_0(kz)$ si ritrova la formula di MC MAHON per l' r -esimo zero con un nuovo procedimento che permette di precisarne l'errore.

Introduzione.

In varie questioni di fisica matematica ha interesse la determinazione degli zeri della funzione

$$(1) \quad \Delta_0(k, z) = J_0(kz)Y_0(z) - J_0(z)Y_0(kz),$$

dove $J_0(z)$ e $Y_0(kz)$ sono le funzioni di BESSEL di ordine zero di prima e di seconda specie rispettivamente, e k è un parametro maggiore di 1.

Per esempio ⁽¹⁾ le frequenze delle vibrazioni simmetriche di una membrana anulare limitata da due circonferenze di raggi R e r , ($R > r$), sono appunto fornite dagli zeri della (1) nella quale ora k rappresenta il rapporto R/r .

Tavole dei primi cinque zeri della (1) per vari valori del parametro k sono state pubblicate da A. KALÄHNE ⁽²⁾, A. N. LOWAN e H. HILLMAN ⁽³⁾, H. B. DWIGHT ⁽⁴⁾ ed anche nell'ultima edizione delle tavole di JAHNKE e EMDE ⁽⁵⁾.

Fin dal 1895 era nota per l' r -esimo zero z_r della (1) la seguente formula asintotica di MC MAHON ⁽⁶⁾

$$z_r = b + \frac{p}{b} + \frac{q - p^2}{b^3} + \frac{r - 4pq + 2p^3}{b^5} + \dots,$$

⁽¹⁾ N. W. MC LACHLAN, *Bessel functions for engineers*, Oxford, 1934, p. 14.

⁽²⁾ A. KALÄHNE, *Über die Wurzeln Zylinderfunktionen und gewisser aus ihnen gebildeter Gleichungen*, « Zeitschrift für Math. und Phys. », 54, 1907, pp. 55-86.

⁽³⁾ A. N. LOWAN and H. HILLMAN, *A short table of the first five zeros of the transcendental equation $J_0(x)Y_0(kx) - J_0(kx)Y_0(x) = 0$* , « Journ. Math. and Phys. », 22, 1943, pp. 208-209.

⁽⁴⁾ H. B. DWIGHT, *Table of roots for natural frequencies in coaxial type cavities*, « Journ. Math. and Phys. », 27, 1948, pp. 84-89.

⁽⁵⁾ JAHNKE-EMDE, *Tafeln höherer Funktionen*, Leipzig, 1948, pp. 204-206.

⁽⁶⁾ J. MC MAHON, *On the Roots of the Bessel and certain Related Functions*, « Annals of Math. », 9, 1895, pp. 23-30.

dove

$$b = \frac{r\pi}{k-1}, \quad p = \frac{-1}{8k}, \quad q = \frac{100(k^3-1)}{3(8k)^3(k-1)}, \quad r = \frac{32 \cdot 1073(k^5-1)}{5(8k)^5(k-1)}.$$

In questo lavoro viene ritrovata con lo stesso procedimento usato in una precedente ricerca ⁽⁷⁾ la formula di MC MAHON e, quel che è più importante, valutato esplicitamente un estremo superiore dell'errore. Più precisamente posto

$$(k-1)z_r = t(r, k), \quad \delta = \frac{k-1}{2\sqrt{k}},$$

si ha per $r > 1$ e $\delta < 1$

$$t(r, k) = r\pi - \frac{\delta^2}{2r\pi} + \frac{100\delta^6 + 69\delta^4}{24(r\pi)^3} - \frac{51504\delta^{10} + 62380\delta^8 + 14655\delta^6}{15 \cdot 16(r\pi)^5} + \sigma(r, \delta),$$

$$(r = 2, 3, \dots), \quad (\delta < 1),$$

con

$$|\sigma(r, \delta)| < \frac{\delta^8}{r^7} 369.$$

L'applicazione di questa formula dà, per esempio nel caso $k = 3/2$, $r = 5$, il seguente risultato

$$15,70663826 < t\left(5, \frac{3}{2}\right) < 15,70663831,$$

mentre il valore con sei cifre decimali dato dalla citata tavola di A. N. LOWAN e H. HILLMAN è

$$V_6 t\left(5, \frac{3}{2}\right) = 15,706638,$$

ma avvertiamo però che mentre in questa tavola l'ultima cifra è arrotondata qui 8 è la sesta cifra decimale esatta.

§ 1. Limitazione del resto nella serie di Buchholz.

H. BUCHHOLZ ⁽⁸⁾, considerando più in generale la funzione

$$(2) \quad \Delta_\nu(k, z) = J_\nu(kz)Y_\nu(z) - J_\nu(z)Y_\nu(kz),$$

ha dimostrato che, posto

$$(3) \quad \delta = \frac{k-1}{2\sqrt{k}}$$

⁽⁷⁾ L. GATTESCHI, *Sull'approssimazione asintotica degli zeri dei polinomi sferici ed ultrasferici*, « Boll. Unione Mat. Ital. », (3), 5, pp. 305-313.

⁽⁸⁾ H. BUCHHOLZ, *Besondere Reihenentwicklungen für eine häufig vorkommende zweireihige Determinante mit Zylinderfunktionen und ihre Nullstellen*, « Z. Angew. Math. Mech. », 29, 1949, pp. 356-367.

e

$$(4) \quad X_v^{(p)}(k, z) = 4\delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh [2v \operatorname{arsenh} (\delta \operatorname{sen} \eta)] \frac{J_p[(k-1)z \cos \eta]}{[(k-1)z \cos \eta]^p} \frac{\cos \eta}{\sqrt{1 + \delta^2 \operatorname{sen}^2 \eta}} d\eta,$$

è

$$X_v^{(0)}(k, z) = -\pi \Delta_v(k, z),$$

ed ha dedotto dalla (4) una serie per $\Delta_v(k, z)$ (*).

Richiamiamo qui il procedimento del Signor BUCHHOLZ perchè interessa ai fini di questa ricerca precisare l'errore quando della serie si prenda un numero finito di termini.

Osserviamo che è (°)

$$\begin{aligned} \frac{\cosh [2v \operatorname{arsenh} (\delta \operatorname{sen} \eta)]}{\sqrt{1 + \delta^2 \operatorname{sen}^2 \eta}} &= {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + v, \frac{1}{2} - v; \frac{1}{2}; -\delta^2 \operatorname{sen}^2 \eta\right) = \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + v\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - v\right)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + v + \lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - v + \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)\lambda!} (-\delta^2 \operatorname{sen}^2 \eta)^\lambda, \end{aligned}$$

e se, con HANKEL, poniamo

$$\begin{aligned} (v, \lambda) &= \frac{(4v^2 - 1^2)(4v^2 - 3^2) \dots (4v^2 - (2\lambda - 1)^2)}{2^{2\lambda} \lambda!} = \\ &= \frac{(-1)^\lambda \cos \pi v}{\lambda!} \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda + v\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda - v\right), \quad (v, 0) = 1, \end{aligned}$$

avremo

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda + v\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda - v\right) &= (v, \lambda) \frac{\pi}{\cos \pi v}, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2} + v\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - v\right) &= \frac{\pi}{\cos \pi v}, \end{aligned}$$

e

$$(5) \quad \frac{\cosh [2v \operatorname{arsenh} (\delta \operatorname{sen} \eta)]}{\sqrt{1 + \delta^2 \operatorname{sen}^2 \eta}} = \pi^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (v, \lambda) \frac{(\delta \operatorname{sen} \eta)^{2\lambda}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}.$$

(*) Vedi formula (7) dove nel lavoro citato manca il fattore 2^λ .

(°) W. MAGNUS-F. OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik*, 2 Aufl., Berlin, 1948, Zweites kapitel.

Questa serie è uniformemente convergente per $\delta < 1$, i suoi termini sono decrescenti, in valore assoluto, ed inoltre per

$$n > \nu + \frac{1}{2}$$

sono anche a segni alternati. Potremo quindi scrivere

$$\frac{\cosh [2\nu \operatorname{arcsenh} (\delta \operatorname{sen} \eta)]}{\sqrt{1 + \delta^2 \operatorname{sen}^2 \eta}} = \pi^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^n (\nu, \lambda) \frac{(\delta \operatorname{sen} \eta)^{2\lambda}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \lambda)} + \pi^{\frac{1}{2}} \Theta_{n+1}(\nu, n+1) \frac{(\delta \operatorname{sen} \eta)^{2(n+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2} + n+1)},$$

con

$$0 < \Theta_{n+1} < 1, \quad \left(n > \nu + \frac{1}{2}, \delta < 1 \right).$$

Dalla (4) si ha allora

$$(6) \quad X_\nu^{(p)}(k, z) = 4\delta\pi^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^n \frac{(\nu, \lambda)\delta^{2\lambda}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \lambda)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{J_p[(k-1)z \cos \eta]}{[(k-1)z \cos \eta]^p} (\operatorname{sen} \eta)^{2\lambda} \cos \eta d\eta +$$

$$+ 4\delta\pi^{\frac{1}{2}} \Theta_{n+1} \frac{(\nu, n+1)\delta^{2(n+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2} + n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{J_p[(k-1)z \cos \eta]}{[(k-1)z \cos \eta]^p} (\operatorname{sen} \eta)^{2(n+1)} \cos \eta d\eta;$$

ma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{J_p(a \cos \eta)}{(a \cos \eta)^p} \operatorname{sen}^{2\lambda} \eta \cos \eta d\eta =$$

$$= \frac{(-1)^p \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{2^{p+1} (\frac{a}{2})^{\lambda+p+\frac{1}{2}}} \left\{ J_{\lambda-p+\frac{1}{2}}(a) - \sum_{q=0}^{p-1} \frac{(-1)^q (\frac{a}{2})^{2q+\lambda-p+\frac{1}{2}}}{q! \Gamma(\lambda-p+\frac{3}{2}+q)} \right\},$$

dove la somma del secondo membro è nulla quando $p=0$, e perciò sostituendo nella (6) e ponendo $p=0$,

$$(7) \quad X_\nu^{(0)}(k, z) = -\pi \Delta_\nu(k, z) = 2^{\frac{3}{2}} \delta \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\lambda=0}^n (\nu, \lambda) \delta^{2\lambda} 2^\lambda \frac{J_{\lambda+\frac{1}{2}}[(k-1)z]}{[(k-1)z]^{\lambda+\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \Theta_{n+1}(\nu, n+1) \delta^{2(n+1)} 2^{n+1} \frac{J_{n+1+\frac{1}{2}}[(k-1)z]}{[(k-1)z]^{n+1+\frac{1}{2}}} \right\}.$$

In particolare per $\nu = 0$, posto

$$(k-1)z = t$$

si ha

$$(8) \quad \Delta_0\left(\frac{kt}{k-1}, \frac{t}{k-1}\right) = -\frac{4\delta}{\pi t} f_0(t),$$

con

$$(9) \quad f_0(t) = \sum_{\lambda=0}^n (0, \lambda) \delta^{2\lambda} 2^\lambda \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{J_{\lambda+\frac{1}{2}}(t)}{t^{\lambda-\frac{1}{2}}} + \Theta_{n+1}(0, n+1) \delta^{2(n+1)} 2^{n+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{J_{n+\frac{3}{2}}(t)}{t^{n+\frac{1}{2}}},$$

$$\left(\delta = \frac{k-1}{2\sqrt{k}} < 1, \quad n = 1, 2, \dots\right).$$

§ 2. Separazione degli zeri di $f_0(t)$.

È noto ⁽¹⁰⁾ che gli zeri di $\Delta_\nu(k, z)$, cioè di $f_\nu[(k-1)z]$, sono tutti reali e semplici e che ad ogni zero positivo α ne corrisponde uno negativo $-\alpha$.

Passiamo ora a provare che, detto $t(r, k)$, ($r > 1$), l' r -esimo zero di $f_0(t)$, vale la limitazione

$$(10) \quad r\pi - \frac{\delta^2}{r\pi} < t(r, k) < r\pi, \quad r > 1.$$

Se poniamo infatti

$$f(t) = g(t) + R_3,$$

con

$$g(t) = \left(\frac{\pi t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ J_{\frac{1}{2}}(t) + 2(0, 1) \delta^2 \frac{J_{\frac{3}{2}}(t)}{t} + 4(0, 2) \delta^4 \frac{J_{\frac{5}{2}}(t)}{t^2} \right\} =$$

$$= \left[1 - \frac{\delta^2}{2t^2} + \frac{27\delta^4}{8t^4} - \frac{9\delta^4}{8t^2} \right] \sin t - \left[\frac{27\delta^4}{8t^3} - \frac{\delta^2}{2t} \right] \cos t$$

e

$$R_3 = \Theta_3(0, 3) \delta^6 2^3 \frac{J_{\frac{7}{2}}(t)}{t^3} =$$

$$= \frac{8\Theta_3(0, 3) \delta^6}{t^3} \left[\left(\frac{15}{t^3} - \frac{6}{t} \right) \sin t - \left(\frac{15}{t^2} - 1 \right) \cos t \right],$$

⁽¹⁰⁾ A. G. GRAY and G. B. MATHEWS, *A treatise on Bessel Functions*, ed. 2, 1922, p. 82, teor. X.

si ha, per $r > 1$

$$\begin{aligned} (-1)^r g(r\pi) &> \frac{\delta^2}{2r\pi} \left(1 - \frac{27}{4r^2\pi^2}\right), \\ (-1)^{r+1} g\left(r\pi - \frac{\delta^2}{r\pi}\right) &> \frac{\delta^2}{r\pi} \left[1 - \frac{1}{24\pi^2} - \frac{13}{32\pi^2} \left(1 - \frac{1}{4\pi^2}\right)^{-2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4\pi^2}\right)^{-1}\right], \\ |R_3| &< \frac{75\delta^6}{16r^3\pi^3} \left(1 - \frac{\delta^2}{4\pi^2}\right)^{-3} \left[\frac{3}{2\pi^2} \left(1 - \frac{1}{4\pi^2}\right)^{-1} + 1\right]. \end{aligned}$$

E poichè da queste risulta, per $r > 1$,

$$\begin{aligned} \min. |g(r\pi)| - \text{Max. } |R_3| &> 0, \\ \min. \left|g\left(r\pi - \frac{\delta^2}{r\pi}\right)\right| - \text{Max. } |R_3| &> 0, \end{aligned}$$

se ne deduce che esiste almeno uno zero $t(r, k)$ che soddisfa alla limitazione (10).

Se ora poniamo

$$t = r\pi - \varphi,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} (-1)^r f'(r\pi - \varphi) &= \left[1 - \frac{8\delta^2 + 9\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^2} + \frac{27\delta^4}{2(r\pi - \varphi)^4} + \right. \\ &+ \frac{\Theta_3 75\delta^6}{16} \left(\frac{90}{(r\pi - \varphi)^6} - \frac{9}{(r\pi - \varphi)^4}\right) \cos \varphi + \left[\frac{\delta^2}{2(r\pi - \varphi)} + \frac{27\delta^4}{2(r\pi - \varphi)^5} - \right. \\ &\left. - \frac{8\delta^2 + 45\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^3} + \frac{\Theta_3 75\delta^6}{16} \left(\frac{90}{(r\pi - \varphi)^7} - \frac{39}{(r\pi - \varphi)^5} + \frac{75}{(r\pi - \varphi)^3}\right) \right] \sin \varphi, \end{aligned}$$

e quando

$$0 < \varphi < \frac{\delta^2}{r\pi}, \quad r = 2, 3, \dots,$$

risulta

$$(-1)^r f'(r\pi - \varphi) > 0,$$

e questo ci assicura che nell'intervallo $(r\pi - \delta^2/r\pi, r\pi)$ cade uno ed un solo zero di $f_0(t)$.

§ 3. Una prima formula asintotica e limitazione del resto.

Tenendo conto della limitazione trovata per $t(r, k)$ siamo ora in grado di poter determinare per lo stesso $t(r, k)$ una prima formula asintotica.

Poniamo

$$(11) \quad t(r, k) = r\pi - \varphi$$

e cerchiamo di determinare φ per sostituzione diretta in $f_0(t)$.

Avremo

$$f_0(r\pi - \varphi) = (-1)^{r+1} \left[1 - \frac{4\delta^2 + 9\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^2} + \frac{27\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^4} \right] \operatorname{sen} \varphi +$$

$$+ (-1)^{r+1} \left[\frac{27\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^3} - \frac{\delta^2}{2(r\pi - \varphi)} \right] \cos \varphi + R_3 = 0,$$

ed anche

$$\left[1 - \frac{4\delta^2 + 9\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^2} + \frac{27\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^4} \right] \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} \cos \xi \right) +$$

$$+ \left[\frac{27\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^3} - \frac{\delta^2}{2r\pi} \left(1 + \frac{\varphi}{r\pi - \varphi} \right) \right] \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} \cos \xi' \right) + (-1)^{r+1} R_3 = 0,$$

con $0 < \xi, \xi' < \varphi$.

La precedente può scriversi

$$(12) \quad \varphi + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{\delta^2}{2r\pi} + \varepsilon_3 + (-1)^{r+1} R_3 = 0$$

dove abbiamo posto

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{27\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^4} - \frac{4\delta^2 + 9\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^2} \right] \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} \cos \xi \right) - \frac{\varphi^3}{3!} \cos \xi,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{27\delta^4}{8(r\pi - \varphi)^3} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} \cos \xi' \right),$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\delta^2}{2r\pi} \frac{\varphi^2}{2!} \cos \xi' - \frac{\delta^2 \varphi}{2r\pi(r\pi - \varphi)} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} \cos \xi' \right),$$

e se teniamo presente che è, per $r > 1$, $0 < \varphi < \delta^2/r\pi$ e quindi

$$l(r, k) > r\pi - \frac{\delta^2}{r\pi} \geq 2\pi - \frac{1}{2\pi}$$

si ha

$$|\varepsilon_1| < \frac{\delta^4}{2(r\pi)^3} \left[\frac{13}{4} \left(1 - \frac{1}{4\pi^2} \right)^{-2} + \frac{1}{3} \right], \quad |\varepsilon_2| < \frac{27\delta^4}{8(r\pi)^3} \left(1 - \frac{1}{4\pi^2} \right)^{-3},$$

$$|\varepsilon_3| < \frac{\delta^4}{2(r\pi)^3} \left[\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{4\pi^2} \right)^{-1} \right], \quad |R_3| < \frac{75\delta^4}{16(r\pi)^3} \left(1 - \frac{1}{4\pi^2} \right)^{-3},$$

$$\rho = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| + |R_3| < \frac{11\delta^4}{(r\pi)^3}.$$

Dalla (12), tenuto conto della (11), si ottiene allora

$$(I) \quad \boxed{\begin{aligned} t(r, k) &= r\pi - \frac{\delta^2}{2r\pi} + \rho, \\ |\rho| &< \frac{11\delta^4}{(r\pi)^3}, \quad r = 2, 3, \dots \end{aligned}}$$

§ 4. Una seconda formula asintotica e limitazione del corrispondente resto.

Volendo precisare il valore di ρ della formula precedente ed ottenere una migliore espressione asintotica possiamo iterare il procedimento.

Si ponga ancora

$$t(r, k) = r\pi - \varphi,$$

ma, in luogo dei primi tre, si considerino i primi sette termini della serie (9).

Operando come nel § precedente e tenendo conto che è

$$0 < \varphi < \frac{\delta^2}{r\pi},$$

avremo

$$\begin{aligned} f(r\pi - \varphi) &= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{2(0, 1)\delta^2 - 4(0, 2)\delta^4}{r^2\pi^2} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{2\varphi^5}{r\pi} \right) + \\ &+ \frac{12(0, 2)\delta^4 - 48(0, 3)\delta^6 + 16(0, 4)\delta^8}{r^4\pi^4} \varphi + \\ &+ \frac{2(0, 1)\delta^2}{r\pi} \left(1 + \frac{\varphi}{r\pi} + \frac{\varphi^2}{r^2\pi^2} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^3}{2!r\pi} + \frac{\varphi^4}{4!} \right) + \\ &+ \frac{12(0, 2)\delta^4 - 8(0, 3)\delta^6}{r^3\pi^3} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{3\varphi}{r\pi} \right) + \\ &+ \frac{120(0, 3)\delta^6 - 160(0, 4)\delta^8 + 32(0, 5)\delta^{10}}{r^5\pi^5} + K + R_7 = 0; \end{aligned}$$

in K abbiamo riunito i termini che sono almeno $O(r^{-7}\delta^8)$.

Se poniamo in quest'ultima

$$\varphi = \frac{\delta^2}{2r\pi} + \rho,$$

si ha, facendo uso della limitazione per ρ data dalla (I),

$$\rho \left(1 - \frac{\delta^2 + \delta^4}{r^2\pi^2} \right) + \frac{A}{r^3\pi^3} + \frac{B}{r^5\pi^5} + H + K + R_7 = 0,$$

dove

$$A = \frac{100\delta^5 + 69\delta^4}{24}, \quad B = -\frac{52504\delta^{10} + 64070\delta^8 + 15345\delta^6}{15.16},$$

e in H sono raccolti i termini almeno $O(r^{-7}\delta^8)$.

Si ricava allora

$$(13) \quad \rho = \frac{-A}{r^3\pi^3} - \frac{A(\delta^2 + \delta^4) + B}{r^5\pi^5} - \sigma(r, \delta),$$

con

$$\sigma(r, \delta) = \left[\frac{(\delta^2 + \delta^4)^2 A}{r^7\pi^7} + \frac{\delta^2 + \delta^4}{r^7\pi^7} + H + K + R_7 \right] \left(1 - \frac{\delta^2 + \delta^4}{r^2\pi^2} \right)^{-1},$$

e passando alla maggiorazione di $\sigma(r, \delta)$, con calcoli laboriosi che qui per brevità omettiamo, si ottiene

$$|\sigma(r, \delta)| < \frac{\delta^8}{r^7} 369.$$

Dalla (13) si ha per la (I)

$$(II) \quad \boxed{\begin{aligned} t(r, k) &= r\pi - \frac{\delta^2}{2r\pi} + \frac{100\delta^5 + 69\delta^4}{24(r\pi)^3} - \frac{51504\delta^{10} + 62380\delta^8 + 14655\delta^6}{15.16(r\pi)^5} + \sigma(r, \delta) \\ |\sigma(r, \delta)| &< \frac{\delta^8}{r^7} 369, \quad (r = 2, 3, \dots), \quad (\delta < 1) \end{aligned}}$$

Abbiamo così ottenuto i 4 termini di $t(r, k)$, già trovati da MC MAHON e, quel che importa, la limitazione di $\sigma(r, k)$.