Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica.

CLAUDIO BAIOCCHI (a Pavia) (*) ⁽¹⁾

Sunto. — Si dimostra esistenza e unicità della soluzione di un problema di frontiera libera che traduce il moto di filtrazione di liquidi attraverso mezzi porosi.

Il problema è ricondotto alla minimizzazione di un funzionale quadratico su un convesso chiuso di uno spazio di Hilbert, il che fornisce anche dei procedimenti per l'approssimazione numerica del problema stesso.

1. — Introduzione.

Nel 1970 l'Istituto di Idraulica della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pavia, diretto dal Prof. U. MAIONE, propose al Laboratorio di Analisi Numerica del C.N.R. di Pavia lo studio di alcuni problemi concernenti il moto di filtrazione di liquidi attraverso mezzi porosi ⁽²⁾.

Un caso tipico, particolarmente interessante per la semplicità del modello matematico cui si perviene, si ottiene considerando due bacini idrici, di livelli diversi, che comunicano tramite una diga in materiale poroso; si suppone la diga a pareti verticali, con base orizzontale e impermeabile, e di sezione costante (ci si riconduce così allo studio di un problema piano).

Trascurando gli effetti dovuti alla capillarità, e con una opportuna scelta delle unità di misura, si perviene al seguente problema ⁽³⁾:

PROBLEMA A. — Sono dati tre numeri, a , h , H , tali che:

$$(1.1) \quad a > 0; \quad H > h > 0.$$

(*) Entrata in Redazione il 16 dicembre 1971.

⁽¹⁾ Indirizzo dell'autore: C. BAIOCCHI, Istituto di Matematica, Università, Pavia. Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito delle attività del Laboratorio di Analisi Numerica del C.N.R. di Pavia; i risultati qui ottenuti sono stati annunciati in una nota preventiva sui C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, pp. 1215-1217.

⁽²⁾ Colgo l'occasione per ringraziare U. MAIONE ed i suoi collaboratori dell'Istituto di Idraulica, e V. COMINCIOLI, L. GUERRI, E. MAGENES e G. A. POZZI del Laboratorio di Analisi Numerica per le utili discussioni sull'argomento.

⁽³⁾ Nel quale a è lo spessore della diga; h ed H sono le altezze dei due bacini; il grafico della funzione φ è la « curva di pelo libero »; la funzione $u(x, y)$ è una « quota piezometrica »; e l'insieme Ω è la « parte bagnata » della diga. Si veda ad es. HARR [8], MUSKAT [13] anche per il significato fisico delle relazioni (1.3) ed (1.5) ... (1.14).

Si cerca una funzione $y = \varphi(x)$ tale che:

(1.2) φ è una funzione reale, definita e « regolare » sull'intervallo chiuso $0 \leq x \leq a$;

(1.3) $\varphi(0) = H; \quad \varphi(a) \geq h$

e tale che, posto:

(1.4) $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < a; 0 < y < \varphi(x)\}$

esista una funzione $u(x, y)$ definita e « regolare » nella chiusura $\bar{\Omega}$ di Ω , tale che ⁽⁴⁾:

(1.5) $u(x, y)$ è armonica in Ω

(1.6) $\begin{cases} u(0, y) = H & \text{per } y \in [0, H]; \\ u(a, y) = h & \text{per } y \in [0, h]; \\ u(a, y) = y & \text{per } y \in [h, \varphi(a)] \end{cases}$

(1.7) $u(x, \varphi(x)) = \varphi(x) \quad \text{per } x \in]0, a[$

(1.8) $u_v(x, 0) = 0 \quad \text{per } x \in]0, a[$ ⁽⁵⁾

(1.9) $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sulla curva } y = \varphi(x)$ ⁽⁶⁾

OSSERVAZIONE 1.1. — Per semplificare un poco la terminologia assumeremo spesso, come incognita del Problema A, la terna $\{\varphi, \Omega, u\}$ anziché la sola funzione φ .

OSSERVAZIONE 1.2. — Perché la terna $\{\varphi, \Omega, u\}$ risulti « accettabile » dal punto di vista fisico, dovranno essere soddisfatte ulteriori condizioni, quali ad esempio:

(1.10) $u(x, y) \geq y \quad \text{per } (x, y) \in \bar{\Omega}$

(1.11) $\int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt = \frac{h^2 - H^2}{2a} \quad \text{per } x \in]0, a[$ ⁽⁷⁾

(1.12) la funzione $y = \varphi(x)$ è strettamente decrescente per $x \in [0, a]$

(1.13) la funzione φ è analitica

(1.14) $\varphi(a) > h$ ⁽⁸⁾.

⁽⁴⁾ Le relazioni (1.5) ... (1.11) vanno precisate in base alla « regolarità » che si richiederà a φ ed u ; cfr. il successivo n. 2.

⁽⁵⁾ u_x ed u_y indicano le derivate parziali di u rispetto ad x e y .

⁽⁶⁾ $\partial u / \partial \nu$ indica la derivata normale di u lungo tale curva.

⁽⁷⁾ E cioè la « portata » su ogni sezione verticale vale $(H^2 - h^2)/2a$.

⁽⁸⁾ Relazione che esprime l'esistenza di una « sorgente sospesa »; cfr. sempre i testi [8], [13].

Tali relazioni saranno qui ottenute come proprietà di « regolarità » delle soluzioni del Problema A.

Il Problema A rientra in una vasta classe di problemi (analoghi per motivazione fisica e per formulazione analitica) di cui si sono interessati vari Autori, sia da un punto di vista teorico (strumento di base è allora il metodo delle trasformazioni conformi; si vedano i lavori di HARR [8], MIRANDA [12], MUSKAT [13], POLUBARINOVA-KOCHINA [16]) sia dal punto di vista della effettiva valutazione numerica della soluzione (si vedano i lavori CREYER [4], NEUMAN, WHITERSPOON [14], [15], POLUBARINOVA-KOCHINA [16], SOUTWELL [18]; si veda anche COMINCIOLI, GUERRI, VOLPI [2] e la relativa bibliografia).

Tuttavia, a mia conoscenza, in nessuno dei lavori dedicati all'argomento si perviene ad un teorema di esistenza e unicità della soluzione del Problema A; tanto meno sono perciò giustificati (dal punto di vista teorica della stabilità, convergenza, maggiorazione dell'errore etc.) i procedimenti numerici fin qui proposti per il calcolo effettivo della soluzione del Problema A.

In questo lavoro, dopo avere ambientato il Problema A in un'opportuna classe funzionale (precisando al tempo stesso il significato da attribuire alle (1.5)-(1.9); cfr. n. 2), si dà un teorema di esistenza (n. 3) e di unicità (n. 4) delle soluzioni (nel senso precisato nel n. 2) del Problema A; sempre nel n. 4 sono mostrate ulteriori proprietà di regolarità della soluzione.

Ci sembra infine interessante rilevare che il teorema di esistenza riconduce il Problema A ad un problema di minimizzazione di un funzionale quadratico su un convesso di uno spazio di HILBERT (ovvero, equivalentemente, ad una disequazione variazionale del tipo di quelle introdotte da G. STAMPACCHIA [20]); si tratta di problemi attualmente molto studiati, anche dal punto di vista numerico (cfr. ad es. il testo del Corso CIME 1971 [3] ed il libro GLOWINSKI, LIONS, TRÉMOLIÈRES [6]); e si hanno perciò a disposizione numerosi metodi teoricamente corretti per l'approssimazione numerica della soluzione del Problema A.

Nel quadro delle attività del Laboratorio di Analisi Numerica alcuni di tali metodi sono stati approntati e messi in opera; i risultati, confrontati con quelli di altri metodi fin qui proposti, sembrano particolarmente buoni (^o).

2. - Posizione precisa del problema.

Per comodità del lettore e per precisare le notazioni impiegate richiamiamo definizioni e proprietà di alcuni spazi funzionali di cui faremo uso. Se Ω è un aperto limitato del piano euclideo $\mathbf{R}^2$ (le cui coordinate saranno indicate con x ed y) indicheremo con $C^0(\bar{\Omega})$ l'insieme delle restrizioni a $\bar{\Omega}$ delle funzioni reali definite e continue su tutto $\mathbf{R}^2$; con $C^k(\bar{\Omega})$ ($k = 1, 2, \dots$) indicheremo l'insieme delle restrizioni a

(^o) I risultati numerici relativi al Problema A saranno comunque oggetto di una pubblicazione separata; cfr. [2].

$\bar{\Omega}$ delle funzioni reali definite su $\mathbf{R}^2$ e continue insieme alle loro derivate fino all'ordine k . $\mathcal{D}'(\Omega)$ indicherà lo spazio delle distribuzioni su Ω (cfr. SCHWARTZ [19] di cui seguiamo le notazioni).

$L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) sarà l'usuale spazio delle (classi di) funzioni reali, definite (quasi ovunque) in Ω , misurabili e di potenza p -esima sommabile (ovvero essenzialmente limitate se $p = \infty$); $W^{k,p}(\Omega)$ ($k = 1, 2, \dots$; $1 \leq p \leq \infty$) indicherà lo spazio

$$\{f \in L^p(\Omega); D_x^h D_y^l f \in L^p(\Omega) \text{ per } h, l \geq 0, h + l \leq k\} \quad (10).$$

$H^k(\Omega)$ indicherà l'aderenza di $C^k(\bar{\Omega})$ in $W^{k,2}(\Omega)$ ⁽¹¹⁾; $H_0^k(\Omega)$ indicherà l'aderenza in $W^{k,2}(\Omega)$ di $\mathcal{D}(\Omega)$ (funzioni continue in Ω con tutte le loro derivate che si annullano in un intorno di $\partial\Omega$). Lo spazio $H_0^k(\Omega)$ risulta denso in $L^2(\Omega)$; identificando $L^2(\Omega)$ al suo duale si può allora immergere $L^2(\Omega)$ nel duale di $H_0^k(\Omega)$; lo spazio duale di $H_0^k(\Omega)$ è usualmente indicato $H^{-k}(\Omega)$. Ricordiamo infine che le operazioni di derivazione, D_x e D_y , risultano lineari e continue da $H^k(\Omega)$ in $H^{k-1}(\Omega)$ per ogni valore intero relativo di k (avendo posto, per compattezza di notazioni, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$).

Torniamo ora al Problema A, e cominciamo a precisare le ipotesi di regolarità sulle funzioni $\varphi(x)$ ed $u(x, y)$. Supporremo di avere:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \text{la funzione } y = \varphi(x) \text{ è definita e continua nell'intervallo chiuso } 0 \leq x \leq a; \\ \text{e si ha: } \varphi(0) = H; \varphi(a) \geq h; \varphi(x) > 0 \quad \forall x \in]0, a[. \end{cases}$$

Posto allora:

$$(2.2) \quad \Omega = \{(x, y) | 0 < x < a; 0 < y < \varphi(x)\}$$

Ω risulterà aperto; ed avranno perciò senso gli spazi $W^{k,p}(\Omega)$, ed $H^k(\Omega)$ ⁽¹²⁾.

Per quanto concerne $u(x, y)$ supporremo:

$$(2.3) \quad u(x, y) \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$$

ed avrà perciò senso imporre alla funzione $u(x, y)$ di verificare (nel senso di $C^0(\bar{\Omega})$) le (1.6), (1.7).

⁽¹⁰⁾ D_x e D_y indicano rispettivamente le derivate parziali rispetto ad x e ad y , intese nel senso di $\mathcal{D}'(\Omega)$ (cfr. sempre SCHWARTZ [19]); lo spazio $W^{k,p}(\Omega)$ si suppone munito della « norma del grafico ».

⁽¹¹⁾ In larghe ipotesi su Ω risulta $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$; cfr. ad es. GAGLIARDO [5].

⁽¹²⁾ Si osservi tuttavia che la sola (2.1) non è sufficiente ad assicurare la validità della relazione $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$; in particolare la successiva (2.3) non si può sostituire con $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Sempre grazie a (2.3) ha senso imporre ad $u(x, y)$ di verificare la relazione:

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per ogni } \psi \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ che si annulla in un intorno di } \{x=0\} \cup \{x=a\} \text{ risulta:} \\ \int_{\Omega} (u_x \psi_x + u_y \psi_y) dx dy = 0. \end{array} \right.$$

È immediato controllare che se $\{u(x, y), \varphi(x)\}$ sono funzioni « regolari » e se sono soddisfatte le (1.5), (1.6), (1.9) in senso usuale, allora è soddisfatta anche la (2.4) (basta applicare una « mezza » formula di GREEN); viceversa è ben noto che la (2.4) può essere assunta come « formulazione debole » delle (1.5), (1.8), (1.9) in quanto da (2.4) segue ovviamente:

$$(2.5) \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{nel senso di } \mathcal{D}'(\Omega)$$

ed a partire da (2.3), (2.5), se Ω è « regolare », si può dare un senso alla « traccia su $\partial\Omega$ » della derivata normale di $u(x, y)$; tale derivata normale deve poi essere nulla su $\{(x, 0) | 0 < x < a\}$ e su $\{(x, \varphi(x)) | 0 < x < a\}$ grazie a (2.4), (2.5) ed una « mezza » formula di GREEN⁽¹³⁾. La (2.4) traduce perciò la (1.4) e, almeno formalmente, le (1.8), (1.9).

OSSERVAZIONE 2.1. — Una deduzione rigorosa di (1.8) a partire da (2.3), (2.4) può essere ottenuta in vari modi; ad esempio, posto:

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \{(x, y) | 0 < x < a, -\varphi(x) < y < \varphi(x)\} \\ u_1(x, y) = u(x, |y|) \quad \text{per } (x, y) \in \bar{\Omega}_1 \end{array} \right.$$

da (2.3), (2.4) segue ovviamente:

$$(2.7) \quad u_1 \in H^1(\Omega_1) \cap C^0(\bar{\Omega}_1); \quad \Delta u_1 = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega_1).$$

Ne segue che $u_1(x, y)$ è una funzione C^∞ in un intorno del segmento $\{(x, 0) | 0 < x < a\}$; di qui, a partire da (2.4), si ottiene facilmente (1.8). Un altro metodo per ottenere (1.8) a partire da (2.3), (2.4), e che esplicitiamo perchè avremo occasione di fare uso di discorsi analoghi in seguito, è il seguente: la (2.3) assicura che la restrizione di $u(x, y)$ al rettangolo $]0, a[\times]0, h[$ è tale che (omettiamo per semplicità il simbolo di restrizione) $y \rightarrow u(x, y)$ è di quadrato sommabile su $]0, h[$ come funzione a valori in $H^1(0, a)$ ⁽¹⁴⁾; quindi $y \rightarrow u_{xx}$ risulterà di quadrato sommabile su $]0, h[$ come funzione a valori in $H^{-1}(0, a)$. Tenendo conto della relazione $u_{yy} = -u_{xx}$ (cfr. (2.5)) e

⁽¹³⁾ Cfr., sempre in ipotesi di « regolarità » su Ω , LIONS-MAGENES [11].

⁽¹⁴⁾ Gli spazi funzionali sull'aperto $]0, a[$ si definiscono in maniera analoga a quella con la quale si sono introdotti gli spazi funzionali sull'aperto Ω . Si osservi che i ragionamenti qui svolti potrebbero essere precisati ulteriormente, dando senso a $u_y(x, 0)$ in uno spazio « intermedio » tra $L^2(0, a)$ ed $H^{-1}(0, a)$.

del fatto che (sempre per la (2.3)) $y \rightarrow u_y$ è di quadrato sommabile su $]0, h[$ come funzione a valori in $L^2(0, a)$, ne segue che $y \rightarrow u_y$ è (quasi ovunque in $]0, h[$ uguale ad) una funzione assolutamente continua in $[0, h]$ a valori in $H^{-1}(0, a)$; in particolare ha senso (come elemento di $H^{-1}(0, a)$) $u_y(x, 0)$; ed a partire da (2.4) è ormai immediato controllare che $u_y(x, 0)$ è lo zero di $H^{-1}(0, a)$.

Mostreremo ora come da (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) segua la validità di (1.10), (1.11).

LEMMA 2.1. — *Nelle ipotesi (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), e se valgono le (1.6), (1.7) nel senso di $C^0(\bar{\Omega})$, si ha:*

$$(2.8) \quad u(x, y) \geq y \quad \text{in } \bar{\Omega}.$$

DIM. — Poniamo, con le notazioni (2.6), per $(x, y) \in \bar{\Omega}_1$, $U(x, y) = u_1(x, y) - |y|$. Si avrà (cfr. anche (2.7) e (2.4)):

$$U(x, y) \in H^1(\Omega_1) \cap C^0(\bar{\Omega}_1); \quad U(x, y) \geq 0 \quad \text{su } \partial\Omega_1; \quad \Delta U \leq 0 \quad (1^5).$$

Per il principio del massimo (1^6) ne segue $U(x, y) \geq 0$ in $\bar{\Omega}_1$, da cui (2.8). c.v.d.

LEMMA 2.2. — *Nelle ipotesi (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) si ha:*

$$(2.9) \quad D_x \left(\int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt \right) = 0 \quad \text{nel senso di } \mathcal{D}'(0, a) \quad (1^7);$$

se inoltre valgono le (1.6), (1.7) nel senso di $C^0(\bar{\Omega})$ si ha:

$$(2.10) \quad \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt = \frac{h^2 - H^2}{2a} \quad \text{q.ov. in } [0, a].$$

DIM. — Qualunque sia $\chi(x) \in \mathcal{D}(0, a)$ la funzione $\psi(x, y)$ definita da $\psi(x, y) = \chi(x) \otimes 1(y)$ è una delle funzioni considerate in (2.4); con tale scelta di ψ la (2.4) dà:

$$0 = \int_{\Omega} (u_x \psi_x + u_y \psi_y) dx dy = \int_{\Omega} u_x(x, y) \chi'(x) dx dy = \int_0^a \chi'(x) dx \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, y) dy$$

e tale relazione, valendo per ogni $\chi \in \mathcal{D}(0, a)$, esprime appunto la validità di (2.9).

(1^5) Nel senso di $\mathcal{D}'(\Omega_1)$, e cioè $\mathcal{D}'(\Omega_1) \langle \Delta U, \psi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega_1)} \leq 0$ per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ con $\psi \geq 0$ (la relazione segue ovviamente da (2.5)).

(1^6) Cfr. STAMPACCHIA [21], Teorema 3.7.

(1^7) La funzione $x \rightarrow \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt$ ha senso (quasi ovunque) ed è sommabile su $[0, a]$ per la (2.3) ed il Teorema di FUBINI; $D_x \left(\int_0^{\varphi(x)} u_x(x, t) dt \right)$ ha perciò senso.

Da (2.9) segue (cfr. SCHWARTZ [20]) che esiste una costante k tale che, q. ov. in $[0, a]$, $\int_0^{\varphi(x)} u_x(x, y) dy = k$; se valgono le (1.6), (1.7) il valore di k si calcola con una operazione di media su $[0, a]$:

$$k = \frac{1}{a} \int_0^a k dx = \frac{1}{a} \int_0^a dx \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, y) dy = \frac{1}{a} \int_{\Omega} u_x(x, y) dx dy = \frac{1}{a} \int_{\partial\Omega} u(x, y) dy = \frac{1}{a} \frac{h^2 - H^2}{2}.$$

c.v.d.

Le considerazioni fin qui svolte giustificano ⁽¹⁸⁾ la seguente definizione (cfr. l'Oss. 1.1 per la terminologia):

DEFINIZIONE 2.1. — Una terna $\{\varphi, \Omega, u\}$ si dirà soluzione debole del Problema A se valgono le (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e, nel senso di $C^0(\bar{\Omega})$, le (1.6), (1.7).

OSSERVAZIONE 2.2. — Mostriamo nel n. 4 che, se $\{\varphi, \Omega, u\}$ è una soluzione debole del Problema A, si ha necessariamente:

$$(2.11) \quad \varphi(a) > h$$

$$(2.12) \quad \begin{cases} \text{la restrizione di } \varphi \text{ all'intervallo aperto } 0 < x < a \text{ è una funzione analitica in }]0, a[. \end{cases}$$

Tali relazioni, benchè interessanti per le applicazioni concrete, ci sembrano d'altronde inessenziali dal punto di vista matematico, in quanto perverremo ad un teorema di esistenza e unicità delle soluzioni deboli del Problema A ⁽¹⁹⁾.

OSSERVAZIONE 2.3. — La classe funzionale in cui abbiamo ambientato il Problema A non è, naturalmente, l'unica possibile: ad esempio si può impostare il Problema A in una forma « più forte » sostituendo le (2.1), (2.3) con

$$(2.13) \quad \begin{cases} y = \varphi(x) \text{ è una funzione continua e strettamente decrescente nell'intervallo chiuso } 0 \leq x \leq a; \text{ si ha } \varphi(0) = H, \varphi(a) \geq h; \text{ in particolare il grafico di } \varphi \text{ è un grafico lipschitziano rispetto agli assi } (X, Y) \text{ dati da } X = x + y, \\ Y = x - y. \end{cases}$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} \text{per ogni } p \text{ finito si ha:} \\ u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \text{ }^{(20)}. \end{cases}$$

⁽¹⁸⁾ A parte la validità o meno della relazione $\varphi(a) > h$; cfr. però la successiva Oss. 2.2.

⁽¹⁹⁾ E quindi il Problema (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) è « ben posto » indipendentemente dalla validità o meno delle (2.11), (2.12).

⁽²⁰⁾ Risultati simili a quelli qui esposti ma ottenuti relativamente a questo tipo più forte di soluzione sono stati da me esposti in una comunicazione tenuta al IX Congresso U.M.I. (Bari, 27 settembre - 3 ottobre 1971).

Le proprietà (2.13), (2.14) (così come le (2.11), (2.12)) saranno ottenute, nell'impostazione debole data con la Definizione 2.1, come proprietà di regolarità della soluzione debole.

OSSERVAZIONE 2.4. — Per quanto concerne le proprietà di regolarità di $u(x, y)$ si può osservare che la (2.14) è, in un certo senso, « ottimale »; si vedrà infatti nel n. 4 che la relazione $u \in W^{1, \infty}(\Omega)$ è falsa.

3. — Studio di una disequazione variazionale; esistenza di soluzioni deboli del Problema A.

In tutto questo numero supporremo fissati tre numeri a, h, H tali che valga la (1.1); indicheremo con R il rettangolo $\{(x, y) | 0 < x < a; 0 < y < H\}$; ed indicheremo con g la funzione definita su ∂R dalle formule:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} g(x, 0) = \frac{H^2}{2} - \frac{H^2 - h^2}{2a} x & \text{per } x \in]0, a[; \\ g(0, y) = \frac{1}{2} (H - y)^2 & \text{per } y \in [0, H]; \\ g(a, y) = \frac{1}{2} (h - y)^2 & \text{per } y \in [0, h]; \\ g(x, y) \equiv 0 & \text{altrove.} \end{array} \right.$$

Ricordiamo (cfr. ad es. PRODI [17]) che per $u \in H^1(R)$ ha senso la « traccia » (usualmente notata γu) di u su ∂R ; l'applicazione $\gamma: u \rightarrow \gamma u$ è lineare continua e suriettiva da $H^1(R)$ su $H^{\frac{1}{2}}(\partial R)$ ⁽²¹⁾; ed una norma hilbertiana su $H^1(R)$ equivalente a quella originaria è data da:

$$(3.2) \quad |||u||| = \left\{ \int_R (u_x^2 + u_y^2) dx dy + |||\gamma u|||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial R)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ricordiamo anche (cfr. ad es. LIONS [10]) che vale il seguente teorema:

TEOREMA 3.1. — Siano $\mathcal{K}$ un sottoinsieme di $H^1(R)$ chiuso, convesso e non vuoto, ed $f(x, y) \in L^2(R)$. Esiste una ed una sola w tale che:

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} w \in \mathcal{K}; \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{K}: \\ \frac{1}{2} |||w|||^2 + \int_R f(x, y) w(x, y) dx dy \leq \frac{1}{2} |||v|||^2 + \int_R f(x, y) v(x, y) dx dy \end{array} \right.$$

⁽²¹⁾ Spazio delle funzioni di quadrato sommabile su ∂R insieme a « mezza » derivata; cfr. sempre [17].

e tale w coincide con l'unica soluzione della disequazione variazionale ⁽²²⁾:

$$(3.4) \quad \begin{cases} w \in \mathcal{K}; \text{ per ogni } v \in \mathcal{K}: \\ ((w, v - w)) \geq \int_K f(x, y)[v(x, y) - w(x, y)] dx dy. \end{cases}$$

Poniamo ora (g essendo definito da (3.1)):

$$(3.5) \quad \mathcal{K} = \{v \in H^1(R) | \gamma v = g; v(x, y) \geq 0 \text{ q.ov. in } R\}.$$

TEOREMA 3.2. — Con le notazioni (3.1), (3.5), il problema:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \text{trovare } w \in \mathcal{K} \text{ tale che, per ogni } v \in \mathcal{K}: \\ \int_K [w_x(v_x - w_x) + w_y(v_y - w_y)] dx dy \geq \int_K (w - v) dx dy \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione; e si ha:

$$(3.7) \quad \text{per ogni } p \in]1, +\infty[, \quad w \in W^{2,p}(R).$$

DIM. — Cominciamo ad osservare che $\mathcal{K}$ è non vuoto: infatti esistono sicuramente elementi $v \in H^1(R)$ tali che $\gamma v = g$ ⁽²³⁾; e se v è uno di tali elementi, posto $\tilde{v} = \max[v, 0]$, è $v \in H^1(\Omega)$ (cfr. ad es. STAMPACCHIA [21]); $\tilde{v} \geq 0$; e (essendo $g \geq 0$ su ∂R) $\gamma \tilde{v} = \gamma v = g$; cioè $\tilde{v} \in \mathcal{K}$, quindi $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Poichè è ovvio che $\mathcal{K}$ è convesso e chiuso in $H^1(R)$, è applicabile il Teorema 3.1; la (3.4), con $\mathcal{K}$ dato da (3.5) e con $f \equiv -1$, dà esattamente la (3.6).

Sia ora $G(x, y)$ la funzione (che esiste ed è unica ad esempio in $H^1(R)$) armonica in R e che assume il valore g su ∂R ; traslando il problema (3.6) del vettore G , ponendo cioè:

$$w_1 = w - G; \quad \mathcal{K}_1 = \{v \in H^1(R) | \gamma v = 0; v \geq -G \text{ q.ov. in } R\},$$

si ha che w_1 risolve un problema di tipo (3.6) con $\mathcal{K}$ sostituito da $\mathcal{K}_1$.

A questo nuovo problema sono applicabili i teoremi di regolarità per le soluzioni di disequazioni variazionali (del tipo di quelli di LEWY-STAMPACCHIA [9], BRÉZIS-STAMPACCHIA [1]; cfr. ad es. [10], chap. II, Théor. 8.8) che danno $\Delta w_1 \in L^p(R)$ per ogni p finito.

Tornando ora alla soluzione w di (3.6), si ha $\gamma w = g$; $\Delta w = \Delta(w_1 + G) = \Delta w_1 \in L^p(R)$ per ogni p finito; grazie alla regolarità di g (cfr. (3.1)) e grazie a ben noti teoremi di regolarità per le soluzioni di equazioni ellittiche ⁽²⁴⁾ si ottiene (3.7).

c.v.d.

⁽²²⁾ Con $((,))$ indichiamo il prodotto scalare associato alla norma $||| |||$ definita in (3.2).

⁽²³⁾ Essendo g lipschitziana e quindi $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial R)$.

⁽²⁴⁾ Cfr. ad es. GRISVARD [7].

D'ora in poi w indicherà la soluzione di (3.6). Avremo bisogno di ulteriori proprietà di w ; i ragionamenti che seguono ricalcano in parte quelli di LEWY-STAMPACCHIA [9], i cui risultati non ci sembrano tuttavia direttamente applicabili al caso in esame.

LEMMA 3.1. — *Si ha $w \in C^1(\bar{R})$; in particolare, posto:*

$$(3.8) \quad \Omega = \{(x, y) \in R \mid w(x, y) > 0\}$$

Ω è un insieme aperto. Si ha inoltre:

$$(3.9) \quad \Delta w = 1 \quad \text{in } \Omega.$$

DIM. — La relazione $w \in C^1(\bar{R})$ segue da (3.7) e dalle inclusioni di SOBOLEV (cfr. ad es. GAGLIARDO [5]). Per avere la (3.9) basta osservare che ad ogni $\psi \in C^\infty(\bar{R})$ nulla fuori di un compatto contenuto in Ω si può associare un $\lambda_\psi > 0$ tale che, per $|\lambda| < \lambda_\psi$, $w + \lambda\psi \in \mathcal{K}$. La (3.6) con $v = w + \lambda\psi$ dà ⁽²⁵⁾:

$$\begin{aligned} \lambda \langle -1, \psi \rangle_\Omega &= \int_\Omega -\lambda \psi dx dy = \int_\Omega -\lambda \psi dx dy \leq \int_\Omega [w_x \lambda \psi_x + w_y \lambda \psi_y] dx dy = \\ &= \lambda \int_\Omega [w_x \psi_x + w_y \psi_y] dx dy = \lambda \langle -\Delta w, \psi \rangle_\Omega. \end{aligned}$$

Poichè λ può assumere valori di segno opposto, ne segue $\langle \Delta w - 1, \psi \rangle_\Omega = 0$; da tale relazione, per l'arbitrarietà di ψ , si deduce (3.9) (nel senso delle distribuzioni in Ω).
c.v.d.

Per semplificare un poco gli enunciati che seguono introduciamo le notazioni:

$$(3.10) \quad \begin{cases} \Gamma_0 = \{(0, y) \mid 0 < y < H\}; & \Gamma_1 = \{(x, 0) \mid 0 < x < a\}; \\ \Gamma_2 = \{(a, y) \mid 0 < y < h\}; & \Gamma_3 = \{(a, y) \mid h < y < H\}; & \Gamma_4 = \{(x, H) \mid 0 < x < a\}. \end{cases}$$

LEMMA 3.2. — *Valgono le relazioni:*

$$(3.11) \quad w_x \leq 0 \quad \text{su } \Gamma_3; \quad w_y \leq 0 \quad \text{su } \Gamma_4$$

$$(3.12) \quad \begin{cases} w_x = 0 & \text{su } \Gamma_4; & w_x \leq 0 & \text{su } \Gamma_1; & w_y \leq 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ w_y = 0 & \text{su } \Gamma_3; & w_y \leq 0 & \text{su } \Gamma_2. \end{cases}$$

DIM. — Osserviamo intanto che, per il Lemma 3.1, è $w \in C^1(\bar{R})$ e quindi le (3.11), (3.12) hanno senso. Ciò premesso, per avere le (3.12) basta fare uso della forma (3.1) di g ; mentre per avere le (3.11) basta costruire i relativi rapporti incrementali, e studiarne il segno tenendo conto del fatto che sul tratto di bordo in questione è $w = 0$ (cfr. sempre (3.1)) mentre all'interno di R è $w \geq 0$.
c.v.d.

⁽²⁵⁾ $\langle, \rangle_\Omega$ indica la dualità tra $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega)$.

LEMMA 3.3. — *Valgono le relazioni:*

$$(3.13) \quad w_{xx} = 0 \quad \text{su } \Gamma_0 \cup \Gamma_2; \quad w_{yy} = 1 \quad \text{su } \Gamma_1.$$

DIM. — Con la notazione (3.8), e grazie a (3.7), (3.9), si ha che le restrizioni a Ω di w_x e w_y verificano ⁽²⁶⁾: $w_x, w_y \in W^{1,p}(\Omega)$; $\Delta w_x = \Delta w_y = 0$ in Ω . Ha perciò senso ⁽²⁷⁾ considerare la « traccia » delle derivate normali di w_x e w_y sulle parti « regolari » del bordo di Ω ; in particolare hanno senso la traccia di w_{xx} su $\Gamma_0 \cup \Gamma_2$ e quella di w_{yy} su Γ_1 ⁽²⁸⁾.

I valori assunti da tali tracce possono poi essere calcolati tenendo conto del fatto che in Ω è $w_{xx} + w_{yy} = 1$ (cfr. (3.9)) e valutando w_{yy} (ovvero w_{xx}) in funzione dei valori assunti da g su $\Gamma_0 \cup \Gamma_2$ (ovvero su Γ_1). c.v.d.

LEMMA 3.4. — *Valgono le relazioni:*

$$(3.14) \quad w_x \leq 0 \quad \text{in } \bar{R}; \quad w_y \leq 0 \quad \text{in } \bar{R}.$$

DIM. — Sia $\Omega_x = \{(x, y) \in R \mid w_x(x, y) > 0\}$ (analogamente si definisce Ω_y). Ω_x ed Ω_y sono aperti (per la continuità di w_x e w_y ; cfr. Lemma 3.1); dimostriamo, per assurdo, che sono contenuti in Ω . In effetti se esistesse $(x_0, y_0) \in \Omega_x - \Omega$ sarebbe $w_x(x_0, y_0) > 0$ (perchè $(x_0, y_0) \in \Omega_x$) e $w(x_0, y_0) = 0$ (perchè $(x_0, y_0) \notin \Omega$); quindi, per $x < x_0$ con x abbastanza vicino ad x_0 sarebbe $w(x, y_0) < 0$; ma ciò è assurdo perchè è $w \geq 0$ dovunque in R ; analogamente si prova che $\Omega_y \subset \Omega$.

Supponiamo, per assurdo, che sia $\Omega_x \neq \emptyset$. Essendo $\Omega_x \subset \Omega$ si avrà, per la (3.9), $\Delta w_x = D_x \Delta w = D_x 1 = 0$ in Ω_x .

Poichè w_x è continua in $\bar{\Omega}_x$ e armonica in Ω_x , posto $M = \max \{w_x(x, y) \mid (x, y) \in \bar{\Omega}_x\}$ dovrà essere $M = w_x(x_0, y_0)$ con $(x_0, y_0) \in \partial \Omega_x$; e dovrà essere $M > 0$ per definizione di Ω_x . Si avrà anche $(x_0, y_0) \in \partial R$ ⁽²⁹⁾; ed essendo $M > 0$ sarà $(x_0, y_0) \in \Gamma_0 \cup \Gamma_2$ (essendo, per le (3.11), (3.12), $w_x \leq 0$ su $\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, e quindi $w_x \leq 0$ sulla chiusura di tale insieme). Sia ad esempio $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$ (analogamente si procederebbe se fosse $(x_0, y_0) \in \Gamma_2$); sarà $x_0 = 0$; ed $y_0 \in]0, H[$; esisterà perciò $\delta > 0$ tale che $y_0 - \delta > 0$ e $y_0 + \delta < H$; e possiamo anche scegliere δ in modo tale che, detto C_δ il cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio δ , si abbia $w_x > 0$ in $C_\delta \cap \bar{R}$ (per la continuità di w_x). Posto ora $\tilde{w}_x(x, y) = w_x(|x|, y)$ per $(x, y) \in C_\delta$, risulterà $\Delta \tilde{w}_x = 0$ in C_δ (per la (3.13), essendo $\Delta \tilde{w}_x = 0$ in $C_\delta \cap R$); e ciò è assurdo perchè $\tilde{w}_x$ ha un punto di massimo interno a C_δ ^(29 bis).

Supponiamo ora $\Omega_y \neq \emptyset$. Ancora per la (3.9) e per l'inclusione $\Omega_y \subset \Omega$, sarà $\Delta w_y = 0$ in Ω_y ; procedendo come visto più su si potrà perciò trovare un punto

⁽²⁶⁾ Omettiamo per semplicità il simbolo di restrizione a Ω .

⁽²⁷⁾ Con discorsi analoghi a quelli sviluppati nell'Oss. 2.1.

⁽²⁸⁾ Essendo $w = g > 0$ su $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, ed essendo $w \in C^0(\bar{R})$, si deve avere $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset \partial \Omega$.

⁽²⁹⁾ Nei punti di $\partial \Omega_x \cap R$ è $w_x = 0$ per la continuità di w_x e per definizione di Ω_x .

^(29 bis) Qui, ed in alcuni punti nel seguito, il discorso potrebbe essere abbreviato facendo uso del principio di massimo nella forma di Hopf anziché nella forma usuale.

$(x_0, y_0) \in \partial\Omega_y$, punto di massimo in $\bar{\Omega}_y$ per w_y ; e dovrà essere $w_y(x_0, y_0) > 0$ (per definizione di Ω_y). Per definizione di Ω_y e per la continuità di w_y si deve avere $w_y = 0$ su $\partial\Omega_y - \partial R$; dovrà quindi essere $(x_0, y_0) \in \partial\Omega_y \cap \partial R$; infine per le (3.11), (3.12) dovrà essere $(x_0, y_0) \in \Gamma_1$; ma ciò è assurdo perchè su Γ_1 è $w_{yy} = 1$ (cfr. (3.13)); quindi w_y cresce vicino a $\{y = 0\}$; il punto di massimo non può perciò trovarsi su Γ_1 .
c.v.d.

Introduciamo altre notazioni; precisamente, per ogni $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in R$ poniamo:

$$Q_{P_0}^+ = \{(x, y) \in R \mid x > x_0, y > y_0\}; \quad Q_{P_0}^- = \{(x, y) \in R \mid x < x_0, y < y_0\}.$$

LEMMA 3.5. — Per ogni $P \in R - \Omega$ si ha $Q_P^+ \subset R - \bar{\Omega}$; per ogni $P \in R \cap \partial\Omega$ si ha $Q_P^- \subset \Omega$.

DIM. — Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in R - \Omega$; sarà $w(x_0, y_0) = 0$. Poichè w non cresce rispetto ad x (cfr. (3.14)), ed essendo $w \geq 0$ in R , sarà $w(x, y_0) \equiv 0$ in $[x_0, a]$. Ancora per la (3.14) w non cresce in y ; ed essendo $w \geq 0$ in R e $w = 0$ sul segmento $\{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq a\}$ si dovrà avere $w(x, y) \equiv 0$ in $[x_0, y_0] \times [y_0, H]$; cioè $w(x, y) \equiv 0$ in $\bar{Q}_{P_0}^+$ ⁽³⁰⁾. Ne segue, per definizione di Ω , $\bar{Q}_{P_0}^+ \subset R - \Omega$; da cui $Q_{P_0}^+ = (\bar{Q}_{P_0}^+)^o \subset (R - \Omega)^o \subset (\bar{R})^o - \bar{\Omega} = R - \bar{\Omega}$.

Sia poi, per assurdo, $P_0 \in R \cap \partial\Omega$ tale che $Q_{P_0}^- \not\subset \Omega$; esisterebbe allora $P_1 \in R - \Omega$ con $P_1 \in Q_{P_0}^-$, cioè $P_0 \in Q_{P_1}^+$; ma per la prima parte del lemma ne seguirebbe $P_0 \in R - \bar{\Omega}$, contro l'ipotesi $P_0 \in R \cap \partial\Omega$.
c.v.d.

LEMMA 3.6. — Si ha $w_y = 0$ su Γ_1 .

DIM. — Siano x_0 e λ tali che $\lambda > 0$, $x_0 \in]0, a[$, $x_0 + \lambda \in]0, a[$.

Si avrà:

$$\begin{aligned} w_y(x_0 + \lambda, H) - w_y(x_0, H) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{[w(x_0 + \lambda, H - \eta) - w(x_0 + \lambda, H)] - [w(x_0, H - \eta) - w(x_0, H)]}{\eta} = \\ &= - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{w(x_0 + \lambda, H - \eta) - g(x_0 + \lambda, H) - w(x_0, H - \eta) + g(x_0, H)}{\eta} = (\text{cfr. (3.1)}) \\ &= - \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{w(x_0 + \lambda, H - \eta) - w(x_0, H - \eta)}{\eta} = (\text{teorema del valor medio}) \\ &= - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\lambda w_x(x_0 + \theta\lambda, H - \eta)}{\eta} \geq 0 \end{aligned}$$

essendo $w_x \leq 0$ in $\bar{R}$ (cfr. (3.14)). Ne segue che $x \rightarrow w_y(x, H)$ non decresce; ed essendo (cfr. (3.1)) $w_y(0, H) = w_y(a, H) = 0$, deve essere $w_y(x, H) \equiv 0$.
c.v.d.

OSSERVAZIONE 3.1. — Si osservi che, grazie al Lemma 3.6, alla (3.7) ed al fatto che $w(x, H) \equiv 0$ (cfr. (3.1)) si deve avere che il prolungamento a zero di w nella striscia $]0, a[\times]0, +\infty[$ è in $W^{2,p}(]0, a[\times]0, +\infty[)$ per ogni p finito.

⁽³⁰⁾ Con notazioni usuali, $\bar{E}$ indica la chiusura di E , ed $(E)^o$ indica l'interno di E .

LEMMA 3.7. — Si ha, con le notazioni (3.10):

$$(3.15) \quad \partial\Omega \cap \Gamma_4 = \emptyset;$$

in particolare l'insieme $\partial\Omega \cap R$ è non vuoto. Inoltre $\partial\Omega \cap R$ non contiene nè tratti orizzontali nè tratti verticali.

DIM. — Sia γ un tratto orizzontale (risp. verticale) di $\partial\Omega \cap R$. Per definizione di Ω e per la continuità di w dovrà aversi $w \equiv 0$ su γ ; inoltre si dovrà avere $w_y = 0$ su γ (risp. $w_x = 0$ su γ) perchè al di sopra (risp. a destra) di γ è $w \equiv 0$ (cfr. Lemma 3.5). Ne segue, per l'unicità del problema di CAUCHY e per la (3.9) (grazie anche al fatto che Ω è connesso; cfr. il lemma 3.5) che in tutto Ω , w è del tipo: $w(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_0)^2$ (risp. $w(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2$), relazione che contrasta con la forma (3.1) di g . Lo stesso ragionamento esclude che $\partial\Omega$ possa contenere un segmento di Γ_4 (le condizioni di CAUCHY nulle essendo qui date da $w = g = 0$ su Γ_4 e dal Lemma 3.6); per provare (3.15) basterà perciò dimostrare che se $x_0 \in]0, a]$ è tale che $(x_0, H) \in \partial\Omega$, si ha necessariamente $\{(x, H) | 0 < x < x_0\} \subset \partial\Omega$. Sia dunque $x_0 \in]0, a]$ tale che $(x_0, H) \in \partial\Omega$; sarà ⁽³¹⁾: $w(x_0, y) > 0$ per $y \in]0, H[$; per la non crescenza in x di w (cfr. (3.14)) dovrà essere $w(x, y) > 0$ nel rettangolo $]0, x_0[\times]0, H[$; quindi tale rettangolo è incluso in Ω , da cui $\{(x, H) | 0 < x < x_0\} \subset \partial\Omega$.

L'implicazione (3.15) $\Rightarrow (\partial\Omega \cap R \neq \emptyset)$ è ovvia.

c.v.d.

TEOREMA 3.3. — L'insieme Ω è un insieme di tipo (2.2), con φ tale che vale (2.13).

DIM. — Cominciamo ad osservare che, per ogni $x \in]0, a[$, l'insieme $\{y | (x, y) \in \Omega\}$ non è vuoto (cfr. ⁽²⁸⁾). Ha perciò senso ⁽³²⁾ porre:

$$(3.16) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \sup \{y | (x, y) \in \Omega\} & \text{per } x \in]0, a[\\ \varphi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x); & \varphi(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \varphi(x) \end{cases}$$

e, per le proprietà di monotonia di w (cfr. (3.14)) sarà ovviamente

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < a; 0 < y < \varphi(x)\}.$$

Il Lemma 3.7 assicura che gli insiemi $\partial\Omega \cap R$ e $\{(x, \varphi(x)) | 0 < x < a\}$ coincidono; il Lemma 3.5 dà la monotonia di φ (il che giustifica le definizioni di $\varphi(0)$ e $\varphi(a)$ date in (3.16)), monotonia che è stretta grazie al Lemma 3.7; la lipschitzianità rispetto

⁽³¹⁾ Se $x_0 = a$ il Lemma 3.5 dà $\Omega = R$; se $x_0 < a$ si procede per assurdo: se, per $y_0 \in]0, H[$, fosse $w(x_0, y_0) = 0$, sarebbe $w(x_0, y) = 0$ in $[y_0, H]$ (cfr. Lemma 3.4); per la prima parte del Lemma deve essere $\{(x_0, y) | y_0 < y < H\} \subset (R - \bar{\Omega})^0$; da cui $(x_0, H) \notin \partial\Omega$.

⁽³²⁾ Almeno per $x \in]0, a[$; l'esistenza dei limiti che definiscono $\varphi(0)$ e $\varphi(a)$ sarà mostrata più avanti.

agli assi (X, Y) ⁽³³⁾ è ancora assicurata dal Lemma 3.5. Infine le relazioni $\varphi(0) = H$ e $\varphi(a) \geq h$ seguono ovviamente da (3.14) e ⁽³⁸⁾. c.v.d.

TEOREMA 3.4. — *Posto:*

$$(3.17) \quad U(x, y) = y - w_y(x, y) \quad \text{in } \bar{R}; \quad u = U|_{\bar{\Omega}} \quad (34)$$

la terna $\{\varphi, \Omega, u\}$ (con φ data da (3.16)) è una soluzione del Problema A; e per tale soluzione debole valgono le (2.13), (2.14).

DIM. — Il legame (2.2) tra Ω e φ è già stato visto nella dimostrazione del Teorema 3.3; il Teorema 3.3 dà anche la (2.13) (che a sua volta implica la (2.1)); da (3.7), essendo R aperto « regolare », segue (cfr. ⁽¹¹⁾) $w_y \in H^1(R) \cap C^0(\bar{R})$, da cui (2.3); la validità di (1.6) è ovvia a partire dalla forma (3.1) di g ; dimostreremo ora (1.7) e (2.4); e ne seguirà il teorema.

La (3.7) (che dà $w \in C^0(\bar{R})$) e la definizione (3.8) di Ω (che dà $w \equiv 0$ in $R - \Omega$) implicano $U(x, \varphi(x)) \equiv \varphi(x)$ in $]0, a[$, cioè la (1.7); e per ottenere la (2.4) basta osservare che, per ogni ψ del tipo indicato in (2.4) risulta ⁽³⁵⁾:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u_x \psi_x + u_y \psi_y] dx dy &= \int_{\Omega} [-w_{xy} \psi_x + (1 - w_{yy}) \psi_y] dx dy = (\text{cfr. (3.9)}) = \\ &= \int_{\Omega} [-w_{xy} \psi_x + w_{xx} \psi_y] dx dy = (\text{essendo } w \in W^{2,p}(R) \text{ e } w \equiv 0 \text{ in } R - \Omega) = \\ &= \int_R [-w_{xy} \psi_x + w_{xx} \psi_y] dx dy = \int_R [D_x(w_x \psi_y) - D_y(w_x \psi_x)] dx dy = \\ &= \int_{\partial R} w_x \psi_x dx + w_x \psi_y dy = (\text{poichè } \psi \text{ si annulla vicino ad } \{x=0\} \cup \{x=a\}) = \\ &= \int_{\partial R} w_x \psi_x dx = (\text{cfr. (2.1)}) \int_0^a \frac{h^2 - H^2}{2a} \psi_x(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

sempre per le condizioni di annullamento imposte a ψ .

c.v.d.

OSSERVAZIONE 3.2. — Nel seguito avremo occasione di considerare, accanto alla funzione $u(x, y)$ definita da (3.17), la funzione $v(x, y)$ definita da:

$$v(x, y) = \text{restrizione a } \bar{\Omega} \text{ di } -w_x(x, y).$$

⁽³³⁾ Notazioni di (2.13). Si osservi che tale lipschitzianità assicura anche la continuità di $x \rightarrow \varphi(x)$.

⁽³⁴⁾ Cioè u è la restrizione a Ω di U .

⁽³⁵⁾ Omettiamo, per semplicità di scrittura, il simbolo di restrizione a Ω .

Si osservi che, per il Lemma 3.1, è $v \in C^0(\bar{\Omega})$; si ha inoltre, in Ω , $u_x = -D_x(y - w_y(x, y)) = D_y(-w_x) = v_y$ e $u_y = D_y(y - w_y(x, y)) = 1 - w_{yy} =$ (cfr. (3.9)) $w_{xx} = -v_x$; cioè $v(x, y)$ è, in Ω , un'armonica coniugata di $u(x, y)$. Osserviamo ancora che, essendo $w \in C^1(\bar{R})$, la relazione $w|_{\partial R} = g$ dà (cfr. (3.1)) $v(x, 0) \equiv (H^2 - h^2)/2a$ e la definizione di Ω dà $v(x, \varphi(x)) \equiv 0$.

OSSERVAZIONE 3.3. - Sia H^* un qualunque numero tale che $H^* \geq H$; posto:

$$(3.18) \quad \begin{cases} R^* =]0, a[\times]0, H^*[; & w^*(x, y) = \begin{cases} w(x, y) & \text{in } \bar{R} \\ 0 & \text{in } \bar{R}^* - \bar{R} \end{cases} \\ \mathcal{K}^* = \{k(x, y) \in H^1(R^*) \mid k \geq 0 \text{ q. ov. in } R^*; k|_{\partial R^*} = w^*|_{\partial R^*}\} \end{cases}$$

si ha:

$$(3.19) \quad w^* \in \mathcal{K}^*; \quad \Delta w^* = \chi_\Omega \text{ }^{(36)} \text{ nel senso di } \mathcal{D}'(R^*).$$

Infatti dall'Oss. 3.1 segue $w^* \in W^{1,2}(R^*)$ e quindi (cfr. ⁽¹¹⁾); la frontiera di R^* è « regolare » $w^* \in H^1(R^*)$; la relazione $w^* \geq 0$ in R^* è ovvia, e quindi $w^* \in \mathcal{K}^*$. Sempre dall'Oss. 3.1 segue $\Delta w^* \in L^p(R^*)$ per ogni p finito; ed essendo $\Delta w^* = 1$ in Ω (cfr. (3.9)) e $\Delta w^* = 0$ in $R - \bar{\Omega}$ (perchè $w^* \equiv 0$ in tale aperto) la relazione $\Delta w^* = \chi_\Omega$ è verificata quasi ovunque, e quindi nel senso di $\mathcal{D}'(R^*)$ (trattandosi di due elementi di $L^p(R^*)$).

TEOREMA 3.5. - Fissato ad arbitrio $H^* \geq H$, il problema (notazioni (3.18)):

$$(3.20) \quad \begin{cases} \text{Trovare } k^* \in \mathcal{K}^* \text{ tale che, per ogni } k \in \mathcal{K}^*: \\ \int_{R^*} [k_x^*(k_x - k_x^*) + k_y^*(k_y - k_y^*)] dx dy \geq \int_{R^*} (k^* - k) dx dy \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione k^* ; ed è $k^* \equiv w^*$.

DM. - Esistenza e unicità della soluzione seguono dal Teorema 3.1 (con R sostituito da R^*); basterà perciò mostrare che w^* (che si sa già essere elemento di $\mathcal{K}^*$; cfr. (3.19)) soddisfa la disequazione (3.20). In effetti, per ogni $k \in \mathcal{K}^*$ risulta $w^* - k \in H_0^1(R^*)$; da cui $\langle \cdot, \cdot \rangle_{R^*}$ indica la dualità tra $H^{-1}(R^*)$ ed $H_0^1(R^*)$:

$$\begin{aligned} \int_{R^*} [w_x^*(k_x - w_x^*) + w_y^*(k_y - w_y^*)] dx dy &= \langle -\Delta w^*, k - w^* \rangle_{R^*} = \text{(cfr. (3.19))} \\ &= \langle -\chi_\Omega, k - w^* \rangle_{R^*} = - \int_{R^*} \chi_\Omega (k - w^*) dx dy = \int_{\Omega} (w^* - k) dx dy = \\ &= \text{(essendo } w^* \equiv 0 \text{ in } R^* - \Omega) \int_{R^*} (w^* - k) dx dy + \int_{R^* - \Omega} k dx dy \geq \int_{R^*} (w^* - k) dx dy \end{aligned}$$

essendo $k \geq 0$ in R^* .

c.v.d.

⁽³⁶⁾ χ_Ω indica la funzione caratteristica di Ω .

OSSERVAZIONE 3.4. — Si osservi che il convesso $\mathcal{K}^*$ può essere definito indipendentemente dalla conoscenza di w ; in effetti la relazione $k|_{\partial R^*} = w^*|_{\partial R^*}$ coincide con $k|_{\partial R^*} = g$, con g data ancora dalla formula (3.1) (nella quale l'«altrove» sia inteso come «altrove su ∂R^* » anziché «altrove su ∂R »). Ne segue che, per una valutazione numerica della terna $\{\varphi, \Omega, u\}$ costruita col Teorema 3.4, si può procedere studiando numericamente il problema (3.20) con un qualsiasi $H^* \geq H$, e non è necessario studiare il problema (3.6) (corrispondente a (3.20) con $H^* = H$).

OSSERVAZIONE 3.5. — La validità della relazione $w_y(x, H) \equiv 0$ (cfr. Lemma 3.6) assicura che la soluzione w di (3.6) coincide anche con la (unica) soluzione del problema:

$$(3.6bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trovare } \tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}} \text{ tale che, per ogni } k \in \tilde{\mathcal{K}}: \\ \int_{\tilde{R}} [\tilde{k}_x(k_x - \tilde{k}_x) + \tilde{k}_y(k_y - \tilde{k}_y)] dx dy \geq \int_{\tilde{R}} (\tilde{k} - k) dx dy \end{array} \right.$$

dove $\tilde{\mathcal{K}} = \{k \in H^1(R) | k \geq 0 \text{ in } R; k = g \text{ su } \partial R - \Gamma_4\}$ (notazioni (3.10)); analogamente per quanto concerne il problema (3.20). Naturalmente anche queste considerazioni possono offrire lo spunto per degli sviluppi numerici.

4. — Unicità e regolarità della soluzione debole del Problema A.

Sia $\{\varphi^1, \Omega^1, u^1\}$ una qualunque soluzione debole del Problema A; fissato ad arbitrio un numero H^* tale che:

$$(4.1) \quad H^* > \max \{\varphi^1(x) | 0 \leq x \leq a\}$$

poniamo (R^* essendo definito in (3.18); si osservi che, per la (2.1), è $\varphi^1(0) = H$ quindi $H^* > H$):

$$(4.2) \quad U^1(x, y) = \begin{cases} u^1(x, y) & \text{in } \bar{\Omega}^1 \\ y & \text{in } R^* - \bar{\Omega}^1 \end{cases}; \quad w^1(x, y) = \int_y^{H^*} [U^1(x, t) - t] dt \quad \text{in } R^*.$$

LEMMA 4.1. — Si ha, con le notazioni (3.18):

$$(4.3) \quad w^1 \in \mathcal{K}^* \cap C^0(\bar{R}^*).$$

DIM. — Dalle (2.3), (1.6), (1.7), scritte per la terna $\{\varphi^1, \Omega^1, u^1\}$ anziché per la terna $\{\varphi, \Omega, u\}$ segue ovviamente $U^1 \in C^0(\bar{R})$; quindi $w^1 \in C^0(\bar{R})$.

Sempre da (2.3), (1.6), (1.7) segue anche $U^1 \in W^{1,2}(R^*)$ ⁽³⁷⁾; ne segue, per la regolarità di ∂R^* , $U^1 \in H^1(R^*)$ (cfr. ⁽¹¹⁾); da cui, ovviamente, $w^1 \in H^1(R^*)$.

⁽³⁷⁾ Diamo un cenno di come possa essere ottenuta, ad esempio, la relazione $U^1_{\alpha} \in L^2(R^*)$: basterà mostrare che, per $\varphi \in \mathcal{D}(R^*)$, risulta (con ovvie notazioni) $\langle U^1_{\alpha}, \varphi \rangle_{R^*} = \int_{\bar{\Omega}^1} u^1_{\alpha} \varphi dx dy$.

Sempre dalle considerazioni precedenti si ottiene anche che $y \rightarrow w^1(x, y)$ è (q. ov. uguale ad) una funzione assolutamente continua di $[0, H^*]$ a valori di $H^1(0, a)$; sono perciò giustificati i passaggi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} w^1(x, 0) &= \frac{d}{dx} \int_0^{H^*} [U^1(x, t) - t] dt = \int_0^{H^*} \frac{\partial}{\partial x} [U^1(x, t) - t] dt = \\ &= \int_0^{H^*} U_x^1(x, t) dt = \int_0^{\varphi^1(x)} u_x^1(x, t) dt = \frac{h^2 - H^2}{2a} \end{aligned}$$

(si è sfruttata la (2.10) ed il fatto che in $R^* - \bar{\Omega}^1$ è $U^1(x, y) \equiv y$ quindi $U_x^1(x, y) \equiv 0$). Tale relazione esprime che su Γ_1 (notazioni (3.10)) w^1 è lineare, con pendenza $(h^2 - H^2)/2a$; poichè d'altronde è ovvia, a partire da (1.6), la relazione $w^1 = w^*$ su $\partial R^* - \Gamma_1$, ed essendo già stato visto che $w^1 \in C^0(\bar{R}^*)$, ne segue $w^1 = w^*$ su tutta ∂R^* . Infine la relazione $w^1 \geq 0$ in R^* segue ovviamente da (2.8) (scritta per la terna $\{\varphi^1, \Omega^1, u^1\}$). c.v.d.

LEMMA 4.2. - Con le notazioni introdotte (cfr. anche ⁽³⁶⁾) si ha:

$$(4.4) \quad \Delta U^1 = -D_\nu(\chi_{\Omega^1}) \text{ nel senso di } \mathcal{D}'(R^*).$$

DIM. - Sia ψ generica in $\mathcal{D}(R^*)$; si ha, con notazioni ovvie:

$$\begin{aligned} \langle \Delta U^1, \psi \rangle_{R^*} &= - \int_{R^*} (U_x^1 \psi_x + U_y^1 \psi_y) dx dy = (\text{essendo } U^1 \equiv y \text{ in } R^* - \Omega^1) = \\ &= - \int_{\Omega^1} (u_x^1 \psi_x + u_y^1 \psi_y) dx dy - \int_{R^* - \Omega^1} \psi_y dx dy = (\text{cfr. (2.4)}) = - \int_{R^* - \Omega^1} \psi_y dx dy = \\ &= - \int_{R^*} \chi_{R^* - \Omega^1} \psi_y dx dy = - \langle \chi_{R^* - \Omega^1}, \psi_y \rangle_{R^*} = \langle D_\nu \chi_{R^* - \Omega^1}, \psi \rangle_{R^*} = \langle -D_\nu \chi_{\Omega^1}, \psi \rangle. \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

LEMMA 4.3. - Si ha $\Delta w^1 = \chi_{\Omega^1}$.

In effetti sia $\{v^n\}_{n=1,2,\dots}$ una successione di elementi di $C^1(\bar{\Omega}^1)$ che converge ad u^1 in $W^{1,2}(\Omega^1)$; si avrà, per $\psi \in \mathcal{D}(R^*)$:

$$\begin{aligned} \langle U, \psi \rangle_{R^*} - \int_{\Omega^1} u_x^1 \psi dx dy &= - \int_{R^*} U^1 \psi_x dx dy - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^1} v_x^n \psi dx dy = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^1} v^n \psi_x dx dy - \int_{R^* - \Omega^1} y \psi_x dx dy - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^1} v_x^n \psi dx dy = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^1} D_x(v^n \psi) dx dy - \int_{R^* - \Omega^1} D_x(y \psi) dx dy = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial \Omega^1} v^n \psi dy - \int_{\partial(R^* - \Omega^1)} y \psi dy = 0. \end{aligned}$$

perchè $v^n(x, \varphi^1(x)) \rightarrow \varphi^1(x)$; e le altre parti di bordo non danno contributo (essendo in esse $\psi \equiv 0$)

DIM. - Da (4.4) segue $D_y(\Delta w^1 - \chi_{\Omega^1}) = \Delta D_y w^1 - D_y \chi_{\Omega^1} = \Delta(y - U^1) + \Delta U^1 = \Delta y = 0$; da cui (cfr. SCHWARTZ [19]) segue l'esistenza di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(0, a)$ tale che:

$$\Delta w^1 - \chi_{\Omega^1} = T(x) \otimes 1(y) \quad \text{in } \mathcal{D}'(R^*).$$

La scelta di H^* (cfr. (4.1)) assicura però che il primo membro è nullo in un intorno sinistro di $y = H^*$; quindi è $T = 0_{\mathcal{D}'(0, a)}$. c.v.d.

TEOREMA 4.1. - *Il Problema A ammette una ed una sola soluzione debole, che è quella data nel Teorema 3.4 (ed in particolare verifica le (2.13), (2.14)).*

DIM. - Sia $\{\varphi^1, \Omega^1, u^1\}$ una qualunque soluzione debole del Problema A; mostriamo che, con le notazioni (4.1), (4.2), w^1 coincide con la soluzione k^* di (3.20). In effetti si è già visto (cfr. (4.3)) che $w^1 \in \mathcal{K}^*$; e per ogni $k \in \mathcal{K}^*$ si ha (con notazioni e passaggi analoghi a quelli del Teorema 3.5):

$$\begin{aligned} \int_{R^*} [w_x^1(k_x - w_x^1) + w_y^1(k_y - w_y^1)] dx dy &= \langle -\Delta w^1, k - w^1 \rangle_{R^*} = \\ &= (\text{cfr. Lemma 4.3}) = \langle -\chi_{\Omega^1}, k - w^1 \rangle_{R^*} = \int_{R^*} \chi_{\Omega^1} (w^1 - k) dx dy = \\ &= \int_{\Omega^1} (w^1 - k) dx dy = \int_{R^*} (w^1 - k) dx dy - \int_{R^* - \Omega^1} (w^1 - k) dx dy \geq \int_{R^*} (w^1 - k) dx dy \end{aligned}$$

essendo, in $R^* - \Omega^1$, $w^1 \equiv 0$ e $k \geq 0$.

Ne segue, per il Teorema 3.5, $w^1 = k^* = w^*$; da cui (cfr. (3.19) ed il Lemma 4.3) $\chi_{\Omega} = \chi_{\Omega^1}$ nel senso di $\mathcal{D}'(R^*)$; ed essendo Ω ed Ω^1 aperti di tipo (2.2) con φ e φ^1 verificanti (2.1) ne segue $\Omega = \Omega^1$; da tale relazione, essendo già noto che $w^* = w^1$, segue $u = (y - w_y^*)|_{\bar{\Omega}} = (y - w_y^1)|_{\bar{\Omega}^1} = u^1$. c.v.d.

Mostriamo ora la validità di (2.12) adattando al caso in esame un ragionamento di CACCIOPOLI riportato in MIRANDA [12].

TEOREMA 4.2. - *La soluzione debole $\{\varphi, \Omega, u\}$ del Problema A è tale che la restrizione di φ all'intervallo aperto $0 < x < a$ è una funzione analitica.*

DIM. - Consideriamo la trasformazione $(x, y) \rightarrow (u, v)$ data da:

$$(4.5) \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (x, y) \in \bar{\Omega}$$

(notazioni dell'Oss. 3.2); ed osserviamo come varia la coppia (u, v) quando (x, y) descrive la frontiera $\partial\Omega$ di Ω . Con le notazioni (3.10) si ha:

$$(4.6) \quad \begin{cases} \text{quando } (x, y) \in \bar{\Gamma}_0 \text{ la coppia } (u, v) \text{ descrive un insieme } \Delta_0 \text{ che è contenuto} \\ \text{in un segmento della retta di equazione } u = H \text{ }^{(38)} \end{cases}$$

⁽³⁸⁾ La (1.6) assicura che si ha $u \equiv H$; si tratta poi di un insieme limitato perchè l'applicazione $(x, y) \rightarrow (u, v)$ è continua (cfr. Oss. 3.2). Questa stessa continuità assicura che (qui e nelle formule successive) si può ragionare sulla chiusura $\bar{\Gamma}_0$ di Γ_0 anzichè solo sull'insieme Γ_0 .

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{quando } (x, y) \in \bar{\Gamma}_1 \text{ la coppia } (u, v) \text{ descrive un insieme } \Delta_1 \text{ che è contenuto} \\ \text{in un segmento della retta di equazione } v = (H^2 - h^2)/2a \text{ }^{(39)} \end{array} \right.$$

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{quando } (x, y) \in \bar{\Gamma}_2 \text{ la coppia } (u, v) \text{ descrive un insieme } \Delta_2 \text{ che è contenuto} \\ \text{in un segmento della retta di equazione } u = h \end{array} \right.$$

(quest'ultima proprietà segue ancora da (1.6)). Poniamo ora $\gamma_1 = \{(x, \varphi(x)) | 0 < x < a\}$; $\gamma_2 = \{(a, y) | h \leq y \leq \varphi(a)\}$; si ha:

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{quando } (x, y) \text{ descrive } \gamma_1 \cup \gamma_2 \text{ nel senso delle } y \text{ crescenti, la coppia } (u, v) \\ \text{descrive un arco di curva cartesiana (v esplicitabile in funzione di } u) \text{ nel} \\ \text{senso delle } u \text{ crescenti }^{(40)}; \text{ ed in particolare per } (x, y) \in \gamma_1 \text{ è } v \equiv 0 \text{ }^{(41)}; \\ \text{indicheremo con } \delta_1 \text{ e } \delta_2 \text{ i trasformati di } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ rispettivamente.} \end{array} \right.$$

Da quanto visto, e grazie alle proprietà della trasformazione $(x, y) \rightarrow (u, v)$ viste nell'Oss. 3.2, segue che le (4.5) rappresentano conformemente Ω su una superficie di RIEMANN il cui contorno cade su $\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \delta_1 \cup \delta_2$; e tale contorno, per ben note proprietà delle trasformazioni conformi, verrà percorso in un solo verso, una o più volte. Ma le (4.6), ..., (4.9) implicano che il contorno può essere percorso al più una volta; quindi la trasformazione

$$(4.10) \quad z = x + iy \rightarrow u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

è una rappresentazione conforme di Ω su un aperto del piano $u + iv$.

Consideriamo ora la rappresentazione conforme inversa della (4.10): $u + iv \rightarrow x(u, v) + iy(u, v)$; la funzione armonica $y(u, v)$ assume sul segmento δ_1 ⁽⁴²⁾ i valori u , e si prolunga perciò analiticamente (insieme con la sua armonica coniugata $x(u, v)$) in un intorno di δ_1 ; quindi anche $u = u(x, y)$ si prolunga analiticamente in un intorno di γ_1 , e ciò assicura che la curva $y = \varphi(x)$ è analitica. c.v.d.

OSSERVAZIONE 4.1. - È ormai immediato controllare che la soluzione debole del Problema A verifica la (1.9) in senso usuale; si ha cioè

$$(4.11) \quad u_x(x, \varphi(x))\varphi'(x) - u_v(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \text{in }]0, a[$$

È anche lecito ormai derivare la relazione (1.7), ottenendo:

$$u_x(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)u_v(x, \varphi(x)) \equiv \varphi'(x) \quad \text{in }]0, a[$$

⁽³⁹⁾ Cfr. l'Oss. 3.2.

⁽⁴⁰⁾ In effetti $\gamma_1 \cup \gamma_2$ è grafico di una funzione cartesiana $x = x(y)$; la proprietà segue allora dal fatto che (cfr. (1.6), (1.7)) su $\gamma_1 \cup \gamma_2$ è $u(x, y) = y$.

⁽⁴¹⁾ Cfr. sempre l'Oss. 3.2.

⁽⁴²⁾ È ovvio che δ_1 è un segmento.

e, dal confronto tra tale relazione e (4.11) si possono esplicitare le derivate u_x ed u_y ⁽⁴³⁾ lungo la curva $y = \varphi(x)$, ottenendo:

$$(4.12) \quad u_x(x, \varphi(x)) = \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi'^2(x)}; \quad y_v(x, \varphi(x)) = \frac{\varphi'^2(x)}{1 + \varphi'^2(x)} \quad 0 < x < a.$$

OSSERVAZIONE 4.2. — A partire dalle proprietà di regolarità già note è ormai facile sviluppare i procedimenti legati al « piano odografo » ⁽⁴⁴⁾ che assicurano da un lato la validità della (1.14), cioè:

$$(4.13) \quad \varphi(a) > h$$

e d'altro lato la validità della relazione:

$$(4.14) \quad u \notin W^{1,\infty}(\Omega).$$

In effetti la trasformazione (derivata della $x + iy \rightarrow u + iv$ considerata nel Teorema 4.2) definita da:

$$z = x + iy \rightarrow p + iq \quad \text{con } p = u_x(x, y), \quad q = -u_y(x, y)$$

trasforma le curve Γ_0 , Γ_1 e Γ_2 (notazioni (3.10)) in curve il cui sostegno è contenuto nell'asse $\{q = 0\}$ (cfr. (1.6) e (1.8)); essa trasforma inoltre la curva $\{x + i\varphi(x) | 0 < x < a\}$ in una curva il cui sostegno è contenuto nella semicirconferenza: $\{(p, q) | p^2 + q^2 + q = 0; p \leq 0\}$ ⁽⁴⁵⁾; infine la parte di $\partial\Omega$ data da $\{a + iy | h < y < \varphi(a)\}$ (parte che risulta vuota se e solo se (4.13) è falsa) è trasformata in una curva il cui sostegno è contenuto nella retta $\{(p, q) | q = -1\}$ (cfr. (1.6)). Ne segue da un lato la validità di (4.13) ⁽⁴⁶⁾; e d'altro lato si ha che u_x non può mantenersi limitata in un intorno del punto (a, h) (che ha per corrispondente il punto improprio del piano $p + iq$).

⁽⁴³⁾ Che, a meno dei segni, si interpretano fisicamente come le componenti della velocità del fluido lungo la « curva di pelo libero ».

⁽⁴⁴⁾ Procedimenti usuali nella trattazione numerica del problema; cfr. ad es. POLUBARINOVA-KOCHINA [16].

⁽⁴⁵⁾ Grazie a (4.12); si deve avere $p \leq 0$ per la decrescenza di φ .

⁽⁴⁶⁾ Se fosse $\varphi(a) = h$ il trasformato di $\partial\Omega$ non potrebbe essere bordo del trasformato di Ω .

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. R. BRÉZIS - G. STAMPACCHIA, *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), pp. 153-180.
- [2] V. COMINCIOLI - L. GUERRI - G. VOLPI, *Analisi numerica di un problema di frontiera libera connesso col moto di un fluido attraverso un mezzo poroso*, Pubblicazione del Laboratorio di Analisi Numerica del C.N.R. di Pavia.

-
- [3] CORSO C.I.M.E. 1971, *Constructive aspects of functional analysis* (in particolare le lezioni di R. GLOWINSKI, di J. L. LIONS, di U. MOSCO), volume in corso di stampa presso la Casa ed. Cremonese.
 - [4] C. W. CRYER, *On the approximate solution of free boundary problems using finite differences*, Journal A.C.M., **17** (1970), n. 3, pp. 397-411.
 - [5] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche di Mat., **7** (1958), pp. 102-137 ed **8** (1959), pp. 24-51.
 - [6] R. GLOWINSKI - J. L. LIONS, R. TRÉMOLIÈRES, *Résolution numérique des inéquations de la Mécanique et de la Physique*, Libro di prossima pubblicazione presso la Casa Ed. Dunod.
 - [7] P. GRISVARD, *Equations différentielles abstraites*, Annales de l'Ecole Norm. Sup. Paris, serie IV, **2** (1969), pp. 311-395.
 - [8] M. E. HARR, *Groundwater and seepage*, Mc Graw-Hill, New York, 1962.
 - [9] H. LEVY - G. STAMPACCHIA, *On the regularity of the solution of a variational inequality*, Comm. P.A.M., **22** (1969), pp. 153-188.
 - [10] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod e Gauthier-Villars, Parigi, 1969.
 - [11] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, vol. I, Dunod, Parigi, 1968.
 - [12] C. MIRANDA, *Su un problema di frontiera libera*, Symposia Math., **2** (1968), pp. 71-83.
 - [13] M. MUSKAT, *The flow of homogeneous fluids through porous media*, Mc Graw-Hill, New York, 1937.
 - [14] S. T. NEUMAN - P. A. WITHERSPOON, *Finite element method of analysing steady seepage with a free surface*, Water Resources Research, **6** (1970), n. 3, pp. 889-897.
 - [15] S. T. NEUMAN - P. A. WITHERSPOON, *Variational principles for confined and unconfined flow of groundwater*, Water Resources Research, **6** (1970), n. 5, pp. 1376-1382.
 - [16] T. YA. POLUBARINOVA-KOCHINA, *The Theory of Groundwater Movement* (traduzione dal russo), Princeton University Press, 1962.
 - [17] G. PRODI, *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi*, Rend. Sem. Mat. Padova, **26** (1956), pp. 36-60.
 - [18] R. V. SOUTWELL, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Clarendon Press, Oxford, 1946.
 - [19] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
 - [20] G. STAMPACCHIA, *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, C. R. Acad. Sc. Paris, **258** (1964), pp. 4413-4416.
 - [21] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Annales Inst. Fourier, **15** (1965), n. 1, pp. 189-258.
-