Problemi di curvatura su di una varietà quasi hermitiana.

G. B. RIZZA (a Parma) (*) (**)

Sunto. — Su di una varietà quasi hermitiana V , la considerazione di alcune medie di curvature semplici e miste, relative a convenienti sistemi di 2-spazi associati ad un 2-spazio α , dà informazioni sulla curvatura semplice K_α , sulla media $\frac{1}{2}(K_\alpha + K_{\tilde{\alpha}})$ e sulla curvatura mista $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}$ ($\tilde{\alpha} = J\alpha$). Due delle medie accennate riescono nulle; le altre danno luogo a relazioni di dipendenza lineare. Considerate per la varietà V ipotesi di isotropia in media e di J -isotropia si ottengono teoremi del tipo di Schur. Altri risultati si stabiliscono nel caso kähleriano.

Summary. — Let V be an almost Hermite space, α a tangent 2-dimensional space of V ; five systems of tangent 2-spaces of V are considered, suitably related to α . The sectional curvature K_α , the mean value $\frac{1}{2}(K_\alpha + K_{\tilde{\alpha}})$, and the bisectional curvature $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}$ ($\tilde{\alpha} = J\alpha$) are expressed in terms of mean values of sectional and bisectional curvatures, evaluated over the above mentioned systems. Two of the mean values vanish; linear relationships hold among the other ones. Schur-like theorems are proven under the assumption that V be isotropic in mean or J -isotropic. Further results are obtained for the case that V be a Kähler space.

1. — Introduzione.

Sulle curvature delle sezioni 2-dimensionali delle varietà kähleriane sono noti nella letteratura diversi risultati ⁽¹⁾. Questo lavoro è uno studio delle curvature ora accennate nel caso più generale delle varietà quasi hermitiane.

Ai risultati si perviene sviluppando una idea, rivelatasi già promettente nel caso kähleriano ⁽²⁾, quella cioè di associare al 2-spazio α in considerazione opportuni sistemi di 2-spazi caratteristici o a prodotto hermitiano reale.

Precisamente, si considerano qui i sistemi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$ di 2-spazi caratteristici ⁽³⁾ ed i sistemi $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$ di 2-spazi a prodotto hermitiano reale, convenientemente parametrizzati (nn. 4, 5, 6, 7, 8), e si valutano le medie μ_Σ e M_Σ delle curvature semplici e miste dei 2-spazi dei sistemi Σ . È utile introdurre anche la media m_α delle curvature miste $\chi_{\alpha\omega}$ al variare di ω in Σ_α .

(*) Entrata in Redazione il 25 novembre 1971.

(**) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale Strutture Algebriche, Geometriche e loro Applicazioni.

I primi risultati sono stati annunciati in una riunione di Gruppo a Bologna (dicembre 1970) e in una conferenza tenuta all'Ist. Mat. Univ. Perugia (aprile 1971).

⁽¹⁾ Si vedano p. es. i nn. [4], [11], [8] della bibliografia posta in fine.

⁽²⁾ G. B. RIZZA [8], n. 3, p. 84.

⁽³⁾ Il primo di questi ha un ruolo importante anche in altri miei lavori ([6], [8]).

Ciò premesso, le medie $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}$, $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}^\Delta$ sono nulle (teoremi $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, nn. 13, 14). Le altre medie relative a $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha^\Delta$ si esprimono linearmente nelle medie μ , M , m relative ai sistemi ∞^1 , Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$ e nelle curvature semplici e miste K_α , $K_{\tilde{\alpha}}$, $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}$, essendo $\tilde{\alpha}$ il 2-spazio che corrisponde ad α nell'isomorfismo fondamentale J della struttura quasi complessa (nn. 12, 13, 14).

Seguono molti risultati. La curvatura mista $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}$ è combinazione lineare delle medie μ , M relative ai sistemi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$ (teorema $\mathbf{T}_4$ n. 17). Teoremi dello stesso tipo, che fanno intervenire anche i sistemi $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha^\Delta$, sussistono per la curvatura semplice K_α e per la media $\frac{1}{2}(K_\alpha + K_{\tilde{\alpha}})$ (teoremi $\mathbf{T}_5$, $\mathbf{T}_6$, n. 17).

Si prova inoltre che le medie μ , M relative ai sistemi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$ sono linearmente dipendenti, i coefficienti essendo funzioni della deviazione caratteristica di α (teorema $\mathbf{T}_3$, n. 17). Altre relazioni di dipendenza lineare tra medie sono indicate al n. 18.

Tutte le medie considerate si possono esprimere mediante le curvature (semplici e miste) relative ad α , $\tilde{\alpha}$ e ad un numero finito di 2-spazi di Σ_α e $\hat{\Sigma}_\alpha$ (n. 15) ed hanno natura J -invariante ad eccezione di m_α e di $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$ (n. 16).

Il n. 19 è dedicato ai casi particolari di α caratteristico ovvero a prodotto hermitiano reale.

Nelle ipotesi di isotropia in media e di J -isotropia in un punto della varietà (qui considerate per la prima volta), si stabiliscono alcuni risultati (teoremi $\mathbf{T}_{11}$, $\mathbf{T}_{12}$, $\mathbf{T}_{13}$; n. 20), dai quali derivano teoremi del tipo di SCHUR (teoremi $\mathbf{T}_{14}$, $\mathbf{T}_{15}$; corollario $\mathbf{C}_1$; n. 22).

Infine, nel caso particolare delle varietà kähleriane, si ottengono altri risultati (teoremi $\mathbf{T}_{16}$, $\mathbf{T}_{17}$, $\mathbf{T}_{18}$, $\mathbf{T}_{19}$; n. 23) e si ritrovano alcuni teoremi noti. Sia l'isotropia in media che la J -isotropia si riducono in questo caso all'isotropia ordinaria.

2. - Struttura quasi complessa. 2-spazi caratteristici.

Sia V una varietà a struttura quasi complessa ⁽⁴⁾, $\dim_{\mathbf{R}} V = 2n$ ($n \geq 2$), $\text{cl}_{\mathbf{R}} V = r$ ($r \geq 3$), x un punto di V , τ lo spazio vettoriale tangente ad x in V , τ_* lo spazio vettoriale duale.

Indicato con $\mathcal{K}$ il campo tensoriale misto, $\text{cl}_{\mathbf{R}} \mathcal{K} = s$ ($1 \leq s \leq r-1$), che determina la struttura di V , sia $h \in \tau_* \otimes \tau$ il corrispondente tensore nel punto x di V e J l'isomorfismo anti-involutorio definito in τ dalla struttura quasi complessa. Se u, v, w sono vettori di τ , si pone $\tilde{u} = Ju$, $\tilde{v} = Jv$, $\tilde{w} = Jw, \dots$

È immediato estendere J ai bivettori, ponendo $J(u \wedge v) = \tilde{u} \wedge \tilde{v}$. Sui bivettori J ha carattere involutorio.

Sia ora α il 2-spazio vettoriale di τ definito dal bivettore non nullo $u \wedge v$. Si indica con $\tilde{\alpha} = J\alpha$ il 2-spazio vettoriale definito da $\tilde{u} \wedge \tilde{v}$ ⁽⁵⁾.

⁽⁴⁾ Per le nozioni fondamentali sulle varietà quasi complesse si veda p. es. K. YANO [11], ch. 5; S. KOBAYASHI - K. NOMIZU [4], II, ch. 9, n. 2. Vedi anche G. B. RIZZA [9], n. 2.

⁽⁵⁾ È utile talora indicare α semplicemente con uv . $\tilde{\alpha}$ può quindi indicarsi con $\tilde{u}\tilde{v}$.

Ciò premesso un 2-spazio vettoriale α di τ si dice *caratteristico*, se e solo se risulta $\alpha = \tilde{\alpha}$ ⁽⁶⁾. Ogni vettore non nullo u di τ appartiene ad uno e ad un solo 2-spazio caratteristico; precisamente appartiene al 2-spazio α definito dal bivettore $u \wedge \tilde{u}$.

Più in generale, utilizzando multivettori, si perviene alla definizione di k -spazi caratteristici ($2 \leq k \leq 2n$).

3. - Struttura quasi-hermitiana. 2-spazi p.h.r.

Si assume ora che V sia dotata di struttura quasi hermitiana di classe non inferiore a 2 ⁽⁷⁾. V è quindi una varietà riemanniana e la metrica g di V ($2 \leq \text{cl } g \leq r-1$) _R è adattata alla struttura quasi complessa. Risulta cioè

$$(1) \quad u \cdot v = \tilde{u} \cdot \tilde{v} \quad u, v \in \tau$$

il punto denotando il prodotto scalare. In particolare i vettori $u, \tilde{u}$ sono ortogonali. Si definisce poi il *prodotto hermitiano* ⁽⁸⁾

$$(2) \quad u * v = \frac{1}{2}(u \cdot v + i(u \cdot \tilde{v})).$$

Intervengono nel seguito i 2-spazi vettoriali di τ a *prodotto hermitiano reale* (brevemente *2-spazi p.h.r.*). Essi sono individuati dai bivettori non nulli $u \wedge v$, soddisfacenti alla condizione $u \cdot \tilde{v} = 0$ ⁽⁹⁾.

Convieni ricordare che, condizione necessaria e sufficiente perchè α sia p.h.r. è che α ed $\tilde{\alpha}$ siano *ortogonali*.

4. - Sistema Σ_α .

Sia α un 2-spazio non caratteristico ($\alpha \neq \tilde{\alpha}$). Si denoti con Σ_α il sistema ∞^1 dei 2-spazi caratteristici aventi un 1-spazio in comune con α ⁽¹⁰⁾.

Se u, v sono vettori unitari e ortogonali di α si considerino i vettori

$$(3) \quad z = u \cos \theta + v \sin \theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

⁽⁶⁾ Il termine « 2-spazio vettoriale caratteristico » equivale alla locuzione inglese « holomorphic section ».

⁽⁷⁾ Sulle varietà quasi hermitiane si veda p. es. K. YANO [11], ch. 9; S. KOBAYASHI - K. NOMIZU [4], ch. 9, n. 4.

⁽⁸⁾ Sulle metriche hermitiane, euclidee, simplettiche vedi E. MARTINELLI [5].

⁽⁹⁾ G. B. RIZZA [6], p. 669; [7], p. 5. I risultati di questi lavori hanno carattere puntuale; essi valgono quindi anche nel caso quasi hermitiano (vedi [7], nota ⁽³⁾, p. 4). Uno studio generale sugli spazi p.h.r. si trova nel lavoro [2] di M. BRUNI.

⁽¹⁰⁾ G. B. RIZZA [6], p. 664.

I bivettori $\alpha \wedge \tilde{\alpha}$ individuano i 2-spazi di Σ_α . È noto che l'angolo che i 2-spazi ω di Σ_α formano con α è *costante*. Quest'angolo prende nome di *deviazione caratteristica* di α e si denota con δ_α : Risulta

$$(4) \quad \cos \delta_\alpha = \tilde{u} \cdot v.$$

Previo eventuale scambio dei vettori u, v , si può supporre $0 \leq \delta_\alpha \leq \pi/2$. Risulta allora in particolare $\delta_\alpha = 0$, $\delta_\alpha = \pi/2$, se e solo se α è caratteristico, a prodotto hermitiano reale, rispettivamente.

5. - Sistema $\dot{\Sigma}_\alpha$.

Se α non è caratteristico ($\alpha \neq \tilde{\alpha}$), si consideri lo spazio vettoriale A generato da α e $\tilde{\alpha}$. A è un 4-spazio vettoriale caratteristico ⁽¹¹⁾.

Ciò premesso si consideri il sistema $\dot{\Sigma}_\alpha$ costituito dagli ∞^1 2-spazi a prodotto hermitiano reale, aventi un 1-spazio in comune con α ed un 1-spazio in comune con $\tilde{\alpha}$.

I 2-spazi di $\dot{\Sigma}_\alpha$ sono definiti dai bivettori $r \wedge \tilde{s}$ con

$$(5) \quad r = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \quad \tilde{s} = -\tilde{u} \sin \varphi + \tilde{v} \cos \varphi,$$

e $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Infatti il 2-spazio ϱ individuato da $r \wedge \tilde{s}$ ha un 1-spazio in comune sia con α che con $\tilde{\alpha}$ (definiti da r e da $\tilde{s}$ rispettivamente). D'altronde sia r che $\tilde{s}$ sono ortogonali ai vettori $\tilde{r}$ ed s ; dunque ϱ è ortogonale a $\tilde{\varrho}$ e pertanto è un 2-spazio p.h.r. (n. 3). In definitiva risulta $\varrho \in \dot{\Sigma}_\alpha$.

Inversamente, sia ϱ un 2-spazio di $\dot{\Sigma}_\alpha$ ed

$$r = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \quad \tilde{t} = \tilde{u} \cos \psi + \tilde{v} \sin \psi,$$

due vettori unitari di ϱ appartenenti ad α e ad $\tilde{\alpha}$ rispettivamente. Poichè ϱ è p.h.r. risulta $r \cdot \tilde{t} = 0$ (n. 3). Ne segue $\cos(\varphi - \psi) = 0$ da cui $\tilde{t} = \pm \tilde{s}$. In conclusione ϱ può essere definito dal bivettore $r \wedge \tilde{s}$, con $r, \tilde{s}$ dati dalla (5).

6. - Sistema $\dot{\Sigma}_\alpha^0$.

Sempre nell'ipotesi $\alpha \neq \tilde{\alpha}$, si consideri il sistema $\dot{\Sigma}_\alpha^0$, costituito dagli ∞^2 2-spazi caratteristici del 4-spazio caratteristico A definito da α e $\tilde{\alpha}$ ⁽¹²⁾.

⁽¹¹⁾ È ovvio che i vettori $u, v, \tilde{u}, \tilde{v}$ generano A ; di più essi risultano indipendenti. Infatti, i bivettori $u \wedge \tilde{u}, v \wedge \tilde{v}$ danno luogo a 2-spazi caratteristici e questi non hanno 1-spazi in comune, altrimenti, in base ad una osservazione del n. 2, coinciderebbero; ma allora sarebbe $\alpha = \tilde{\alpha}$.

⁽¹²⁾ Ogni 2p-spazio caratteristico ω ($p \in N$) può riguardarsi come un p -spazio vettoriale su C , ponendo $(a' + ia'')u = a'u + a''\tilde{u}$ ($a', a'' \in R; u \in \omega$).

È utile per il seguito l'osservazione

O₁ — *Gli elementi di $\dot{\Sigma}_\alpha$ sono i 2-spazi caratteristici associati, nel senso indicato al n. 4, ai 2-spazi p.h.r. di $\dot{\Sigma}_\alpha$. Cioè*

$$\dot{\Sigma}_\alpha = \{\omega \in \Sigma_\varrho : \varrho \in \dot{\Sigma}_\alpha\}.$$

Scelto arbitrariamente ϱ in $\dot{\Sigma}_\alpha$, dalla (5) segue subito che ϱ e $\bar{\varrho}$ generano A ; perciò ogni $\omega \in \Sigma_\varrho$ appartiene ad A e quindi a $\dot{\Sigma}_\alpha$.

Inversamente occorre provare che ogni 2-spazio caratteristico ω' di $\dot{\Sigma}_\alpha$ può riguardarsi come un 2-spazio ω associato ad un 2-spazio ϱ di $\dot{\Sigma}_\alpha$.

Si noti che, in virtù di una osservazione del n. 2, l'elemento generico ω' di $\dot{\Sigma}_\alpha$ può individuarsi assegnando ad arbitrio un vettore unitario x di A . Sia cioè

$$(6) \quad x = a_1 u + a_2 \tilde{u} + a_3 v + a_4 \tilde{v} \quad (a_j \in \mathbf{R})$$

con

$$(7) \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) \cos \delta_\alpha = 1$$

D'altra parte, sia x' il più generale vettore unitario appartenente ad un 2-spazio caratteristico ω di Σ_ϱ , con ϱ arbitrario 2-spazio p.h.r. di $\dot{\Sigma}_\alpha$. Risulta

$$(8) \quad x' = w' \cos \tau + \tilde{w}' \sin \tau$$

dove

$$(9) \quad w' = \lambda r + \mu \tilde{s},$$

con $r, \tilde{s}$ dati dalla (5) e λ, μ soddisfacenti alla condizione

$$(10) \quad \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu \cos \delta_\alpha = 1.$$

Ciò premesso, se, fissato arbitrariamente un vettore unitario x di A , esiste un vettore x' del tipo ora indicato coincidente con x , in base alla osservazione del n. 2 sopra richiamata, risulta $\omega' = \omega$ e ciò prova quanto si voleva.

Dalle (6), (8) segue subito che la condizione $x = x'$ si traduce nel sistema

$$(11) \quad \begin{aligned} a_1 &= \lambda \cos \varphi \cos \tau + \mu \sin \varphi \sin \tau \\ a_2 &= -\mu \sin \varphi \cos \tau + \lambda \cos \varphi \sin \tau \\ a_3 &= \lambda \sin \varphi \cos \tau - \mu \cos \varphi \sin \tau \\ a_4 &= \mu \cos \varphi \cos \tau + \lambda \sin \varphi \sin \tau \end{aligned}$$

nelle variabili $\lambda, \mu, \varphi, \tau$.

Dal sistema (11) discendono le equazioni

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 &= \lambda^2 + \mu^2, & a_1 a_4 - a_2 a_3 &= \lambda \mu, \\ \frac{a_2 + a_3}{a_1 - a_4} &= \operatorname{tg}(\varphi + \tau), & \frac{a_3 - a_2}{a_1 + a_4} &= \operatorname{tg}(\varphi - \tau), \end{aligned}$$

che permettono di ricavare λ , μ , φ , τ .

Dalla condizione (7) segue naturalmente la (10).

Si verifica infine che i valori trovati costituiscono una soluzione del sistema

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 &= (\lambda + \mu) \cos(\varphi - \tau) \\ a_1 - a_4 &= (\lambda - \mu) \cos(\varphi + \tau) \\ a_2 + a_3 &= (\lambda - \mu) \sin(\varphi + \tau) \\ a_3 - a_2 &= (\lambda + \mu) \sin(\varphi - \tau) \end{aligned}$$

e quindi del sistema (11).

È utile per il seguito notare che la condizione (10) equivale ad assumere

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \Theta}{\sin \delta_\alpha/2} + \frac{\cos \Theta}{\cos \delta_\alpha/2} \right) = (\sin \delta_\alpha)^{-1} \sin \left(\Theta + \frac{\delta_\alpha}{2} \right), \\ \mu &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \Theta}{\sin \delta_\alpha/2} - \frac{\cos \Theta}{\cos \delta_\alpha/2} \right) = (\sin \delta_\alpha)^{-1} \sin \left(\Theta - \frac{\delta_\alpha}{2} \right) \quad (13). \end{aligned}$$

In conclusione i 2-spazi di $\hat{\Sigma}_\alpha$ sono definiti dai bivettori $w' \wedge \tilde{w}'$, con

$$(13) \quad w' = (\sin \delta_\alpha)^{-1} \left(r \sin \left(\Theta + \frac{\delta_\alpha}{2} \right) + \tilde{s} \sin \left(\Theta - \frac{\delta_\alpha}{2} \right) \right)$$

ed r , $\tilde{s}$ dati dalla (5).

7. - Sistema $\hat{\Sigma}_\alpha$.

Sia α un qualunque 2-spazio vettoriale di τ , non caratteristico ($\alpha \neq \tilde{\alpha}$). Si consideri il sistema $\hat{\Sigma}_\alpha$, costituito dagli ∞^2 2-spazi p.h.r. di A , aventi in comune con α un 1-spazio.

È utile osservare che 2-spazi di $\hat{\Sigma}_\alpha$ sono individuati dai bivettori $r \wedge y$, con

$$(14) \quad y = (\operatorname{tg} \delta_\alpha)^{-1} (r \cos \psi - \tilde{r} \sin \psi) + (\sin \delta_\alpha)^{-1} (s \sin \psi + \tilde{s} \cos \psi),$$

ed r , $\tilde{s}$ dati da (5).

(13) Interpretata la (10) come equazione di una ellisse, basta operare la riduzione a forma canonica per ottenere la (12).

Invero è immediato riconoscere che i vettori $r, s, \tilde{r}, \tilde{s}$ come $u, v, \tilde{u}, \tilde{v}$, costituiscono una base in A (n. 5).

Ciò premesso, i 2-spazi p.h.r. di A , aventi in comune con α l'1-spazio definito da r , sono individuati dai bivettori $r \wedge y$ con $y = b_1 r + b_2 \tilde{r} + b_3 s + b_4 \tilde{s}$ soddisfacenti alle condizioni

$$y \cdot y = 1, \quad r \cdot y = 0, \quad r \cdot \tilde{y} = 0.$$

Queste si traducono in

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 - 2(b_1 b_4 - b_2 b_3) \cos \delta_\alpha = 1,$$

$$b_1 = b_4 \cos \delta_\alpha, \quad b_2 = -b_3 \cos \delta_\alpha.$$

Dalle ultime due, sostituendo nella precedente, si trae

$$(b_3^2 + b_4^2) \sin^2 \delta_\alpha = 1$$

onde può scegliersi

$$b_3 = (\sin \delta_\alpha)^{-1} \sin \psi, \quad b_4 = (\sin \delta_\alpha)^{-1} \cos \psi,$$

e quindi

$$b_1 = (\operatorname{tg} \delta_\alpha)^{-1} \cos \psi, \quad b_2 = -(\operatorname{tg} \delta_\alpha)^{-1} \sin \psi.$$

Si perviene così alla (14).

8. - Sistema $\hat{\Sigma}_\alpha$.

Si consideri ora, sempre nell'ipotesi $\alpha \neq \tilde{\alpha}$, il sistema $\hat{\Sigma}_\alpha$, costituito dai 2-spazi a prodotto hermitiano reale di A . Gli elementi di $\hat{\Sigma}_\alpha$ sono ∞^3 . Invero, rappresentando A come spazio affine, le giaciture dei piani per l'origine corrispondenti ai 2-spazi di $\hat{\Sigma}_\alpha$ costituiscono un complesso lineare non speciale in uno spazio proiettivo di dimensione 3.

Da un risultato generale di M. BRUNI ⁽¹⁴⁾ risulta che i 2-spazi di $\hat{\Sigma}_\alpha$ si possono ottenere a partire dalle coppie di 2-spazi caratteristici di A ortogonali.

Precisamente, se ω_1, ω_2 sono 2-spazi di $\hat{\Sigma}_\alpha$ ortogonali, risultano p.h.r. i 2-spazi definiti dai bivettori $x_1 \wedge x_2$ con $x_j \in \omega_j$. Al variare della coppia ortogonale ω_1, ω_2 in A , si ottengono tutti i 2-spazi di $\hat{\Sigma}_\alpha$.

Ciò premesso, considerati i vettori $r_j, \tilde{s}_j$ ottenuti dalla (5) del n. 5 per $\varphi = \varphi_j$,

⁽¹⁴⁾ M. BRUNI [2], p. 283.

a norma dell'osservazione al termine del n. 6, i bivettori $w_1 \wedge \tilde{w}_1$, $w_2 \wedge \tilde{w}_2$ con

$$(15) \quad w_j = (\sin \delta_\alpha)^{-1} \left(r_j \sin \left(\Theta_j + \frac{\delta_\alpha}{2} \right) + \tilde{s}_j \sin \left(\Theta_j - \frac{\delta_\alpha}{2} \right) \right),$$

definiscono una coppia di 2-spazi caratteristici ω_1 , ω_2 in A .

La condizione di ortogonalità tra ω_1 ed ω_2 si traduce immediatamente nella

$$(16) \quad w_1 \cdot w_2 = w_1 \cdot \tilde{w}_2 = 0$$

Tenuto conto che

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= \tilde{s}_1 \cdot \tilde{s}_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2); & r_1 \cdot \tilde{s}_2 &= \tilde{s}_1 \cdot r_2 = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \delta_\alpha, \\ r_1 \cdot s_2 &= -\tilde{s}_1 \cdot \tilde{r}_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2); & r_1 \cdot \tilde{r}_2 &= -\tilde{s}_1 \cdot s_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \delta_\alpha. \end{aligned}$$

Si riconosce con calcolo diretto che la (16) equivale a

$$(17) \quad \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\Theta_1 - \Theta_2) = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\Theta_1 + \Theta_2) = 0.$$

Non è difficile ormai concludere che le ∞^2 coppie di 2-spazi caratteristici *ortogonali* di A si ottengono quando i parametri φ_1 , φ_2 , Θ_1 , Θ_2 soddisfano alla *condizione*

$$(18') \quad \varphi_1, \varphi_2 \text{ arbitrari}, \quad \Theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \Theta_2 = 0,$$

ovvero alla *condizione*

$$(18'') \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \Theta_1 = \Theta_2 + \frac{\pi}{2}.$$

Posto infine

$$(19) \quad x_j = w_j \cos \tau_j + \tilde{w}_j \sin \tau_j,$$

con w_1 , w_2 soddisfacenti ad una delle condizioni (18), in virtù di una osservazione precedente i bivettori $x_1 \wedge x_2$ definiscono i 2-spazi di $\hat{\Sigma}_\alpha$, cioè i 2-spazi p.h.r. di A .

Convien ancora notare che, nella costruzione indicata, ogni 2-spazio p.h.r. di $\hat{\Sigma}_\alpha$ viene ottenuto ∞^1 volte, in corrispondenza cioè alle ∞^1 sue basi ortonormali.

9. - Curvatura semplice e mista.

Convien ora ricordare le definizioni di curvatura (semplice e mista relative ai 2-spazi di τ ⁽¹⁵⁾).

⁽¹⁵⁾ La nozione di curvatura semplice è classica (vedi p. es. J. A. SCHOUTEN [10], p. 153); quella di curvatura mista è dovuta a E. BOMPIANI ([1], p. 130). I termini inglesi sono rispettivamente « sectional, bisectonal curvatures ».

Siano α, β due 2-spazi di τ , definiti rispettivamente dai bivettori $u \wedge v$ ed $x \wedge y$ e si denoti con $R \in \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau_*$ il tensore di curvatura di RIEMANN nel punto x di V . Ciò premesso, la curvatura di α e la curvatura mista di α e β sono date rispettivamente da

$$(20) \quad K_\alpha = - \frac{R(u, v, u, v)}{\text{mis}^2 u \text{mis}^2 v \sin^2 uv}$$

$$(21) \quad \chi_{\alpha\beta} = - \frac{R(u, v, x, y)}{\text{mis} u \text{mis} v \text{mis} x \text{mis} y \sin uv \sin xy}$$

dove $\text{mis} w = \sqrt[+]{w \cdot w}$.

Le definizioni (20), (21) di curvatura (semplice e mista) dipendono solo dai 2-spazi in considerazione e non dalla scelta di una base in essi. Sono tuttavia utili nel seguito notazioni del tipo K_{uv} e $\chi_{uv,xy}$ per indicare rispettivamente K_α e $\chi_{\alpha\beta}$.

Se in α e β si assumono basi ortonormali, le (20), (21) divengono semplicemente

$$(22) \quad K_\alpha = - R(u, v, u, v),$$

$$(23) \quad \chi_{\alpha\beta} = - R(u, v, x, y).$$

È pure ovvio che $\chi_{\alpha\alpha} = K_\alpha$.

In particolare, quando i 2-spazi α e β sono caratteristici (n. 2), si parla di *curvatura caratteristica (semplice e mista)* ⁽¹⁶⁾.

Convieni per il seguito segnalare la *relazione*

$$(24) \quad \chi_{\alpha\bar{\alpha}} = \chi_{u\bar{u},v\bar{v}} - \chi_{u\bar{v},v\bar{u}} \sin^2 \delta_\alpha,$$

dove u, v è una base ortonormale di a . Essa deriva direttamente dalla *prima identità* di BIANCHI per il tensore R ⁽¹⁷⁾, tenendo presenti le definizioni (20), (21) e la (4) del n. 4.

Infine, sia Σ uno qualunque dei sistemi di 2-spazi introdotti ai n. 4, 5, 6, 7, 8. Si denotino, rispettivamente, con μ_Σ e con M_Σ le medie (in relazione alla parametrizzazione di Σ indicata) delle curvature semplici K_α e miste $\chi_{\alpha\beta}$ al variare dei 2-spazi α e β in Σ .

I successivi numeri 10, 11, 12, 13, 14 sono dedicati alla valutazione di queste medie.

10. - Medie μ_{Σ_α} e M_{Σ_α} .

Si procede anzitutto alla valutazione delle medie delle curvature caratteristiche (semplici e miste) relative al sistema Σ_α del n. 4.

⁽¹⁶⁾ Per la nozione di curvatura caratteristica (in inglese «holomorphic sectional curvatures») si veda p. es. K. YANO - S. BOCHNER [12], p. 127. La nozione di curvatura caratteristica mista (in inglese «holomorphic bisectional curvatures») è stata introdotta e utilizzata per la prima volta nel mio lavoro [8] del 1959. Ciò sembra essere sfuggito ad alcuni Autori (vedi p. es. S. I. GOLDBERG - S. KOBAYASHI [3], p. 226).

⁽¹⁷⁾ Vedi p. es. K. NOMIZU - S. KOBAYASHI [4], I, pp. 198-201.

Siano z_1, z_2 i vettori ottenuti ponendo nella (3) $\theta = \theta_1, \theta_2$ rispettivamente ed ω_1, ω_2 i 2-spazi di Σ_α definiti dai bivettori $z_1 \wedge \tilde{z}_1, z_2 \wedge \tilde{z}_2$. Tenuta presente la (22) e le classiche identità relative al tensore di RIEMANN R ⁽¹⁸⁾, si ha

$$\begin{aligned}
 -\chi_{\omega_1\omega_2} = R(z_1\tilde{z}_1z_2\tilde{z}_2) = & \{R(u\tilde{u}u\tilde{u})\cos^2\theta_2 + R(u\tilde{u}v\tilde{v})\sin^2\theta_2\}\cos^2\theta_1 \\
 & + \{R(u\tilde{u}u\tilde{v}) + R(u\tilde{u}v\tilde{u})\}\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos\theta_1\cos\theta_2 \\
 & + \frac{1}{4}\{R(u\tilde{v}u\tilde{v}) + 2R(u\tilde{v}v\tilde{u}) + R(v\tilde{u}v\tilde{u})\}\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2 \\
 & + \{R(v\tilde{v}v\tilde{u}) + R(v\tilde{v}u\tilde{v})\}\sin(\theta_1 + \theta_2)\sin\theta_1\sin\theta_2 \\
 & + \{R(v\tilde{v}u\tilde{u})\cos^2\theta_2 + R(v\tilde{v}v\tilde{v})\sin^2\theta_2\}\sin^2\theta_1.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Ciò premesso, integrando $\chi_{\omega_1\omega_2}$ da 0 a 2π rispetto alle variabili θ_1 e θ_2 e dividendo per $(2\pi)^2$ si ottiene subito la media delle curvatures miste di Σ_α

$$M_{\Sigma_\alpha} = -\frac{1}{4}\{R(u\tilde{u}u\tilde{u}) + 2R(u\tilde{u}v\tilde{v}) + R(v\tilde{v}v\tilde{v})\}.$$

Si consideri ora in particolare il caso $\theta_1 = \theta_2 = \theta$; risulta allora $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ (n. 4) e $\chi_{\omega_1\omega_2} = K_\omega$ (n. 9). Pertanto, ponendo nella (25) $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, integrando da 0 a 2π rispetto a θ e dividendo per 2π , si ottiene la media delle curvatures semplici di Σ_α

$$\begin{aligned}
 \mu_{\Sigma_\alpha} = & -\frac{1}{8}\{3R(u\tilde{u}u\tilde{u}) + 2R(u\tilde{u}v\tilde{v}) + 3R(v\tilde{v}v\tilde{v})\} \\
 & -\frac{1}{8}\{R(u\tilde{v}u\tilde{v}) + 2R(u\tilde{v}v\tilde{u}) + R(v\tilde{u}v\tilde{u})\}.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Tenuto conto delle (20), (21) e della uguaglianza

$$\sin^2 u\tilde{v} = \sin u\tilde{v} \sin v\tilde{u} = \sin^2 v\tilde{u} = \sin^2 \delta_\alpha \text{ }^{(19)},$$

le medie μ_{Σ_α} e M_{Σ_α} delle curvatures semplici e miste dei 2-spazi di Σ_α possono esprimersi in modo semplice mediante curvatures di 2-spazi particolari; precisamente sussistono le relazioni

$$\mu_{\Sigma_\alpha} = \frac{1}{8}(3K_{u\tilde{u}} + 2\chi_{u\tilde{u},v\tilde{v}} + 3K_{v\tilde{v}}) + \frac{1}{8}(K_{u\tilde{v}} + 2\chi_{u\tilde{v},v\tilde{u}} + K_{v\tilde{u}})\sin^2 \delta_\alpha,$$

$$M_{\Sigma_\alpha} = \frac{1}{4}(K_{u\tilde{u}} + 2\chi_{u\tilde{u},v\tilde{v}} + K_{v\tilde{v}}).$$

Convienne per il seguito introdurre anche la media m_α delle curvatures miste $\chi_{\alpha\omega}$ al variare di ω in Σ_α . Tenute presenti la (23) e la (3) del n. 4, un calcolo analogo ai precedenti conduce alla relazione

$$m_\alpha = \frac{1}{2}(\chi_{uv,u\tilde{u}} + \chi_{uv,v\tilde{v}}).$$

⁽¹⁸⁾ Vedi p. es. K. NOMIZU - S. KOBAYASHI [4], I, pp. 198-201. Si scriverà semplicemente $R(uvxy)$ in luogo di $R(u, v, x, y)$.

⁽¹⁹⁾ Dalla (1) segue subito che per due vettori unitari u, v (eventualmente coincidenti) si ha $\sin u\tilde{v} = \sin v\tilde{u}$. In particolare, se u, v sono ortogonali, sussiste la (4), cioè $\cos \delta_\alpha = \cos u\tilde{v}$.

11. – Medie $\mu_{\dot{\Sigma}_\alpha}$ e $M_{\dot{\Sigma}_\alpha}$.

Con riferimento al sistema ∞^1 di 2-spazi p.h.r. $\dot{\Sigma}_\alpha$, introdotto al n. 5, si considerano ora le medie delle curvature (semplici e miste) $\mu_{\dot{\Sigma}_\alpha}$ e $M_{\dot{\Sigma}_\alpha}$.

Siano $r_1, \tilde{s}_1$ ed $r_2, \tilde{s}_2$ i vettori ottenuti ponendo nella (5) $\varphi = \varphi_1, \varphi_2$ rispettivamente, e ϱ_1, ϱ_2 i 2-spazi di $\dot{\Sigma}_\alpha$ definiti da $r_1 \wedge \tilde{s}_1, r_2 \wedge \tilde{s}_2$. Poichè r_j, s_j ($j = 1, 2$) è una base ortogonale di α (n. 5), dalla (4) segue $\cos \delta_\alpha = r_j \cdot \tilde{s}_j = \cos r_j \tilde{s}_j$. Tenuto conto della (23) e delle proprietà di R , si perviene a

$$\begin{aligned}
 -\chi_{\varrho_1 \varrho_2} \sin^2 \delta_\alpha &= R(r_1 \tilde{s}_1 r_2 \tilde{s}_2) = \{R(u\tilde{v}u\tilde{v}) \cos^2 \varphi_2 - R(u\tilde{v}v\tilde{u}) \sin^2 \varphi_2\} \cos^2 \varphi_1 \\
 &\quad - \{R(u\tilde{u}u\tilde{v}) - R(v\tilde{v}u\tilde{v})\} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
 &\quad + \frac{1}{4} \{R(u\tilde{u}u\tilde{u}) - 2R(u\tilde{u}v\tilde{v}) + R(v\tilde{v}v\tilde{v})\} \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 \\
 &\quad - \{R(v\tilde{v}v\tilde{u}) - R(u\tilde{u}v\tilde{u})\} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
 &\quad + \{R(v\tilde{u}v\tilde{u}) \sin^2 \varphi_2 - R(v\tilde{u}u\tilde{v}) \cos^2 \varphi_2\} \sin^2 \varphi_1.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Dalla (32), integrando da 0 a 2π rispetto alle variabili φ_1 e φ_2 e dividendo per $(2\pi)^2$ si ottiene la media delle curvature miste di $\dot{\Sigma}_\alpha$

$$M_{\dot{\Sigma}_\alpha} = -\frac{1}{4} (\sin \delta_\alpha)^{-2} \{R(u\tilde{v}u\tilde{v}) - 2R(u\tilde{v}v\tilde{u}) + R(v\tilde{u}v\tilde{u})\}.$$

Se si pone nella (32) $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, risulta $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ e $\chi_{\varrho_1 \varrho_2} = K_\varrho$. Integrando poi da 0 a 2π rispetto a φ e dividendo per 2π si ottiene la media delle curvature semplici di $\dot{\Sigma}_\alpha$

$$\begin{aligned}
 \mu_{\dot{\Sigma}_\alpha} &= -\frac{1}{8} (\sin \delta)^{-2} \{R(u\tilde{u}u\tilde{u}) - 2R(u\tilde{u}v\tilde{v}) + R(v\tilde{v}v\tilde{v})\} \\
 &\quad - \frac{1}{8} (\sin \delta_\alpha)^{-2} \{3R(u\tilde{v}u\tilde{v}) - 2R(u\tilde{v}v\tilde{u}) + 3R(v\tilde{u}v\tilde{u})\}.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Tenuto conto ora delle (20), (21) e della (28) del n. 10, le medie $\mu_{\dot{\Sigma}_\alpha}$ e $M_{\dot{\Sigma}_\alpha}$ delle curvature semplici e miste dei 2-spazi di $\dot{\Sigma}_\alpha$ risultano espresse in modo semplice in termini di curvature particolari; precisamente sussistono le relazioni

$$\mu_{\dot{\Sigma}_\alpha} = \frac{1}{8} (\sin \delta_\alpha)^{-2} (K_{u\tilde{u}} - 2\chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}} + K_{v\tilde{v}}) + \frac{1}{8} (3K_{u\tilde{v}} - 2\chi_{u\tilde{v}, v\tilde{u}} + 3K_{v\tilde{u}}),$$

$$M_{\dot{\Sigma}_\alpha} = \frac{1}{4} (K_{u\tilde{v}} - 2\chi_{u\tilde{v}, v\tilde{u}} + K_{v\tilde{u}}).$$

12. – Medie $\mu_{\dot{\Sigma}_\alpha^\circ}$ e $M_{\dot{\Sigma}_\alpha^\circ}$.

Si considera ora il sistema $\dot{\Sigma}_\alpha^\circ$ del n. 6, e le medie $\mu_{\dot{\Sigma}_\alpha^\circ}$ e $M_{\dot{\Sigma}_\alpha^\circ}$ delle curvature caratteristiche (semplici e miste) ad esso relative.

Siano w_1, w_2 i vettori ottenuti ponendo nella (13) $r = r_1, r_2$; $s = s_1, s_2$; $\Theta = \Theta_1, \Theta_2$ rispettivamente, ed ω_1, ω_2 i 2-spazi di $\dot{\Sigma}_\alpha^\circ$ definiti da $w_1 \wedge \tilde{w}_1, w_2 \wedge \tilde{w}_2$. Tenute presenti

le proprietà elementari di R si ottiene subito

$$\begin{aligned}
 (37) \quad & -\sin^4 \delta_\alpha \chi_{\omega_1 \omega_2} = \sin^4 \delta_\alpha R(w_1 \tilde{w}_1 w_2 \tilde{w}_2) = \\
 & = \left\{ R(r_1 \tilde{r}_1 r_2 \tilde{r}_2) \sin^2 \left(\Theta_2 + \frac{\delta_\alpha}{2} \right) + R(r_1 \tilde{r}_1 s_2 \tilde{s}_2) \sin^2 \left(\Theta_2 - \frac{\delta_\alpha}{2} \right) \right\} \sin^2 \left(\Theta_1 + \frac{\delta_\alpha}{2} \right) \\
 & - \{ R(r_1 \tilde{r}_1 r_2 s_2) + R(r_1 \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \tilde{s}_2) \} \sin^2 \left(\Theta_1 + \frac{\delta_\alpha}{2} \right) S_2 \\
 & - \{ R(s_1 \tilde{s}_1 r_2 s_2) + R(s_1 \tilde{s}_1 \tilde{r}_2 \tilde{s}_2) \} \sin^2 \left(\Theta_1 - \frac{\delta_\alpha}{2} \right) S_2 \\
 & + \{ R(r_1 s_1 r_2 s_2) + R(r_1 s_1 \tilde{r}_2 \tilde{s}_2) + R(\tilde{r}_1 \tilde{s}_1 r_2 s_2) + R(\tilde{r}_1 \tilde{s}_1 \tilde{r}_2 \tilde{s}_2) \} S_1 S_2 \\
 & - \{ R(\tilde{r}_1 \tilde{s}_1 s_2 \tilde{s}_2) + R(r_1 s_1 s_2 \tilde{s}_2) \} \sin^2 \left(\Theta_2 - \frac{\delta_\alpha}{2} \right) S_1 \\
 & - \{ R(\tilde{r}_1 \tilde{s}_1 r_2 \tilde{r}_2) + R(r_1 s_1 r_2 \tilde{r}_2) \} \sin^2 \left(\Theta_2 + \frac{\delta_\alpha}{2} \right) S_1 \\
 & + \left\{ R(s_1 \tilde{s}_1 r_2 \tilde{r}_2) \sin^2 \left(\Theta_2 + \frac{\delta_\alpha}{2} \right) + R(s_1 \tilde{s}_1 s_2 \tilde{s}_2) \sin^2 \left(\Theta_2 - \frac{\delta_\alpha}{2} \right) \right\} \sin^2 \left(\Theta_1 - \frac{\delta_\alpha}{2} \right)
 \end{aligned}$$

dove

$$S_j = \sin \left(\Theta_j + \frac{\delta_\alpha}{2} \right) \sin \left(\Theta_j - \frac{\delta_\alpha}{2} \right).$$

Dalla (37) discende poi

$$\begin{aligned}
 -\frac{4 \sin^4 \delta_\alpha}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\Theta_2 \int_0^{2\pi} \chi_{\omega_1 \omega_2} d\Theta_1 = & \{ R(r_1 \tilde{r}_1 r_2 \tilde{r}_2) + R(s_1 \tilde{s}_1 s_2 \tilde{s}_2) + R(r_1 \tilde{r}_1 s_2 \tilde{s}_2) + R(s_1 \tilde{s}_1 r_2 \tilde{r}_2) \} \\
 & - \{ R(r_1 s_1 r_2 \tilde{r}_2) + R(r_1 s_1 s_2 \tilde{s}_2) + R(r_1 \tilde{r}_1 r_2 s_2) + R(s_1 \tilde{s}_1 r_2 s_2) \} \cos \delta_\alpha \\
 & - \{ R(\tilde{r}_1 \tilde{s}_1 r_2 \tilde{r}_2) + R(\tilde{r}_1 \tilde{s}_1 s_2 \tilde{s}_2) + R(r_1 \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \tilde{s}_2) + R(s_1 \tilde{s}_1 \tilde{r}_2 \tilde{s}_2) \} \cos \delta_\alpha \\
 & + \{ R(r_1 s_1 r_2 s_2) + R(r_1 s_1 \tilde{r}_2 \tilde{s}_2) + R(\tilde{r}_1 \tilde{s}_1 r_2 s_2) + R(\tilde{r}_1 \tilde{s}_1 \tilde{r}_2 \tilde{s}_2) \} \cos^2 \delta_\alpha.
 \end{aligned}$$

Occorre ora tener conto che $r_1, \tilde{s}_1, r_2, \tilde{s}_2$ sono espressi dalla (5) del n. 5 con $\varphi = \varphi_1, \varphi_2$ rispettivamente, e procedere all'integrazione nelle variabili φ_j . Tenute presenti le (22), (23) del n. 9 e il significato dei simboli $M_{\Sigma_\alpha}, m_\alpha$, (n. 10) si perviene alla *relazione*:

$$(38) \quad M_{\Sigma_\alpha} = (\sin \delta_\alpha)^{-4} \{ M_{\Sigma_\alpha} - (m_\alpha + m_{\tilde{\alpha}}) \cos \delta_\alpha + \frac{1}{4} (K_\alpha + 2\chi_{\alpha\tilde{\alpha}} + K_{\tilde{\alpha}}) \cos^2 \delta_\alpha \}.$$

Si consideri ora in particolare il caso $r_1 = r_2 = r; s_1 = s_2 = s; \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$; si ha allora $w_1 = w_2 = w$ e quindi $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ mentre, $\chi_{\omega_1 \omega_2} = K_\omega$ (n. 9). Dalla (37), nelle

ipotesi attuali segue subito

$$\begin{aligned} -\frac{8 \sin^4 \delta_\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\omega d\Theta = & 3(R(r\tilde{r}r\tilde{r}) + R(s\tilde{s}s\tilde{s})) + 2R(r\tilde{r}s\tilde{s})(1 + 2 \cos^2 \delta_\alpha) \\ & - 6(R(rs\tilde{r}\tilde{r}) + R(rss\tilde{s}) + R(\tilde{r}\tilde{s}r\tilde{r}) + R(\tilde{r}\tilde{s}s\tilde{s})) \cos \delta_\alpha \\ & + (R(rsrs) + 2R(rs\tilde{r}\tilde{s}) + R(\tilde{r}\tilde{s}\tilde{r}\tilde{s}))(1 + 2 \cos^2 \delta_\alpha). \end{aligned}$$

Occorre ora tener conto della (5) del n. 5 e integrare nella variabile φ .

Si noti anzitutto che, posto nella (25) $\theta_1 = \varphi$, $\theta_2 = \varphi + \pi/2$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(r\tilde{r}s\tilde{s}) d\varphi = & \frac{1}{8} (R(u\tilde{u}u\tilde{u}) + 6R(u\tilde{u}v\tilde{v}) + R(v\tilde{v}v\tilde{v})) - \\ & - \frac{1}{8} (R(u\tilde{v}u\tilde{v}) + 2R(u\tilde{v}v\tilde{u}) + R(v\tilde{u}v\tilde{u})) \end{aligned}$$

da cui, in virtù delle (26), (27) discende

$$(39) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(r\tilde{r}s\tilde{s}) d\varphi = \mu_{\Sigma_\alpha} - 2M_{\Sigma_\alpha}.$$

Ciò premesso, tenute presenti le (22), (23) del n. 9 e il significato dei simboli μ_{Σ_α} , M_{Σ_α} , m_α , (n. 10), si perviene senza difficoltà alla *relazione*

$$(40) \quad \begin{aligned} \mu_{\Sigma_\alpha} = & \frac{1}{8} (\sin \delta_\alpha)^{-4} \{4\mu_{\Sigma_\alpha} \sin^2 \delta_\alpha + 4M_{\Sigma_\alpha}(1 + 2 \cos^2 \delta_\alpha) + \\ & - 12(m_\alpha + m_{\tilde{\alpha}}) \cos \delta_\alpha + (K_\alpha + 2\chi_{\alpha\tilde{\alpha}} + K_{\tilde{\alpha}})(1 + 2 \cos^2 \delta_\alpha)\}. \end{aligned}$$

In conclusione, con le (40), (38) le medie delle curvature (semplici e miste) degli ∞^2 2-spazi del sistema $\hat{\Sigma}_\alpha$ possono esprimersi in funzione delle curvature (semplici e miste) dei 2-spazi α e $\tilde{\alpha}$ e delle medie relative ai sistemi $\infty^1 \Sigma_\alpha$ e $\Sigma_{\tilde{\alpha}}$.

13. - Medie $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$ e $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}$.

Con riferimento al sistema ∞^2 di 2-spazi p.h.r. $\hat{\Sigma}_\alpha$, introdotto al n. 7, si considerano ora le medie delle curvature (semplici e miste) $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$ e $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}$.

Siano $r_1, \tilde{s}_1$ e $r_2, \tilde{s}_2$ i vettori ottenuti ponendo nella (5) $\varphi = \varphi_1, \varphi_2$ rispettivamente. Siano poi y_1, y_2 i vettori dati dalla (14) del n. 7 con $r = r_1, r_2$; $s = s_1, s_2$; $\psi = \psi_1, \psi_2$ rispettivamente. Si denotino infine con ϱ_1, ϱ_2 i 2-spazi di $\hat{\Sigma}_\alpha$ definiti dai bivettori $r_1 \wedge y_1$ e $r_2 \wedge y_2$.

Ciò premesso si stabilisce direttamente la *relazione*

$$\begin{aligned}
 R(r_1 y_1 r_2 y_2) \sin^2 \delta_\alpha &= R(r_1 \tilde{s}_1 r_2 \tilde{s}_2) \cos \psi_1 \cos \psi_2 \\
 &+ (R(r_1 \tilde{r}_1 r_2 \tilde{r}_2) \cos^2 \delta_\alpha + R(r_1 s_1 r_2 s_2)) \sin \psi_1 \sin \psi_2 \\
 (41) \quad &- (R(r_1 \tilde{r}_1 r_2 s_2) + R(r_1 s_1 r_2 \tilde{r}_2)) \cos \delta_\alpha \sin \psi_1 \sin \psi_2 \\
 &+ (-R(r_1 \tilde{r}_1 r_2 \tilde{s}_2) \cos \delta_\alpha + R(r_1 s_1 r_2 \tilde{s}_2)) \sin \psi_1 \cos \psi_2 \\
 &+ (-R(r_2 \tilde{r}_2 r_1 \tilde{s}_1) \cos \delta_\alpha + R(r_2 s_2 r_1 \tilde{s}_1)) \cos \psi_1 \sin \psi_2.
 \end{aligned}$$

Convien qui notare esplicitamente che integrando il primo membro della (41), cioè $-\chi_{\varrho_1 \varrho_2} \sin^2 \delta_\alpha$ (n. 9), rispetto a ψ_1 e ψ_2 si ottiene zero. Sussiste perciò il Teorema

T₁ - La media $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}$ delle curvature miste dei 2-spazi p.h.r. del sistema $\hat{\Sigma}_\alpha$ è nulla.

Per quanto concerne le curvature semplici dei 2-spazi di $\hat{\Sigma}_\alpha$, si consideri in particolare $r_1 = r_2 = r$, $s_1 = s_2 = s$ (cioè $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$) e $y_1 = y_2 = y$ ($\psi_1 = \psi_2 = \psi$). Si ha quindi $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ e $\chi_{\varrho_1 \varrho_2} = K_\varrho$ (n. 9).

Dalla (41), nell'ipotesi attuale, discende

$$\frac{2 \sin^2 \delta_\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(ryry) d\psi = R(r\tilde{s}r\tilde{s}) + R(r\tilde{r}r\tilde{r}) \cos^2 \delta_\alpha + R(rsrs) - 2R(rsr\tilde{r}) \cos \delta_\alpha.$$

È ormai immediato, tenute presenti le (20), (21) e il significato dei simboli μ_{Σ_α} , $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$, m_α (n. 10, 11), pervenire alla *relazione*

$$(42) \quad \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = \frac{1}{2} (\sin \delta_\alpha)^{-2} (\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} \sin^2 \delta_\alpha + \mu_{\Sigma_\alpha} \cos^2 \delta_\alpha - 2m_\alpha \cos \delta_\alpha + K_\alpha).$$

In definitiva la media delle curvature semplici degli ∞^2 2-spazi p.h.r. del sistema $\hat{\Sigma}_\alpha$ e una combinazione lineare della curvatura del 2-spazio α e di medie relative ai sistemi $\infty^1 \Sigma_\alpha$ e $\hat{\Sigma}_\alpha$.

14. - Medie $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}^{\Delta}$ e $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}^{\Delta}$.

Si esamina ora il sistema $\hat{\Sigma}_\alpha^{\Delta}$ del n. 8 e le medie delle curvature (semplici e miste) $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}^{\Delta}$ e $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}^{\Delta}$.

In base alle conclusioni del n. 8, due 2-spazi ϱ , ϱ' appartenenti a $\hat{\Sigma}_\alpha^{\Delta}$ sono definiti rispettivamente dai bivettori $x_1 \wedge x_2$ e $x'_1 \wedge x'_2$, le x_j , x'_j essendo date da espressioni del tipo (19). Queste, unitamente alle condizioni (18) ed alle ipotesi su w_j , w'_j assicurano che x_1 , x_2 ed x'_1 , x'_2 sono basi ortonormali in ϱ , ϱ' rispettivamente.

Risulta subito

$$\begin{aligned}
 -\chi_{ee'} = & R(w_1 w_2 w'_1 w'_2) C_1 C_2 + R(w_1 \tilde{w}_2 w'_1 \tilde{w}'_2) C_1 S_2 \\
 & + R(\tilde{w}_1 w_2 \tilde{w}'_1 w'_2) S_1 C_2 + R(\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}'_1 \tilde{w}'_2) S_1 S_2 \\
 & + \{R(w_1 w_2 w'_1 \tilde{w}'_2) C_1 + R(\tilde{w}_1 w_2 \tilde{w}'_1 \tilde{w}'_2) S_1\} \cos \tau_2 \sin \tau'_2 \\
 (43) \quad & + \{R(w_1 \tilde{w}_2 w'_1 w'_2) C_1 + R(\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}'_1 w'_2) S_1\} \sin \tau_2 \cos \tau'_2 \\
 & + \{R(w_1 w_2 \tilde{w}'_1 w'_2) C_2 + R(w_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}'_1 \tilde{w}'_2) S_2\} \cos \tau_1 \sin \tau'_1 \\
 & + \{R(\tilde{w}_1 w_2 w'_1 w'_2) C_2 + R(\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 w'_1 \tilde{w}'_2) S_2\} \sin \tau_1 \cos \tau'_1 \\
 & + \{R(\tilde{w}_1 w_2 w'_1 \tilde{w}'_2) \cos \tau_2 \sin \tau'_2 + R(\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 w'_1 w'_2) \sin \tau_2 \cos \tau'_2\} \sin \tau_1 \cos \tau'_1 \\
 & + \{R(w_1 w_2 \tilde{w}'_1 \tilde{w}'_2) \cos \tau_2 \sin \tau'_2 + R(w_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}'_1 w'_2) \sin \tau_2 \cos \tau'_2\} \cos \tau_1 \sin \tau'_1
 \end{aligned}$$

dove

$$S_j = \sin \tau_j \sin \tau'_j, \quad C_j = \cos \tau_j \cos \tau'_j.$$

Conviene notare esplicitamente che integrando il primo membro della (43) rispetto alle variabili $\tau_1, \tau_2, \tau'_1, \tau'_2$ si ottiene zero. Sussiste perciò il Teorema

T₂ - La media $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}$ delle curvatures miste dei 2-spazi p.h.r. del sistema $\hat{\Sigma}_\alpha$ è nulla.

Per esaminare il caso della curvatura semplice, occorre in particolare considerare $w'_j = w_j$ ed $x'_j = x_j$ ($\tau'_j = \tau_j$). In queste ipotesi, dalla (43) discende

$$\begin{aligned}
 (44) \quad & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\tau_2 \int_0^{2\pi} R(x_1 x_2 x_1 x_2) d\tau_1 = \\
 & = \frac{1}{4} \{R(w_1 w_2 w_1 w_2) + R(w_1 \tilde{w}_2 w_1 \tilde{w}_2) + R(\tilde{w}_1 w_2 \tilde{w}_1 w_2) + R(\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1 \tilde{w}_2)\}
 \end{aligned}$$

con le w_j date dalla (15) del n. 8 e soddisfacenti ad una delle condizioni (18).

Si considera anzitutto la *condizione* (18'). Si ha cioè

$$w_1 = (\sin \delta_\alpha)^{-1} \cos \frac{\delta_\alpha}{2} (r_1 + \tilde{s}_1), \quad w_2 = (\sin \delta_\alpha)^{-1} \sin \frac{\delta_\alpha}{2} (r_2 - \tilde{s}_2).$$

Segue

$$\begin{aligned}
 (45) \quad & 4 \sin^2 \delta_\alpha R(w_1 w_2 w_1 w_2) = R(r_1 r_2 r_1 r_2) + R(\tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \tilde{s}_1 \tilde{s}_2) - 2R(r_1 r_2 \tilde{s}_1 \tilde{s}_2) \\
 & + R(r_1 \tilde{s}_2 r_1 \tilde{s}_2) + R(\tilde{s}_1 r_2 \tilde{s}_1 r_2) - 2R(r_1 \tilde{s}_2 \tilde{s}_1 r_2) \\
 & - 2\{R(r_1 r_2 r_1 \tilde{s}_2) + R(\tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \tilde{s}_1 r_2) - R(r_1 r_2 \tilde{s}_1 r_2) - R(\tilde{s}_1 \tilde{s}_2 r_1 \tilde{s}_2)\}.
 \end{aligned}$$

dove $r_j, \tilde{s}_j$ sono dati dalla (5) per $\varphi = \varphi_j$.

Conviene notare che la somma dei primi tre addendi a secondo membro può scriversi

$$-(K_\alpha - 2\chi_{\alpha\tilde{\alpha}} + K_{\tilde{\alpha}}) \sin^2 (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Si riconosce poi che l'integrale rispetto a φ_1, φ_2 della quantità entro parentesi graffe è nullo. È ormai facile pervenire alla uguaglianza

$$(46) \quad -\frac{8 \sin^2 \delta_\alpha}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{2\pi} R(w_1 w_2 w_1 w_2) d\varphi_1 = (K_\alpha - 2\chi_{\alpha\tilde{\alpha}} + K_{\tilde{\alpha}}) + \\ + (K_{u\tilde{u}} - 2\chi_{u\tilde{u},v\tilde{v}} + K_{v\tilde{v}}) + 2(K_{u\tilde{v}} + K_{v\tilde{u}}) \sin^2 \delta_\alpha.$$

Al medesimo risultato si giunge anche partendo dagli altri addendi che figurano a secondo membro della (44).

È utile denotare con $\mu'_{\hat{\Sigma}_\alpha}$ la *media delle curvature* K_ϱ dei 2-spazi ϱ di $\hat{\Sigma}_\alpha$ costruiti a partire dalle coppie di 2-spazi caratteristici ω_1, ω_2 , soddisfacenti alla *condizione di ortogonalità* (18'). Tenute presenti la (22) e le (44), (46) con l'osservazione che segue quest'ultima, si ottiene l'uguaglianza

$$\mu'_{\hat{\Sigma}_\alpha} = \frac{1}{8} (\sin \delta_\alpha)^{-2} \{ (K_\alpha - 2\chi_{\alpha\tilde{\alpha}} + K_{\tilde{\alpha}}) + (K_{u\tilde{u}} - 2\chi_{u\tilde{u},v\tilde{v}} + K_{v\tilde{v}}) + 2(K_{u\tilde{v}} + K_{v\tilde{u}}) \sin^2 \delta_\alpha \}.$$

Si riconosce poi che, in virtù delle (30), (36) e della relazione (24) del n. 9, si può scrivere

$$(47) \quad \mu'_{\hat{\Sigma}_\alpha} = \frac{1}{8} (\sin \delta_\alpha)^{-2} \{ K_\alpha - 6\chi_{\alpha\tilde{\alpha}} + K_{\tilde{\alpha}} + 4M_{\Sigma_\alpha} + 8M_{\hat{\Sigma}_\alpha} \sin^2 \delta_\alpha \}.$$

Si considera ora la condizione (18''). Si ha

$$(48) \quad w_1 = (\sin \delta_\alpha)^{-1} \left\{ r \cos \left(\Theta + \frac{\delta_\alpha}{2} \right) + \tilde{s} \cos \left(\Theta - \frac{\delta_\alpha}{2} \right) \right\}, \\ w_2 = (\sin \delta_\alpha)^{-1} \left\{ r \sin \left(\Theta + \frac{\delta_\alpha}{2} \right) + \tilde{s} \sin \left(\Theta - \frac{\delta_\alpha}{2} \right) \right\}.$$

In virtù delle proprietà di R si ottiene subito l'uguaglianza

$$(49) \quad R(w_1 w_2 w_1 w_2) + R(\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1 \tilde{w}_2) = (\sin \delta_\alpha)^{-2} \{ R(r \tilde{s} r \tilde{s}) + R(\tilde{r} s \tilde{r} s) \}.$$

D'altra parte, tenuto conto della (48), non è difficile pervenire alla relazione

$$(50) \quad \frac{8 \sin^4 \delta_\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(w_1 \tilde{w}_2 w_1 \tilde{w}_2) d\Theta = \\ = \{ (R(rsr\tilde{s}) + R(\tilde{r}\tilde{s}\tilde{r}\tilde{s})) (1 + 2 \sin^2 \delta_\alpha) + 2R(r\tilde{s}\tilde{r}\tilde{s}) \cos 2\delta_\alpha \} \\ + \{ R(r\tilde{r}r\tilde{r}) + R(s\tilde{s}s\tilde{s}) + 2R(r\tilde{r}s\tilde{s}) \cos 2\delta_\alpha \} \\ - 2 \{ R(rsr\tilde{r}) + R(rss\tilde{s}) + R(\tilde{r}\tilde{s}r\tilde{r}) + R(\tilde{r}\tilde{s}s\tilde{s}) \} \cos \delta_\alpha.$$

Il medesimo risultato si ottiene a partire da $R(\tilde{w}_1 w_2 \tilde{w}_1 w_2)$.

Convieni ora denotare con $\mu''_{\hat{\Sigma}_\alpha}$ la *media* analoga a $\mu'_{\hat{\Sigma}_\alpha}$ ma relativa alla *condizione di ortogonalità* (18").

Ciò premesso, tenute presenti la (20), (21) del n. 9, le (44), (49), (50) e la (39) del n. 12 e le definizioni di μ_{Σ_α} , M_{Σ_α} , m_α , $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$ (n. 10, 11) si perviene a

$$(51) \quad \mu''_{\hat{\Sigma}_\alpha} = \frac{1}{16} (\sin \delta_\alpha)^{-4} \{ (K_\alpha + K_{\tilde{\alpha}})(1 + 2 \sin^2 \delta_\alpha) + 2\chi_{\alpha\tilde{\alpha}} \cos 2\delta_\alpha + \\ + 2\mu_{\Sigma_\alpha}(1 - \cos 2\delta_\alpha) + 4M_{\Sigma_\alpha} \cos 2\delta_\alpha - 4(m_\alpha + m_{\tilde{\alpha}}) \cos \delta_\alpha + 8\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} \sin^4 \delta_\alpha \}.$$

È ormai possibile pervenire alla conclusione.

Dalle (47), (51) discende la *relazione*

$$(52) \quad \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = \frac{1}{2} (\mu'_{\hat{\Sigma}_\alpha} + \mu''_{\hat{\Sigma}_\alpha}) = \frac{1}{32} (\sin \delta_\alpha)^{-4} \{ (K_\alpha + K_{\tilde{\alpha}})(1 + 4 \sin^2 \delta_\alpha) \\ + 2\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}(1 - 8 \sin^2 \delta_\alpha) + 4\mu_{\Sigma_\alpha} \sin^2 \delta_\alpha + 4M_{\Sigma_\alpha} \\ + 8\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} \sin^4 \delta_\alpha + 16M_{\hat{\Sigma}_\alpha} \sin^4 \delta_\alpha - 4(m_\alpha + m_{\tilde{\alpha}}) \cos \delta_\alpha \}.$$

Pertanto, la media delle curvature semplici degli ∞^3 2-spazi p.h.r. del sistema $\hat{\Sigma}_\alpha$ è una combinazione lineare delle curvature (semplici e miste) dei 2-spazi α e $\tilde{\alpha}$ e di medie relative ai sistemi $\infty^1 \Sigma_\alpha$ e $\hat{\Sigma}_\alpha$.

15. – Sistemi finiti $\mathcal{K}_\alpha$ e $\mathcal{R}_\alpha$.

Alle considerazioni dei numeri precedenti conviene aggiungere una osservazione.

Sia u, v una base ortonormale di α ($\alpha \neq \tilde{\alpha}$), $\mathcal{K}_\alpha(u, v)$ il sistema costituito dai 2-spazi caratteristici $u\tilde{u}, v\tilde{v}$; $\mathcal{R}_\alpha(u, v)$ il sistema dei 2-spazi p.h.r. $u\tilde{v}, v\tilde{u}$.

Ciò premesso, risulta

O₂ – *Le medie relative ai sistemi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$ si esprimono tutte linearmente mediante le curvature (semplici e miste) di α e $\tilde{\alpha}$ e dei 2-spazi saratteristici e p.h.r. appartenenti ai sistemi finiti $\mathcal{K}_\alpha(u, v)$, $\mathcal{R}_\alpha(u, v)$.*

Per le medie μ_{Σ_α} , M_{Σ_α} , $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$, $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}$, m_α il risultato segue immediatamente dalle (29), (30), (35), (36), (31); di conseguenza, come appare dalle (40), (38), (42), (52), esso sussiste anche per le medie $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$, $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}$, $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$, $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$.

Convieni poi introdurre la *base ortonormale bisettrice*

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (u + v), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} (-u + v).$$

Un calcolo diretto conduce allora a stabilire le *relazioni*

$$(53) \quad \mu_{\Sigma_\alpha} = \frac{1}{4} (K_{u\tilde{u}} + K_{v\tilde{v}} + K_{x\tilde{x}} + K_{y\tilde{y}}),$$

$$(54) \quad \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = \frac{1}{4} (K_{u\tilde{v}} + K_{v\tilde{u}} + K_{x\tilde{y}} + K_{y\tilde{x}}).$$

più semplici delle (29), (35). Esse fanno intervenire *soltanto curvatures semplici relative al sistema in considerazione*.

16. - *J*-invarianza.

Prima di procedere oltre conviene osservare che la maggior parte delle nozioni e degli enti geometrici considerati nei numeri precedenti ha natura *invariante* nell'isomorfismo fondamentale *J* (n. 2).

Ad esempio, è immediato notare che, oltre al prodotto scalare (n. 3), l'*isomorfismo J* lascia invariata la deviazione caratteristica (n. 4). (Risulta cioè $\delta_\alpha = \delta_{\tilde{\alpha}}$); di conseguenza le nozioni di 2-spazio caratteristico e di 2-spazio p.h.r. (n. 2, 3) hanno natura *invariante* rispetto a *J*.

È facile verificare poi che i sistemi di 2-spazi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\check{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\check{\Sigma}}_\alpha$, introdotti nei n. 4, 6, 5, 8, come pure lo spazio 4-dimensionale *A* (n. 5), sono mutati un sè dall'isomorfismo *J*. In altri termini, si ha

$$\Sigma_\alpha = \Sigma_{\tilde{\alpha}}, \quad \hat{\Sigma}_\alpha = \hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}, \quad \check{\Sigma}_\alpha = \check{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}, \quad \hat{\check{\Sigma}}_\alpha = \hat{\check{\Sigma}}_{\tilde{\alpha}}.$$

Ciò *non* accade invece per il sistema $\hat{\Sigma}_\alpha$ del n. 7. Risulta invero in generale $\hat{\Sigma}_\alpha \neq \hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}$.

È importante notare che le *curvature semplici e miste* (n. 9) *non restano in generale invariate nell'isomorfismo J*. Si ha cioè in generale $K_\alpha \neq K_{\tilde{\alpha}}$ e $\chi_{\alpha\beta} \neq \chi_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$.

Tuttavia, in virtù di una osservazione precedente, per le medie introdotte ai n. 10, 12, 11, 14 risulta

$$(55) \quad \begin{aligned} \mu_{\Sigma_\alpha} &= \mu_{\Sigma_{\tilde{\alpha}}}, & \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} &= \mu_{\hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}}, & \mu_{\check{\Sigma}_\alpha} &= \mu_{\check{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}}, & \mu_{\hat{\check{\Sigma}}_\alpha} &= \mu_{\hat{\check{\Sigma}}_{\tilde{\alpha}}}, \\ M_{\Sigma_\alpha} &= M_{\Sigma_{\tilde{\alpha}}}, & M_{\hat{\Sigma}_\alpha} &= M_{\hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}}, & M_{\check{\Sigma}_\alpha} &= M_{\check{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}} \quad (^{20}). \end{aligned}$$

Appare invece dalle (31), (42) che, in generale è $m_\alpha \neq m_{\tilde{\alpha}}$, $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} \neq \mu_{\hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}}$.

17. - Alcuni risultati.

Le considerazioni svolte nei numeri precedenti consentono ora di stabilire alcuni risultati.

(²⁰) Al risultato si può anche giungere sfruttando le relazioni ottenute ai numeri precedenti. Dalle (29), (30), (35), (36) discendono subito quattro delle uguaglianze (55). Tenuto conto di queste, dalle (38), (40), (52) seguono le altre.

Sussistono i Teoremi

T₃ — Le medie μ_{Σ_α} , M_{Σ_α} , $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$, $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}$, introdotte ai n. 10, 11 sono linearmente dipendenti. Precisamente risulta

$$(56) \quad M_{\Sigma_\alpha} - \mu_{\Sigma_\alpha} = (M_{\hat{\Sigma}_\alpha} - \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}) \sin^2 \delta_\alpha .$$

T₄ — La curvatura mista $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}$ si esprime linearmente nelle medie μ_{Σ_α} , M_{Σ_α} , $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$, $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}$. Precisamente

$$(57) \quad \chi_{\alpha\tilde{\alpha}} = (2M_{\Sigma_\alpha} - \mu_{\Sigma_\alpha}) + (2M_{\hat{\Sigma}_\alpha} - \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}) \sin^2 \delta_\alpha .$$

Per stabilire **T₃** basta notare che i secondi membri delle (29), (30), (35), (36), riguardati come forme lineari nelle variabili

$$K_{u\tilde{u}} + K_{v\tilde{v}}, \quad K_{u\tilde{v}} + K_{v\tilde{u}}, \quad \chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}}, \quad \chi_{u\tilde{v}, v\tilde{u}}$$

risultano dipendenti.

Eliminando $K_{u\tilde{u}} + K_{v\tilde{v}}$ e $K_{u\tilde{v}} + K_{v\tilde{u}}$ tra le equazioni (29), (30), (36) e tenendo conto della (24) del n. 9, si perviene all'eguaglianza

$$(58) \quad \chi_{\alpha\tilde{\alpha}} = 3M_{\Sigma_\alpha} - 2\mu_{\Sigma_\alpha} + M_{\hat{\Sigma}_\alpha} \sin^2 \delta_\alpha ,$$

dalla quale, in virtù della (56), segue subito la (57) e quindi il Teorema **T₄**.

In relazione poi alle curvature semplici sussistono i Teoremi

T₅ — La curvatura semplice K_α è combinazione lineare delle medie delle curvature semplici relative ai sistemi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\tilde{\Sigma}_\alpha$ e della media m_α introdotta al n. 10. Precisamente

$$(59) \quad K_\alpha = (2\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} - \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}) \sin^2 \delta_\alpha - \mu_{\Sigma_\alpha} \cos^2 \delta_\alpha + 2m_\alpha \cos \delta_\alpha .$$

T₆ — La media aritmetica delle curvature K_α e $K_{\tilde{\alpha}}$ si esprime linearmente nelle medie relative ai sistemi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\tilde{\Sigma}_\alpha$. Precisamente risulta

$$(60) \quad \frac{1}{2}(K_\alpha + K_{\tilde{\alpha}}) = (\mu_{\Sigma_\alpha} - \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} \sin^2 \delta_\alpha) - 2(3M_{\hat{\Sigma}_\alpha} - 2\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}) \sin^2 \delta_\alpha .$$

La (59) segue immediatamente dalla (42) del n. 13. L'eliminazione di $m_\alpha + m_{\tilde{\alpha}}$ tra le (40), (38) conduce poi alla

$$(61) \quad \frac{1}{4}(K_\alpha + 2\chi_{\alpha\tilde{\alpha}} + K_{\tilde{\alpha}}) = 2M_{\Sigma_\alpha} - \mu_{\Sigma_\alpha} - (3M_{\hat{\Sigma}_\alpha} - 2\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}) \sin^2 \delta_\alpha .$$

Da questa, in virtù delle (56), (57) segue subito la (60).

18. — Relazioni tra medie.

Un primo esempio è costituito dalla relazione (56) (Teorema $\mathbf{T}_3$, n. 17). Altri risultati sono questi.

$\mathbf{T}_7$ — Per le medie relative ai sistemi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$ sussistono le relazioni indipendenti

$$(62) \quad 5(M_{\Sigma_\alpha} - \mu_{\Sigma_\alpha}) = (5\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} - 7M_{\hat{\Sigma}_\alpha} - 4\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}) \sin^2 \delta_\alpha.$$

$$(63) \quad (M_{\Sigma_\alpha} - \mu_{\Sigma_\alpha})(3 - 2 \sin^2 \delta_\alpha) = \\ = \{2\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}(1 + \sin^2 \delta_\alpha) - M_{\hat{\Sigma}_\alpha}(3 + 2 \sin^2 \delta_\alpha) - (\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} + \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha})\} \sin^2 \delta_\alpha.$$

$\mathbf{T}_8$ — La media aritmetica di m_α e $m_{\tilde{\alpha}}$ (n. 10) si esprime linearmente nelle medie delle curvature (semplici e miste), relative ai sistemi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$ di 2-spazi caratteristici. Si ha precisamente

$$(64) \quad (m_\alpha + m_{\tilde{\alpha}}) \cos \delta_\alpha = (2\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} \sin^2 \delta_\alpha - \mu_{\Sigma_\alpha}) \cos^2 \delta_\alpha - (M_{\hat{\Sigma}_\alpha} \sin^2 \delta_\alpha - M_{\Sigma_\alpha})(1 + 2 \cos^2 \delta_\alpha).$$

Per stabilire $\mathbf{T}_7$ si procede così.

Si denoti anzitutto con $(\widetilde{42})$ l'uguaglianza analoga alla (42), relativa però ad $\tilde{\alpha}$, tenendo conto anche delle osservazioni del n. 16. Si considerino poi le uguaglianze (40), (38), (42), $(\widetilde{42})$, (52), sostituendo in esse a $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}$ l'espressione a secondo membro della (57).

Ciò premesso si prova che le forme lineari nelle variabili m_α , $m_{\tilde{\alpha}}$, K_α , $K_{\tilde{\alpha}}$, che figurano nelle accennate uguaglianze, sono *dipendenti*. Anzi, poichè il rango della corrispondente matrice è 3, si possono determinare tra queste forme lineari *due relazioni indipendenti*.

Per questa via, utilizzando prima le (40), (38), (52), poi le (40), (38), (42), $(\widetilde{42})$, e tenendo conto anche della (56), si perviene, rispettivamente, alle relazioni (62) e (63) del Teorema $\mathbf{T}_7$.

La dimostrazione di $\mathbf{T}_8$ è più semplice. Basta infatti eliminare tra le (38), (40) l'espressione $K_\alpha + 2\chi_{\alpha\tilde{\alpha}} + K_{\tilde{\alpha}}$, per giungere alla (64).

Convien ancora aggiungere una osservazione. Dalla accennata dimostrazione di $\mathbf{T}_7$ risulta che *ogni altra relazione lineare nelle medie relative ai sistemi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$ è una combinazione lineare delle (62), (63)*. In particolare, eliminando tra queste $M_{\Sigma_\alpha} - \mu_{\Sigma_\alpha}$, si ottiene la *relazione*

$$(65) \quad (6M_{\hat{\Sigma}_\alpha} - 5\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha})(1 - 4 \sin^2 \delta_\alpha) = 5(\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} + \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}) - 4\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}(1 + 2 \cos^2 \delta_\alpha),$$

utile nel seguito.

19. – Casi particolari.

Si consideri dapprima l'ipotesi che il 2-spazio α sia *a prodotto hermitiano reale* (n. 3). Risulta allora $\delta_\alpha = \pi/2$ (n. 4) e pertanto le espressioni delle medie μ , M , ottenute nei n. 10, 11, 12, 13, 14 si semplificano. Lo stesso accade per le uguaglianze dei n. 17, 18.

Convien sottolineare due risultati

T₉ – *La curvatura K_α di un 2-spazio α p.h.r. si esprime linearmente nelle medie delle curvature semplici relative ai sistemi di 2-spazi p.h.r. $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$. Precisamente*

$$(66) \quad K_\alpha = 2\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} - \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}^*.$$

T₁₀ – *Se α è p.h.r., le medie delle curvature miste, relative ai sistemi di 2-spazi caratteristici Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$, sono uguali. Cioè*

$$(67) \quad M_{\Sigma_\alpha} = M_{\hat{\Sigma}_\alpha}.$$

Le (66), (67) seguono subito dalle (59), (64).

Anche se, a partire dal n. 10, esclusa esplicitamente dalle considerazioni, conviene ora, per completezza, esaminare l'ipotesi che il 2-spazio α sia *caratteristico* (n. 2). Si vede subito, allora, che i sistemi Σ_α , $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$, $\hat{\Sigma}_\alpha$ degenerano nel 2-spazio α stesso oppure perdono significato.

Le relazioni dei n. 10, 11, 12, 13, 14, concernenti le medie μ , M , m , si riducono nell'ipotesi attuale ($\delta_\alpha = 0$) a banali identità ⁽²¹⁾. Lo stesso avviene per le uguaglianze dei n. 15, 17, 18, salvo per la (65) che perde senso ⁽²²⁾.

20. – Isotropia in media e J -isotropia.

Per le varietà quasi hermitiane V si possono considerare, in ogni punto x , le ipotesi di *isotropia* e di *isotropia caratteristica* ⁽²³⁾. Nel primo caso si richiede che, per ogni 2-spazio α di τ , la curvatura K_α sia *costante*; nel secondo si richiede soltanto che K_α sia *costante sui 2-spazi caratteristici*.

Esistono però altre possibilità interessanti. Si può ad esempio richiedere che, per ogni α di τ , sia *costante la media aritmetica di K_α e $K_{\tilde{\alpha}}$ (isotropia in media)*, oppure che sia *costante la curvatura mista $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}$ (J -isotropia)*.

⁽²¹⁾ Occorre preventivamente scriverle nella forma originaria, eliminando le eventuali potenze negative di $\sin \delta_\alpha$. Convien inoltre ragionare sulla (33) anzichè sull'equivalente (36).

⁽²²⁾ Per la (54) del n. 15 conviene preventivamente moltiplicare membro a membro per

$$\sin^2 \delta_\alpha = \sin^2 u\tilde{v} = \sin^2 v\tilde{u} = \sin^2 x\tilde{y} = \sin^2 y\tilde{x},$$

e far intervenire il tensore R di RIEMANN (n. 9).

⁽²³⁾ Per il caso particolare delle varietà kähleriane si veda p. es. G. B. RIZZA [8], n. 6.

Convieni notare subito che l'*isotropia implica l'isotropia in media* e che tanto l'*isotropia in media quanto la J-isotropia implicano l'isotropia caratteristica* ⁽²⁴⁾.

Sussistono poi i teoremi

T₁₁ — Se in un punto x di V si ha isotropia in media, sussistono le uguaglianze

$$\mu_{\Sigma_\alpha} = \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = \frac{1}{2}(\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} + \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}) = \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = c,$$

$$M_{\Sigma_\alpha} = \frac{c}{2}(1 + \cos^2 \delta_\alpha), \quad M_{\hat{\Sigma}_\alpha} = M_{\hat{\Sigma}_\alpha} = \frac{c}{2}, \quad \frac{1}{2}(m_\alpha + m_{\tilde{\alpha}}) = c \cos \delta_\alpha,$$

dove c è la costante di isotropia.

T₁₂ — Se in un punto x di V si ha *J-isotropia*, sussistono le uguaglianze

$$\mu_{\Sigma_\alpha} = \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = c, \quad \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = -2c,$$

$$M_{\Sigma_\alpha} = \frac{c}{2}(2 + \sin^2 \delta_\alpha), \quad M_{\hat{\Sigma}_\alpha} = -\frac{3}{2}c,$$

dove c è la costante di isotropia.

T₁₃ — Se in un punto x di V si ha isotropia in media, risulta

$$(68) \quad \chi_{\alpha\tilde{\alpha}} = c \cos^2 \delta_\alpha,$$

dove c è la costante di isotropia.

I teoremi ora enunciati asseriscono in sostanza che, in ipotesi di isotropia in media e di *J-isotropia*, molte delle medie considerate in questo lavoro risultano *costanti*. Le espressioni M_{Σ_α} , $\frac{1}{2}(m_\alpha + m_{\tilde{\alpha}})$, $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}$ dipendono invece dalla deviazione caratteristica δ_α del 2-spazio in considerazione ed assumono i *valori estremi in corrispondenza ai 2-spazi caratteristici* ($\delta_\alpha = 0$) e p.h.r. ($\delta_\alpha = \pi/2$).

Se in un punto x di V si ha addirittura *isotropia*, sussistono naturalmente le uguaglianze di **T₁₁** e la (68) di **T₁₃**. Si può anzi aggiungere che

$$(69) \quad \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = c, \quad m_\alpha = c \cos \delta_\alpha.$$

21. — Dimostrazioni.

Per stabilire i Teoremi **T₁₁** e **T₁₃** si procede così. L'ipotesi è che, per ogni α di τ sia

$$(70) \quad \frac{1}{2}(K_\alpha + K_{\tilde{\alpha}}) = c.$$

⁽²⁴⁾ Se α è caratteristica, $\alpha = \tilde{\alpha}$, onde $K_{\tilde{\alpha}} = \chi_{\alpha\tilde{\alpha}} = \chi_{\alpha\alpha} = K_\alpha$.

Poichè, come si è notato, l'ipotesi implica isotropia caratteristica, segue subito l'asserto per μ_{Σ_α} e $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$. Per valutare $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} + \mu_{\hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}}$, si utilizzano le (14), (5), (n. 7, 5) con riferimento ad α e ad $\tilde{\alpha}$.

Assunta in $\tilde{\alpha}$ come base ortonormale $\tilde{u}, \tilde{v}$ si riconosce subito che la coppia di parametri φ, ψ che individua il 2-spazio generico ϱ di $\hat{\Sigma}_\alpha$ (n. 13), dà luogo nel secondo caso al 2-spazio $\tilde{\varrho}$ di $\hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}$. Si ha allora

$$\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} + \mu_{\hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} K_\varrho d\psi + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} K_{\tilde{\varrho}} d\psi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (K_\varrho + K_{\tilde{\varrho}}) d\psi = 2c.$$

Lo stesso ragionamento si conduce per $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}^*$ e per $\mu_{\hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}}^*$ notando che, in virtù della (55) del n. 16, risulta $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}^* = \mu_{\hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}}^*$, $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = \mu_{\hat{\Sigma}_{\tilde{\alpha}}}^{(25)}$.

A questo punto, dalla (60) si ricava $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}$; successivamente, dalle (62), (64) si ottengono M_{Σ_α} ed m_α . Infine, dalle (56), (57) si ricavano $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}^*$ e $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}$.

Per stabilire il Teorema **T**₁₂, si ricordi che l'ipotesi

$$(71) \quad \chi_{\alpha\tilde{\alpha}} = c,$$

per ogni α , implica isotropia caratteristica; di qui segue l'asserto per μ_{Σ_α} e $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}$.

Dalla (24) del n. 9 segue $\chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}} = c(1 + \sin^2 \delta_\alpha)$ e ciò consente di ricavare M_{Σ_α} dalla (30). Il sistema delle (56), (57) conduce poi a $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}^*$ ed a $M_{\hat{\Sigma}_\alpha}^*$.

Si noti infine che, nell'ipotesi di isotropia, considerata alla fine del n. 20 la prima delle (69) è immediata; la seconda segue subito dalla (59) del Teorema **T**₃.

22. – Teoremi tipo Schur.

In questo numero si mostra come condizioni locali di « isotropia » possano dare indicazioni di natura globale. Precisamente sussiste il teorema

T₁₄ – *Se in ogni punto x di V si ha isotropia in media e J -isotropia, allora le costanti di isotropia (a priori dipendenti da x) sono entrambe nulle.*

È interessante anche il corollario

C₁ – *Se in ogni punto x di V , si ha isotropia e J -isotropia, V è localmente euclidea.*

Le ipotesi del Teorema **T**₁₄ possono essere attenuate in virtù di questo risultato

T₁₅ – *Se in un punto x di V , la media aritmetica di K_α e $K_{\tilde{\alpha}}$ e la curvatura mista $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}}$ sono costanti per ogni α caratteristico o p.h.r., si ha isotropia in media e J -isotropia, anzi la media e la curvatura considerate sono entrambe nulle per ogni α .*

(25) Il risultato relativo a $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}^*$ può anche dedursi direttamente dalla (54) del n. 15.

L'ipotesi del Teorema $\mathbf{T}_{14}$ è

$$(72) \quad \frac{1}{2}(K_\alpha + K_{\tilde{\alpha}}) = c_1, \quad \chi_{\alpha\tilde{\alpha}} = c_2,$$

con c_1, c_2 costanti per ogni α . Se in particolare α è caratteristico ($\alpha = \tilde{\alpha}$) risulta $c_1 = c_2 = c$. Confrontando i risultati dei Teoremi $\mathbf{T}_{11}$ e $\mathbf{T}_{12}$, segue subito $c = 0$ e cioè l'asserto ⁽²⁶⁾.

Nell'ipotesi di $\mathbf{C}_1$, denotata con c_1 la costante di isotropia, poichè $\frac{1}{2}(K_\alpha + K_{\tilde{\alpha}}) = K_\alpha = c_1$, dal Teorema $\mathbf{T}_{14}$ segue $K_\alpha = 0$ per ogni α , cioè l'asserto.

Per stabilire il Teorema $\mathbf{T}_{15}$ si procede così. Per ipotesi sussistono le (72) con α caratteristico ovvero a prodotto hermitiano reale. In particolare, se α è caratteristico ($\alpha = \tilde{\alpha}$), risulta $c_1 = c_2 = c$; si ha pure $\mu_{\Sigma_\alpha} = \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha} = c$, i sistemi $\Sigma_\alpha, \hat{\Sigma}_\alpha$ essendo costituiti da 2-spazi caratteristici. Si utilizzi ora la prima delle (72) con riferimento ai 2-spazi p.h.r. di $\hat{\Sigma}_\alpha$ e di $\hat{\hat{\Sigma}}_\alpha$; il ragionamento sviluppato al n. 21 nella dimostrazione del Teorema $\mathbf{T}_{11}$ porta a concludere che $\mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}^* = \mu_{\hat{\hat{\Sigma}}_\alpha} = c$.

Ciò premesso, dalla (60) segue subito che $M_{\hat{\Sigma}_\alpha} = c/2$ sui 2-spazi p.h.r.; in virtù della (67) del Teorema $\mathbf{T}_{10}$ si ha $M_{\Sigma_\alpha} = c/2$ per ogni α p.h.r.

D'altra parte, utilizzando la seconda delle (72) con riferimento ai 2-spazi p.h.r., dalle (24) del n. 9 segue che $\chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}} = 2c$, per ogni α (con base ortonormale u, v) a prodotto hermitiano reale. Dalla (30) del n. 10 discende subito $M_{\Sigma_\alpha} = \frac{3}{2}c$ per ogni α p.h.r. Il confronto col risultato precedentemente ottenuto permette di concludere che $c = 0$.

Si considerino dunque le (72) con $c_1 = c_2 = 0$ ed α caratteristico o p.h.r. Dalla (29) del n. 10 segue $\chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}} = 0$ per ogni α (con base ortonormale u, v) ⁽²⁷⁾.

Dalle (30), (36) segue $M_{\Sigma_\alpha} = M_{\hat{\Sigma}_\alpha} = 0$ per ogni α e poichè, come si è visto, è anche $\mu_{\Sigma_\alpha} = \mu_{\hat{\Sigma}_\alpha}^* = 0$, dalla (57) del n. 17 segue subito $\chi_{\alpha\tilde{\alpha}} = 0$ per ogni α .

Infine, tenuto conto dei risultati già ottenuti, dalla (62) del n. 18 deriva $M_{\hat{\Sigma}_\alpha} = 0$ per ogni α ; successivamente, dalla (60) segue $\frac{1}{2}(K_\alpha + K_{\tilde{\alpha}}) = 0$ per ogni α . Il Teorema $\mathbf{T}_{15}$ è dunque dimostrato.

23. - Caso kähleriano.

Si consideri ora il caso particolare in cui V sia una varietà kähleriana ⁽²⁸⁾.

Poichè, come è noto ⁽²⁹⁾, in questa ipotesi, per ogni quaterna di vettori u, v, x, y di τ risulta

$$R(uvxy) = R(uv\tilde{x}\tilde{y}),$$

⁽²⁶⁾ Alla stessa conclusione si perviene confrontando la (71) con la (68) del teorema $\mathbf{T}_{13}$.

⁽²⁷⁾ I 2-spazi $u\tilde{v}$ e $v\tilde{u}$ sono p.h.r. (n. 3) e corrispondenti nella J .

⁽²⁸⁾ Per le generalità sulle varietà kähleriane vedi p. es. K. YANO [11], ch. 4; S. KOBAYASHI - K. NOMIZU [4], II, p. 149-178.

⁽²⁹⁾ Vedi p. es. K. YANO [11], (1.10), p. 71; S. KOBAYASHI - K. NOMIZU [4], II, p. 165.

tenute presenti le classiche proprietà del tensore R di RIEMANN, le definizioni (21), (20) del n. 9 e la (1) del n. 3, si perviene subito alla *relazione*

$$(73) \quad \chi_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\bar{\beta}} = \chi_{\bar{\alpha}\beta} = \chi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}};$$

in particolare, se $\beta = \alpha$, si ottiene la *relazione*

$$(74) \quad K_{\alpha} = \chi_{\alpha\bar{\alpha}} = K_{\bar{\alpha}}.$$

Ciò premesso, conviene segnalare qualche risultato.

T₁₆ — Se V è una varietà kähleriana, le medie m_{α} e $\mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$ (n. 10, 13) sono J -invarianti, cioè

$$(75) \quad m_{\alpha} = m_{\bar{\alpha}}, \quad \mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}} = \mu_{\hat{\Sigma}_{\bar{\alpha}}},$$

e la media $M_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$ delle curvature miste dei 2-spazi p.h.r. del sistema $\hat{\Sigma}_{\alpha}$ del n. 11 è nulla.

Il primo risultato completa nell'ipotesi attuale le ultime considerazioni del n. 16; il secondo va invece avvicinato ai Teoremi **T₁**, **T₂** relativi anch'essi a sistemi di 2-spazi p.h.r. (n. 13, 14).

Ancora, sulle varietà kähleriane, la curvatura K_{α} di un qualunque 2-spazio α si esprime in modo estremamente semplice in funzione delle curvature (semplici e miste) dei 2-spazi caratteristici di Σ_{α} , ovvero in funzione delle curvature semplici dei 2-spazi (rispettivamente caratteristici e p.h.r.) dei sistemi Σ_{α} e $\hat{\Sigma}_{\alpha}$. Precisamente risulta

T₁₇ — Se V è una varietà kähleriana, per ogni 2-spazio α di τ sussiste la relazione

$$(76) \quad K_{\alpha} = 3M_{\Sigma_{\alpha}} - 2\mu_{\Sigma_{\alpha}} = \mu_{\Sigma_{\alpha}} - 3\mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}} \sin^2 \delta_{\alpha}.$$

La prima uguaglianza è nota ⁽³⁰⁾.

Infine, nell'ipotesi attuale, le medie $M_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$, $M_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$, $M_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$ relative alle curvature miste, sono nulle (Teoremi **T₁₆**, **T₁**, **T₂**); le medie $\mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$, $\mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$, $\mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$, relative alle curvature semplici intervengono invece nel Teorema

T₁₈ — Se V è una varietà kähleriana, per le medie $\mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$, $\mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$, $\mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$, concernenti i sistemi $\hat{\Sigma}_{\alpha}$, $\hat{\Sigma}_{\alpha}$, $\hat{\Sigma}_{\alpha}$, di 2-spazi p.h.r., risulta

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}} \sin^2 \delta_{\alpha} &= \mu_{\Sigma_{\alpha}} - M_{\Sigma_{\alpha}}, \\ \mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}} \sin^2 \delta_{\alpha} &= (\mu_{\Sigma_{\alpha}} - M_{\Sigma_{\alpha}}) \cos^2 \delta_{\alpha} + (\mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}} - M_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}) \sin^4 \delta_{\alpha}, \\ \mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}} \sin^2 \delta_{\alpha} &= \frac{3}{4} (\mu_{\Sigma_{\alpha}} - M_{\Sigma_{\alpha}}) + \frac{1}{4} (\mu_{\hat{\Sigma}_{\alpha}} - M_{\hat{\Sigma}_{\alpha}}) \sin^2 \delta_{\alpha}. \end{aligned}$$

⁽³⁰⁾ G. B. RIZZA [8], p. 85.

Sussiste quindi la relazione

$$(77) \quad \mu_{\Sigma_\alpha} - \mu_{\Sigma_\alpha}^* = 4(\mu_{\Sigma_\alpha}^\Delta - \mu_{\Sigma_\alpha}^*) \sin^2 \delta_\alpha.$$

Per stabilire $\mathbf{T}_{16}$, si osservi che, in virtù della (73), dalle (31), (30) del n. 10 seguono immediatamente la prima delle (75) ed $M_{\Sigma_\alpha}^* = 0$. La seconda delle (75) si ottiene poi facilmente, ricordando una osservazione del n. 21 e tenendo presente la (74).

Dalle (57), (56), a causa della (74) e del fatto che, come si è visto $M_{\Sigma_\alpha}^* = 0$, si deduce poi la (76) del Teorema $\mathbf{T}_{17}$.

Infine, nel Teorema $\mathbf{T}_{18}$, la prima uguaglianza scende subito dalla (56). Per le due successive si osservi anzitutto che, in virtù delle (74), (76), la (61) del n. 17 diviene

$$(78) \quad \mu_{\Sigma_\alpha} - M_{\Sigma_\alpha} = (3M_{\Sigma_\alpha}^* - 2\mu_{\Sigma_\alpha}^*) \sin^2 \delta_\alpha;$$

l'asserto segue facilmente dalle (63), (62) del n. 18, tenendo presente la (78). La (77) poi è immediata conseguenza delle tre uguaglianze che la precedono.

I risultati enunciati in questo numero sono ora dimostrati.

Convien ancora aggiungere qualche osservazione.

Per le varietà kähleriane le relazioni (53), (30) (n. 15, 10), che esprimono le medie μ_{Σ_α} , M_{Σ_α} in funzione delle curvature (semplici e miste) di quattro 2-spazi caratteristici di Σ_α , sono note ⁽³¹⁾. In altri termini, in questo lavoro si riconosce che le formule note nel caso kähleriano restano *inalterate* passando al caso più generale della varietà quasi hermitiane.

Si noti infine che, a norma della (74), *sulle varietà kähleriane l'isotropia in media e la J-isotropia* (introdotta al n. 20) *equivalgono all'isotropia*. Di conseguenza, il Teorema $\mathbf{T}_{14}$ e il corollario $\mathbf{C}_1$ si riducono ad un noto teorema di S. BOCHNER ⁽³²⁾.

Il Teorema $\mathbf{T}_{15}$ consente poi di attenuare ulteriormente l'ipotesi del teorema ora accennato. Precisamente

$\mathbf{T}_{19}$ – *Se in ogni punto x di una varietà kähleriana V la curvatura K_x è costante per ogni 2-spazio α caratteristico o a prodotto hermitiano reale, allora V è localmente euclidea.*

⁽³¹⁾ G. B. RIZZA [8], p. 86.

⁽³²⁾ Vedi p. es. K. YANO - S. BOCHNER [12], p. 129.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BOMPIANI, *Spazi riemanniani luoghi di varietà totalmente geodetiche*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **48** (1924).
- [2] M. BRUNI, *Su alcuni sistemi di sottospazi di uno spazio hermitiano*, Rend. Mat. Roma, **20** (1961).

-
- [3] S. I. GOLDBERG - S. KOBAYASHI, *Holomorphic bisectional curvature*, J. Differential Geometry, **1** (1967).
 - [4] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundation of differential Geometry*, I e II, Interscience Publ., New York, 1963 e 1969.
 - [5] E. MARTINELLI, *Metrica hermitiana e metrica euclidea e simplettica associate*, Rend. Mat. Roma, **6**, **2** (1969).
 - [6] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*, Rend. Lincei, **8**, **24** (1958).
 - [7] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica e proprietà locali delle $2q$ -faccette di una V_{2n} a struttura complessa*, Rend. Acc. Naz. dei XL, **4**, **10** (1959).
 - [8] G. B. RIZZA, *Sulla curvatura delle faccette di una varietà kähleriana*, Rend. Lincei, **47** (1959).
 - [9] G. B. RIZZA, *Sulle connessioni di una varietà quasi complessa*, Ann. di Mat., **6**, **68** (1965).
 - [10] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, Springer, Berlin, 1954.
 - [11] K. YANO, *Differential Geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
 - [12] K. YANO - S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, Ann. of Math. Studies n. 32, Princeton Univ. Press, 1953.
-