La convergenza in media del quarto ordine dei polinomi di interpolazione di Lagrange relativi ad un particolare sistema di punti interpolanti.

Nota di LUIGI MERLI (a Firenze) (*).

Sunto. - Sia $\{L_n(x)\}$ la successione dei polinomi di LAGRANGE che interpolano $f(x)$, $-1 \leq x \leq 1$,

negli zeri del polinomio di JACOBI $I_n\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$, $x = \cos \theta$, relativo al

peso $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. L'A. dimostra che se $f(x)$ soddisfa ad una condizione di LIPSCHITZ

di ordine $\alpha > \frac{1}{4}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} (f(x) - L_n(x))^4 dx = 0.$$

1. Consideriamo il polinomio di LAGRANGE

$$(1) \quad L_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k^{(n)}(x),$$

dove

$$(1') \quad l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x - x_k)}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\omega_n(x) = C \prod_{s=1}^n (x - x_s) \quad (C \neq 0),$$

che, come è noto, dà il polinomio interpolante di grado non superiore ad $n-1$, che negli n punti $x_1, x_2, \dots, x_n$, prende rispettivamente i valori

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \quad (1).$$

Alcuni Autori, come G. SZEGÖ⁽²⁾, P. ERDÖS e P. TURÁN⁽³⁾, hanno provato che se la (1) è costruita sugli zeri dei polinomi ortogonali $\{\omega_n(x)\}$ relativi

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(1) Cfr. per es. E. FELDHEIM, *Théorie de la convergence des procédés d'interpolation etc.*, « Mem. Sc. Math. », 95 (1939), pag. 3.

(2) G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, « Am. Math. Coll. Publ. », XXIII (1939), pag. 326.

(3) P. ERDÖS e P. TURÁN, *On interpolation I*, « Annals of Mathem. », 38 (1937), pagine 145-155.

ad un peso $p(x) \geq 0$, ha luogo la convergenza in media di ordine 2, relativa a tale peso, per tutte le funzioni $f(x)$ continue; si ha cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 p(x) [f(x) - L_n(x)]^2 dx = 0.$$

Recentemente E. FELDHEIM ⁽⁴⁾, passando oltre in tale tipo di ricerche, si è occupato della convergenza in media di ordine 4; di studiare cioè quando vale la relazione

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 p(x) [f(x) - L_n(x)]^4 dx = 0,$$

ed ha provato che, contrariamente a quanto avviene per la convergenza in media di ordine 2, essa non è vera in generale. Egli ha infatti dimostrato che la (2) vale, per tutte le funzioni continue, se i punti di interpolazione sono gli zeri dei polinomi di IACOBI $\omega_n(x) = I_n\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right)$, ma non in generale per i polinomi $I_n(\alpha, \beta, x)$ con $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, $\beta \neq -\frac{1}{2}$ ⁽⁵⁾.

Noi studieremo in questa Nota il caso del polinomio $\omega_n(x) = I_n\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right)$ e daremo delle condizioni sufficienti cui deve soddisfare la funzione $f(x)$, oltre alla semplice continuità, perchè valga ancora la (2) e dimostreremo precisamente il teorema:

Se $f(x)$ è una qualunque funzione che soddisfa ad una condizione di LIPSCHITZ di ordine $\alpha > \frac{1}{4}$ ed $\{L_n(x)\}$ indica la successione dei polinomi di inter-

⁽⁴⁾ E. FELDHEIM, *Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales et sur la forte convergence en moyenne des polynômes d'interpolation de Lagrange etc.*, « Bull. de la Soc. Math. de France », LXV (1937), pagg. 1-40.

⁽⁵⁾ I polinomi di IACOBI $I_n(\alpha, \beta, x)$, com'è noto, soddisfano l'equazione differenziale

$$(1-x^2)I_n'(x, \beta, x) + [(\beta-\alpha) - (\beta+\alpha+2)x]I_n'(x, \beta, x) + n(n+\alpha+\beta+1)I_n(x, \beta, x) = 0$$

e sono ortogonali, per $\alpha > -1$, $\beta > -1$, rispetto alla funzione peso $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

Il polinomio $I_n\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right)$ è detto polinomio di THEBYCHEFF di 1^a specie ed ha la forma trigonometrica semplicissima $I_n\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right) = \cos n\theta$, $x = \cos \theta$. Sono di 2^a specie i polinomi $I_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x\right) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$, $x = \cos \theta$. Noi considereremo nella presente Nota il polinomio

$$I_n\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad x = \cos \theta \quad \text{che abbiamo già avuto occasione di studiare in al-$$

cune Note precedenti. [Cfr. per es.: L. MERLI, *Sulla convergenza in media della formula di interpolazione di Hermite etc.*, « Giorn. Ist. It. Attuari », XII (1941), pagg. 1-6].

polazione di LAGRANGE, relativa a tale funzione e costruita sugli zeri del polinomio $I_n\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right)$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} [f(x) - L_n(x)]^4 dx = 0 \quad (6).$$

2. Il polinomio $\omega_n(x) = I_n\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $x = \cos \theta$,

che noi consideriamo, ha gli zeri nei punti dell'intervallo $(-1, 1)$

$$x_k = \cos \theta_k, \quad \theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ed è relativo al peso

$$p(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Essendo

$$\omega_n'(x) = I_n'\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right) = - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta}$$

e perciò

$$\omega_n'(x_k) = (-1)^{k+1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sin \frac{\theta_k}{2} \sin \theta_k},$$

si ha, tenuto conto della (1'),

$$(1'') \quad l_k^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \sin \frac{\theta_k}{2} \sin \theta_k}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} (\cos \theta - \cos \theta_k)}, \quad x = \cos \theta.$$

(6) È noto [cfr. G. SZEGÖ, op. cit. in (2), pag. 328] che se la successione $\{L_n(x)\}$ è costruita sugli zeri di $I_n\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right)$ ed $f(x)$ ha derivata continua, si ha uniformemente nell'intervallo $(-1, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = f(x).$$

In tali condizioni si avrà anche, evidentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 p(x) [f(x) - L_n(x)]^4 dx = 0;$$

scopo di questa Nota è lo studio di tale limite indipendentemente dalla derivabilità di $f(x)$.

Osserviamo, in primo luogo, che se $P_{n-1}(x)$ indica un polinomio di grado $\leq n-1$, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(x)[f(x) - L_n(x)]^4 dx &= \int_{-1}^1 p(x)[f(x) - P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - L_n(x)]^4 dx \leq \\ &\leq 8 \int_{-1}^1 p(x)[f(x) - P_{n-1}(x)]^4 dx + 8 \int_{-1}^1 f(x)[P_{n-1}(x) - L_n(x)]^4 dx = \\ &= 8 \int_{-1}^1 p(x)[f(x) - P_{n-1}(x)]^4 dx + 8 \int_{-1}^1 p(x) \left[\sum_{k=1}^n P_{n-1}(x_k) l_k^{(n)}(x) - \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k^{(n)}(x) \right]^4 dx = \\ &= 8 \int_{-1}^1 p(x)[f(x) - P_{n-1}(x)]^4 dx + 8 \int_{-1}^1 p(x) \left[\sum_{k=1}^n [P_{n-1}(x_k) - f(x_k)] l_k^{(n)}(x) \right]^4 dx, \end{aligned}$$

e posto

$$(3) \quad \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_{n-1}(x)| = \Delta,$$

si avrà:

$$(3') \quad \int_{-1}^1 p(x)[f(x) - L_n(x)]^4 dx \leq 8\pi\Delta^4 + 8\Delta^4 \int_{-1}^1 p(x) \left| \sum_{k=1}^n l_k^{(n)}(x) \right|^4 dx = 8\Delta^4 [\pi + I(n)],$$

avendo posto

$$I(n) = \int_{-1}^1 p(x) \left| \sum_{k=1}^n l_k^{(n)}(x) \right|^4 dx.$$

Tenuto conto della (1'') avremo allora, nel nostro caso,

$$I(n) = 2 \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \sin \frac{\theta_k}{2} \sin \theta_k}{\left(n + \frac{1}{2} \right) (\cos \theta - \cos \theta_k)} \right| \right)^4 d\theta.$$

Essendo

$$\sin \theta_k \leq 2 \sin \frac{\theta + \theta_k}{2},$$

si avrà:

$$I(n) \leq 2 \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \sin \frac{\theta_k}{2}}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \frac{\theta - \theta_k}{2}} \right| \right)^4 d\theta.$$

Scindiamo ora l'intervallo di integrazione nei due intervalli parziali $(0, \frac{\theta_1}{2})$, $(\frac{\theta_1}{2}, \pi)$ e posto

$$I_1(n) = \int_0^{\frac{\theta_1}{2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n \left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \sin \frac{\theta_k}{2}}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \frac{\theta - \theta_k}{2}} \right|^4 \right\} d\theta,$$

$$I_2(n) = \int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n \left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \sin \frac{\theta_k}{2}}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \frac{\theta - \theta_k}{2}} \right|^4 \right\} d\theta,$$

avremo:

$$(4) \quad I(n) \leq 2[I_1(n) + I_2(n)].$$

3. *Maggiorazione di $I_1(n)$ e di $I_2(n)$.*

a) Essendo

$$\left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \leq 2n + 1,$$

tenuto conto che è, in generale,

$$\left\{ \sum_{k=1}^n |a_k| \right\}^4 \leq n^3 \sum_{k=1}^n a_k^4,$$

avremo:

$$I_1(n) \leq \frac{n^3}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^4} \int_0^{\frac{\theta_1}{2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^4 \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \sin^4 \frac{\theta_k}{2}}{\sin^4 \frac{\theta - \theta_k}{2}} d\theta \leq \frac{16n^3\pi}{(2n+1)^3} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^4 \frac{\theta_k}{2}}{\sin^4 \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_1}{2} - \theta_k \right)}.$$

Valutiamo ora quest'ultima somma. Essendo (per $0 < x < \frac{\pi}{2}$) $1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^4 \frac{\theta_k}{2}}{\sin^4 \frac{\frac{\theta_1}{2} - \theta_k}{2}} &\leq \frac{1}{16} \sum_{k=1}^n \frac{\theta_k^4}{\sin^4 \frac{\frac{\theta_1}{2} - \theta_k}{2} \cdot \left(\frac{\frac{\theta_1}{2} - \theta_k}{2} \right)^4 \cdot \left(\frac{2}{\frac{\theta_1}{2} - \theta_k} \right)^4} \leq \\ &\leq \frac{\pi^4}{16} \sum_{k=1}^n \frac{\theta_k^4}{\left(\frac{\theta_1}{2} - \theta_k \right)^4} = \frac{\pi^4}{16} \sum_{k=1}^n \frac{(2k\pi)^4}{(\pi - 2k\pi)^4} = \frac{\pi^4}{16} \sum_{k=1}^n \frac{16k^4}{(2k-1)^4} \leq \pi^4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{k} \right)^4} \leq \pi^4 n. \end{aligned}$$

Avremo perciò:

$$(5) \quad I_1(n) \leq C_1 n,$$

con C_1 costante assoluta indipendente da n .

b) Consideriamo ora

$$I_2(n) = \int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \operatorname{sen} \frac{\theta_k}{2}}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\theta - \theta_k}{2}} \right|^4 d\theta.$$

Essendo

$$\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta = (-1)^{2n+1} \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) (\theta - \theta_k),$$

avremo:

$$I_2(n) \leq \int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) (\theta - \theta_k)}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\theta - \theta_k}{2}} \right|^4 d\theta.$$

Maggioriamo ora la somma dentro il segno di integrale. Sia R un intero scelto tra $1, 2, \dots, n$; facendo variare θ in $\left(\theta_R - \frac{\theta_1}{2}, \theta_R + \frac{\theta_1}{2} \right)$, ($R = 1, 2, \dots, n$), si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\operatorname{sen} (2n+1) \frac{\theta - \theta_k}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta - \theta_k}{2}} \right| &= \sum_{k=1}^{R-1} \left| \frac{\operatorname{sen} (2n+1) \frac{\theta - \theta_k}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta - \theta_k}{2}} \right| + \left| \frac{\operatorname{sen} (2n+1) \frac{\theta - \theta_R}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta - \theta_R}{2}} \right| + \\ &+ \sum_{k=R+1}^n \left| \frac{\operatorname{sen} (2n+1) \frac{\theta - \theta_k}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta - \theta_k}{2}} \right| \leq \sum_{k=1}^{R-1} \frac{1}{\left| \operatorname{sen} \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|} + (2n+1) + \sum_{k=R+1}^n \frac{1}{\left| \operatorname{sen} \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{R-1} \frac{1}{\left| \operatorname{sen} \left(\theta_R - \frac{\theta_1}{2} - \theta_k \right) / 2 \right|} + (2n+1) + \sum_{k=R+1}^n \frac{1}{\left| \operatorname{sen} \left(\theta_R + \frac{\theta_1}{2} - \theta_k \right) / 2 \right|} \leq \\ &\leq \pi \sum_{k=1}^{R-1} \frac{1}{\left| \theta_R - \frac{\theta_1}{2} - \theta_k \right|} + (2n+1) + \pi \sum_{k=R+1}^n \frac{1}{\left| \theta_R + \frac{\theta_1}{2} - \theta_k \right|} = \\ &= \pi (2n+1) \sum_{k=1}^{R-1} \frac{1}{2R - 2k - 1} + (2n+1) + \pi (2n+1) \sum_{k=R+1}^n \frac{1}{2R - 2k + 1}. \end{aligned}$$

Ed essendo $\sum_{s=1}^R \frac{1}{s} < C' \log R$, con C' costante assoluta, sarà:

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) (\theta - \theta_k)}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{(\theta - \theta_k)}{2}} \right| < C'' \log n \quad (').$$

Ma è

$$\int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \left[-\operatorname{cotg} \frac{\theta}{4} \right]_{\frac{\theta_1}{2}}^{\pi} = 2 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2(2n+1)} < C''' \cdot n;$$

per cui sarà, tenuto conto della (6):

$$(7) \quad I_2(n) < C_2 n (\log n)^4, \quad \text{con } C_2 \text{ costante assoluta.}$$

4. Tenuto conto delle (5) e (7), avremo:

$$I(n) \leq C_3 n (\log n)^4 \quad \text{con } C_3 \text{ costante assoluta indipendente da } n.$$

Sarà allora, per la (3'),

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} [f(x) - L_n(x)]^4 dx \leq 8\Delta^4 [\pi + C_3 n (\log n)^4].$$

Sia ora $f(x)$ *lipschitziana* di ordine $\alpha = \frac{1}{4} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, sarà:

$$\Delta = Cn^{-(\frac{1}{4} + \varepsilon)} \quad (8),$$

e quindi,

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} [f(x) - L_n(x)]^4 dx \leq \frac{8[\pi + C_3 n (\log n)^4]}{Cn^{1+4\varepsilon}}, \quad \text{e. v. d.}$$

(') Cfr. D. JACKSON. *The Theory of approximation*, « Am. Math. Coll. Publ. », XI (1930), pag. 120.

(8) Cfr. loc. cit. (4), pagg. 48-49.