A proposito di un teorema di unicità per gli integrali delle equazioni differenziali del primo ordine.

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER (a Padova).

Sunto. - *L'A. indica alcune estensioni di un teorema di* SCORZA DRAGONI *sull'unicità degli integrali di un'equazione differenziale: attenua un'ipotesi di continuità uniforme fatta da questi, sostituendola con una di continuità uniforme generalizzata.*

In questa Nota indico dei criteri di unicità per il problema dei valori iniziali per un'equazione differenziale del tipo $y' = f(x, y)$. Essi mirano ad estendere un teorema di SCORZA DRAGONI ([1]), attenuando l'ipotesi, là fatta, di continuità uniforme della $f(x, y)$ rispetto a y. I teoremi che indico sono due. L'ipotesi di continuità uniforme viene sostituita con una condizione di continuità uniforme generalizzata nel senso che il modulo di continuità di $f(\bar{x}, y)$, rispetto a y, può non essere una funzione limitata di $\bar{x}$.

A proposito del secondo teorema indico un esempio per mostrare che se non sono soddisfatte tutte le ipotesi in esso contemplate il teorema cade in difetto.

I criteri che indico aumentano il contenuto concreto dell'osservazione generale con cui termina la Memoria citata di SCORZA DRAGONI ([2]).

1. TEOREMA I. - Sia $f(x, y)$ una funzione reale di variabili reali definita nella striscia

$$0 \leq x \leq x_1, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

e ivi misurabile rispetto a x e continua rispetto a y.

Esista una funzione non negativa $M(x)$ sommabile nell'intervallo

$$i: 0 \leq x \leq x_1$$

per la quale sia sempre:

$$|f(x, y)| \leq M(x).$$

La $f(x, y)$ soddisfaccia alle diseguaglianze

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq \varphi(x)\omega(y_1 - y_2) \qquad (0 \leq x \leq x_1;\ y_1 > y_2),$$

(1) $$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \psi(x, |y_1 - y_2|) \qquad \left(0 \leq x \leq x_1;\ y_1 \gtrless y_2\right),$$

([1]) G. SCORZA DRAGONI: *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un'equazione differenziale*, [« Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo », (1930), pp. 430-448], pp. 433-439.

([2]) Loc. cit. ([1]), pag. 448.

dove $\varphi(x)$ è definita in i e sommabile in ogni intervallo del tipo $\delta \leq x \leq x_1$, $(0 < \delta < x_1)$; $\omega(u)$ è funzione continua e positiva per ogni $u > 0$ e $\psi(x, |u|)$ è non negativa, sommabile rispetto a x in ogni intervallo del tipo $\rho \leq x \leq x_1$, $(0 < \rho < x_1)$ e non decrescente rispetto a u.

Supponiamo inoltre che, fissato a piacere un numero $\varepsilon > 0$, si possano determinare i numeri positivi δ, ρ, σ, ν in modo che sia

$$\delta < x_1, \qquad \rho < \delta, \qquad \nu < \varepsilon,$$

$$2\int_0^\delta M(x)dx \leq \sigma, \qquad 2\int_0^\rho M(x)dx + \int_\rho^\delta \psi(x, \sigma)dx < \nu,$$

e

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)dx \leq \int_\nu^\varepsilon \frac{du}{\omega(u)},$$

per tutte le coppie di pnnti a_1, a_2 $(a_1 < a_2)$ del segmento $\delta \leq x \leq x_1$.

Nelle ipotesi poste esiste (una ed) una sola soluzione y(x) *che verifica la*

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t))dt \qquad (|y_0| < +\infty). \tag{2}$$

Infatti, supponiamo, se possibile, che $y_0(x)$ e $y_1(x)$ sieno due integrali della (2) e poniamo

$$u(x) = y_0(x) - y_1(x).$$

Fissato a piacere $\varepsilon > 0$, determiniamo i numeri positivi δ, ρ, σ, ν in modo che sia

$$\delta < x_1, \qquad \rho < \delta, \qquad \nu < \varepsilon,$$

$$2\int_0^\delta M(x) \leq \sigma, \qquad 2\int_0^\rho M(x)dx + \int_\rho^\delta \psi(x, \sigma)dx < \nu, \tag{3}$$

e

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)dx \leq \int_\nu^\varepsilon \frac{du}{\omega(u)} \qquad (\delta \leq a_1 < a_2 \leq x_1).$$

Dimostriamo allora che risulta, in tutto $0 \leq x \leq \delta$,

$$|u(x)| < \nu.$$

Infatti, essendo, quasi ovunque, in $0 \leq x \leq x_1$

$$|u'(x)| = |y_0'(x) - y_1'(x)| \leq |f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x))| \leq 2M(x),$$

si trae, tenuto conto della prima delle (3), per $0 \leq x \leq \delta$,

$$|u(x)| \leq \int_0^x |u'(t)|\,dt \leq 2\int_0^\delta M(x)dx \leq \sigma.$$

Da qui, dalla ipotesi della non decrescenza della funzione $\psi(x, |u|)$, rispetto ad u, e dalla (1), si ha, per $0 \leq x \leq \delta$,

$$|u'(x)| \leq \psi(x, \sigma),$$

e perciò ne segue, tenendo presente l'ipotesi fatta sulla $\psi(x, |u|)$ e la seconda delle (3),

$$|u(x)| \leq 2\int_0^\rho M(x)dx + \int_\rho^\delta \psi(x, \sigma)dx < \nu \qquad (0 \leq x \leq \delta).$$

Dopo di che, in base all'ultimo teorema enunciato nel lavoro ricordato di SCORZA DRAGONI, resta dimostrato quanto volevamo provare [3].

OSSERVAZIONE. - Nella ipotesi che la funzione $\psi(x, \sigma)$ sia sommabile in tutto l'intervallo $0 \leq x \leq x_1$ si può, ferme restando tutte le altre condizioni poste, sostituire la seconda delle (3) con la

$$\int_0^\delta \psi(x, \sigma)dx < \nu.$$

2. TEOREMA II. - Sia $f(x, y)$ una funzione reale di variabili reali definita nella striscia $0 \leq x \leq x_1$, $-\infty < y < +\infty$ e si consideri l'equazione

$$y' = f(x, y). \tag{4}$$

Inoltre $y(x)$ e $Y(x)$ verifichino la (4) quasi ovunque in $0 \leq x \leq x_1$. Sieno assolutamente continue in $0 \leq x \leq x_1$ e sia inoltre $y(0) = Y(0) = y_0$, $(|y_0| < +\infty)$.

Per ogni coppia di punti $(x, y(x))$, $(x, Y(x))$ supponiamo verificate le diseguaglianze

$$\begin{aligned} f(x, y(x)) - f(x, Y(x)) &\leq \varphi(x)\omega(y(x) - Y(x)) \qquad \text{se} \quad y(x) > Y(x), \\ f(x, Y(x)) - f(x, y(x)) &\leq \varphi(x)\omega(Y(x) - y(x)) \qquad \text{se} \quad Y(x) > y(x), \\ |f(x, y(x)) - f(x, Y(x))| &\leq \psi_1(x, |y(x) - Y(x)|) \qquad \left(y(x) \gtreqless Y(x)\right), \end{aligned}$$

dove $\varphi(x)$ e $\omega(u)$ hanno il significato chiarito nel teorema precedente e $\psi_1(x, |u|)$ è non negativa e continua rispetto ad u, misurabile rispetto a x e $\psi_1(x, |y(x) - Y(x)|)$ sia sommabile in $0 \leq x \leq x_1$.

---

[3] Il numero δ_2 che lo SCORZA DRAGONI considera ivi può essere posto, nel caso nostro, uguale a zero, perchè noi ci limitiamo a dimostrare direttamente l'unicità delle soluzioni della (2) (da cui, come è noto, nelle nostre ipotesi attuali segue la dipendenza continua; cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* [Leipzig, Teubner, 1918], p. 678).

Supponiamo inoltre che in corrispondenza ad un numero $\varepsilon > 0$ arbitrariamente prefissato, si possano determinare due numeri positivi δ e ν in modo da aversi

$$\delta < x_1, \qquad \nu < \varepsilon,$$

$$\int_0^\delta \psi_1(x, |y(x) - Y(x)|)dx < \nu,$$

e

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)dx \leq \int_\nu^\varepsilon \frac{du}{\omega(u)} \qquad (0 < \delta \leq a_1 < a_2 \leq x_1).$$

In tali ipotesi riesce allora:

$$y(x) = Y(x).$$

in tutto $0 \leq x \leq x_1$.

Questo teorema si dimostra, evidentemente, con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel teorema precedente.

OSSERVAZIONE. - Se si pone $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $\omega(u) = u$, $\psi_1 = \frac{u}{x}$ non è possibile in generale soddisfare alle condizioni del teorema precedente. Ma viene anche meno il teorema di unicità $\Big($si consideri l'esempio fornito dall'equazione $y' = \frac{y}{x}$; esempio che se si vuole si modifica facilmente in modo da ottenerne un'altro in cui il secondo membro dell'equazione sia limitato$\Big)$, se non si fanno delle ipotesi suppletive sulla $f(x, y)$ come la continuità uniforme rispetto ad y (4).

---

(4) A. ROSENBLATT: *Sull'unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.* [« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. VIII (2° semestre, 1928), pp. 41-45]; G. SCORZA DRAGONI, loc. cit. (1), pp. 442-447.