Sur l'emploi de relations globales dans quelques problèmes physiques.

Par N. Théodoresco (à Bucarest).

PREMIÈRE PARTIE

Les problèmes d'équilibre relatifs aux milieux continus ont toujours attiré l'attention des chercheurs autant par leur beauté que par les difficultés qui s'y présentent, et qui semblent différer d'un cas à l'autre.

En effet, malgré leurs origines communes, les divers systèmes d'équations aux dérivées partielles auxquels on ramène l'étude du phénomène, posent des problèmes assez variés.

D'autre part, l'intégration de ces systèmes introduit des conditions gênantes à l'égard des données, ce qui restreint souvent sensiblement le degré de généralité des solutions.

En même temps, un phénomène d'équilibre n'étant pas local mais global, c'est-à-dire intéressant toute portion détachée par la pensée dans le milieu considéré, il ne saurait être exprimé dans toute sa généralité à l'aide des équations aux dérivées partielles.

Les difficultés que nous venons d'énumérer se rencontrent dans toute question physique, et ont été remarquées depuis longtemps.

Elles sont dues en premier lieu à notre façon d'envisager les phénomènes, au passage à la limite auquel on ramène toujours les méthodes de calcul.

Il existe pourtant, à l'heure actuelle, bien des tendances vers une autre interprétation des faits à l'aide de relations globales, comme celles de M. M. G. Bouligand [1] pour le problème de Neumann, Evans [2] pour le problème de Dirichlet, Oseen [3] pour les équations des fluides visqueux.

---

(1) G. Bouligand, *Sur quelques problèmes de la dynamique des fluides*, Paris 1930.

(2) G. C. Evans, *Fundamental points of potential theory*, (« Rice Inst. Pamphlet », vol. 7, 1920).

(3) C. W. Oseen, *Neure Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Leipzig 1927.

1. *Nous nous proposons de montrer comment on peut envisager le problème d'équilibre d'un milieu continu en partant des équations générales sous forme globale, c'est-à-dire en exprimant les théorèmes généraux de la résultante générale et du moment résultant et comment on peut remonter par une voie simple et naturelle de la distribution des forces massiques données à celle des pressions, tensions, vitesses. suivant le cas, en n'introduisant qu'un nombre réduit de restrictions.*

Nous traiterons d'abord le cas du plan, par une méthode qu'on peut rattacher à la *dérivée aréolaire* due à M. D. POMPEIU, sous la forme générale que nous lui avons donnée dans notre Thése [1].

Toutefois, les raisonnements qui vont suivre, n'exigent pas une étude préliminaire de cette notion.

Désignons — suivant les notations classiques — par $X(x, y)$, $Y(x, y)$ les forces massiques données en chaque point intérieur d'un milieu continu et exprimées par deux fonctions bornées et intégrables au sens de M. LEBESGUE.

Soient X_1, Y_1, X_2, Y_2, les efforts s'exerçant sur deux éléments normaux respectivement aux axes ox, oy; on suppose seulement qu'ils sont continus en chaque point du milieu plan envisagé.

On sait que les équations d'équilibre intérieur sont:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&\int_\gamma (\alpha X_1 + \beta X_2) ds = \iint_\delta \rho X d\sigma \\
&\int_\gamma (\alpha Y_1 + \beta Y_2) ds = \iint_\delta \rho Y d\sigma \\
&\int_\gamma [\alpha(xY_1 - yX_1) + \beta(xY_2 - yX_2)] ds = \iint_\delta \rho(xY - yX) d\sigma
\end{aligned}
$$

le contour γ étant simple, rectifiable, doué d'une tangente unique et intérieur au milieu envisagé.

La troisième de ces équations peut être transformée si l'on fait appel à la notion de *dérivée extérieure* [2] de M. CARTAN. Considérons une forme différentielle linéaire à deux variables

$$\omega = Pdx + Qdy.$$

S'il existe une fonction $R(x, y)$ bornée et intégrable, telle que l'on ait

$$
(2) \qquad \int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_\delta Rdxdy
$$

[1] N. THÉODORESCO, *La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique Mathématique.* (Paris, Gauthier Villars, 1931).

[2] Voir à ce sujet: E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, p. 69.

pour tout γ limitant un domaine δ intérieur à une région du plan, on dit que $\omega' = Rdxdy$ est la *dérivée extérieure* de la forme ω.

Soit maintenant $\lambda(x, y)$ une fonction admettant des dérivées partielles du premier ordre continues.

On peut démontrer qu'on aura aussi, en vertu de (2):

$$\int_\gamma \lambda(Pdx + Qdy) = \iint_\delta \left(\lambda R + Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{3}$$

Rappelons la démonstration de cette importante propriété de la dérivée extérieure.

ε étant un nombre positif donné, on peut diviser le domaine δ en un nombre fini de régions; par exemple, par des parallèles aux axes, telles que dans chacune d'elles il existe un point x_0, y_0 pour lequel on ait à la fois:

$$|\lambda(x, y) - \lambda(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad |P(x, y) - P(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad |Q(x, y) - Q(x_0, y_0)| < \varepsilon$$
$$\left|Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - Q_0\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0\right| < \varepsilon; \quad \left|P\frac{\partial\lambda}{\partial y} - P_0\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0\right| < \varepsilon$$

x, y étant un point quelconque de la région ou du contour, λ_0, P_0, Q_0, $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0$, les valeurs des fonctions au point x_0, y_0.

On pourra donc écrire dans toute région partielle envisagée

$$P = P_0 + \varepsilon_1 \qquad Q = Q_0 + \varepsilon_2$$
$$\lambda = \lambda_0 + (x - x_0)\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0 + \varepsilon_3\right] + (y - y_0)\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0 + \varepsilon_4\right]$$

avec $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, $|\varepsilon_3|$, $|\varepsilon_4| < \varepsilon$.

Soit δ_i une de ces régions. Calculons la différence

$$\begin{aligned}
D_i &= \int_{\gamma_i} \lambda(Pdx + Qdy) - \iint_{\delta_i}\left(\lambda R + Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)dxdy \\
&= \int_{\gamma_i} \lambda_0(Pdx + Qdy) - \iint_{\delta_i}\left(\lambda R + Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)dxdy \\
&+ \int_{\gamma_i}\left[(x - x_0)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0\right][P_0dx + Q_0dy] + \eta \\
&= -\iint_{\delta_i}\left\{(\lambda - \lambda_0)R + \left[Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - Q_0\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0\right] - \left[P\frac{\partial\lambda}{\partial y} - P_0\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0\right]\right\}dxdy + \eta
\end{aligned}$$

avec $|\eta| < \varepsilon M\Delta_i l_i$, M étant un nombre fixe indépendant de δ_i, Δ_i étant le diamètre de δ_i, l_i la longueur de γ_i.

On aura donc:

$$|D_i| < \varepsilon M' \iint_{\delta_i} dxdy + \varepsilon M \Delta_i l_i < \varepsilon N \alpha_i$$

en désignant par M' et N deux nombres fixes indépendants de δ_i et par α_i l'aire de cette portion.

En ajoutant terme à terme les diverses contributions des δ_i et en remarquant que le premier membre de l'inégalité obtenue est une constante indépendante de ε, qu'on peut d'ailleurs prendre aussi petite que l'on voudra, on obtient facilement l'identité (3).

Revenons maintenant aux équations d'équilibre. La troisième peut s'écrire:

$$\int_\gamma x(\alpha Y_1 + \beta Y_2) ds - \int_\gamma y(\alpha X_1 + \beta X_2) ds = \iint_\delta \rho(xY - yX) d\sigma.$$

Appliquons à chacun des deux termes de la différence du premier membre, l'opération indiquée par (3), tout en y tenant compte des deux autres équations d'équilibre et en remarquant que les fonctions x et y sont bien des fonctions λ. Il vient:

$$\int_\gamma x(\alpha Y_1 + \beta Y_2) ds = \iint_\delta (\rho x Y + Y_1) d\sigma$$

$$\int_\gamma y(\alpha X_1 + \beta X_2) ds = \iint_\delta (\rho y X + X_2) d\sigma$$

d'où

$$\iint_\delta (X_2 - Y_1) d\sigma = 0$$

pour tout δ et, par conséquent, à cause de la continuité des deux fonctions,

$$X_2 = Y_1$$

conclusion identique à celle qu'on déduirait par l'application de la formule de GREEN, si cela avait été possible.

Dans ces conditions, les équations d'équilibre se réduisent à deux seulement:

$$\begin{aligned} &\int_\gamma (\alpha X_1 + \beta Y_1) ds = \iint_\delta \rho X d\sigma \\ &\int_\gamma (\alpha Y_1 + \beta Y_2) ds = \iint_\delta \rho Y d\sigma, \end{aligned} \tag{4}$$

2. Appliquons ces considérations à l'étude d'un problème particulier concernant un milieu dans lequel

$$X_1 = -Y_2 .$$

Supposons que l'on connaisse le long du contour C *rectifiable simple et fermé limitant un domaine* D, *une relation linéaire de la forme:*

$$a(s)X_1(s) + b(s)Y_1(s) = c(s) \tag{5}$$

a(s), b(s), c(s) *étant des fonctions continues données.*

Dans ces conditions, nous allons déterminer les fonctions $X_1(x, y)$, $Y_1(x, y)$, c'est-à-dire la distribution des efforts, à l'aide des équations fonctionnelles (4), en supposant ρ connue (constante par exemple).

Posons:

$$X_1 - iY_1 = f(z), \quad \rho(X - iY) = 2\varphi(z), \quad z = x + iy.$$

Les équations (4) se réduisent alors à la relation unique

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz - \frac{1}{\pi}\iint_\delta \varphi(v)d\omega = 0 \tag{6}$$

$(v = x + iy)$.

Nous avons montré dans le travail précité, que cela exprime le fait que la fonction $\varphi(v)$ est presque partout la dérivée aréolaire de $f(v)$, ce qui entraîne la connaissance de toutes les fonctions $f(v)$ jouissant de cette propriété.

Introduisons la fonction

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(v)}{v - \zeta}\, d\omega \tag{7}$$

$\zeta = \xi + i\eta$ *étant un point intérieur à* D.

La fonction g(ζ) *est continue dans ce domaine et satisfait à une condition de Hölder de la forme*:

$$|\, g(\zeta') - g(\zeta)\, | < K\, |\, \zeta' - \zeta\, |^\alpha \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{8}$$

A cet effet, remarquons que si ζ est intérieur à D et que l'on décrive un cercle Γ de centre ζ et de rayon fini r, assez petit pour qu'il soit aussi intérieur à D, on peut négliger la contribution du domaine $D - \Delta$, car la fonction $g_1(\zeta)$ définie par

$$g_1(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D-\Delta} \frac{\varphi(v)}{v - \zeta}\, d\omega$$

admet des dérivées partielles du premier ordre continues au point ζ et, satisfait, à plus forte raison, à une condition de Hölder.

Considérons donc l'expression

$$g_0(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega.$$

Soit ζ' un point intérieur à Γ. Posons $|\zeta' - \zeta| = h$. On aura:

$$g_0(\zeta') - g_0(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta} \frac{\varphi(v)(\zeta-\zeta')}{(v-\zeta)(v-\zeta')}\, d\omega.$$

Notons $v - \zeta = \rho e^{i\theta}$ en prenant pour axe des x la direction $\zeta\zeta'$.

Soit M une borne supérieure de $|\varphi(v)|$ dans D. On aura:

$$|g_0(\zeta') - g_0(\zeta)| < \frac{Mh}{\pi}\iint\limits_{\Delta} \frac{d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho h\cos\theta + h^2}} = \frac{Mh}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho h \cos\theta + h^2}}.$$

Posons $\rho = ht$ et calculons l'intégrale relative à ρ.

La présence du pôle $t = 1$ pour $\theta = 0$ n'est pas gênante.

On trouve comme résultat après une intégration par rapport à θ

$$\pi N + 2\pi \log\frac{1}{h} \qquad (N = \text{borné et positif})$$

On en déduit

$$|g_0(\zeta') - g_0(\zeta)| < MNh + 2Mh \log\frac{1}{h}.$$

Supposons $h < 1$. L'expression $h^{1-\alpha}\log\frac{1}{h}$ tendant vers zéro avec h, on peut, α étant donné, déterminer une valeur de $h < 1$, telle que l'on ait

$$h^{1-\alpha}\log\frac{1}{h} < 1 \quad \text{d'où} \quad h\log h < h^\alpha$$

et par conséquent:

$$|g_0(\zeta') - g_0(\zeta)| < Kh^\alpha.$$

La fonction $\mathrm{g}(\zeta)$ *est une intégrale particulière de l'équation fonctionnelle* (6).

Calculons, en effet, l'expression

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} g(\zeta) d\zeta$$

lorsque le point ζ décrit le contour γ intérieur à D.

Décrivons deux contours voisins γ' et γ'' respectivement intérieur et extérieur à γ; désignons par δ' le domaine intérieur à γ', par δ'' le domaine compris entre γ'' et C et par d le domaine compris entre γ' et γ''.

On aura: $D = \delta' + \delta'' + d$,

$$\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = -\frac{1}{\pi}\int_\gamma d\zeta \iint_{\delta'} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega - \frac{1}{\pi}\int_\gamma d\zeta \iint_{d} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega - \frac{1}{\pi}\int_\gamma d\zeta \iint_{\delta''} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega.$$

La fonction $\frac{\varphi(v)}{v-\zeta}$ étant bornée et intégrable en chaque point des domaines à trois dimensions résultant de la variation de v dans δ' et δ'', et de ζ le long de γ, le changement d'ordre d'intégration peut être effectué [1].

Quant au terme concernant d, il est facile de voir qu'il tendra vers zéro qund les deux contours tendent vers γ.

En effet, décalons autour de ζ un rectangle curviligne, à l'aide de deux normales menées à l'une des courbes γ' ou γ''.

On peut s'arranger pour qu'on puisse le regarder comme un véritable rectangle lorsque les courbes sont assez voisines. Soit a une borne inférieure de $|v-\zeta|$ lorsque v décrit le domaine qui reste, après avoir enlevé le rectangle d_0, en question.

On aura:

$$\left|\iint_{d-d_0} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega\right| < \frac{M}{a}\iint_{d-d_0} d\omega$$

M étant comme ci-dessus une borne supérieure de $|\varphi(v)|$, $a > 0$, et fixe.

Quant à la contribution de d_0, en prenant des axes au point ζ et en désignant par b et h les côtés d'un rectangle renfermant complètement d_0, on aura à calculer une intégrale de la forme

$$\int_0^h dy\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^h dy\int_\varepsilon^b \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^h \log\frac{b+\sqrt{b^2+y^2}}{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+y^2}}\,dy$$

$$< \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^h \log\frac{b+\sqrt{b^2+y^2}}{y}\,dy < \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^h \log b(1+\sqrt{2})dy - \log y\,dy$$

$$= h\log b(1+\sqrt{2}) - h\log h + h$$

en prenant $h < b$ ce qui est évidemment possible, b étant une constante.

Or, on voit que pour h suffisamment petit, on peut rendre cette quantité aussi petite que l'on veut, ce qui montre que lorsque les deux courbes tendent vers γ, le terme relatif à d tendra vers zéro.

---

[1] À condition de négliger un ensemble de mesure nulle convenable. Voir H. Lebesgue, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, « Annales Ec. Norm. », 1910, p. 430.

Les autres termes vont donner successivement:

$$\int_{\gamma} d\zeta \iint_{\delta'} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega = \iint_{\delta'} \varphi(v) d\omega \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{v-\zeta} = -\, 2i\pi \iint_{\delta'} \varphi(v) d\omega$$

$$\int_{\gamma} d\zeta \iint_{\delta''} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega = \iint_{\delta''} \varphi(v) d\omega \int \frac{d\zeta}{v-\zeta} = 0.$$

En plus, ε étant donné arbitrairement, on peut choisir le contour γ' de manière que l'on ait:

$$\left| \iint_{\delta-\delta'} \varphi(v) d\omega \right| < \varepsilon.$$

Dans ces conditions, on déduit aisément l'inégalité

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{\delta} \varphi(v) d\omega \right| < K\varepsilon$$

et par conséquent:

(9) $$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{\delta} \varphi(v) d\omega = 0.$$

Cela montre que $g(\zeta)$ est en effet une intégrale particulière de l'équation fonctionnelle (6).

3. Intégration de l'équation (6). — En retranchant (9) de)6) on obtient:

$$\int_{\gamma} [f(z) - g(z)] dz = 0$$

pour tout γ. Or, la fonction $f(z) - g(z)$ est continue; par conséquent, en vertu du théorème de MORERA, *elle est holomorphe.*

Posons

$$f(z) - g(z) = h(z).$$

Le problème revient à la détermination d'une fonction holomorphe par un problème d'HILBERT [1]. En effet posons:

$$h(z) = h_0(x, y) + ih_1(x, y); \quad g(z) = g_0(x, y) + ig_1(x, y);$$

la condition aux limites imposée peut s'écrire:

$$a(s)h_0(s) + b(s)h_1(s) = c(s) - [a(s)g_0(s) + b(s)g_1(s)],$$

le second membre étant parfaitement connu car $g(\zeta)$ est continue dans tout le plan.

---

[1] Voir par exemple H. VILLAT, *Leçons sur l'Hydrodynamique*, p. 226.

Cela nous fera connaître $h(z)$ et par suite $f(z)$. On aura, l'intégrale unique à deux constantes près sous la forme:

$$X_1(\xi, \eta) - iY_1(\xi, \eta) = h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(v)}{v - \xi - i\eta} d\omega. \tag{10}$$

En conclusion, sans passer par les équations aux dérivées partielles, un problème d'équilibre se trouve résolu par une méthode simple et rapide.

4. Un problème relatif à une plaque plane. — Le cas dont nous nous sommes occupé nous permet de traiter le problème suivant:

Etant donnée une distribution de forces massiques X, Y *bornées et intégrables. déterminer la distribution des tensions (et des déplacements) dans une plaque élastique* D, *connaissant le long du contour* C, *simple, fermé et rectifiable deux relations linéaires de la forme:*

$$\begin{aligned} A(s)u(s) + B(s)v(s) &= C(s) \\ a(s)\theta(s) + b(s)\theta_2(s) &= C(s) \end{aligned} \tag{11}$$

où A(s), B(s), C(s), a(s), b(s), c(s) *sont des fonctions continues données sur* C; u(x, y), v(x, y) *désignent les déplacements dans la plaque; on suppose l'existence et la continuité de leurs dérivées partielles du premier ordre; on pose:*

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \theta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (1 + \xi)\theta = \theta_1.$$

On sait, en vertu de la loi de Hooke, que dans une plaque élastique, on a:

$$\left\{ \begin{aligned} N_1 &= -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 &= -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ T &= -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned} \right.$$

Introduisons ces valeurs dans les équations générales d'équilibre.

Il vient:

$$-\int_\gamma (\lambda + 2\mu)\theta dy + \mu\theta_2 dx + \int_\gamma 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) = \iint_\delta \rho X\, d\sigma$$

$$\int_\gamma (\lambda + 2\mu)\theta dx - \mu\theta_2 dy - \int_\gamma 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) = \iint_\delta \rho Y\, d\sigma.$$

Posons:

$$1 + \frac{\lambda}{\mu} = \xi; \quad -\frac{\rho}{2\mu} = \nu$$

et remarquons les termes qui se détruisent par intégration.

Il vient:

$$\int_{\gamma}(1+\xi)\theta dy + \theta_2 dx = \iint_{\delta} 2\nu X\, d\sigma$$

$$\int_{\gamma}(1+\xi)\theta dx - \theta_2 dy = -\iint_{\delta} 2\nu Y\, d\sigma.$$

Multiplions la première relation par i et ajoutons-y membre à membre la seconde, ce qui donne:

$$\int_{\gamma}(\theta_1 + i\theta_2)(dx + idy) = \iint_{\delta} 2\nu i(X + iY) d\sigma$$

d'où l'on tire en posant:

$$\theta_1 + i\theta_2 = f(z), \quad \nu(X + iY) = \varphi(z), \quad z = x + iy,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(z) dz - \frac{1}{\pi}\iint_{\delta}\varphi(v) d\omega = 0.$$

Or, cette équation est du type (6), et par conséquent l'intégration en est effectuée, puisqu'on connait une relation linéaire entre θ_1 et θ_2 sur C.

On aura:

$$\theta_1 + i\theta_2 = h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{\nu(X+iY)}{v-\zeta}\, d\omega.$$

Pour aller plus loin, remarquons qu'une fois θ_1 et θ_2 déterminés, la recherche de u, v est ramenée a l'intégration du système:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\theta_1}{1+\xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \theta_2.$$

Supposons $\xi \neq -1$. Nous avons montré dans un autre travail (¹) que si θ_1 et θ_2 satisfont à une condition de Hölder, ce système admet une intégrale particulière donnée par la fonction

$$u_0 + iv_0 = -\frac{1}{2\pi}\iint_{D}\frac{\theta_2 + \dfrac{\theta_1}{1+\xi}}{w - z}\, dw$$

w décrivant le domaine D, $z = x + iy$.

Posons $U = u - u_0$, $V = v - v_0$. On aura:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

ce qui exprime que la fonction $H(z) = V + iU$ est holomorphe dans D.

(¹) Thèse op. cit., p. 75.

En vertu de la première relation au contour, la recherche de $H(z)$ est ramenée à un problème d'HILBERT, car:

$$AU + BV = C - (Au_0 + Bv_0).$$

On connaîtra u, v par la formule:

$$v + iu = H(z) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{\theta_2 + i\dfrac{\theta_1}{1+\xi}}{w - z}\, d\omega$$

à deux constantes, introduites par $H(z)$, près.

Le problème que nous venons de traiter diffère du problème qu'on se pose habituellement en élasticité quand on se donne u, v sur C. On sait d'ailleurs que dans ce problème-là, le paramètre ξ possède des valeurs critiques situées à gauche de -1 sur l'axe réel.

Dans le cas du problème que nous nous sommes posé, il n'y a que le point -1 qui soit critique. Pour cette valeur de ξ, X et Y ne peuvent plus être arbitraires. En effet, supposons en particulier qu'ils soient dérivables. Le problème revient à l'intégration de

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial x} = 2\nu X, \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = 2\nu Y$$

qui n'est possible que si

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

Si cette relation est vérifiée, on aura θ_2 à une constante près, mais de $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \theta_2$, on ne peut pas déduire u, v, d'une façon unique. On voit donc que -1 est une valeur critique.

5. Un problème concernant les petits mouvements stationnaires d'un fluide visqueux. — On suppose un vase dans lequel il y a un fluide visqueux en mouvement lent et permanent et tel que les vitesses ne dépendent que des coordonnées x, y. Le long du contour de chaque section plane on connaît les valeurs de la pression p et une relation de la forme

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s) \tag{12}$$

entre les composantes de la vitesse: $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ étant continues.

Cela étant, on peut se proposer de déterminer la distribution des vitesses u, v, *supposées dérivables une fois et à dérivées partielles continues, et de la pression* p *supposée continue.*

On sait, que dans le cas d'un tel fluide

$$\left\{\begin{aligned} N_1 &= p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 &= p - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ T &= -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right. \qquad (\mu = \text{coefficient de viscosité})$$

l'introduction de ces valeurs dans les équations d'équilibre (ou du mouvement) va nous donner:

$$\int_\gamma p\,dy + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + 2\mu\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \iint_\delta \rho X\,d\sigma$$

$$\int_\gamma \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dy - p\,dx - 2\mu\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \iint_\delta \rho Y\,d\sigma$$

d'où, si l'on pose $\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = q(x, y)$ et qu'on remarque les termes qui se détruisent par intégration:

$$\int_\gamma (p + iq)(dx + idy) = i\iint_\delta \rho(X + iY)d\sigma.$$

Il suffit de poser:

$$p + iq = f(z); \quad \rho(X + iY) = 2\varphi(z); \quad z = x + iy$$

pour arriver à l'équation fonctionnelle:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz - \frac{1}{\pi}\iint_\delta \varphi(v)d\omega = 0$$

(ω décrivant le domaine D), qu'on sait intégrer facilement.

On aura d'ailleurs

$$p + iq = h(\zeta) - \frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{X + iY}{w - \zeta}\,d\omega = h(\zeta) + g(\zeta).$$

Le détermination de $h(\zeta)$ se fait facilement.

On aura $h(z) = h_0(x, y) + ih_1(x, y)$ et sur le contour

$$p(s) = h_0(s) + g_0(s).$$

La connaissance de $h_0(s)$ entraine celle de $h(z)$ par un problème de DIRICHLET.

p et q satisfaisant à une condition de Hölder. il sera très facile de déterminer u et v par le système:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{q}{\mu}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

La fonction $g(\zeta)$ correspondante admettant des dérivées partielles du premier ordre continues, on aura

$$v + iu = H(\zeta) + \frac{1}{2\mu\pi}\iint\limits_{D} \frac{q}{w-\zeta}\, d\omega = H(\zeta) + G(\zeta).$$

Posons $H(z) = H_0(x, y) + iH_1(x, y)$ et remarquons qu'on a:

$$a(s)H_0(s) + b(s)H_1(s) = c(s) - a(s)G_0(s) - b(s)G_1(s).$$

Le problème relatif à $H(z)$ est donc un nouveau problème d'Hilbert.

Dans tout ce qui précède on a supposé $\mu \neq 0$; le cas où $\mu = 0$ est singulier.

Supposons, comme dans l'autre exemple, l'existence des dérivées partielles pour X et Y.

Il faut d'abord que $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$. Ensuite on remarque l'équation $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ne détermine pas uniquement u et v.

Ces deux exemples montrent que les restrictions imposées par l'emploi des équations aux dérivées partielles dans les problèmes relatifs aux milieux continus, ne tiennent pas à la nature intrinsèque de ces questions.

La méthode que nous venons d'employer s'impose d'elle-même et suit, pour ainsi dire, la voie logique et naturelle du phénomène exprimé par les relations globales initiales.

DEUXIÈME PARTIE

6. Le cas de l'espace offre une grande analogie avec celui du plan, bien qu'il fasse intervenir certaines transformations de méthode et quelques restrictions dans la généralité des surfaces et des conditions aux limites.

Montrons d'abord que les équations générales se réduisent à trois, sous des conditions semblables à celles que nous venons d'imposer dans le plan.

Supposons que les forces massiques X, Y, Z soient bornées et intégrables et que les composantes des efforts: X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3 soient continues.

Les théorèmes généraux donnent pour toute surface fermée σ, douée d'un champ continu de normales, limitant un domaine ω, les relations suivantes:

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} \iint_\sigma (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3) d\sigma - \iiint_\omega \rho X \, d\omega = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \iint_\sigma [\alpha(yZ_1 - zY_1) + \beta(yZ_2 - zY_2) + \gamma(yZ_3 - zY_3)] d\sigma - \iiint_\omega \rho(yZ - zY) d\omega = 0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

Dans les conditions où nous nous sommes placés, il est évident que l'application de la formule de Green est impossible.

Faisons appel à la *dérivée extérieure,* qui est définie dans l'espace par la relation:

$$(14)\qquad \iint_\sigma (\alpha P + \beta Q + \gamma R) d\sigma = \iiint_\omega H \, d\omega$$

où P, Q, R sont continues, H bornée et intégrable.

Il est facile de prouver que, $\lambda(x, y, z)$, étant une fonction qui admet des dérivées partielles du premier ordre continues, on a, en vertu de (14), la relation:

$$(15)\qquad \iint_\sigma \lambda(\alpha P + \beta Q + \gamma R) d\sigma = \iiint_\omega \left(\lambda H + P \frac{\partial\lambda}{\partial x} + Q \frac{\partial\lambda}{\partial y} + R \frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) d\omega.$$

Or, les équations du moment résultant s'écrivent facilement sous la forme:

$$\iint_\sigma [y(\alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3) - z(\alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3)] d\sigma = \iiint_\omega \rho(yZ - zY) d\omega.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Mais on a, en vertu des équations de la résultante générale, tenu compte du fait que les fonctions x, y, z, sont des fonctions λ et de la relation (15):

$$\iint_\sigma y(\alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3) d\sigma = \iiint_\omega (\rho y Z + Z_2) d\omega$$

$$\iint_\sigma z(\alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3) d\sigma = \iiint_\omega (\rho z Y + Y_3) d\omega$$

et par conséquent:

$$\iiint_\omega (Y_3 - Z_2) d\omega = 0$$

ce qui entraîne, à cause de la continuité de ces deux fonctions, l'identité

$$Y_3 = Z_2$$

et par permutations, les analogues.

L'introduction des notations consacrées:

$$Y_3 = Z_2 = T_1; \quad Z_1 = X_3 = T_2; \quad X_2 = Y_1 = T_3$$
$$X_1 = N_1; \quad Y_2 = N_2; \quad Z_3 = N_3$$

conduit aux équations générales sous la forme suivante:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \iint_\sigma (\alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2) d\sigma &= \iiint_\omega \rho X \, d\omega \\ \iint_\sigma (\alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1) d\sigma &= \iiint_\omega \rho Y \, d\omega \\ \iint_\sigma (\alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3) d\sigma &= \iiint_\omega \rho Z \, d\omega. \end{aligned} \right.$$

Nous allons montrer dans la suite comment on peut les utiliser dans divers cas tirés des applications.

La méthode qui sera employée exige quelques développements préliminaires.

7. Etude d'un système d'équations aux dérivées partielles. — Soient $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ des fonctions continues admettant des dérivées partielles du premier ordre continues dans un domaine V.

Formons les combinaisons linéaires

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + \frac{\partial \psi_4}{\partial z} &= \Psi_1 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_4}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} &= \Psi_2 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_4}{\partial x} &= \Psi_3 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} &= \Psi_4. \end{aligned} \right.$$

Par l'introduction du symbolisme des matrices, on peut les envisager comme un opérateur, ce qui est recommandable au point de vue de la simplicité et conduit, en plus, à une série de formules fondamentales qui établissent comme l'a montré M. Gr. C. Moisil [1], une analogie très remarquable avec les formules de Cauchy, ou de M. D. Pompeiu relatives à la dérivée aréolaire.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler les points essentiels du calcul symbolique [2], dont il sera question dans la suite.

On désignera l'ensemble des quatre fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 par une seule lettre et on l'appellera demivecteur. Une matrice telle que

$$\begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{Vmatrix}$$

sera désignée par une seule lettre γ.

Le demivecteur

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{4} \gamma_{ik} \psi_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sera le produit de ψ par γ.

On écrira

$$\varphi = \gamma\psi.$$

Soient γ et λ deux matrices. Si l'on a: $\varphi = \gamma\psi$ et ensuite $\theta = \lambda\gamma$, on pourra écrire $\theta = \mu\psi$ avec $\mu = \lambda\gamma$; cela veut dire que

$$\mu_{ik} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \gamma_{jk} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

La matrice unité sera désignée par e

$$e = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

L'introduction de e s'impose pour l'homogénéité des formules. Ces conventions admises, par l'introduction des matrices:

$$\gamma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \gamma_y = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \gamma_z = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(1) Voir Gr. C. Moisil, « C. R. de l'Académie des Sciences de Paris », t. 191, p. 984 et p. 1192.

(2) Voir Gr. C. Moisil et N. Théodoresco, *Sur une extension dans l'espace de la théorie des fonctions analytiques*, (« Mathematica », Tome V, Cluj).

le système (17) peut s'écrire

$$\left(\gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi = \Psi.$$

Cela met en évidence une opération symbolique qui, appliquée au demivecteur ψ, conduit au demivecteur Ψ.

Posons

$$D = \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial}{\partial z},$$

donc remplaçons (17) par

$$D\psi = \Psi. \tag{18}$$

On peut envisager D comme un produit scalaire des vecteurs symboliques $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ et γ_x, γ_y, γ_z.

Admettons pour un instant que ψ ait *des dérivees partielles du second ordre continues.*

Cela nous permettra de démontrer qu'on a:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_4}{\partial z} = \Delta\psi_1 \\ &\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_4}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_3}{\partial z} = \Delta\psi_2 \\ &\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_4}{\partial x} = \Delta\psi_3 \\ &\frac{\partial\Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial y} = \Delta\psi_4 \end{aligned}\right. \tag{19}$$

ce qu'on peut écrire, à l'aide des matrices:

$$\bar\gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar\gamma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar\gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sous la forme

$$\left(\bar\gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar\gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar\gamma_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi = e\Delta\Psi.$$

Posons

$$\bar D = \bar\gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar\gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar\gamma_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{20}$$

On a donc:

$$\bar D\Psi = \Delta\psi$$

ou bien,

$$D\bar D = \bar D D = e\Delta$$

en même temps, on en tire:

$$
(21)\qquad \begin{cases} \bar\gamma_x\gamma_x = \bar\gamma_y\gamma_y = \bar\gamma_z\gamma_z = e \\ \bar\gamma_x\gamma_y + \bar\gamma_y\gamma_x = \bar\gamma_y\gamma_z + \bar\gamma_z\gamma_y = \bar\gamma_z\gamma_x + \bar\gamma_x\gamma_z = 0 \end{cases}
$$

et

$$
(21')\qquad \begin{cases} \gamma_x\bar\gamma_x = \gamma_y\bar\gamma_y = \gamma_z\bar\gamma_z = e \\ \gamma_x\bar\gamma_y + \gamma_y\bar\gamma_x = \gamma_y\bar\gamma_z + \gamma_z\bar\gamma_y = \gamma_z\bar\gamma_x + \gamma_x\bar\gamma_z = 0. \end{cases}
$$

Si $(u_x,\ u_y,\ u_z)$ est un vecteur, le produit scalaire symbolique, sera désormais désigné par

$$(u\gamma) = u_x\gamma_x + u_y\gamma_y + u_z\gamma_z\,.$$

Il est à retenir l'identité

$$
(22)\qquad (u\bar\gamma)(v\gamma) + (v\bar\gamma)(u\gamma) = 2e(uv)
$$

où

$$(uv) = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z\,.$$

De même

$$
(22')\qquad (u\gamma)(v\bar\gamma) + (v\gamma)(u\bar\gamma) = 2e(uv).
$$

Cela étant, on peut établir quelques identités fondamentales [1] concernant les opérateurs introduits

(A) *On a pour toute surface fermée* σ, *limitant un domaine* ω *intérieur à* V:

$$
(23)\qquad \iint_\sigma (n\gamma)\psi d\sigma + \iiint_\omega D\psi d\omega = 0
$$

où n *est le vecteur unité de la normale à* σ.

En particulier si $D\psi = 0$, il s'ensuit que:

$$
(24)\qquad \iint_\sigma (n\gamma)\psi d\sigma = 0.
$$

Ces deux relations généralisent les formules de Cauchy et de Riemann qui se trouvent à la base de la théorie des fonctions

(B) *Les composantes de* ψ *peuvent se représenter par la formule*

$$
(25)\qquad \psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar\gamma)(\overrightarrow{n_M}\gamma)}{\overline{MP}^3}\,\psi_M d\sigma_M + \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar\gamma)}{\overline{MP}^3}\,D\psi_M d\omega.
$$

où la surface Σ est supposée douée en chaque point d'une normale unique, P étant un point de Ω

[1] Gr. C. Moisil, loc. cit.

(C) *On a les relations:*

$$\iint_{\sigma} (n\gamma)d\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \iint_{\sigma} (n\bar{\gamma})d\sigma = 0. \tag{26}$$

(D) *Si l'on suppose* $D\psi = 0$:

$$\iint_{\sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,\psi_M d\sigma_M = 0, \quad \text{si } P \text{ est extérieur à } \sigma \tag{27}$$

de même

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_M = \begin{cases} 0 & \text{si } P \text{ est extérieur à } \sigma \\ e & \text{si } P \text{ est intérieur à } \sigma \end{cases} \tag{28}$$

et

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma} \frac{(n_M\bar{\gamma})(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3} = \begin{cases} 0 & \text{si } P \text{ est extérieur à } \sigma \\ e & \text{si } P \text{ est intérieur à } \sigma. \end{cases}$$

Dans ces deux dernières formules les rôles des γ et $\bar{\gamma}$ peuvent être intervertis.

Supposons maintenant qu'on considère les relations (17) *comme un système d'équations définissant les fonctions* ψ_i *et bornons-nous au système homogène*

$$D\psi = 0. \tag{29}$$

Les intégrales de ce système peuvent être représentées, en vertu de (25), *par la formule*

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,\psi_M d\sigma_M \tag{30}$$

lorsqu'on en connait les valeurs sur Σ.

Cela montre, en plus, que ces intégrales sont *analytiques*, auquel cas en vertu de la relation $D\bar{D} = e\Delta$, qui s'y applique légitimement, *elles sont des fonctions harmoniques.*

Pour être rigoureux, il nous resterait à montrer que réciproquement, tout ψ exprimé par une formule telle que (30) est une intégrale du système (29).

Or cela est très facile.

Supposons donné un demivecteur arbitraire, dont les composantes $\Psi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ soient des fonctions simplement continues sur la surface.

Une expression de la forme:

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,\Psi_M d\sigma_M$$

représente dans le domaine Ω des fonctions analytiques de P, comme les fonctions $\frac{\overrightarrow{MP}}{\overline{MP}^3}$.

Calculons $D\psi$ par dérivations, ou mieux calculons

$$A = \iiint_\omega D\psi d\omega = -\iint_\sigma (n_P\gamma)\psi_P d\sigma_P .$$

On aura:

$$A = -\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma (n_P\gamma) d\sigma_P \iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\Psi_M d\sigma_M$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \left[\iint_\sigma \frac{(n_P\gamma)(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3} d\sigma_P\right](n_M\gamma)\Psi_M d\sigma_M .$$

Or, d'après la formule (28), l'intégrale relative à σ (intérieure à Σ) est nulle; donc $A = 0$, et par conséquent $D\psi = 0$ aussi:

Il est bon de remarquer que ψ ainsi obtenu est une intégrale de $D\psi = 0$ *dans* Ω *ouvert,* et qu'on ne saurait rien dire de la façon dont il se comporte sur Σ.

8 Extension du théorème de Morera. — Complétons ces résultats par un théorème dont l'importance au point de vue de l'intégration du système se fera voir dans la suite.

On sait quels services rend le théorème de Morera en Théorie des Fonctions. Nous l'avons d'ailleurs employé dans la première partie de ce travail.

On peut dire qu'il sert à partager la classe des fonctions continues $P + iQ$ en deux parties, en discernant les fonctions holomorphes d'une part et les autres de l'autre part. En d'autres termes — et c'est ici le point intéressant pour nous — il caractérise les intégrales du système de Cauchy. La proposition, dont il sera question, est appelée à généraliser à ce point de vue le théorème de Morera.

Elle s'énonce comme suit:

Soit un demivecteur ψ *de composantes continues dans un domaine* V.

Si pour toute surface fermée σ, *douée d'un champ continu de normales intérieure à* V, *on a la relation:*

$$\iint_\sigma (n_M\gamma)\psi_M d\sigma_M = 0 \tag{31}$$

les fonctions ψ_i sont analytiques en tout point de V et satisfont au système [1]

$$D\psi = 0.$$

Soit Σ une surface intérieure à V, fermée, douée en chaque point d'une normale unique et soit Ω le domaine qu'elle limite. Calculons l'intégrale

$$\Psi_P = \iint\limits_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M \gamma)}{\overline{MP}^3} \psi_M d\sigma_M .$$

A cet effet, décrivons la plus grande sphère σ_0 centrée au point P et de rayon ρ, telle que pour ε' positif arbitrairement donné, on ait

$$|\psi_{P'} - \psi_P| < \varepsilon' \quad \text{pour} \quad \overline{PP'} \leq \rho.$$

Désignons par ω_0 le domaine sphérique limité par σ_0. *Le rayon ρ une fois fixé,* on peut partager le domaine en un nombre fini de régions telles que dans chacune d'elles il existe au moins un point Q tel que $|\psi_{Q'} - \psi_Q| < \varepsilon\rho^3$, quel que soit le point Q' dans la portion envisagée ou sur la surface qui la limite.

C'est une propriété qui résulte de la continuité des fonctions ψ_i, compte tenu du fait que ρ est déterminé et fixe pour σ_0 donnée.

On peut, en particulier, réaliser cette subdivision à l'aide d'un nombre fini de *cubes de diamètre inférieur à ρ,* parmi lesquels il en existe qui sont écornés soit par Σ soit par σ_0, car il est clair que si la propriété existe pour un cube d'un diamètre r_0, elle est d'autant plus valable pour un diamètre inférieur.

Calculons

$$I = \iint\limits_{\sigma_0} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M \gamma)}{\overline{MP}^3} \psi_M d\sigma_M$$

qui peut s'écrire

$$I = \iint\limits_{\sigma_0} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M \gamma)}{\overline{MP}^3} [\psi_M \quad \psi_P] d\sigma_M + 4\pi\psi_P$$

en vertu de la formule (28)

On a donc

$$| I - 4\pi\psi_P | < \frac{\varepsilon'}{\rho^3} \iint\limits_{\sigma_0} | (\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma) | \, d\sigma_M < 144\pi\varepsilon'.$$

---

(1) Ce n'est qu'un cas particulier d'un théorème que nous avons établi pour les systèmes d'équations du type elliptique envisagés par M. GR. C. MOISIL. Voir N. THÉODORESCO, *Sur les systèmes de Dirac du type elliptique.* « R. Lincei », vol. XIII, 1931.

Soit ω_h un des cubes de la subdivision. Soit Q le point tel que $|\psi_Q - \psi_M| < \varepsilon\rho^3$ quel que soit M dans ω_h ou sur σ_h. Le triangle MPQ fournit la relation

$$\overline{MP}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{MQ}^2 - 2\overline{PQ}\cdot\overline{MQ}\cos\alpha \qquad (\alpha = \angle MQP)$$

ou bien

$$\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)\left(\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} - 2\cos\alpha\right) = 1 + \lambda\,\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}$$

avec

$$\lambda = \frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} - 2\cos\alpha.$$

Or, $\overline{MQ} < \overline{PQ}$, puisque d'une part Q est extérieur à σ_0, et d'autre part les diamètres des cubes ω_h, sont inférieurs à ρ (1).

Donc

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} < 1 \quad \text{et} \quad |\lambda| < 3.$$

On peut alors écrire, en vertu du théorème des accroissements finis

$$\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}}\right)^3 = \left(1 + \lambda\,\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)^{3/2} = 1 + \frac{3\lambda}{2}\left(1 + \lambda\,\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\,\theta\right)^{1/2}\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}; \qquad (0 < \theta < 1).$$

On a d'ailleurs l'identité suivante

$$\frac{\overrightarrow{MP}}{\overline{MP}^3} = -\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overline{PQ}^3} + \frac{\vec{v}}{\overline{MP}^3} \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}}\right)^3.$$

En vertu de la relation ci-dessus

$$\vec{v} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3\lambda}{2}\left(1 + \lambda\theta\,\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)^{1/2}\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\,\overrightarrow{PQ}.$$

Cela établi, calculons

$$\begin{aligned}
I_h &= \iint_{\sigma_h} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,\psi_M d\sigma_M = \iint_{\sigma_h} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,(\psi_M - \psi_Q)d\sigma_M \\
&= -\iint_{\sigma_h} \frac{(\overrightarrow{PQ}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{PQ}^3}\,(\psi_M - \psi_Q)d\sigma_M + \iint_{\sigma_h} \frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,(\psi_M - \psi_Q)d\sigma_M \\
&+ \frac{3\lambda}{2}\iint_{\sigma_h}\left(1 + \lambda\theta\,\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)^{1/2}\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\cdot\frac{(\overrightarrow{PQ}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,(\psi_M - \psi_Q)d\sigma_M \\
&= i_h + i_h' + i_h''.
\end{aligned}$$

(1) Cette précaution n'est pas essentielle. Il suffit de remarquer que $\dfrac{MQ}{PQ}$ est toujours borné, quand on se donne σ_0.

La première de ces intégrales est nulle par hypothèse, pouvant être écrite sous la forme:

$$i_h = \frac{(\overrightarrow{PQ}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{PQ}^3}\iint_{\sigma_h}(n_M\gamma)(\psi_M - \psi_Q)d\sigma_M.$$

D'autre part

$$|i_h'| \leq \iint_{\sigma_h}|(\overrightarrow{MQ}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)|\left|\frac{\psi_M-\psi_Q}{\overline{MP}^3}\right|d\sigma_M < 144\sqrt{3}\varepsilon l_h\iint_{\sigma_h}d\sigma_M < 864\sqrt{3}\varepsilon\omega_h$$

en désignant par ω_h le volume du cube et par l_h son côté; en effet $\overline{MP} \geq \rho$ et dans ω_h, $|\psi_M - \psi_Q| < \varepsilon\rho^3$. En plus, $MQ \leq$ diamètre de $\omega_h = l_h\sqrt{3}$.

De même

$$|i_h''| < 3\lambda\iint_{\sigma_h}|\overline{MQ}|\left|\left(\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overline{PQ}}\bar{\gamma}\right)\right|\left|\frac{\psi_M-\psi_Q}{\overline{MP}^3}\right|d\sigma_M < 144\varepsilon\lambda\sqrt{3}\iint_{\sigma_h}d\sigma_M$$

$$< 6\lambda\cdot 144\sqrt{3}\varepsilon\omega_h$$

car

$$\left|1 + \lambda\theta\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right| < 1 + 3 = 4.$$

Il s'ensuit que

$$|I_h| < 576\sqrt{3}\varepsilon\cdot 8\omega_h.$$

Le même raisonnement appliqué aux portions écornées donnera facilement

$$|L_k| < 576\sqrt{3}(8\omega_k + S_k l_k)\varepsilon$$

S_k étant l'aire de la portion de $\Sigma + \sigma_0$ qui traverse le cube ω_k.

En ajoutant ces inégalités, on voit que:

$$|\Psi_P - 4\pi\psi_P| < 576\sqrt{3}(8\Omega + lS)\varepsilon$$

l étant une limite supérieure des l_k et S désignant l'aire de $\Sigma + \sigma_0$.

Or, le premier membre étant une constante indépendante du nombre ε et de la division faite, tandis que le second membre, par le choix convenable de ε, peut être rendu aussi petit que l'on veut, il en résulte qu'on a rigoureusement

$$\Psi_P = 4\pi\psi_P$$

et par conséquent

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\psi_M d\sigma_M.$$

Or, cela exprime d'une part que les fonctions ψ_i sont analytiques au point P, et d'autre part par l'application de l'équation (31) que $D\psi = 0$, donc que le demivecteur ψ est une intégrale de ce système.

9. Sur le système qui s'introduit dans la détermination des vitesses en fonction des tourbillons. — La détermination des vitesses en fonction des tourbillons conduit au système bien connu

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\xi \quad \text{etc.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

avec la supposition

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

qui restreint la généralité des données.

Nous nous proposons de remplacer cette condition par une autre plus générale de la forme:

$$\iint_\sigma (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\, d\sigma = 0 \tag{32}$$

pour toute σ *tracée dans le milieu tourbillonnaire, en supposant toutefois que les* ξ, η, ζ *soient continus et qu'ils satisfassent à des conditions de Hölder telles que:*

$$|\,\xi(P) - \xi(P')\,| < k\overline{PP'}^{\alpha} \qquad (0 < \alpha \leq 1).$$

Il n'est pas difficile de construire des exemples qui mettent en évidence le fait qu'une condition intégrale de la forme (92) est plus large que celle qui exprime que la divergence est nulle.

En effet, soient a, b, c, trois fonctions bornées et intégrables dans un domaine V.

Posons

$$A = \iiint_\Omega \frac{a'}{r}\, d\omega; \quad B = \iiint_\Omega \frac{b'}{r}\, d\omega; \quad C = \iiint_\Omega \frac{c'}{r}\, d\omega$$

$a' = a(x', y', z')$, le point x', y', z' décrivant un domaine Ω intérieur à V et r désignant le rayon vecteur

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

On sait que les potentiels A, B, C, sont continus dans Ω et qu'ils y admettent des dérivées partielles du premier ordre mais que les dérivées secondes n'existent pas sans conditions supplémentaires.

On a pour toute surface s s'appuyant sur un contour γ la formule de STOKES, donc pour toute surface fermée

$$\iint_\sigma (\alpha P + \beta Q + \gamma R) d\sigma = 0$$

avec

$$P = \iiint_\Omega \left(c' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - b' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\omega \text{ etc.}$$

mais les fonctions P n'admettent pas de dérivées partielles et, par conséquent, la divergence ne peut pas être construite.

Cela étant, abordons le problème relatif aux tourbillons, en supposant que la paroi est une surface régulière telle que le problème de NEUMANN soit possible, c'est-à-dire:

1.° En tout point de Σ il existe un plan tangent déterminé.

2.° Autour de chaque point de Σ on peut décrire une sphère de rayon asez petit mais déterminé, de telle façon qu'une parallèle à la normale à Σ puisse rencontrer la surface à l'intérieur de la sphère en un seul point.

3.° L'angle aigu θ que font les normales à Σ en deux points satisfait à la condition

$$\theta < a r_0$$

$a =$ indépendant des deux points, $r_0 =$ distance des deux points. Σ peut être animée, à la rigueur, d'un mouvement connu.

La condition à la paroi est de la forme:

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = f$$

avec

$$\iint_\Sigma f d\sigma = 0.$$

Posons

$$P = \frac{1}{2\pi} \iiint_\Omega \frac{\xi'}{r} d\omega; \quad Q = \frac{1}{2\pi} \iiint_\Omega \frac{\eta'}{r} d\omega; \quad R = \frac{1}{2\pi} \iiint_\Omega \frac{\zeta'}{r} d\omega.$$

Nous montrerons qu'on a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \iint_\Sigma \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{r} d\omega. \tag{33}$$

En effet, traçons dans Ω une surface fermée σ limitant un domaine ω.

On sait que P, Q, R, admettent des dérivées partielles des deux premiers ordres et qu'on a

$$\Delta P = -2\xi \text{ etc.}$$

si, bien entendu, on suppose l'existence de la condition de Hölder imposée.

Entourons σ de deux autres surfaces assez voisines σ_1 et σ_2 respectivement intérieure et extérieure, désignons par ω_1, ω_2 et ω_3, les domaines: intérieur à σ_1, compris entre σ_2 et Σ et compris entre σ_1 et σ_2.

Calculons

$$M = \iint_\sigma (\alpha P + \beta Q + \gamma R) d\sigma = \iiint_\omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\omega.$$

On aura:

$$M = \frac{1}{2\pi} \iint_\sigma \left[\alpha \iiint_\Omega \frac{\xi'}{r}\, d\omega + \beta \iiint_\Omega \frac{\eta'}{r}\, d\omega + \gamma \iiint_\Omega \frac{\zeta'}{r}\, d\omega\right] d\sigma.$$

Dans les domaines ω_1 et ω_2, on peut intervertir l'ordre d'intégration, ce qui va donner successivement pour les contributions de ces domaines

$$M_1 = \frac{1}{2\pi} \iiint_{\omega_1} \left[\xi' \iint_\sigma \frac{\alpha}{r}\, d\sigma + \eta' \iint_\sigma \frac{\beta}{r}\, d\sigma + \zeta' \iint_\sigma \frac{\gamma}{r}\, d\sigma\right] d\omega.$$

Or

$$\iint_\sigma \frac{\alpha}{r}\, d\sigma = \iiint_\omega \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r}\, d\sigma$$

malgré la présence du pôle $r = 0$ [1].

Donc

$$M_1 = \iiint_{\omega_1} \left(\xi' \frac{\partial \lambda}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial \lambda}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial \lambda}{\partial z'}\right) d\omega$$

si l'on pose

$$\lambda(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iiint_\omega \frac{d\omega}{r}.$$

Maintenant, si l'on fait appel de nouveau à la dérivée extérieure de M. Cartan, la forme

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

a, d'après l'hypothèse faite, la dérivée extérieure nulle. D'autre part la fonction λ admet des dérivées partielles continues.

Il s'ensuit que la règle de dérivabilité d'un produit s'y applique.

Il vient donc:

$$M_1 = \iint_{\sigma_1} \lambda(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) d\sigma = \iiint_{\omega_1} \left(\xi' \frac{\partial \lambda}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial \lambda}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial \lambda}{\partial z'}\right) d\omega.$$

---

[1] Goursat, tome III, p. 272.

Un calcul analogue relatif à M_2, va donner

$$M_2 = \iint_{\Sigma} \lambda(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) d\sigma - \iint_{\sigma_2} \lambda(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) d\sigma.$$

Enfin remarquons que la contribution du domaine ω_3, peut être négligée par le choix convenable des deux surfaces σ_1 et σ_2.

En même temps, puisque λ est continue, les intégrales relatives à σ_1 et σ_2 diffèrent par une quantité qui tend vers zéro lorsque celles-ci tendent vers σ; elles se détruisent donc mutuellement, de façon qu'on aura rigoureusement:

$$M = \iint_{\Sigma} \lambda(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) d\sigma \iiint_{\omega} \frac{d\omega}{r}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \iiint_{\omega} d\omega \iint_{\Sigma} \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{r} d\sigma.$$

Par conséquent

$$\iiint_{\omega} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{r} d\sigma\right] d\omega = 0$$

quel que soit ω, d'où le résultat annoncé.

Posons

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{r} d\sigma \tag{34}$$

H est un potentiel de simple couche, donc une fonction harmonique dans tout l'espace (Σ exclue).

Posons encore:

$$u_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad v_1 = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad w_1 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}.$$

On aura facilement

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial H}{\partial x} - \Delta P = \frac{\partial H}{\partial x} + 2\xi.$$

Or, la fonction H étant harmonique, div (grad H) $= 0$, ce qui permettra, d'après les propriétés classiques, d'en mettre le gradient sous la forme d'un tourbillon, par les formules $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z}$, en prenant par exemple

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial H}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right) d\omega \ldots \text{ etc.}$$

Il s'ensuit que:

$$\frac{\partial(w_1-w_0)}{\partial y}-\frac{\partial(v_1-v_0)}{\partial z}=2\xi \text{ etc.},$$

$$\frac{\partial(u_1-u_0)}{\partial x}+\frac{\partial(v_1-v_0)}{\partial y}+\frac{\partial(w_1-w_0)}{\partial z}=0.$$

Retranchons ces relations du système proposé, en posant

$$u+u_0-u_1=U,\quad v+v_0-v_1=V,\quad w+w_0-w_1=W.$$

Il viendra

$$\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}=0 \quad\text{etc.}\quad \frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0.$$

Posons encore

$$U=\frac{\partial\theta}{\partial x};\quad V=\frac{\partial\theta}{\partial y};\quad W=\frac{\partial\theta}{\partial z}.$$

La dernière équation du système devient

$$\Delta\theta=0.$$

Or, on a:

$$\alpha U+\beta V+\gamma W=\frac{d\theta}{dn}=f+(\alpha u_0+\beta v_0+\gamma w_0)-(\alpha u_1+\beta v_1+\gamma w_1).$$

Ce qui ramène le problème à un problème de Neumann relatif à la fonction θ [1].

La condition de possibilité est remplie puisqu'elle se réduit à

$$\iint_\Sigma f d\sigma=0.$$

On en déduit rapidement les valeurs de u, v, w

$$u=\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{1}{2\pi}\iiint_\Omega\left[\zeta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}-\eta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right]d\omega-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega\left[\frac{\partial H}{\partial z'}\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}-\frac{\partial H}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right]d\omega. \tag{35}$$

10. Intégration du système $D\psi=0$. — Supposons qu'on connaisse sur Σ les valeurs de ψ_1 et une relation de la forme

$$\alpha\psi_2+\beta\psi_3+\gamma\psi_4=f$$

avec

$$\iint_\Sigma f d\sigma=0.$$

---

[1] La réduction du problème des tourbillons à un problème de Neumann a été réalisée pour la première fois par Stekloff.

Récemment, M. G. Bouligand a envisagé le même problème à un point de vue global, ce qui permet de considérer des surfaces Σ extrêmement générales.

Intégrer le système revient à traiter le problème des tourbillons en supposant

$$2\xi = -\frac{\partial\psi_1}{\partial x};\quad 2\eta = -\frac{\partial\psi_1}{\partial y};\quad 2\zeta = -\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$$

car la connaissance des valeurs de ψ_1, sur Σ détermine directement cette fonction qui — on l'a vu — doit être harmonique. L'intégrale sera de la forme (**34**), H étant ici

$$H = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{1}{r}\cdot\frac{d\psi_1}{dn}\,d\sigma.$$

Cela suppose bien entendu l'existence et la continuité de $\frac{d\psi_1}{dn}$.

Or la surface Σ a été choisie telle qu'un potentiel de double couche admette des dérivées normales continues, ou bien que ψ_1 obtenu par un problème de DIRICHLET, en admette aussi [1].

11. Etude d'un demivecteur. — Soient Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 quatre fonctions bornées et intégrables dans Ω; définissons le demivecteur χ par la formule:

$$(36)\qquad \chi_P = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\,\Psi_M d\omega_M.$$

Les composantes de χ, étant des combinaisons linéaires des dèrivées du premier ordre de divers potentiels newtoniens, seront des fonctions continues.

En plus, on peut montrer, en vertu de certaines inégalités de KORN [2] que les χ_i satisfont à des conditions de HÖLDER. Traçons dans Ω une surface régulière σ, limitant un domaine ω.

Calculons

$$I = \iint_{\sigma}(n_P\gamma)\chi_P d\sigma_P.$$

A cet effet, répétons le raisonnement fait dans le cas du plan, en entourant σ de deux autres surfaces σ_1 et σ_2, limitant les domaines ω_1, ω_2, ω_3, dont il a été question à différentes reprises.

Dans les domaines ω_1 et ω_2, la fonctiou $\frac{1}{\overline{MP}^3}$ restant toujours bornée, on

---

[1] Consulter à ce sujet le mémoire de STEKLOFF (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », t. II).

[2] Voir par exemple H. VILLAT, *Théorie des tourbillons*, p. ?42.

pourra faire l'interversion d'ordre d'intégration. On aura

$$\iint_{\sigma}(n_P\gamma)d\sigma_P\iiint_{\omega_1}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar\gamma)}{\overline{MP}^3}\Psi_M d\omega_M=\iiint_{\omega_1}\left[\iint_{\sigma}\frac{(n_P\gamma)(\overrightarrow{MP}\cdot\bar\gamma)}{\overline{MP}^3}d\sigma_P\right]\Psi_M d\omega_M$$
$$=-4\pi e\iiint_{\omega_1}\Psi_M d\omega_M,$$

en vertu des identités (28).

De même

$$\iint_{\sigma}(n_P\gamma)d\sigma_P\iiint_{\omega_2}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar\gamma)}{\overline{MP}^3}\Psi_M d\omega_M=\iiint_{\omega_2}\left[\iint_{\sigma}\frac{(n_P\gamma)(\overrightarrow{MP}\cdot\bar\gamma)}{\overline{MP}^3}d\sigma_P\right]\Psi_M d\omega_M=0.$$

Quant à la contribution de la portion comprise entre σ_1 et σ_2 elle tend vers zéro, lorsque ces deux surfaces tendent vers σ.

Un raisonnement facile conduira à la relation

$$\iint_{\sigma}(n_P\gamma)\chi_P d\sigma_P+\iiint_{\omega}e\Psi_M d\omega_M=0 \tag{37}$$

pour toute σ.

Il est bon de remarquer l'analogie de ce résultat avec celui obtenu dans le cas du plan.

La méthode que nous allons suivre pour traiter les problèmes à trois dimensions, aura aussi beaucoup de caractères communs avec celle que nous avons exposée dans la première partie.

12. Intégration d'une équation fonctionnelle. — Supposons qu'on connaisse dans Ω les composantes bornées et intégrables d'un demivecteur Ψ.

Nous nous proposons de déterminer le demivecteur continu ψ tel que

$$\iint_{\sigma}(n_P\gamma)\psi_P d\sigma_P+\iiint_{\omega}e\Psi_M d\omega_M=0 \tag{38}$$

en supposant en plus que sur Σ, on connaisse les valeurs de ψ_1, et qu'on ait

$$\alpha\psi_2+\beta\psi_3+\gamma\psi_4=f.$$

A cet effet, retranchons l'identité (36) de l'équation (37). On aura:

$$\iint_{\sigma}(n_P\gamma)[\psi_P-\chi_P]d\sigma_P=0.$$

Or, la fonction $\varphi_P=\psi_P-\chi_P$ est continue. En vertu du théorème de Morera que nous avons établi plus haut, on aura par conséquent

$$D\varphi = 0$$

le problème proposé est donc ramené à l'intégration de ce système.

Remarquons que χ_P étant continu dans tout l'espace on le connait parfaitement sur Σ.

On aura donc

$$\varphi_1 = \psi_1 - \chi_1 = \text{connu sur } \Sigma$$

et

$$\alpha\varphi_2 + \beta\varphi_3 + \gamma\varphi_4 = f - (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) = \text{connu sur } \Sigma.$$

Pour que le problème soit possible, il faudra que

$$\iint_\Sigma f d\sigma = \iint_\Sigma (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) = -\iiint_\Omega \Psi_1 d\omega.$$

Dans ces conditions, on a une solution unique, obtenue en écrivant

$$\psi_P = \varphi_P + \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,\Psi_M d\omega_M. \tag{39}$$

L'analogie entre cette formule et celle que nous avons établie dans la première partie, ainsi que le parallélisme des deux méthodes montre que le symbolisme employé est utile et naturel.

Nous allons appliquer maintenant toutes ces considérations à deux problèmes relatifs: le premier à un corps élastique, le second aux petits mouvements permanents d'un fluide visqueux.

13. Un problème d'équilibre relatif aux corps élastiques. — Comme application des principes et méthodes précédents, nous allons traiter deux exemples tirés de la pratique.

Commençons par le problème suivant qui se rattache à l'elasticitè:

Dans un milieu élastique Ω *limité par une surface (régulière au sens du problème de Neumann) on connait la distribution des forces extérieures* X, Y, Z *supposées bornées et intégrables.*

Posons

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\psi_2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\psi_3; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\psi_4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta; \quad (1+\xi)\theta = \psi_1.$$

Supposons connues sur Σ deux relation telles que

$$(40)\qquad \begin{cases} \alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4 = f \\ \alpha u \ + \beta v \ + \gamma w \ = g \end{cases}$$

ainsi que les valeurs de la fonction θ [1].

Cela posé, nous allons déterminer la distribution des déplacements (et des tensions) qu'on suppose continus et à dérivées partielles du premier ordre continues.

Revenons aux équations générales d'équilibre d'un milieu continu. Posons, pour être dans le cas d'un corps élastique qui suit la loi de Hooke

$$\begin{cases} N_1 = -\lambda\theta - 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}\dots \\ T_1 = -\mu\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\Big)\dots \quad \xi = 1 + \dfrac{\lambda}{\mu}; \quad -\dfrac{\rho}{\mu} = \nu. \end{cases}$$

On aura:

$$\iint_\sigma \Big[\alpha\Big(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \beta\mu\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \gamma\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)\Big]d\sigma = \iiint_\omega \rho X d\omega$$

ou bien

$$\iint_\sigma \Big[\alpha(1+\xi)\theta - \beta\Big(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \gamma\Big(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\Big)\Big]d\sigma$$

$$-2\iint_\sigma\Big(\alpha\frac{\partial v}{\partial y} - \beta\frac{\partial v}{\partial x}\Big)d\sigma - 2\iint_\sigma\Big(\alpha\frac{\partial w}{\partial z} - \beta\frac{\partial w}{\partial x}\Big)d\sigma = -\iiint_\omega \nu X d\omega.$$

Or, les intégrales telles que

$$\iint_\sigma\Big(\alpha\frac{\partial v}{\partial y} - \beta\frac{\partial v}{\partial x}\Big)d\sigma = 0$$

par l'application de la formules de Stokes à un contour parcouru deux fois dans des sens opposés.

Les équations ci-dessus deviendront par la suite:

$$(41)\qquad \begin{aligned} &\iint_\sigma(\alpha\psi_1 + \beta\psi_4 - \gamma\psi_3)d\sigma = -\iiint_\omega \nu X d\omega \\ &\iint_\sigma(-\alpha\psi_4 + \beta\psi_1 + \gamma\psi_2)d\sigma = -\iiint_\omega \nu Y d\omega \\ &\iint_\sigma(\alpha\psi_3 - \beta\psi_2 + \gamma\psi_1)d\sigma = -\iiint_\omega \nu Z d\omega \end{aligned}$$

[1] α, β, γ étant les cosinus de la normale intérieure.

auxquelles il faut adjoindre la condition

$$\iint\limits_{\sigma}(\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4)d\sigma = 0 \tag{42}$$

qui exprime le fait que le système

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\psi_2 \text{ etc.}$$

est compatible et qui remplace la condition classique, comme nous l'avons fait voir par l'emploi de la dérivée extérieure, qui nous a permis de nous affranchir de l'existence des dérivées secondes des fonctions u, v, w.

Or, le système d'équations fonctionnelles (40) et (41) peut s'écrire sous une forme condensée à l'aide des matrices introduites.

On aura:

$$\iint\limits_{\sigma}(n_P\gamma)\psi_P d\sigma_P + \iiint\limits_{\omega} e\Psi_M d\omega_M = 0$$

en posant ψ pour le demivecteur ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 et Ψ pour le demivecteur 0, νX, νY, νZ.

Or, l'intégration de cette équation est immédiate.

On en connaît en effet l'intégrale particulière

$$\chi_P = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}\Psi_M d\omega_M.$$

Cela réduit la recherche du demivecteur ψ à celle du demivecteur $\varphi = \psi - \chi$, satisfaisant à la relation

$$\iint\limits_{\sigma}(n_P\gamma)\varphi_P d\sigma_P = 0$$

et par conséquent

$$D\varphi = 0.$$

On aura comme conditions aux limites

$$\varphi_1 = \psi_1 - \chi_1 = \text{connu}$$
$$\alpha\varphi_2 + \beta\varphi_3 + \gamma\varphi_4 = f - (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) = \text{connu}.$$

Cela déterminera d'abord φ_1, puis par un problème de NEUMANN, on aura les autres composantes.

La condition de possibilité se réduit ici à:

$$\iint\limits_{\Sigma} f d\sigma = 0$$

car on a pour toute σ

$$\iint_{\sigma}(\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4)d\sigma = 0$$

et par continuité (car χ est continu dans tout l'espace)

$$\iint_{\Sigma}(\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4)d\sigma = 0.$$

Les fonctions ψ_1. ψ_2, ψ_3, ψ_4 satisfont à des conditions de Hölder.

Obtenir les u, v, w, revient maintenant à intégrer le système

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\psi_2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\psi_3; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\psi_4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\psi_1}{1+\xi}$$

dans la supposition $\xi \neq -1$.

C'est un système qui ne diffère pas essentiellement du système des tourbillons dont nous nous sommes occupé. C'est le même problème, dans un fluide compressible, dont on connaît la dilatation en chaque point.

La condition (41) montre qu'il est intégrable, compte tenu toutefois des conditions de Hölder qui assurent l'existence des dérivées.

On aura ici:

$$H = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4}{r}\,d\sigma.$$

Σ étant convenablement choisie, H aura des dérivées normales

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial H}{\partial z'}\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right)d\omega \text{ etc.}$$

$$P = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\psi_2'}{r}\,d\omega; \quad Q = \quad \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\psi_3'}{r}\,d\omega; \quad R = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\psi_4'}{r}\,d\omega;$$

$$u_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \text{ etc.}$$

et en posant

$$U = u + u_0 - u_1 \text{ etc.}$$

et ensuite

$$U = \frac{\partial\Theta}{\partial x} \text{ etc.}$$

la dernière équation donnera

$$\Delta\Theta = \frac{\psi_1}{1+\xi}.$$

Posons

$$\Theta_0 = -\frac{1}{4\pi(1+\xi)}\iiint_\Omega \frac{\psi_1'}{r}\,d\omega; \quad \Delta\Theta_0 = \frac{\psi_1}{1+\xi}.$$

En posant ensuite

$$\Phi = \Theta - \Theta_0.$$

On aura:

$$\Delta\Phi = 0$$

avec

$$\frac{d\Phi}{dn} = g + (\alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0) - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1) - \frac{d\Theta_0}{dn}.$$

La condition de possibilité se reduit ici à:

$$\iint_\Sigma g\,d\sigma + \frac{1}{1+\xi}\iiint_\Omega \psi_1\,d\omega = 0.$$

Nous n'insisterons plus sur le cas $\xi = -1$, ainsi que sur les différences qui existent entre la nature du problème posé et celui qu'on se propose d'habitude sur le même système.

14. Les petits mouvements stationnaires d'un fluide visqueux. — Occupons-nous enfin d'un fluide visqueux en mouvement permanent et lent au voisinage d'une position d'équilibre.

Supposons-le limité par une surface Σ régulière comme ci-dessus et soumis à l'action d'un champ de forces X, Y, Z bornées et intégrables.

Posons:

(43) $$\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \psi_2; \quad \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \psi_3; \quad \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \psi_4$$

et

$$p = \psi_1.$$

On aura, le fluide étant incompressible:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Supposons données sur Σ (qui peut être en mouvement).

1°) *la pression p,*

une relation exprimant la vitesse normale,

2°) $\alpha u + \beta v + \gamma w = g$

une relation exprimant le tourbillon normal,

3°) $\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4 = f.$

Reportons-nous aux équations générales.

On aura:

$$N_1 = p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \dots$$

$$T_1 = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \dots$$

D'où:

$$\iint_\sigma \left[\alpha\left(p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \beta\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \gamma\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] d\sigma = -\iiint_\omega \rho X d\omega.$$

Ou bien

$$\iint_\sigma \left[\alpha p + \beta\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \gamma\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] d\sigma - 2\mu \iint_\sigma \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\sigma$$

$$+ 2\mu \iint_\sigma \left(\alpha\frac{\partial v}{\partial y} - \beta\frac{\partial v}{\partial x}\right) d\sigma + 2\mu \iint_\sigma \left(\alpha\frac{\partial w}{\partial z} - \beta\frac{\partial w}{\partial x}\right) d\sigma = -\iiint_\omega \rho X d\omega.$$

En remarquant les termes qui disparaissent et en passant aux notations proposées, on aura:

$$\text{(44)} \qquad \begin{aligned} &\iint_\sigma (\alpha\psi_1 + \beta\psi_4 - \gamma\psi_3) d\sigma + \iiint_\omega \rho X d\omega = 0 \\ &\iint_\sigma (-\alpha\psi_4 + \beta\psi_1 + \gamma\psi_2) d\sigma + \iiint_\omega \rho Y d\omega = 0 \\ &\iint_\sigma (\alpha\psi_3 - \beta\psi_2 + \gamma\psi_1) d\sigma + \iiint_\omega \rho Z d\omega = 0 \end{aligned}$$

auxquelles nous adjoindrons la condition de compatibilité du système (42), savoir

$$\text{(45)} \qquad \iint_\sigma (\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4) d\sigma = 0$$

qui remplace la condition classique de la divergence nulle et qui la généralise, au sens qu'elle permet de renoncer à considérer les dérivées partielles des fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 comme nécessaires pour la possibité du problème; cela fait en même temps que l'existence des dérivées secondes des u, v, w ne soit plus exigible et réduit le problème qui portait sur des équations du deuxième ordre à un problème concernant seulement les dérivées premières.

L'intégration du système d'équations fonctionnelles (43), (44) est immédiate si on l'écrit sous la forme condensée

$$\iint_\sigma (n_P\gamma)\psi_P d\sigma_P + \iiint_\omega e\Psi_M d\omega_M = 0$$

où ψ désigne le demivecteur ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 et Ψ le demivecteur 0, ρX, ρY, ρZ.

On a une intégrale particulière par la formule:

$$\chi_P = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}\, \Psi_M d\omega_M$$

ce qui réduit le problème à l'obtention d'un demivecteur $\varphi = \psi - \chi$, et vérifiant le système

(46) $$D\varphi = 0.$$

Les conditions aux limites se transforment aisément en les suivantes:

$$\varphi_1 = p - \chi_1 = \text{connu}$$
$$\alpha\varphi_2 + \beta\varphi_3 + \gamma\varphi_4 = f - (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) = \text{connu.}$$

Cela fait connaître d'abord φ_1, et puis par un problème de NEUMANN, les autres composantes.

La condition de possibilité se réduit à

$$\iint\limits_{\Sigma} f d\sigma = 0$$

car on a pour toute surface σ

$$\iint\limits_{\sigma}(\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4)d\sigma = 0$$

et par continuité, compte tenu du fait que χ est continu dans tout le plan

$$\iint\limits_{\Sigma}(\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4)d\sigma = 0$$

Les fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, satisfont à des conditions de HÖLDER.

Déterminer u, v, w, revient maintenant à l'intégration du système

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\psi_2}{\mu}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\psi_3}{\mu}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\psi_4}{\mu};$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

avec $\mu \neq 0$.

Ce système est celui qu'on rencontre dans la théorie des tourbillons.

Il est compatible, car on a:

$$\iint\limits_{\sigma}(\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4)d\sigma = 0$$

les fonctions ψ_2, ψ_3, ψ_4 étant dans les conditions du problème que nous avons résolu.

On aura ici:

$$H = \frac{1}{4\mu\pi}\iint\limits_{\Sigma} \frac{\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4}{r} d\sigma$$

$$u_, = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial H}{\partial z'}\cdot\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right) d\omega \ldots \text{ etc.}$$

$$P = \frac{1}{4\mu\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\psi_2'}{r} d\omega \ldots \text{ etc.}$$

$$u_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \text{ etc.} \ldots$$

Posons

$$U = u + u_, - u_1 \text{ etc.} \ldots$$

et ensuite

$$U = \frac{\partial \Theta}{\partial x} \text{ etc.} \ldots$$

la dernière équation du système se réduit à

$$\Delta\Theta = 0$$

avec

$$\frac{d\Theta}{dn} = g + (\alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0) - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1).$$

La condition de possibilité du problème de Neumann revient à:

$$\iint\limits_{\Sigma} g d\sigma = 0.$$

Le cas où $\mu = 0$, conduit à une dégénérescence du problème qui n'admet plus une intégrale unique (s'il en admet une).

15. *En conclusion*, le but de ce mémoire a été de montrer comment on peut se poser des problèmes plus généraux sur les milieux continus, à l'aide de certains algorithmes convenables.

Cela permet de suivre une voie bien naturelle et très simple où les restrictions s'introduisent d'elles-mêmes sans changer la nature du problème qui doit rester global comme le phénomène qu'il exprime.

Il est bon de remarquer que la notion fondamentale a été celle de dérivée extérieure, dont on a fait un large usage toutes les fois que l'emploi de la formule de Green était dicté par les circonstances.