Sopra certe classi di connessioni lineari.

Memoria di STANISLAO GOLAB (Cracovia).

L'oggetto della seguente nota è l'esposizione di una serie di teoremi ammessi da una classe di connessioni lineari. Queste considerazioni hanno avuto origine dalla generalizzazione di una affermazione del sig. G. CORBELLINI ⁽¹⁾. Ho assunto le notazioni che si trovano nel libro di J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül* ⁽²⁾.

1. Sia dato nello spazio n -dimensionale X_n il sistema di n congruenze indipendenti di curve. Diciamo che questo sistema è *olonomo* se può essere stabilito in ogni punto ξ dello spazio X_n un sistema di riferimento e^ν_i ⁽³⁾ (composto di n vettori controvarianti) tale, che i vettori del detto sistema siano tangenti alle curve delle congruenze e formino un sistema olonomo nel senso ordinario ⁽⁴⁾. Il sistema di riferimento composto dei vettori e^ν_i verrà indicato con (i) . La condizione necessaria e sufficiente per l'olonomia del sistema (i) è:

$$(1) \quad \partial_{[\mu} e_{\lambda]}^k = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

⁽¹⁾ G. CORBELLINI, *Di una classe di varietà caratterizzate per mezzo del parallelismo*, « Rend. dei Lincei », Vol. IV, 1926, ser. 6, p. 92-99. Cfr. anche E. BORTOLOTTI, *Reti di Cebicheff e sistemi coniugati nelle V_n riemanniane*, « Rend. dei Lincei », Vol. V, ser. 6 (1927), p. 741-747.

⁽²⁾ J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer, 1924. Quanto concerne le posteriori correzioni e semplificazioni, può trovarsi sistematicamente raccolto nel mio lavoro, *Ueber verallgemeinerte projektive Geometrie*, « Prace matematyczno-fizyczne », Warszawa, 1930, T. 37, p. 91-153.

⁽³⁾ Gli indici correnti dell'alfabeto greco percorrono la serie $1, \dots, n$, gli indici dell'alfabeto latino, invece la serie: $1, \dots, n$. I valori dei simboli $1, \dots, n$ debbono essere considerati come totalmente diversi dai valori $1, \dots, n$.

⁽⁴⁾ La letteratura concernente le ricerche sui sistemi anolonomi nella geometria è citata nel lavoro di J. A. SCHOUTEN, *Ueber nichtholonome Uebertragungen in einer L_n* , « Mathematische Zeitschrift », 30, 1929, p. 149-172.

dove il sistema e_{λ}^k dei vettori covarianti è reciproco al sistema e_i^{ν} ⁽⁵⁾ e ∂_{μ} vale per $\partial/\partial\xi^{\mu}$. Se il sistema (i) è dato per mezzo di arbitrari vettori tangenti p_i^{ν} , allora le condizioni necessarie e sufficienti per l'olonomia sono le seguenti:

$$(2) \quad p_{[\nu} \partial_{\mu} p_{\lambda]}^k = 0 \quad (6) \quad (k = 1, \dots, n),$$

dove p_{λ}^k è di nuovo il sistema reciproco al sistema p_i^{ν} . Quando la varietà X_n è dotata di una connessione affine (lineare e simmetrica) ed in questa ∇ significa la derivazione covariante, allora la condizione d'olonomia può essere scritta nella seguente forma, invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate:

$$(3) \quad p_{[\nu} \nabla_{\mu} p_{\lambda]}^k = 0 \quad (7) \quad (k = 1, \dots, n).$$

2. Lo spazio X_n sia dotato di una connessione lineare, generalmente non simmetrica, di parametri $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$. Per comodità introduciamo il seguente breve modo di esprimersi. Se è data una famiglia di curve ad uno o più parametri, ed oltre a ciò una curva L contenuta nella varietà luogo dei punti delle curve della nostra famiglia, allora l'espressione, che la data famiglia è parallela, nel senso del parallelismo generato dalla connessione, lungo la curva L , vuol dire che sussiste il fatto seguente: Se in un punto qualunque ξ della curva L prendiamo un vettore controvariante tangente a una curva della nostra famiglia e lo spostiamo parallelamente lungo la curva L , otteniamo sempre un vettore tangente a una curva della famiglia.

Introduciamo adesso le due seguenti definizioni:

DEFINIZIONE I. — Diciamo che la connessione appartiene alla classe (C) — o più in breve, che essa ha la proprietà (C) —, se esiste un sistema (i)

⁽⁵⁾ Il sistema reciproco e_{λ}^k è univocamente definito per mezzo del sistema di equazioni

$$e_{\lambda}^{\nu} e_{\nu}^{\mu} = A_{\lambda}^{\mu}$$

dove A_{λ}^{μ} è l'affinore-unità.

⁽⁶⁾ Cfr. T. LEVI-CIVITA, *The absolute Differential Calculus*, London, 1927, p. 26-29 come pure G. CORBELLINI, *Sopra i sistemi di coordinate di una varietà qualunque*, « Rend. dei Lincei », Vol. 32, 1923, p. 112-114.

⁽⁷⁾ Per le connessioni lineari generali (non simmetriche) la condizione d'olonomia si presenta nella forma un po' più complicata:

$$(3a) \quad p_{[\nu} \nabla_{\mu} p_{\lambda]}^k + \frac{1}{3} p_{\rho} (p_{\nu} S_{\lambda\mu}^{\rho} + p_{\lambda} S_{\mu\nu}^{\rho} + p_{\mu} S_{\nu\lambda}^{\rho}) = 0, \quad S_{\lambda\mu}^{\rho} = \Gamma_{[\lambda\mu]}^{\rho}.$$

di n congruenze indipendenti tale che ciascuna delle congruenze $[i]$ ⁽⁸⁾ è parallela lungo ogni curva della congruenza $[j]$, per $j \neq i$ ⁽⁹⁾.

DEFINIZIONE II. — Diciamo che la connessione appartiene alla classe (D) , o più in breve, che essa ha la proprietà (D) , se esiste un sistema (i) di n congruenze indipendenti tale che ciascuna delle congruenze $[i]$ è parallela lungo ogni curva di una qualunque congruenza $[j]$.

Si vede subito che ogni connessione della classe (D) appartiene alla classe (C) , ma non reciprocamente. La definizione II esprime che la connessione ha la proprietà (C) ed oltre a ciò, che le curve di ogni congruenza sono geodetiche. È chiaro che dal fatto, che una data connessione appartiene alla classe (C) e che non tutte le congruenze, delle quali si parla nella definizione, sono geodetiche, non si può dedurre, che la connessione non appartiene alla classe (D) .

Indicheremo le condizioni, alle quali debbono soddisfare i parametri $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$, affinchè la connessione abbia la proprietà (C) o risp. (D) . Queste condizioni non hanno però forma intrinseca. Valgono soltanto nel sistema (i) , dato per mezzo dei vettori p_i^ν , tangenti alle congruenze. La trasformazione di queste condizioni a forma intrinseca ci sembra un problema molto difficile.

Supponiamo che la connessione appartenga alla classe (C) o risp. (D) , e denotiamo con Γ_{ij}^k i parametri della connessione riferiti al sistema (i) , dato per mezzo dei vettori p_i^ν . Siano $[r]$, $[s]$ due delle n congruenze, menzionate nella definizione. Nel caso (C) si suppone $r \neq s$, nel caso (D) può anche essere $r = s$. Nel punto ξ arbitrario prendiamo un vettore tangente alla curva della congruenza $[r]$ e del resto arbitrario. Poichè — e questo è facile a dimostrare — la proprietà espressa al principio del § 2 è soddisfatta da ogni vettore tangente, se è soddisfatta da uno, allora basterà prendere come punto di partenza il vettore p_r^ν . Le componenti di questo vettore p_r^k rispetto al sistema (i) sono uguali a:

$$(4) \quad p_r^k = \delta_r^k \quad (10).$$

⁽⁸⁾ Il segno $[i]$ vuol denotare, a differenza del segno (i) , quella delle congruenze del sistema (i) , della quale il numero ordinale è i .

⁽⁹⁾ Appunto le connessioni della classe (C) sono state introdotte nella geometria riemanniana da G. CORBELLINI nel lavoro citato sotto ⁽¹⁾. E. BORTOLOTTI chiama in questo caso il sistema (i) *rete di Cebiceff*.

⁽¹⁰⁾ Le p_r^ν sono le componenti del vettore menzionato nel sistema (v) appartenente alle coordinate ξ^ν . Il sistema (i) , dato per mezzo dei sistemi locali, può essere anolonomo e può non appartenere a nessun sistema di coordinate ξ^i . Cfr. J. A. SCHOUTEN, l. c. ⁽⁴⁾.

Il segno $\underline{*}$ vuol significare che l'equazione non ha il carattere intrinseco, ma vale sol-

Dopo lo spostamento parallelo di questo vettore lungo la curva della congruenza $[s]$ — le componenti dell'elemento lineare dello spostamento essendo $(d\xi)^k$ — le nuove componenti saranno

$$(5) \quad \bar{p}_r^k = p_r^k - \Gamma_{ijr}^k (d\xi)^j.$$

Tenendo conto che conformemente alla definizione

$$(6) \quad (d\xi)^k = p_s^k dt$$

e che le equazioni (4) valgono per k, r arbitrari, otteniamo

$$(7) \quad \bar{p}_r^k \stackrel{*}{=} \delta_r^k - \Gamma_{rs}^k dt.$$

Poichè il vettore $\bar{p}_r^k$ deve restare tangente alla congruenza $[r]$, abbiamo la relazione

$$(8) \quad \bar{p}_r^k \stackrel{*}{=} \alpha \delta_r^k,$$

dove α è un certo coefficiente. Dalle (7) e (8) risulta, che

$$(9) \quad (D) \quad \boxed{\Gamma_{rs}^k \stackrel{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad k \neq r}.$$

Le equazioni (7) e (8) per $k = r$ non forniranno niente di nuovo. Per le connessioni della classe (D) siamo allora condotti alle equazioni (9) come condizioni necessarie. Com'è evidente conseguenza di tutte le considerazioni precedenti, nel caso delle connessioni della classe (C) otteniamo le equazioni:

$$(10) \quad (C) \quad \boxed{\Gamma_{rs}^k \stackrel{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad k \neq r \quad \text{e} \quad s \neq r}.$$

Si può adesso verificare, con la massima facilità, che le relazioni (10) o risp. (9) sono nello stesso tempo sufficienti affinchè la connessione lineare abbia la proprietà (C) o risp. (D).

Si può anche dedurre, dalle considerazioni precedenti, che le condizioni (9) o risp. (10) sono invarianti rispetto ai cambiamenti di sistemi di riferimento che consistono in dilatazioni locali ⁽¹¹⁾ (non soltanto però per tali

tanto nel supposto sistema di riferimento. δ_r^k denota — come sempre — il simbolo di KRONECKER, uguale a 1 per $k = r$ e a 0 per $k \neq r$.

⁽¹¹⁾ Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, 1922, Vol. I, § 60, p. 155 e 156. Diciamo, che il sistema ev è derivato del sistema ev per dilatazione locale, se $ev = \rho ev$, dove ρ sono scalari, $I \quad I \quad i \quad I$

cambiamenti), cioè se con (I) denotiamo il sistema che è ottenuto dal sistema (i) mediante una dilatazione, allora le equazioni (9) o risp. (10) implicano le equazioni

$$(9a) \quad \Gamma_{IJ}^K \neq 0 \quad \text{per} \quad K \neq I,$$

risp.

$$(10a) \quad \Gamma_{IJ}^K \neq 0 \quad \text{per} \quad K \neq I \quad \text{e} \quad J \neq I.$$

3. Per le connessioni affini (simmetriche) vale il seguente

TEOREMA. — Se la connessione affine appartiene alla classe (C) , allora il sistema di congruenze (i) , menzionato nella definizione, è un sistema olonomo.

DIMOSTRAZIONE. — Conservando le notazioni, abbiamo fra i parametri Γ_{ij}^k nel sistema (i) e i parametri $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ nel sistema (v) la relazione

$$(11) \quad \Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{ij}^k p_\lambda^i p_\mu^j + p_\lambda^\nu \partial_\mu p_\lambda^k.$$

Moltiplicando i due membri dell'equazione precedente per p_ν^l e sommando rispetto all'indice ν , otteniamo:

$$(12) \quad \partial_\mu p_\lambda^l = p_\nu^l \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \Gamma_{ij}^l p_\lambda^i p_\mu^j$$

donde

$$(13) \quad p_{[\nu}^l \partial_\mu p_{\lambda]}^l = p_{[\nu}^l p_{\lambda]}^l \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \Gamma_{ij}^l p_{[\nu}^i p_{\lambda]}^j p_{\mu]}^l.$$

Badando al fatto che la connessione è simmetrica e che il sistema (v) è olonomo, abbiamo:

$$(14) \quad p_{[\nu}^l p_{\lambda]}^l \Gamma_{\lambda\mu}^\nu = p_{\nu}^l p_{[\lambda}^l \Gamma_{\lambda\mu]}^\nu = 0$$

dunque

$$(15) \quad p_{[\nu}^l \partial_\mu p_{\lambda]}^l = - \Gamma_{ij}^l p_{[\nu}^i p_{\lambda]}^j p_{\mu]}^l.$$

Osserviamo però che fra i trivettori

$$(16) \quad p_{[\nu}^l p_{\lambda]}^i p_{\mu]}^j$$

sono diversi da zero (non degeneri) soltanto quelli per i quali $l \neq i$, $l \neq j$, $i \neq j$.

Dunque nella somma a destra della equazione (15) basta considerare soltanto i termini per i quali $l \neq i$, $l \neq j$, $i \neq j$. I coefficienti Γ_{ij}^k di questi termini sono appunto uguali a zero in forza della (10), e in conseguenza

$$(17) \quad p_{[\nu}^l \partial_\mu p_{\lambda]}^l = 0 \quad (l = 1, \dots, n),$$

e questo esprime, che il sistema (i) delle congruenze è olonomo.

Osserviamo che il teorema precedente non è vero in generale per le connessioni lineari. Esso è ovvio nel caso $n=2$, perchè in questo caso il trivettore (16) è sempre nullo.

4. Poichè le equazioni (9) o risp. (10) non hanno carattere intrinseco rispetto a tutte le trasformazioni di coordinate, si presenta la questione di decidere, quando sono dati i parametri Γ della connessione in un qualunque sistema di riferimento, se la connessione appartenga alla classe (D) o risp. (C) o no. Questo problema appare nel caso generale molto difficile a risolvere. Noi mostriamo soltanto che per $n \geq 3$ la risposta è in generale negativa.

Fermiamoci nel caso particolare $n=2$, nel quale caso sussiste il seguente TEOREMA. — Per $n=2$ ogni connessione lineare gode della proprietà (C).

DIMOSTRAZIONE. -- Osserviamo anzitutto che per $n=2$ il sistema (10) consta, sia nel caso generale della connessione asimmetrica, come nel caso della connessione affine (cioè simmetrica), soltanto di due equazioni. Mostriamo che esiste un sistema di vettori e^{ν}_i tale che i parametri Γ^{k}_{ij} , riferiti a questo sistema, soddisfano alle equazioni

$$(18) \quad \Gamma^{1}_{21} = 0, \quad \Gamma^{2}_{12} = 0$$

e questo — come già sappiamo — basta per provare la nostra asserzione. Introduciamo a tale scopo le seguenti brevi notazioni:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma^1 = -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} A^{\lambda}_\nu A^{\mu}_1 A^1_2, \quad \sigma^2 = -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} A^{\lambda}_\nu A^1_1 A^{\mu}_2 \\ A^k_\nu = \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi^\nu}, \quad A^\nu_k = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^k}, \end{array} \right.$$

e consideriamo il seguente sistema d'equazioni a derivate parziali del secondo ordine:

$$(20) \quad \boxed{\partial_1 A^\nu_2 = \sigma^k A^\nu_k \quad (\nu = 1, 2)} \quad (12).$$

Il sistema precedente è un sistema di due equazioni parziali con due funzioni incognite $\xi^1(\xi^1, \xi^2)$, $\xi^2(\xi^1, \xi^2)$, equazioni risolte rispetto alle derivate parziali del secondo ordine miste, e che nei secondi membri contengono i quozienti di due polinomi nelle derivate parziali del primo ordine. Segue manifestamente dalle equazioni (19) e (20) che i denominatori sono del quarto,

(12) Le equazioni (20) possono essere chiamate equazioni generalizzate di SERVANT. Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*. (1922), Vol. I, p. 157.

i numeratori del secondo grado ⁽¹³⁾, i coefficienti sono funzioni note delle funzioni incognite ξ^ν . Tale sistema — com'è ben noto della teoria generale delle equazioni a derivate parziali — ammette sempre soluzioni (la questione delle condizioni iniziali non ha alcun interesse per noi). Prendendo una delle soluzioni con jacobiano diverso da zero (e tali certamente ne esistono), otteniamo nello stesso tempo un passaggio dall'originario sistema di coordinate ξ^ν a un nuovo sistema di coordinate ξ^k . Se calcoleremo i parametri della connessione Γ_{ij}^k nel nuovo sistema (k) per mezzo delle formule di trasformazione

$$(21) \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu A_\nu^k A_i^\lambda A_j^\mu + A_\lambda^k \partial_j A_i^\lambda$$

e terremo conto che sussistono le equazioni (20), otterremo immediatamente le relazioni (18).

OSSERVAZIONE I. — Il teorema precedente non può essere esteso (neppure nel caso $n=2$) alle connessioni lineari della classe (D) . Esistono connessioni, anche simmetriche e riemanniane, che non appartengono alla classe (D) . Come più semplice esempio, basta prendere una qualunque connessione riemanniana non-euclidea (cfr. il teorema del paragrafo seguente).

OSSERVAZIONE II. — Il teorema precedente non può essere generalizzato pel caso di un numero di dimensioni maggiore di 2. Infatti, supponiamo che sia $n \geq 3$. Nel caso (C) il sistema (10) contiene $n(n-1)^2$ equazioni con n^2 funzioni incognite p_i^ν . Siccome per $n \geq 3$ si ha $n(n-1)^2 > n^2$, allora il sistema non ha in generale soluzioni. Anche supponendo che la connessione sia affine (simmetrica) e presumendo l'esistenza di soluzioni olonome, il sistema (10) si riduce a $\frac{n^2(n-1)}{2}$ equazioni, ma d'altra parte ha n funzioni incognite, in generale, quindi, non esisteranno soluzioni, perchè si ha $\frac{n^2(n-1)}{2} > n$ per $n \geq 3$.

OSSERVAZIONE III. — Siccome il sistema (9) contiene in sè come sottosistema il sistema (10), è chiaro che in generale per $n \geq 3$ la connessione lineare non appartiene alla classe (D) .

Per mostrare come siano *restrettive* le condizioni affinché la connessione abbia la proprietà (D) , citiamo i seguenti teoremi.

⁽¹³⁾ Se immaginiamo di esprimere le derivate parziali A_λ^k che vengono introdotte nelle formule (19) per mezzo delle derivate del sistema reciproco, le prime saranno funzioni razionali di queste ultime, e precisamente, frazioni col numeratore del primo, il denominatore del secondo grado.

5. TEOREMA. — Se una connessione affine è una connessione riemanniana avente come ds^2 una forma definita positiva e se essa appartiene alla classe (D), allora essa è una connessione euclidea (secondo SCHOUTEN: cioè, essa fa della X_n uno spazio euclideo) ⁽¹⁴⁾.

DIMOSTRAZIONE. — Denotiamo con (i) il sistema nel quale sussistono le equazioni (9). Secondo il teorema del paragrafo 3 possiamo da capo supporre che il sistema sia olonomo. Dunque i parametri Γ_{ij}^k della connessione calcolati nel sistema (i) sono simmetrici rispetto ai indici i, j , e per conseguenza il sistema (9) nel caso considerato equivale al sistema

$$(22) \quad \Gamma_{ij}^k \neq 0 \quad \text{per} \quad k \neq i \quad \text{o} \quad k \neq j \quad \text{o} \quad i \neq j.$$

In altre parole: nel sistema considerato sono diversi da zero soltanto i parametri della forma

$$(23) \quad \gamma_j = \Gamma_{jj}^j \quad (\text{non sommare!}).$$

Vediamo quale influenza hanno le equazioni (22) su la forma delle componenti del tensore di curvatura. Denotandolo come usualmente, abbiamo

$$(24) \quad R_{ijl}^{\cdot\cdot\cdot k} = \partial_j \Gamma_{il}^k - \partial_l \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{mj}^k \Gamma_{il}^m - \Gamma_{ml}^k \Gamma_{ij}^m.$$

Tenendo conto delle equazioni (22) e (23), constatiamo successivamente che:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } R_{iji}^{\cdot\cdot\cdot k} \neq 0 \quad \text{per} \quad l, j, i, k \neq \\ \text{b) } R_{kji}^{\cdot\cdot\cdot k} \neq 0 \quad \text{per} \quad k, j, i \neq \\ \text{c) } R_{ljk}^{\cdot\cdot\cdot k} \neq 0 \quad \text{per} \quad l, j, k \neq \\ \text{d) } R_{iji}^{\cdot\cdot\cdot k} \neq 0 \quad \text{per} \quad i, j, k \neq \\ \text{e) } R_{iki}^{\cdot\cdot\cdot k} \neq 0 \quad \text{per} \quad k \neq i \\ \text{f) } R_{lkk}^{\cdot\cdot\cdot k} \neq -\partial_l \gamma_k \quad \text{per} \quad k \neq l \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Non sommare rispetto agli} \\ \text{indici che si ripetono!} \end{array}$$

Da questa tabella e dalla emmisimmetria del tensore $R_{iji}^{\cdot\cdot\cdot k}$ rispetto agli indici l, j segue che sono eventualmente diverse da zero soltanto le componenti

$$(26) \quad R_{ikk}^{\cdot\cdot\cdot k} \neq -\partial_l \gamma_k, \quad R_{kik}^{\cdot\cdot\cdot k} \neq \partial_l \gamma_k.$$

L'ipotesi che la connessione sia riemanniana equivale a supporre l'esistenza d'un tensore metrico g_{ik} pel quale sussiste la proprietà:

$$(27) \quad \partial_j g_{ik} = \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{kj}^l g_{il},$$

⁽¹⁴⁾ Questo teorema non ha niente in comune con quello contenuto nel § 1 del lavoro di E. BORTOLOTTI, già menzionato in (1).

onde, tenute presenti le (22), otteniamo

$$(28) \quad \partial_j g_{ik} \equiv \Gamma_{ij}^i g_{ik} + \Gamma_{kj}^k g_{ik} \equiv g_{ik} (\Gamma_{ij}^i + \Gamma_{kj}^k)$$

(non sommando nè rispetto a i nè rispetto a k !).

La formula precedente ci fornisce

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \partial_j g_{ik} \equiv 0 \quad \text{per } i, j, k \neq \\ \text{b) } \partial_j g_{ii} \equiv 0 \quad \text{per } i \neq j \\ \text{c) } \partial_j g_{ij} \equiv \gamma_j g_{ij} \quad \text{per } i \neq j \\ \text{d) } \partial_j g_{jj} \equiv 2\gamma_j g_{jj}. \end{array} \right.$$

Da queste relazioni segue in particolare, che la componente g_{ij} è funzione di due variabili soltanto ξ^i e ξ^j . L'ultimo fatto può essere del resto dedotto dalla ipotesi meno restrittiva che la connessione sia riemanniana e possieda la proprietà (C). (Cfr. su questo punto G. CORBELLINI, l. c., ⁽¹⁾, § 5). Dalla ipotesi che la forma differenziale $g_{ij} d\xi^i d\xi^j$ sia definita (positiva) segue in particolare che

$$(30) \quad g_{jj} > 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Il nostro scopo è di dimostrare, che

$$(31) \quad \partial_j \gamma_i \equiv 0 \quad \text{per } i \neq j,$$

perchè allora, in virtù delle relazioni (25), svanirà identicamente il tensore di curvatura e questo — com'è ben noto — basta perchè la connessione sia euclidea. A tale scopo deriviamo (29 d)) rispetto a ξ^i , supponendo $i \neq j$:

$$(32) \quad \partial_{ij} g_{jj} \equiv 2\gamma_j \partial_i g_{jj} + 2g_{jj} \partial_i \gamma_j.$$

Ora in virtù di (29 b)) abbiamo:

$$(33) \quad \partial_{ij} g_{jj} = \partial_j (\partial_i g_{jj}) \equiv 0.$$

Le (29 b)), (33) e (32) danno finalmente

$$(34) \quad g_{jj} \partial_i \gamma_j \equiv 0,$$

donde, in forza della (30), otteniamo la (31).

6. TEOREMA. — Se una connessione affine appartiene alla classe (D) e gode della proprietà $R_{ik} = 0$ ⁽¹⁵⁾, allora essa è una connessione euclidea.

⁽¹⁵⁾ Si ha $R_{ik} = R_{jk}^{::j}$.

DIMOSTRAZIONE. — Osserviamo che nel sistema (i) abbiamo

$$(35) \quad \begin{cases} R_{ii} \equiv 0 \\ R_{ik} \equiv \partial_i \gamma_k \quad \text{per } i \neq k. \end{cases}$$

Dalla relazione $R_{ik} = 0$ segue allora che ha luogo l'equazione (31) e questo — come già sappiamo — ha per conseguenza la « euclideanità » della connessione.

OSSERVAZIONE. — Per $n = 2$ il teorema precedente è ovvio. Per $n = 3$ le cose vanno già diversamente. Bisogna ricordarsi che per $n = 3$ la relazione $R_{ik} = 0$ implica la relazione $R_{ij}^{\dots k} = 0$ soltanto nel caso in cui la connessione è riemanniana, la quale ipotesi non è qui posta.

7. TEOREMA. — Se la connessione affine è proiettivamente euclidea ⁽¹⁶⁾ e appartiene alla classe (D), allora è una connessione euclidea.

DIMOSTRAZIONE. — Sia (i) — come prima — il sistema nel quale valgono le equazioni (9). Denotiamo con $P_{ij}^{\dots k}$ il tensore di curvatura proiettiva di WEYL ⁽¹⁷⁾. Abbiamo

$$(36) \quad \begin{cases} P_{ij}^{\dots k} = R_{ij}^{\dots k} + \frac{1}{n^2 - 1} \{ (n - 1) A_i^k (R_{lj} - R_{jl}) - \\ - A_l^k (n R_{ji} + R_{ij}) + A_j^k (n R_{li} + R_{il}) \}. \end{cases}$$

Tenendo conto delle (25) e (35), otteniamo successivamente:

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } P_{ij}^{\dots k} \equiv 0 \quad \text{per } l, j, i, k \neq \\ \text{b) } P_{kj}^{\dots k} \equiv \frac{1}{1 - n^2} (\partial_i \gamma_j + n \partial_j \gamma_i) \quad \text{per } k, j, i \neq \\ \text{c) } P_{ij}^{\dots k} \equiv \frac{1}{n + 1} (\partial_i \gamma_j - \partial_j \gamma_i) \quad \text{per } k, l, j \neq \\ \text{d) } P_{ij}^{\dots k} \equiv 0 \quad \text{per } i, j, k \neq \\ \text{e) } P_{iki}^{\dots k} \equiv 0 \quad \text{per } k \neq i \\ \text{f) } P_{ikk}^{\dots k} \equiv \frac{2 - n}{n^2 - 1} (n \partial_i \gamma_k + \partial_k \gamma_i) \quad \text{per } k \neq l. \end{array} \right.$$

(Non sommare rispetto agli indici che si ripetono!).

Siccome secondo l'ipotesi abbiamo

$$(38) \quad P_{ij}^{\dots k} = 0$$

⁽¹⁶⁾ Vedi J. A. SCHOUTEN. *Der Ricci-Kalkül*, p. 130.

⁽¹⁷⁾ Vedi J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, p. 131.

segue dalla (37 c))

$$(39) \quad \partial_j \gamma_i \stackrel{*}{=} \partial_i \gamma_j$$

e l'ultima relazione confrontata per esempio con (37 b)) fornisce

$$(40) \quad \partial_j \gamma_i \stackrel{*}{=} 0.$$

Ne segue, in forza della (25 f)), che

$$(41) \quad R_{ji}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0.$$

L'ultimo teorema è interessante, in quanto ne segue che la proprietà (D) è la caratteristica che fra le connessioni affini proiettivamente euclidee distingue le connessioni euclidee.