Periodische Differentialgleichungen und fastperiodische Funktionen.

Von HELLMUTH KNESER (in Greisswald).

POINCARÉ ⁽¹⁾, E. E. LEVI ⁽²⁾ und BOHL ⁽³⁾ behandelten die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{ds}{dt} = \varphi(s, t),$$

deren rechte Seite stetig ist, in s und t mit der Periode 1 periodisch ist und z. B. der Lipschitzschen Bedingung genügt, so dass die Lösung eindeutig und stetig durch einen Anfangswert bestimmt ist. Insbesondere bewies E. E. LEVI, dass zu jeder Differentialgleichung (1) eine Konstante μ gehört derart, dass für jede Lösung s von (1) die Differenz $s - \mu t$ beschränkt bleibt. Herr WINTNER legte mir die Frage vor, ob und wann $s - \mu t$ eine fastperiodische Funktion von t ist ⁽⁴⁾. Diese Frage lässt sich vollständig beantworten auf Grund der vorliegenden Ergebnisse auf diesem Gebiet, die in der Hauptsache von POINCARÉ ⁽¹⁾ herrühren und die ich dann einmal ⁽⁵⁾ zusammenstellte und hier wieder anführen muss. Der Wert $s(1)$, den die Lösung von (1) mit dem Anfangswert $s(0) = s_0$ bei $t = 1$ annimmt, werde mit $f(s_0)$ bezeichnet. Die Funktion f ist stetig, monoton und auf keiner Strecke konstant — also eindeutig umkehrbar —, und $f(s) - s$ hat die Periode 1. Es gibt eine monotone Funktion $\chi(s)$ mit den Eigenschaften

$$(2) \quad \chi(s + 1) = \chi(s) + 1, \quad \chi(f(s)) = \chi(s) + \mu,$$

von denen die erste die nötige Periodizitätseigenschaft und die zweite die Abelsche Funktionalgleichung ist.

⁽¹⁾ « Journ. de Math. », IV, 1 (1885), besonders S. 226 f.

⁽²⁾ « C. R. », 153 (1911), S. 799.

⁽³⁾ « Acta math. », 40 (1916), S. 321-336.

⁽⁴⁾ Die Beziehung zwischen den von WINTNER behandelten Fragen an der Differentialgleichung (1) sind dargelegt bei T. LEVI-CIVITA, « Ann. de l'Éc. Norm. Sup. », III, 28 (1911), pag. 325-376.

⁽⁵⁾ « Math. Ann. », 91 (1924), S. 135-154, besonders 141-144. Eine ausführlichere Darstellung gab J. NIELSEN, « Mat. Tidsskrift », B. 1928, S. 39-46.

Ich benutze die Gelegenheit, um ein Versehen in meiner genannten Arbeit zu berichtigen: in Zeile 12 auf S. 144 können und sollen deshalb die Worte « endlich oder » wegfallen.

Ist μ rational, $\mu = p/q$, so gibt es ferner mindestens einen Wert s_0 mit

$$(3) \quad f^q(s_0) = s_0 + p = s_0 + \mu q$$

— dabei bedeutet f^q die q^{te} Iterierte der Funktion f —, d. h. einen Anfangswert derart, dass die zugehörige Lösung s von (1) mit $s(0) = s_0$ die Eigenschaft

$$s(t + q) = s(t) + \mu q$$

hat, d. h. dass $s - \mu t$ die Periode q hat. Die durch (3) bestimmten Werte bilden eine nicht leere, abgeschlossene, mit der Periode 1 sich wiederholende Menge M . Gehört s_0 nicht zu M , so seien s_{10} und s_{20} die beiderseits nächsten Werte aus M und s_1 und s_2 die zugehörigen Lösungen von (1). Dann gilt ⁽⁵⁾

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{nq}(s_0) - f^{nq}(s_{10})) &= \lim_{n \rightarrow -\infty} (f^{nq}(s_0) - f^{nq}(s_{20})) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (s(nq) - s_1(nq)) &= \lim_{n \rightarrow -\infty} (s(nq) - s_2(nq)) = 0. \end{aligned}$$

Dabei kann sowohl s_{10} wie s_{20} der grössere Wert sein. Da die Lösungen von (1) in beliebigen Intervallen der Länge q gleichmässig stetig vom Werte am Anfang des Intervalls abhängen, so folgt, dass sich $s - \mu t$ für $t \rightarrow \infty$ der mit der Periode q periodischen Funktion $s_1 - \mu t$, für $t \rightarrow -\infty$ der ebenso periodischen aber, von $s_1 - \mu t$ verschiedenen Funktion $s_2 - \mu t$ annähert. Wenn also die Funktion $s - \mu t$ nicht die Periode q hat, so ist sie auch nicht fastperiodisch; sondern zeigt das angegebene Verhalten.

Bei irrationalem μ bemerkt man zunächst, dass $\chi(s)$ wegen (2) die überall dicht liegenden Werte $\chi(0) + m + n\mu$ und daher als monotone Funktion alle Werte annimmt. Der einfachere Fall ist der, dass χ jeden Wert nur einmal annimmt und daher eindeutig und stetig umkehrbar ist. Unterwirft man eine beliebige Lösung s allen ganzzahligen Verschiebungen in der s und t -Richtung, so erhalten sie bei $t = 0$ diejenigen Werte s' , für die $\chi(s)$ einen der überall dicht liegenden Werte $\chi(s_0) + m + n\mu$ annimmt. Wegen der Umkehrbarkeit von χ liegen auch die Werte s' überall dicht, und man hat den von BOHL besonders behandelten Fall vor sich, in dem die Lösungskurve die ganze Ebene mod. 1 überall dicht bedeckt. Nach BOHL ⁽⁶⁾ lässt sich dann $s - \mu t$ durch Polynome in $\sin 2\pi t$, $\cos 2\pi t$, $\sin 2\pi \mu t$ und $\cos 2\pi \mu t$ gleichmässig annähern und ist daher fastperiodisch von einfachem Typus.

Nunmehr nehme die monotone Funktion χ einen Wert α und daher nach (2) alle Werte $\alpha + m + n\mu$ auf ganzen Intervallen an. Ist dann s_1 eine Lösung von (1) mit fastperiodischem Restglied $s_1 - \mu t$, so gilt dasselbe von

⁽⁶⁾ « A. a. O. » ⁽⁵⁾, Fussnote I auf S. 322.

$s_2(t) = s_1(t+1) - [s_1(1) - s_1(0)]$ ⁽⁷⁾. Ferner ist $s_1(1) - s_1(0)$ keine ganze Zahl; denn dann wäre nach (2) auch $\chi(s_1(1)) - \chi(s_1(0)) = \chi(f(s_1(0))) - \chi(s_1(0)) = \mu$ ganz. Also ist

$$(4) \quad 0 < s_2(0) - s_1(0) < 1.$$

Wir führen nun statt s eine neue Veränderliche $r = F(s)$ ein. Dabei sei F eine stetige monotone nirgends konstante Funktion mit der Eigenschaft

$$F(s+1) = F(s) + 1,$$

sodass wir

$$r = G(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) + s$$

setzen können mit einer stetigen Funktion G . Aus den Funktionen s_1 und s_2 werden zwei Funktionen $r_1(t)$ und $r_2(t)$ mit ganz analogen Eigenschaften: es gilt

$$r_k(n+1) = g(r_k(n)), \quad \psi(g(r)) = \psi(r) + \mu,$$

wenn man

$$g(r) = F[f(F^{-1}(r))], \quad \psi(r) = \chi(s) = \chi(F^{-1}(r))$$

setzt. Die Differenzen $r_k - \mu t$ sind wieder fastperiodisch; denn sie lassen sich darstellen in der Form

$$r_k(t) - \mu t = G(\cos 2\pi s_k(t), \sin 2\pi s_k(t)) + s_k(t) - \mu t.$$

Setzt man hierin

$$\cos 2\pi s_k = \cos 2\pi(s_k - \mu t) \cos 2\pi\mu t - \sin 2\pi(s_k - \mu t) \sin 2\pi\mu t,$$

und entsprechend für $\sin 2\pi s_k$ ein, so hat man $r_k - \mu t$ dargestellt als stetige Funktion der fastperiodischen Funktionen $\cos 2\pi\mu t$, $\sin 2\pi\mu t$ und $s_k - \mu t$. Daraus folgt aber, dass $r_k - \mu t$ selbst fastperiodisch ist ⁽⁸⁾.

⁽⁷⁾ In üblicher Weise bezeichnet $[u]$ die ganze Zahl mit der Eigenschaft

$$[u] \leq u < [u] + 1.$$

⁽⁸⁾ Der hier angewandte Satz wäre etwa folgendermassen zu formulieren. Sind $f_1, \dots, f_n$ fastperiodische Funktionen von t und ist M ihr Wertbereich, d. h. die Menge der Punkte mit Koordinaten $x_1 = f_1(t), \dots, x_n = f_n(t)$, ist ferner die Funktion $G(x_1, \dots, x_n)$ gleichmässig stetig auf M oder stetig auf einer M enthaltenden abgeschlossenen Menge M' , so ist $G(f_1, \dots, f_n)$ eine fastperiodische Funktion von t . Er lässt sich mit dem Weierstrassschen Satz über Polynomannäherungen sofort aus den Sätzen III, IV und VI bei H. BOHR, « Acta math. », 45 (1924), S. 29-127, ableiten oder direkt ganz ähnlich beweisen wie diese, so wie es WINTNER (« Math. Zschr. », 30 (1929), S. 299), für $n=2$ getan hat.

Wenn also $s_1 - \mu t$ fastperiodisch war, so ist insbesondere auch $r_2 - r_1$ eine fastperiodische Funktion von t . Hieraus läßt sich bei geeigneter Wahl von F leicht ein Widerspruch herleiten. Laut Definition ist

$$\begin{aligned} s_2(0) &= s_1(1) - [s_1(1) - s_1(0)] = f(s_1(0)) - [s_1(1) - s_1(0)], \\ \chi(s_2(0)) - \chi(s_1(0)) &= \mu - [s_1(1) - s_1(0)]. \end{aligned}$$

Dieser Wert ist nicht ganz und liegt wegen (2), (4) und der Monotonie von χ zwischen 0 und 1. Ist wie oben α ein Konstanzwert von χ , d. h. ein Wert, der in einem ganzen Intervall angenommen wird, so sind auch die Werte $\alpha + m + n\mu$ Konstanzwerte. Da sie überall dicht liegen, liegt einer — er heiße b — zwischen $\chi(s_1(0))$ und $\chi(s_2(0))$. Das Intervall, auf dem $\chi(s) = b$ ist, sei $\alpha \leq s \leq \beta$. Wir wählen nun $F(s)$ so, dass $F(\beta) - F(\alpha) \geq \frac{2}{3}$ wird. Das ist unter Erfüllung der vorher an die Funktion F gestellten Forderungen möglich; es genügt z. B.,

$$F(s) = \frac{\int_0^s \left(2 + \cos 2\pi \left(\sigma - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right)^n d\sigma}{\int_0^1 \left(2 + \cos 2\pi \left(\sigma - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right)^n d\sigma}$$

zu setzen mit genügend grossem n . Gehen wir nun, wie oben angegeben, über zu der neuen Veränderlichen $r = F(s)$ statt s , zu den Funktionen $g(r)$ und $\phi(r)$ statt $f(s)$ und $\chi(s)$, so hat ein Intervall (r', r'') nur dann mindestens die Länge $\frac{1}{2}$, wenn es sich mit einem Intervall $(F(\alpha) + m, F(\beta) + m)$ bei geeignetem ganzem m mindestens teilweise überdeckt. Nun ist $\chi(s) = b$ für $\alpha \leq s \leq \beta$, also $\chi(s) = b + m$ für $\alpha + m \leq s \leq \beta + m$, also $\phi(r) = b + m$ für $F(\alpha + m) \leq r \leq F(\beta + m)$, d. h. für $F(\alpha) + m \leq r \leq F(\beta) + m$; daher liegt in jedem Intervall der Länge $\frac{1}{2}$ ein Wert r mit $\phi(r) = b + m$ bei geeignetem ganzem m .

Dafür können wir auch sagen: Es ist nur dann $r'' - r' \geq \frac{1}{2}$, wenn bei geeignetem ganzem m die Ungleichungen $\phi(r') \leq b + m \leq \phi(r'')$ gelten. Gilt keines der beiden Gleichheitszeichen, so liegt das ganze Konstanzintervall $\phi(r) = b + m$ zwischen r' und r'' , und es ist sogar $r'' - r' > \frac{2}{3}$.

Ist nun $s_1(t) - \mu t$ und daher, wie wir gesehen haben, auch $q(t) = r_2(t) - r_1(t)$ fastperiodisch, so hat diese Funktion nach H. BOHR ⁽⁹⁾ eine positive ganze

⁽⁹⁾ « Acta math. », 45 (1924), S. 29-127; Hilfssatz 7 auf S. 88.

Verschiebungszahl n zur Höchstdifferenz $\varepsilon = \frac{1}{6}$, d. h. es gilt $|q(t+n) - q(t)| \leq \frac{1}{6}$.

Für t nehmen wir einen ganzzahligen Wert p und setzen zur Abkürzung

$$\psi(r_k(0)) = \chi(s_k(0)) = \omega_k,$$

so dass $0 < \omega_2 - \omega_1 < 1$ wird. Dann ist jedenfalls $q(p) > \frac{2}{3}$, sobald

$$\psi(r_1(p)) = \omega_1 + p\mu < b + m < \omega_2 + p\mu = \psi(r_2(p))$$

ist bei geeignetem ganzem m . Nach der Verschiebungseigenschaft von n ist dann $q(p+n) > \frac{1}{2}$, d. h.

$$\psi(r_1(p+n)) = \omega_1 + (p+n)\mu \leq b + m' \leq \omega_2 + (p+n)\mu = \psi(r_2(p+n)).$$

Aus unseren Annahmen folgt also die Existenz zweier Zahlen ω_1 und ω_2 , deren Differenz zwischen 0 und 1 liegt, derart dass, sobald $b - p\mu \bmod 1$ im Inneren des Intervalles (ω_1, ω_2) liegt, dann $b - p\mu$ auch $\bmod 1$ im Inneren oder an einem Ende des Intervalles $(\omega_1 + n\mu, \omega_2 + n\mu)$ liegt. Da μ irrational ist, sind die beiden Intervalle $\bmod 1$ voneinander verschieden, und da beide gleich lang sind, enthält das erste ein Teilintervall, das nicht im zweiten liegt. Den Wert $b - p\mu$ können wir — wieder wegen der Irrationalität von $\mu \bmod 1$ — in dies Teilintervall verlegen durch geeignete Wahl von p . Damit ist der Widerspruch hergestellt; die anfängliche Annahme, $s_1 - \mu t$ sei eine fastperiodische Funktion von t , muss fallen. Damit ist bewiesen:

Ist die Konstante μ irrational, und liegt der Fall vor, dass die Funktion χ Konstanzintervalle hat, d. h. dass eine Lösungskurve von (1) — und übrigens jede — die Ebene nicht $\bmod 1$ überall dicht bedeckt, so ist das — nach E. LEVI beschränkte — Restglied $s - \mu t$ bei keiner Lösung von (1) fastperiodisch.

Welchem schwächeren Periodizitätsbegriff diese Art von Funktionen etwa unterzuordnen ist, bleibt noch zu untersuchen.