Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes

par ELIE CARTAN (à Paris).

L'objet du présent Mémoire est l'étude des propriétés géométriques pseudo-conformes des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes x, y: ce sont les propriétés invariantes par le groupe infini des transformations analytiques des deux variables x, y, transformations qu'avec F. SEVERI, nous appellerons *pseudo-conformes*, pour éviter toute ambiguïté sur le sens du mot *analytique*. Alors que, par une transformation pseudo-conforme, toute surface est réductible soit à la surface caractéristique $y=0$, soit à la surface lieu des points réels de l'espace, les hypersurfaces admettent, comme l'a montré H. POINCARÉ (1), une infinité d'invariants différentiels pseudo-conformes. Font exception les hypersurfaces qu'on appelle maintenant *hyperplanoïdes* (2) et qu'on peut définir comme des lieux à un paramètre de surfaces caractéristiques. Tout récemment, B. SEGRE (3) a montré qu'à toute hypersurface qui n'est pas hyperplanoïde on peut associer une congruence, ou famille à deux paramètres complexes, de surfaces caractéristiques, ou, ce qui revient au même, une équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$: pour que deux hypersurfaces soient équivalentes au point de vue pseudo-conforme, il est nécessaire que leurs équations différentielles associées soient réductibles l'une à l'autre par une transformation analytique ponctuelle: on sait, d'après A. TRESSE (4), raconnaître s'il en est ainsi. Ce

(1) H. POINCARÉ, *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme* (« Rend. Circ. Mat. Palermo », 23, 1907, pp. 185-220).

(2) Cette dénomination est due à ALMER, *Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes* (« Arkiv. för Math Astr., och Fys. », 17, 1922, n. 7, 70 pages).

(3) B. SEGRE, *Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudo-conforme* (« Rend. Acc. Lincei », 13, 1931, I, pp. 676-683); *Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse* (« Rend. Semin. Mat. Roma », 7, 1931, parte II).

(4) A. TRESSE, *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre* $y'' = \omega(x, y, y')$ (« Preisschr. Fürstlich Jablon. Ges. », Leipzig, Hirzel, 1896).

résultat, pour important qu'il soit, n'épuise pas la question, car deux hypersurfaces peuvent être associées à deux équations différentielles équivalentes sans être elles-mêmes équivalentes; d'autre part, même si elles le sont, les transformations pseudo-conformes qui font passer de la première équation différentielle à la seconde ne font pas toutes passer de la première hypersurface à la seconde.

Je reprends la question directement comme application de ma méthode générale d'équivalence [5]. La résolution complète du problème de POINCARÉ me conduit à des notions géométriques nouvelles, au moins dans le cas où l'hypersurface n'est pas localement équivalente à l'hypersphère $x\bar{x}+y\bar{y}-1=0$; on peut en particulier définir sur une telle hypersurface trois familles remarquables de courbes *(lignes principales et lignes de courbure).*

Le Mémoire comprend cinq Chapitres dont les deux derniers paraîtront dans un autre Recueil. Le Chapitre I expose rapidement les résultats classiques relatifs à la classification des surfaces et les propriétés fondamentales des hyperplanoïdes; il introduit d'une manière intrinsèque et plus simple, me semble-t-il, que ne le fait B. SEGRE, la congruence de surfaces caractéristiques associée à une hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde. J'y démontre enfin que si cette congruence admet un groupe G de transformations pseudo-conformes à r paramètres *complexes,* l'hypersurface admet exactement un sous-groupe à r paramètres *réels* de G. J'ajoute que la rédaction de ce Chapitre a été beaucoup influencée par des conversations que j'ai eues avec HENRI CARTAN.

Le Chapitre II a pour but de déterminer, par une méthode directe, toutes les hypersurfaces admettant un groupe pseudo-conforme G à trois paramètres réels. Cette méthode repose sur la considération de la transformation infinitésimale imaginaire de G qui laisse fixe un point de l'hypersurface. Le problème peut du reste être posé soit *localement*, soit *globalement.* Deux hypersurfaces peuvent admettre *globalement* deux groupes *localement semblables* sans être *globalement équivalentes.* Si l'une d'elle est simplement connexe, la recherche de toutes celles qui lui sont localement, mais non globalement, équivalentes est ramenée à un problème facile. Les hypersurfaces sont classées d'après la structure de leurs groupes. Si une hypersurface admet *localement* un groupe à plus de trois paramètres, elle admet *localement* un groupe à 8 paramètres, *mais au point de vue global, il n'en est plus de*

(5) E. CARTAN, *Les sous-groupes des groupes continus de transformations* (« Ann. Éc. Normale », 25, 1908, pp. 57-194; Chap. I).

même. Je détermine toutes les hypersurfaces qui admettent globalement un groupe à plus de 3 paramètres: il est alors à 4, 5 ou 8 paramètres. J'ajoute que certaines des hypersurfaces déterminées dans ce Chapitre ont été rencontrées déjà dans les travaux récents sur les fonctions analytiques de deux variables complexes.

Le Chapitre III est consacré au problème général de l'équivalence *locale* de deux hypersurfaces autres que des hyperplanoïdes. Je signalerai en particulier le résultat suivant: si deux hypersurfaces non localement équivalentes à l'hypersphère sont localement équivalentes entre elles, il existe au plus deux transformations pseudo-conformes faisant passer de l'une à l'autre et transformant un point donné de la première dans le point correspondant de la seconde. Dans le cas où l'hypersurface n'est pas équivalente à l'hypersphère, j'indique la formation (théorique) des invariants fondamentaux et des invariants dérivés, ainsi que la manière de reconnaître l'équivalence de deux hypersurfaces, au moins dans le cas général.

Les deux derniers Chapitres seront consacrés à l'étude proprement géométrique des hypersurfaces (lignes principales, lignes de courbure, etc.) et à leur conception comme *espaces à connexion hypersphérique.*

CHAPITRE I.

Généralités sur les surfaces et les hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes.

1. Les résultats que nous allons rappeler sont pour la plupart classiques [6]; ils se rapportent exclusivement aux variétés *analytiques* de l'espace de deux variables complexes x, y, c'est-à-dire aux variétés susceptibles d'être définies en se donnant une ou plusieurs relations analytiques entre x, y et leurs conjuguées $\bar{x}$, $\bar{y}$, ou encore en se donnant x et y comme fonctions analytiques de paramètres arbitraires réels.

I. Classification des surfaces.

2. Les surfaces analytiques définies paramétriquement par des formules

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \tag{1}$$

f et g étant des fonctions analytiques de deux paramètres réels u et v, se

(6) Cf. le second mémoire cité (3) de B. SEGRE.

partagent en deux classes distinctes suivant que le déterminant fonctionnel $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ est nul ou non pour toutes les valeurs réelles de u et de v.

Dans le premier cas, ce déterminant fonctionnel étant une fonction analytique de u, v nulle pour toutes les valeurs réelles de ses arguments, est nul aussi pour les valeurs complexes; il existe par suite une relation analytique

$$R(x, y) = 0; \tag{2}$$

on a ce qu'on appelle, avec T. LEVI-CIVITA, une *surface caractéristique* (7). Toutes les surfaces caractéristiques sont équivalentes par rapport au groupe infini des transformations pseudo-conformes

$$x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y):$$

la transformation $x' = x$, $y' = R(x, y)$ transforme en effet la surface caractéristique (2) dans $y' = 0$.

Le groupe pseudo-conforme devient, sur la surface caractéristique $y = 0$, le groupe conforme du plan de la variable complexe x.

Toute surface caractéristique admet une *orientation naturelle*. Si on considère en un point le vecteur infiniment petit (dx, dy) tangent à cette surface, le vecteur (idx, idy) lui est également tangent et fait un angle droit avec le premier. Le sens de rotation qui amène le premier vecteur en coïncidence avec le second ne dépend pas du choix des variables, c'est le *sens direct* de rotation sur la surface, qui est ainsi orientée naturellement.

3. Si le déterminant fonctionnel $\frac{D(f, g)}{D(u, v)}$ n'est pas nul, la transformation pseudo-conforme

$$x = f(x', y'), \quad y = g(x', y')$$

transforme la surface (1) dans le lieu des points (x', y') à coordonnées réelles. Toutes les surfaces qui ne sont pas caractéristiques sont donc équivalentes entre elles. Elles le sont d'une infinité de manières, et on peut se donner arbitrairement entre deux de ces surfaces une correspondance ponctuelle analytique, qui détermine uniquement la transformation pseudo-conforme faisant passer de la première à la seconde. En effet, les paramètres u et v de la première surface étant choisis, exprimons les coordonnées x', y' d'un point de la seconde en fonctions analytiques des paramètres u, v du point

(7) Surface *génératrice*, d'après ALMER (loc. cit. (2)).

correspondant de la première; soient alors

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v);$$
$$x' = F(u, v), \quad y' = G(u, v)$$

les équations paramétriques respectives des deux surfaces. Pour que

$$x' = R(x, y), \quad y' = S(x, y)$$

soit une transformation pseudo-conforme faisant passer de la première surface à la seconde et respectant la correspondance ponctuelle donnée, il faut et il suffit que les deux fonctions analytiques de u, v

$$F(u, v) - R(f, g), \quad G(u, v) - S(f, g)$$

soient nulles pour toutes les valeurs réelles de leurs arguments: il faut et il suffit pour cela qu'elles soient identiquement nulles; par suite on ne peut avoir la transformation cherchée qu'en tirant u et v en fonctions de x, y, et en portant dans les expressions de x', y'.

Sur une surface qui n'est pas caractéristique, le groupe infini des transformations pseudo-conformes de l'espace ambiant *induit* le groupe infini des transformations analytiques réelles sur les deux variables u, v.

4. Rappelons enfin que par une ligne analytique

$$x = f(t), \quad y = g(t), \tag{3}$$

t étant un paramètre réel, il passe une surface analytique et une seule, à savoir celle qui est définie par les équations (3), où t est regardé comme paramètre complexe.

II. **Les hyperplanoïdes.**

5. On appelle, d'après Almer [8], *hyperplanoïde* un lieu à un paramètre de surfaces caractéristiques.

Considérons un hyperplanoïde *analytique*, que nous pouvons supposer défini par une relation analytique

$$F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = 0, \tag{4}$$

dont le premier membre est une fonction analytique réelle des parties réelles et imaginaires des variables complexes

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = y_1 + iy_2.$$

Soit (x_0, y_0) un point de l'hyperplanoïde, et soit $y = \varphi(x)$ l'équation de

(8) Loc. cit. (2), p. 6.

la surface caractéristique génératrice qui passe par ce point. On a identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs réelles données à x_1 et x_2,

$$F(x,\ \varphi(x);\ \bar{x},\ \bar{\varphi}(\bar{x})) = 0, \tag{5}$$

où l'on a désigné par $\bar{\varphi}(x)$ la fonction analytique imaginaire conjuguée de $\varphi(x)$. Le premier membre de (5) est une fonction analytique de x_1, x_2 nulle pour toutes les valeurs réelles de ces deux arguments: elle est donc nulle aussi pour les valeurs complexes; autrement dit, la relation (5) a lieu quelles que soient les valeurs complexes données aux deux variables *indépendan'es* x et $\bar{x}$. En particulier, si on donne à $\bar{x}$ la valeur $\bar{x}_0$, on aura l'identité

$$F(x,\ \varphi(x);\ \bar{x}_0,\ \bar{y}_0) = 0.$$

On a donc le théorème suivant:

THÉORÉME I. — *Si un hyperplanoïde est défini par l'équation* (4), *la surface caractéristique génératrice qui passe per le point* $(x_0,\ y_0)$ *de l'hyperplanoïde est définie par l'équation*

$$F(x,\ y;\ \bar{x}_0,\ \bar{y}_0) = 0. \tag{6}$$

6. Parmi tous les points d'une des surfaces caractéristiques génératrices, un et un seul a une abscisse x nulle (si, ce que nous pouvons supposer, la surface n'est pas de la forme $x = c^{te}$). Il résulte de cette remarque le théorème suivant:

THÉORÈME II. — *Tout hyperplanoïde analytique est le lieu des surfaces caractéristiques*

$$F(x,\ y;\ 0,\ t) = 0, \tag{7}$$

où le paramètre complexe t *est assujetti à la relation*

$$F(0,\ \bar{t};\ 0,\ t) = 0. \tag{8}$$

Tirons de l'équation (7), t en fonction (analytique) de x, y:

$$t = \varphi(x,\ y);$$

la relation (8) nous conduit alors au

THÉORÈME III. — *Tout hyperplanoïde analytique peut être obtenu en établissant une relation analytique entre les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique* $\varphi(x,\ y)$.

Ce théorème à son tour montre que l'hyperplanoïde est le lieu des surfaces caractéristiques

$$\varphi(x,\ y) = u + i\psi(u), \tag{9}$$

u étant un paramètre réel, $\psi(u)$ une fonction analytique réelle de u. L'équation (9), résolue par rapport à u, donne pour u une fonction analytique $\chi(x, y)$, d'où le

THÉORÈME IV. — *Tout hyperplanoïde analytique peut être obtenu en égalant à zéro la partie imaginaire d'une fonction analytique de* x, y [9].

Il résulte de ce dernier théorème que tous les hyperplanoïdes sont équivalents entre eux et équivalents à l'hyperplan

$$y_2 = 0.$$

7. Sur l'hyperplanoïde $y_2 = 0$, le groupe des transformations pseudoconformes de l'espace ambiant *induit* le groupe infini

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(y),$$

f étant une fonction analytique arbitraire de x, y, et φ étant une fonction analytique *réelle* de y.

Signalons le théorème d'après lequel toute surface caractéristique tangente à un hyperplanoïde est coupée suivant une ligne présentant au point de contact un point double à tangentes rectangulaires. Cela est évident si l'on part de l'hyperplanoïde $y_2 = 0$: toute surface caractéristique tangente à cet hyperplanoïde au point ($x = 0$, $y = 0$) a son équation de la forme

$$y = ax^2 + bx^3 + \ldots;$$

elle est coupée par l'hyperplanoïde suivant la ligne

$$0 = 2a_1x_1x_2 + a_2(x_1^2 - x_2^2) + \ldots,$$

en posant $a = a_1 + ia_2$. Il y a exception si $a = 0$.

III. Les surfaces caractéristiques associées à une hypersurface analytique.

8. Reprenons une hypersurface analytique quelconque définie par une équation telle que (4). A chaque point (x_0, y_0) de cette variété est associée la surface caractéristique

$$F(x, y; \bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0;$$

dans le cas d'un hyperplanoïde, cette surface engendre l'hypersurface.

On peut plus généralement considérer la famille à deux paramètres

---

[9] Ce théorème peut être démontré directement si l'on suppose, avec ALMER [2], que la surface caractéristique génératrice dépend *analytiquement* d'un paramètre réel.

complexes de surfaces caractéristiques

$$F(x,\ y;\ a,\ b) = 0;$$

cette congruence de surfaces est liée d'une manière invariante à l'hypersurface.

Supposons en effet que par la transformation pseudo-conforme

$$x' = f(x,\ y), \quad y' = g(x,\ y), \tag{10}$$

qui entraîne pour les variables conjuguées la transformation analytique

$$\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x},\ \bar{y}), \quad \bar{y}' = \bar{g}(\bar{x},\ \bar{y}), \tag{11}$$

l'hypersurface (4) soit transformée dans l'hypersurface

$$\Phi(x',\ y';\ \bar{x}',\ \bar{y}') = 0. \tag{12}$$

Posons

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = y_1 + iy_2;$$
$$x' = x_1' + ix_2', \quad y' = y_1' + iy_2';$$

les équations (4) et (12) deviennent respectivement des équations analytiques réelles en x_1, x_2, y_1, y_2 et x_1', x_2', y_1', y_2', et l'équation (12) est une conséquence de l'équation (4), quand on passe des variables réelles x_1, x_2, y_1, y_2 aux variables réelles x_1', x_2', y_1', y_2' par les transformations que définissent les équations (10) (ou les équations (11)). Cela signifie par exemple que si on tire y_2 de (4) en fonction de x_1, x_2, y_1 et qu'on porte dans (12), le premier membre Φ devient une fonction analytique de x_1, x_2, y_1 nulle pour toutes les valeurs *réelles* de ses trois arguments. Il en résulte que cette fonction est aussi nulle pour les valeurs *complexes* de ces arguments. Autrement dit, *l'équation* (12) *est une conséquence de l'équation* (4), *quand on effectue sur les variables* x, y, $\bar{\mathrm{x}}$, $\bar{\mathrm{y}}$, *regardées comme 4 variables indépendantes, la transformation définie par les équations* (10) *et* (11).

Soient alors a', b' les valeurs que prennent $\bar{x}'$ et $\bar{y}'$, quand, dans les équations (11), on donne à $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les valeurs a et b. Il en résulte que *la surface caractéristique*

$$F(x,\ y;\ a,\ b) = 0 \tag{13}$$

se transforme, par la transformation pseudo-conforme (10), *dans la surface caractéristique*

$$\Phi(x',\ y';\ a',\ b') = 0.$$

9. On peut envisager le résultat précédent à un autre point de vue plus intuitif. L'équation (4), où l'on regarde x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ comme des variables indépendantes, définit dans l'espace des quatre variables complexes x_1, x_2, y_1, y_2 une variété à six dimensions dont l'hypersurface initiale est la partie réelle. Les surfaces caractéristiques (13) sont les sections de cette variété complexe à six dimensions par les variétés à quatre dimensions

$$\bar{x} = a, \quad \bar{y} = b;$$

comme ces dernières se conservent dans leur ensemble par une transformation pseudo-conforme, il en est de même des surfaces (13) ([10]).

10. Dans le cas d'un hyperplanoïde, les surfaces caractéristiques (13), que nous appellerons les surfaces *associées* à l'hypersurface, ne dépendent que d'un paramètre complexe. En effet, tout hyperplanoïde pouvant être ramené à la forme

$$y - \bar{y} = 0,$$

les surfaces caractéristiques associées $y - b = 0$ ne dépendent que d'un paramètre.

Réciproquement si les surfaces caractéristiques (13) ne dépendent que d'un paramètre complexe, celles qui seront associées aux différents points de l'hypersurface ne pourront dépendre de plus de deux paramètres réels; par suite la surface caractéristique associée à un point de l'hypersurface sera associée au moins à tous les points d'une ligne. Si $y = \varphi(x)$ est l'équation de cette surface, la relation

$$F(x, \ \varphi(x); \ \bar{x}, \ \bar{\varphi}(\bar{x})) = 0$$

aura donc lieu, quel que soit x, pour une infinité de valeurs de $\bar{x}$ dépendant d'un paramètre réel; mais le premier membre, où x est arbitraire, étant une fonction analytique de la variable complexe $\bar{x}$, ne peut être nul pour cette infinité de valeurs sans être identiquement nul. Par suite le surface $y = \varphi(x)$ est située tout entière sur l'hypersurface, qui est ainsi un hyperplanoïde. On arrive donc au

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une hypersnrface soit un hyperplanoïde est que les surfaces caractéristiques associées dépendent d'un seul paramètre complexe.*

11. De là on déduit immédiatement l'équation aux dérivées partielles des hyperplanoïdes: il suffit d'exprimer que la fonction implicite y de x

([10]) C'est au fond à ce point de vue que se place B. SEGRE ([2]) pour définir ce qu'il appelle les *lignes bicaractéristiques*, qui ne sont autres que les surfaces (13).

définie par (13) satisfait, quels que soient a et b, à une équation différentielle du premier ordre. Cette équation est manifestement

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

dans le second membre de laquelle on remplace $\bar{y}$ par sa valeur en x, y, $\bar{x}$ tirée de (5): il faut et il suffit que, par cette substitution, $\bar{x}$ s'élimine. La condition cherchée est donc

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{F_x}{F_y}\right) - \frac{F_{\bar{x}}}{F_{\bar{y}}}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\frac{F_x}{F_y}\right) = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$L(F) \equiv F_y F_{\bar{y}} F_{x\bar{x}} + F_x F_{\bar{x}} F_{y\bar{y}} - F_x F_{\bar{y}} F_{y\bar{x}} - F_y F_{\bar{x}} F_{x\bar{y}} = 0. \tag{14}$$

Cette relation doit être une conséquence de l'équation (5). Le premier membre, que nous désignons par $L(F)$, est *l'expression d'E. E. Levi* [11].

12. Nous dirons qu'un point d'une hypersurface, qui n'est pas un hyperplanoïde, est *simple* si en ce point l'expression d'E. E. LEVI ne s'annule pas.

On a le théorème remarquable suivant:

THÉORÈME. – *En un point simple d'une hypersurface, la surface caractéristique associée est tangente à l'hypersurface et est, au voisinage du point de contact, située tout entière du même côté de l'hypersurface.*

La première partie du théorème est évidente, car si l'on se déplace sur la surface caractéristique associée, on a

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

et par suite aussi, en prenant les quantités conjuguées,

$$F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y} = 0,$$

d'où

$$dF = 0.$$

Pour démontrer la seconde partie, désignons par $x + h$, $y + k$ les coordonnées d'un point de la surface caractéristique (13) très voisin du point de contact (x, y). On a

$$hF_x + kF_y + \frac{1}{2}(h^2 F_{xx} + 2hkF_{xy} + k^2 F_{yy}) + \dots = 0,$$
$$\bar{h}F_{\bar{x}} + \bar{k}F_{\bar{y}} + \frac{1}{2}(\bar{h}^2 F_{\bar{x}\bar{x}} + 2\bar{h}\bar{k}F_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{k}^2 F_{\bar{y}\bar{y}}) + \dots = 0,$$

---

[11] E. E. LEVI, *Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse* (« Annali di Mat. », 17, 1910, pp. 61-87). La condition (14) pour qu'une hypersurface soit un hyperplanoïde se trouve dans ce mémoire, p. 81.

d'où

$$F(x+h,\ y+k;\ \bar{x}+\bar{h},\ \bar{y}+\bar{k}) = h\bar{h}F_{x\bar{x}} + h\bar{k}F_{x\bar{y}} + k\bar{h}F_{y\bar{x}} + k\bar{k}F_{y\bar{y}} + \dots.$$

En se bornant aux infiniment petits du second ordre et remplaçant, ce qui est permis, k par $-h\frac{F_x}{F_y}$ et $\bar{k}$ par $-\bar{h}\frac{F_{\bar{x}}}{F_{\bar{y}}}$, on trouve immédiatement

$$F(x+h,\ y+k;\ \bar{x}+\bar{h}+\bar{k}) = \frac{h\bar{h}}{F_y F_{\bar{y}}} L(F) + \dots.$$

Cette formule montre que pour les points de la surface caractéristique voisins du point de contact (x, y), le premier membre F de l'équation de l'hypersurface garde un signe constant, à savoir celui de $L(F)$.

13. Nous conviendrons d'appeler *extérieure* la région de l'espace voisine de l'hypersurface et dans laquelle se trouve la surface caractéristique associée, *intérieure* la région opposée. La propriété d'une des deux régions (prise au voisinage d'un point simple de l'hypersurface) d'être extérieure ou intérieure se conserve évidemment par une transformation pseudo-conforme.

En chaque point simple de l'hypersurface il existe un *élément plan caractéristique tangent*, c'est l'élément plus tangent à la surface caractéristique associée:

$$F_x dx + F_y dy = 0.$$

Considérons une ligne analytique passant par un point simple de l'hypersurface et non tangente en ce point à l'élément caractéristique correspondant. Soit (dx, dy) un déplacement infinitésimal sur cette ligne. Par cette ligne il passe une surface caractéristique: la rotation d'un angle droit dans le sens direct du déplacement (dx, dy) sur cette surface caractéristique donne le déplacement (idx, idy). Nous dirons que le déplacement (dx, dy) est dirigé *dans le sens positif* sur la ligne si le déplacement (idx, idy) pénètre dans la région *intérieure* à l'hypersurface. Pour reconnaître s'il en est bien ainsi, remarquons qu'on a

$$F_x dx + F_y dy + F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y} = 0;$$

l'expression $F_x dx + F_y dy$ a donc une valeur purement imaginaire. Quand on effectue le déplacement (idx, idy), la fonction F subit un accroissement élémentaire

$$dF = i(F_x dx + F_y dy) - i(F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y}) = 2i(F_x dx + F_y dy);$$

pour que cet accroissement soit de signe contraire à $L(F)$, il faut et il suffit qu'on ait

$$-iL(F)(F_x dx + F_y dy) > 0. \tag{15}$$

Il existe donc sur chaque ligne tracée sur l'hypersurface un sens positif intrinsèque, à savoir celui qui satisfait à l'inégalité (15).

14. Du résultat précédent découle l'existence d'une *orientation naturelle* d'une hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde. En effet, soit A un point simple: menons dans l'élément plan caractéristique tangent une tangente AT_1; soit AT_2 celle qui s'en déduit, dans cet élément plan, par rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans *le sens direct*; soit enfin AT_3 une tangente à une ligne non tangente à l'élément plan caractéristique, tangente dirigée dans le sens *positif* de la ligne. Il est évident que tous les trièdres ainsi construits ont le même sens, qui définira l'orientation positive intrinsèque de l'hypersurface.

On peut arriver à cette orientation par une voie analytique toute différente. Imaginons exprimées les coordonnées x, y d'un point de l'hypersurface en fonctions analytiques de trois paramètres réels u, v, w, et posons

$$\omega = i(F_x dx + F_y dy).$$

La forme cubique extérieure $[\omega\omega']$ se reproduit, multipliée par un facteur *positif*, quand on remplace ω par $k\omega$, k étant un facteur réel quelconque. Si alors $[\omega\omega']$ est de la forme $H[du\, dv\, dw]$, on aura une orientation intrinsèque de l'hypersurface en convenant d'appeler directs les trièdres obtenus par trois déplacements infiniment petits $(d_i u,\ d_i v,\ d_i w)$ $(i = 1, 2, 3)$ satisfaisant à l'inégalité

$$H \begin{vmatrix} d_1 u & d_1 v & d_1 w \\ d_2 u & d_2 v & d_2 w \\ d_3 u & d_3 v & d_3 w \end{vmatrix} > 0. \tag{16}$$

Cette convention est indépendante du choix des paramètres et aussi du choix des coordonnées x, y.

Avec le trièdre considéré tout à l'heure, on a

$$F_x d_1 x + F_y d_1 y = 0,$$
$$d_2 x = i d_1 x, \quad d_2 y = i d_1 y;$$

d'autre part

$$[\omega\omega'] = (F_x dx + F_y dy)\left\{ F_{x\bar{x}}[dx d\bar{x}] + F_{x\bar{y}}[dx d\bar{y}] + F_{y\bar{x}}[dy d\bar{x}] + F_{y\bar{y}}[dy d\bar{y}] \right\}.$$

Par suite, le premier membre de (16) se réduit à

$$(F_x d_3 x + F_y d_3 y)\left\{ F_{x\bar{x}}(d_1 x d_2 \bar{x} - d_2 x d_1 \bar{x}) + \dots \right\};$$

prenons par exemple

$$d_1x = -F_y, \quad d_1y = F_x;$$
$$d_2x = -iF_y, \quad d_2y = iF_x;$$

on aura, en simplifiant,

$$-iL(F)(F_x d_3x + F_y d_3y),$$

quantité qui est bien positive si le déplacement (d_3x, d_3y) se fait dans le sens positif défini au début de ce numéro.

15. On peut enfin remarquer que l'espace ambiant lui-même est susceptible d'une orientation naturelle, en convenant de regarder comme direct le 4-édre formé par les quatre déplacements infinitésimaux

$$(dx,\ dy),\ (idx,\ idy),\quad (\delta x,\ \delta y),\ (i\delta x,\ i\delta y),$$

où l'on suppose toutefois que les deux déplacements (dx, dy) et $(\delta x, \delta y)$ n'appartiennent pas à un même élément plan caractéristique. Cette convention est légitime, car on peut passer par continuité d'un 4-édre quelconque de cette nature à un autre 4-édre de la même nature: en effet les éléments plans *non caractéristiques* étant tous équivalents entre eux (n. 3), on peut passer par continuité des deux déplacements (dx, dy), $(\delta x, \delta y)$ aux deux déplacements $(d'x, d'y)$, $(\delta' x, \delta' y)$ sans que l'élément plan formé devienne jamais caractéristique ([12]).

Il résulte de cette convention qu'on obtient un 4-édre direct en prenant les trois premiers déplacements tangents à l'hypersurface et formant par rapport à cette hypersurface un trièdre direct, et en prenant ensuite un 4-éme déplacement pénétrant dans la région *intérieure* de l'espace.

IV. Groupe de transformations pseudo-conformes d'une hypersurface.

16. Comme nous l'avons déjà remarqué (n. 7), un hyperplanoïde admet un groupe infini de transformations pseudo-conformes. Dans le cas d'une hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde, une remarque fondamentale de B. Segre ([13]) montre immédiatement qu'il n'en est plus ainsi, et cela simplement parce que la famille des surfaces caractéristiques associées, *que nous pouvons regarder comme une congruence complexe de courbes planes*

([12]) Analytiquement on peut remarquer que le déterminant des accroissements infinitésimaux subis par x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ a la valeur essentiellement positive

$$4(dx\delta y - dy\delta x)(d\bar{x}\delta\bar{y} - d\bar{y}\delta\bar{x}).$$

([13]) B. Segre, *Intorno, etc.* ([3]).

complexes, ne peut admettre qu'un groupe fini de transformations analytiques ponctuelles portant sur les coordonnées x, y. Ces courbes sont les intégrales d'une équation différentielle du second ordre $R(x, y, y', y'') = 0$, et l'on sait, d'après les recherches de A. TRESSE, que cette équation admet au plus un groupe à 8 paramètres (complexes).

Mais il est clair que malgré son importance, la remarque de B. SEGRE est loin d'épuiser le problème. En premier lieu une équation différentielle du second ordre, prise au hasard, ne peut définir les surfaces caractéristiques associées à une hypersurface. En second lieu, comme nous allons le voir, la congruence des surfaces caractéristiques associées à une hypersurface peut admettre des transformations pseudo-conformes qui ne laissent pas invariante l'hypersurface. En troisième lieu deux hypersurfaces *non équivalentes* peuvent admettre les mêmes surfaces caractéristiques associées.

Dans le chapitre III, nous reprendrons toute la question en étudiant *directement* le problème de l'équivalence pseudo-conforme de deux hypersurfaces.

17. Nous pouvons cependant dès maintenant faire quelques remarques de nature élémentaire.

Supposons qu'une hypersurface, qui n'est pas un hyperplanoïde, admette une transformation pseudo-conforme infinitésimale génératrice d'un groupe à un paramètre *réel*; on peut, comme on le sait, se ramener au cas où le symbole de cette transformation infinitésimale est $\frac{\partial f}{\partial x}$, les équation du groupe étant

$$x' = x + a, \quad y' = y \qquad (a \text{ réel}).$$

L'équation de l'hypersurface, définie par une relation entre x_1, x_2, y_1, y_2, ne contient pas x_1. Il est impossible que l'hypersurface admette en même temps la transformation $i\frac{\partial f}{\partial x}$, car alors son équation ne dépendrait pas non plus de x_2: on aurait affaire à un hyperplanoïde. Par suite

THÉORÈME. — *Si une hypersurface admet les deux transformation infinitésimales* X *et* iX, *c'est un hyperplanoïde.*

Ce théorème prouve que *si la congruence des surfaces caractéristiques associées à une hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde admet un groupe à* r *paramètres complexes, l'hypersurface admet au plus un groupe à* r *paramètres réels.*

18. On peut aller plus loin et montrer que le groupe de l'hypersurface admet *exactement* r paramètres réels. Remarquons d'abord qu'à une transformation infinitésimale

$$\xi_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

du groupe de la congruence $F(x,\ y;\ a,\ b)=0$ correspond une transformation infinitésimale

$$\alpha_i(a,\ b)\frac{\partial f}{\partial a}+\beta_i(a,\ b)\frac{\partial f}{\partial b},$$

qui indique comment les paramètres a, b sont transformés. Cela revient à dire que la transformation

$$\xi_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial y}+\alpha_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}+\beta_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

laisse invariante l'équation $F(x,\ y;\ \bar{x},\ \bar{y})=0$, où x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ sont regardées comme des variables indépendantes. D'autre part si ξ_i et η_i sont données, on ne peut avoir $\alpha_i=\beta_i=0$, car alors, en ramenant, ce qui est possible, la transformation infinitésimale donnée à la forme $\frac{\partial f}{\partial x}$, on verrait que l'équation $F=0$ ne dépend pas de x, et par suite pas de $\bar{x}$: l'hypersurface serait un hyperplanoïde.

Il résulte de ce qui précède qu'il existe r transformations infinitésimales linéairement indépendantes laissant invariante l'équation $F=0$, et qui sont de la forme

$$X_i\equiv\xi_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial y}+\alpha_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}+\beta_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}. \tag{17}$$

Elles sont linéairement indépendantes, en ce sens qu'on ne peut trouver r constantes complexes e_i non toutes nulles réalisant les quatre identités

$$\sum_i e_i\xi_i(x,\ y)=0,\quad \sum_i e_i\eta_i(x,\ y)=0,$$
$$\sum_i e_i\alpha_i(\bar{x},\ \bar{y})=0,\quad \sum_i e_i\beta_i(\bar{x},\ \bar{y})=0.$$

Il est même impossible, d'après ce qui a été dit plus haut, de réaliser soit les deux premières, soit les deux dernières de ces identités par des valeurs non toutes nulles des e_i.

Cela posé, il est clair que chacune des transformations infinitésimales

$$\bar{\alpha}_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial x}+\bar{\beta}_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial y}+\bar{\xi}_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}+\bar{\eta}_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

fait partie du groupe. On a donc des relations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{\alpha}_i(x,\ y)=\sum_k m_{ik}\xi_k(x,\ y),\quad \bar{\beta}_i(x,\ y)=\sum_k m_{ik}\eta_k(x,\ y),\\ &\bar{\xi}_i(\bar{x},\ \bar{y})=\sum_k m_{ik}\alpha_k(\bar{x},\ \bar{y}),\quad \bar{\eta}_i(\bar{x},\ \bar{y})=\sum_k m_{ik}\beta_k(\bar{x},\ \bar{y}).\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Il en résulte

$$\bar{\alpha}_i(x,\ y) = \sum_{kj} m_{ik}\bar{m}_{kj}\bar{\alpha}_j(x,\ y),$$

$$\bar{\beta}_i(x,\ y) = \sum_{kj} m_{ik}\bar{m}_{kj}\bar{\beta}_j(x,\ y),$$

d'où

$$\sum_k m_{ik}\bar{m}_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases} \tag{19}$$

Cherchons maintenant les transformations $\sum_i e_i X_i f$ qui sont *réelles* par rapport aux variables réelles $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\sum_i e_i\,\alpha_i(\bar{x},\ \bar{y}) = \sum_i \bar{e}_i\,\bar{\xi}_i(\bar{x},\ \bar{y}),$$

$$\sum_i e_i\,\beta_i(\bar{x},\ \bar{y}) = \sum_i \bar{e}_i\,\bar{\eta}_i(\bar{x},\ \bar{y}),$$

ou encore, d'après (18),

$$\sum_i (e_i - \sum_k m_{ki}\bar{e}_k)\alpha_i(\bar{x},\ \bar{y}) = 0,$$

$$\sum_i (e_i - \sum_k m_{ki}\bar{e}_k)\beta_i(\bar{x},\ \bar{y}) = 0.$$

Cela n'est possible que si l'on a

$$e_i = \sum_k m_{ki}\bar{e}_k, \tag{20}$$

et aussi, en prenant les conjugués des deux membres,

$$\bar{e}_i = \sum_k \bar{m}_{ki}e_k. \tag{21}$$

Les $2r$ relations linéaires (20) et (21) aux $2r$ inconnues e_i et $\bar{e}_i$ forment un système qui pourrait s'écrire sous forme *réelle* en prenant comme inconnues les parties réelles et imaginaires des e_i. Or elles se réduisent à r indépendantes, puisque, d'après les relations (19), les équations (21) sont des conséquences de (20), et que les équations (20) sont évidemment indépendantes. *L'hypersurface admet donc exactement* r *transformations infinitésimales linéairement indépendantes à paramètres réels.* C. Q. F. D.

19. D'après les recherches de A. TRESSE, une équation différentielle du second ordre admet au plus un groupe à 8 paramètres complexes, qui est semblable au groupe homographique (complexe) du plan. Les hypersurfaces correspondantes, s'il y en a, admettront un groupe à 8 paramètres réels. Or on connaît toutes les *formes réelles* du groupe homographique complexe du plan [14]. Il y en a trois, à savoir:

1. le groupe homographique réel;

2. le groupe homographique qui laisse invariante l'équation obtenue en annulant, en coordonnées homogénes x_1, x_2, x_3, une forme d'HERMITE indéfinie

$$\Sigma\, a_{ik} x_i \bar{x}_k = 0 \qquad (a_{ik} = \bar{a}_{ki}); \tag{22}$$

3. Le groupe analogue relatif à une forme d'HERMITE définie.

Le troisième groupe permet de transformer un point quelconque du plan complexe en un autre point quelconque; il ne laisse donc invariante aucune hypersurface.

Le premier groupe transforme tout point imaginaire du plan en tout autre point imaginaire et tout point réel en tout autre point réel; il laisse donc invariante la surface non caractéristique lieu des points réels, mais ne laisse invariante aucune hypersurface.

Reste le second groupe, qui laisse invariante *l'hyperconique* définie par l'équation (22). D'où le

THÉORÈME. — *Toute hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde et qui admet localement un groupe de transformations pseudo-conformes à 8 paramètres est localement équivalente à l'hyperconique.*

L'équation (22) peut du reste se ramener à la forme canonique

$$x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = 0;$$

les surfaces caractéristiques associées ne sont autres que les *droites* du plan complexe

$$ax + by - 1 = 0.$$

CHAPITRE II.

Les hypersurfaces qui admettent un groupe transitif de transformations pseudo-conformes.

I. Généralités.

20. Nous supposerons dans tout ce Chapitre que les hypersurfaces considérées ne sont pas des hyperplanoïdes et que les groupes considérés sont

[14] Voir, par exemple, E. CARTAN, *Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne* (« Journal Math. pures et appl. », 8, 1929, nn. 26 e 27, pp. 28-30).

engendrés par des transformations infinitésimales. Il résulte immédiatement de cette dernière hypothèse que toute hypersurface admettant un groupe transitif de cette nature est *analytique*: on sait en effet qu'on peut choisir les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ d'un groupe de LIE de manière que les fonctions φ et ψ qui entrent dans les équations

$$x' = \varphi(x, y; a_1, a_2, \ldots, a_r), \quad y' = \psi(x, y; a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

dépendent analytiquement des paramètres. L'hypersurface lieu des transformés d'un point fixe x_0, y_0, sera donc analytique.

Nous verrons du reste réciproquement (Chapitre III) que le plus grand groupe de transformations pseudo-conformes d'une hypersurface analytique est un groupe de LIE, c'est-à-dire est engendré par des transformations infinitésimales.

21. Si une hypersurface admet un groupe transitif, ce groupe est au moins à 3 paramètres réels. Il résulte des recherches de A. TRESSE [1] que si ce groupe est à plus de trois paramètres, l'hypersurface est localement équivalente à l'hyperconique et admet localement un groupe à 8 paramètres.

Nous verrons un peu plus loin (n. 29) que si une hypersurface admet un groupe à trois paramètres, ce groupe la transforme transitivement.

II. Problème local et problème global.

22. Le problème que nous nous proposons de résoudre peut être envisagé d'un point de vue *local* ou d'un point de vue *global*.

Plaçons-nous d'abord au point de vue local. Soit (Σ) une hypersurface, (σ) une portion connexe de cette hypersurface ne contenant que des points simples, (δ) un domaine de l'espace ambiant découpant sur (Σ) la portion (σ). Soient enfin

$$\text{(I)} \qquad x' = \varphi(x, y; a_1, a_2, \ldots, a_r), \quad y' = \psi(x, y; a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

les équations finies d'un groupe G; les fonctions φ et ψ sont régulières dans le domaine (δ) pour les transformations du groupe qui appartiennent à un voisinage suffisamment petit de la transformation identique. Nous dirons que (Σ) admet localement le groupe G dans la région (σ) si l'on peut trouver une région suffisamment petite (σ_0) intérieure à (σ), et un voisinage V_0 de la transformation identique dans le groupe G, tels que toute transformation appartenant à V_0 et appliquée à un point de (σ_0) donne un point de (σ).

On définit d'une manière analogue *l'équivalence locale* de deux hypersurfaces (Σ) et (Σ'), considérées au voisinage de deux régions (σ) et (σ').

23. Plaçons-nous maintenant au point de vue global. Nous dirons qu'une hypersurface (Σ) à points tous simples admet globalement un groupe de transformations pseudo-conformes G à r paramètres:

1° S'il existe un domaine (Δ) de l'espace ambiant qui contienne complètement (Σ) à son intérieur et tel que toutes les transformations du groupe soient régulières à l'intérieur de (Δ);

2° Si M et M' étant deux points quelconques de (Σ), il existe au moins une transformation de G amenant M en M'.

Les énoncés précédents ne doivent pas être pris trop à la lettre. Il peut arriver qu'on ne puisse pas trouver un système de paramètres réels $a_1, \dots, a_r$ valable dans toute l'étendue du groupe; il suffit qu'au voisinage de chaque transformation du groupe on puisse trouver un tel système, ce qui a certainement lieu pour tous les groupes de Lie. En second lieu il n'est pas nécessaire qu'il existe un système de coordonnées x, y valable dans toute l'étendue de (Δ): il suffit qu'au voisinage de chaque point de (Δ) on puisse trouver un tel système de coordonnées, mais de manière qu'en passant par continuité d'un point défini par un certain système de coordonnées (x, y) à un point défini par un autre système de coordonnées (ξ, η), on traverse une région dans laquelle les deux systèmes de coordonnées soient utilisables, le passage de l'un à l'autre, dans cette région, se faisant par une transformation pseudo-conforme.

Etant données deux hypersurfaces (Σ) et (Σ') à points tous simples, nous dirons qu'elles sont *globalement équivalentes* s'il existe une correspondance pseudo-conforme biunivoque partout régulière entre un domaine (Δ) contenant (Σ) à son intérieur et un domaine (Δ') contenant (Σ') à son intérieur, cette correspondance transformant (Σ) en (Σ').

24. Considérons deux hypersurfaces (Σ) et (Σ') à points tous simples, admettant chacune globalement un groupe transitif de transformations pseudo-conformes, G pour (Σ), G' pour (Σ').

Supposons de plus:

1° *Que les deux hypersurfaces soient localement équivalentes;*

2° *Que les deux groupes soient localement semblables;*

3° *Que l'hypersurface* (Σ) *soit simplement connexe.*

Les conditions 1° et 2° peuvent être précisées de la manière suivante. Prenons sur (Σ) et (Σ') deux points arbitraires M_0 et M_0'; nous pouvons trouver deux régions (σ) et (σ') entourant respectivement M_0 et M_0' sur (Σ) et (Σ'), et deux domaines (δ) et (δ') contenant (σ) et (σ'), et enfin une transformation pseudo-conforme T partout régulière dans (δ) transformant biunivoquement (δ) en (δ'), (σ) en (σ') et M_0 en M_0'; de plus cette transformation doit transformer chacune des transformations infinitésimales $\xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y}$ de G, dans les coefficients ξ_i, η_i de laquelle x et y sont les coordonnées d'un point variable de (δ), dans une transformation infinitésimale déterminée de G', la transformation inverse changeant de même toute transformation infinitésimale de G' dans une transformation infinitésimale déterminée de G.

La condition 3° exprime que tout contour fermé à une dimension tracé dans (Σ) est réductible à un point par déformation continue sans quitter (Σ).

Nous allons nous proposer de déterminer, (Σ) *et* G *étant donnés, toutes les hypersurfaces* (Σ') *localement équivalentes à* (Σ) *et admettant glolalement un groupe localement semblable à* G.

25. Remarquons d'abord que la correspondance pseudo-conforme T qui existe entre (δ) et (δ') établit entre les transformations de G et celles de G' une correspondance, nécessairement isomorphique, qui entraîne par elle-même une correspondance isomorphique biunivoque entre les transformations finies de G, prises dans un voisinage suffisamment petit de la transformation identique, et les transformations analogues de G'. Soit Γ le groupe abstrait simplement connexe infinitésimalement isomorphe à G et à G' [15]. La correspondance isomorphique qui existe, au voisinage de la transformation identique, entre G, G', et par suite Γ, entraîne une correspondance isomorphique univoque $(\Gamma \rightarrow G)$ et une correspondance isomorphique univoque $(\Gamma \rightarrow G')$ définies dans toute la variété du groupe Γ; à une transformation de Γ correspond une transformation et une seule de G, une transformation et une seule de G'.

Nous pouvons regarder les opérations de Γ comme appliquées aux points de (Σ) en ce sens que, par convention, chacune de ces opérations produit sur (Σ) le même effet que la transformation correspondante de G: seulement Γ peut contenir des opérations qui laissent fixes tous les points de (Σ). De même chaque opération de Γ peut être regardée comme appliquée aux points de (Σ').

Introduisons maintenant l'hypothèse que (Σ) est simplement connexe: cela signifie que l'ensemble des opérations de Γ qui laissent fixe un point donné de (Σ), par exemple M_0, forme un sous-groupe *connexe* γ de Γ [16].

A ce sous-groupe γ correspond dans G' un sous-groupe également connexe, engendré par les transformations infinitésimales de G' qui correspondent aux

[15] E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* (« Mém. Sc. Math. », fasc. XLII, 1930, p. 13).

[16] E. CARTAN, loc. cit. [15], p. 31.

transformations infinitésimales de G laissant fixe le point M_0: elles laissent donc fixe le point M_0'. Autrement dit, le sous-groupe γ de Γ qui laisse fixe le point M_0, quand on le considère comme opérant sur (Σ), laisse aussi fixe le point M_0', quand on le considère comme opérant sur (Σ'). Nous allons déduire de là que la transformation *pseudo-conforme* $\mathcal{T}$ *qui transforme* (σ) *en* (σ') *peut se prolonger sur toute l'hypersurface* (Σ).

En effet, soit M un point donné de (Σ), Θ une opération particulière de Γ amenant M_0 en M: soit M' le point transformé de M_0' par Θ. Toute transformation de Γ qui amène M_0 en M est de la forme ΘR, R appartenant à γ. On voit qu'elle amène toujours M_0' dans le même point M'. Nous établissons donc ainsi une transformation univoque de tout point M de (Σ) en un point déterminé de (Σ'). Cette transformation, que nous désignerons par $\mathcal{T}^*$, se confond, quand M est sur (σ), avec la transformation pseudo-conforme locale $\mathcal{T}$ dont nous avons admis l'existence. Nous allons montrer qu'elle est pseudo-conforme.

26. Soient

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \tag{1}$$

les équations de la transformation T de G qui correspond à Θ: nous pouvons supposer les fonctions f et g holomorphes à l'intérieur de (δ); ces équations sont inversement résolubles par rapport à x, y, et donnent

$$x = \varphi(x', y'), \quad y = \psi(x', y'), \tag{2}$$

les fonctions φ et ψ étant holomorphes à l'intérieur du domaine transformé de (δ) par T, domaine que nous désignerons par $(T\delta)$. Soient de même

$$X' = F(X, Y), \quad Y' = G(X, Y) \tag{3}$$

les équations de la transformation T' de G' correspondant à Θ, les fonctions F et G étant holomorphes à l'intérieur de (δ'). Soit maintenant (x, y) un point quelconque de (σ) résultant de la transformation θ de Γ, voisine de la transformation identique, appliquée au point M_0. Soit (X, Y) le point que $\mathcal{T}$ lui fait correspondre sur (σ'), ce point résultant de la même transformation θ appliquée à M_0'. Les points (x', y') et (X', Y') donnés par (1) et (3) résultent de la transformation $\Theta\theta$ de Γ appliquée respectivement à M_0 et M_0'; (X', Y') est donc le transformé de (x', y') par la transformation $\mathcal{T}^*$. Or, on peut obtenir cette transformation en effectuant successivement la transformation (2), pseudo-conforme et régulière dans $(T\delta)$, puis la transformation $(\mathcal{T})$, pseudo-conforme et régulière dans (δ), enfin la transformation (3), pseudo-conforme et régulière dans (δ'). La transformation résultante est donc aussi pseudo-conforme. On montre immédiatement qu'elle établit une correspondance biunivoque entre les deux domaines $(T\delta)$ et $(T'\delta')$. c. q. f. d.

27. La transformation pseudo-conforme $\mathfrak{T}^*$, partout régulière au voisinage de (Σ), est *univoque*; de plus elle est *localement* biunivoque. Mais elle n'est pas nécessairement biunivoque d'une manière *globale*. En effet les transformations de Γ qui laissent fixe M_0' peuvent ne pas toutes appartenir à γ et former plusieurs et même une infinité de familles connexes de transformations de Γ, qu'on peut désigner par les symboles

$$\gamma, \quad \Theta_1\gamma, \quad \Theta_2\gamma, \ldots,$$

chacune des transformations Θ_i laissant invariant le sous-groupe γ. Toutes les transformations $\Theta_i\gamma$ transforment M_0 en un seul et même point M_i; les différents points M_0, M_1, $M_2, \ldots$ sont donc transformés par $\mathfrak{T}^*$ dans le même point M_0'. Soit de même M' un point quelconque de (Σ') résultant par exemple de la transformation Θ appliquée à M_0'; la transformation la plus générale de Γ faisant passer de M_0' à M' sera $\Theta\Theta_i\gamma$; appliquée à M_0, elle donnera les différents points obtenus en appliquant la transformation Θ à M_0, M_1, $M_2, \ldots$.

Cela posé, considérons l'opération qui fait passer du point $M = \Theta M_0$ quelconque de (Σ) au point $\Theta\Theta_i M_0$ qui a le même correspondant sur (Σ'): désignons par S_i cette opération; elle est indépendante du choix de la transformation qui amène M_0 en M, car si on remplace Θ par ΘR, où R appartient à γ, le point $\Theta\Theta_i M_0$ est remplacé par $\Theta R \Theta_i M_0$, ou encore $\Theta\Theta_i R' M_0$, puisque Θ_i laisse invariant γ, ou enfin $\Theta\Theta_i M_0$. *L'opération* S_i *est échangeable avec toutes les transformations de* Γ; en effet, effectuons successivement à partir du point M l'opération S_i, puis l'opération Θ', nous obtiendrons d'abord $\Theta\Theta_i M_0$, puis $\Theta'\Theta\Theta_i M_0$; effectuons les opérations dans l'ordre inverse, nous aurons d'abord $\Theta'\Theta M_0$, puis $\Theta'\Theta\Theta_i M_0$.

L'opération S_i, échangeable avec toutes les transformations de Γ, par conséquent de G, est une transformation pseudo-conforme, puisqu'elle résulte de deux transformations pseudo-conformes, à savoir la transformation $\mathfrak{T}^*$ appliquée de M à M', et la transformation inverse $\mathfrak{T}^{*-1}$ appliquée localement de M' à $S_i M$.

En conclusion, nous voyons que si *l'hypersurface* (Σ') *n'est pas simplement connexe, à tout point* M′ *de* (Σ') *correspondent plusieurs points, ou une infinité de points* M, S_1M, S_2M, ..., *de* (Σ), *qui se déduisent tous de l'un d'entre eux par un groupe proprement discontinu de transformations pseudo-conformes, dont chacune est échangeable avec toutes les transformations de* G.

L'hypersurface (Σ) *et le groupe* G *étant donnés, nous aurons donc, pour* *obtenir toutes les hypersurfaces* (Σ') *localement équivalentes à* (Σ) *et admettant globalement un groupe transitif localement semblable à* G, *à déterminer tous les groupes proprement discontinus de transformations pseudo-conformes qui laissent invariante* (Σ) *et dont chaque opération est échangeable avec toutes les transformations de* G. Chacun de ces groupes déterminera une classe d'hypersurfaces (Σ') répondant à la question et toutes globalement équivalentes entre elles.

Nous dirons que le groupe proprement discontinu formé des opérations S, est le *groupe de connexion* de Σ'; à chaque opération de ce groupe correspond une classe de contours fermés tracés sur (Σ'), deux contours de la même classe étant réductibles l'un à l'autre par déformation continue, deux contours appartenant à deux classes différentes ne l'étant pas.

III. **Méthode de recherche des hypersurfaces admettant un groupe pseudo-conforme à trois paramètres.**

28. Laissons pour plus tard la recherche des hypersurfaces qui admettent globalement un groupe pseudo-conforme à plus de trois paramètres: nous savons qu'elles admettent alors localement un groupe à 8 paramètres. Commençons par chercher tous les groupes à 3 paramètres susceptibles de laisser invariante une hypersurface qui ne soit pas un hyperplanoïde; nous ne supposerons pas nécessairement un tel groupe transitif. Il est bien entendu que l'hypersurface ainsi invariante pourra admettre un groupe à plus de trois paramètres.

Soient

$$X_i = \xi_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

les transformations infinitésimales génératrices du groupe G, qui est ainsi engendré par la transformation $e_1X_1 + e_2X_2 + e_3X_3$, avec des coefficients e_i *réels*. Si nous regardons les e_i comme des paramètres *complexes*, la transformation engendre un groupe à trois paramètres complexes G^*, dont G peut être regardé, au point de vue des paramètres, comme la partie réelle.

Nous remarquons d'abord que les trois déterminants $\xi_i\eta_j - \eta_i\xi_j$ ne peuvent être identiquement nuls; sinon en effet le groupe G admettrait un invariant $\varphi(x,\ y)$, intégrale première de l'équation $X_1 = 0$, par suite l'hypersurface serait un lieu de surfaces caractéristiques $\varphi(x,\ y) = \text{const.}$, ce que nous excluons.

Les deux équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &u_1\xi_1(x,\ y) + u_2\xi_2(x,\ y) + u_3\xi_3(x,\ y) = 0,\\ &u_1\eta_1(x,\ y) + u_2\eta_2(x,\ y) + u_3\eta_3(x,\ y) = 0,\end{aligned}\right.$$

donnent pour les rapports mutuels des u_i deux fonctions analytiques de x, y. L'interprétation de ces quantités est la suivante. Soit (x_0, y_0) un point de (Σ), u_i^0 une solution des équations (4), où on fait $x = x_0$, $y = y_0$; la transformation infinitésimale $u_1^0 X_1 + u_2^0 X_2 + u_3^0 X_3$ du groupe à paramètres complexes prolongé de G laisse invariant le point (x_0, y_0); cette transformation infinitésimale est définie à un facteur complexe constant près; elle engendre un sous-groupe à un paramètre complexe de G^*; nous l'appellerons la transformation infinitésimale complexe associée au point (x_0, y_0). C'est sur la considération de ces transformations que va reposer la méthode que nous allons employer.

Remarquons que *la transformation infinitésimale associée à un point* M *de* (Σ) *se déduit de la transformation infinitésimale associée à* M_0 *en la transformant par la transformation de* G *qui amène* M_0 *en* M.

29. Voici quelques propriétés préliminaires importantes:

1° *La transformation infinitésimale associée à un point de* (Σ) *ne peut être fixe*; autrement dit les rapports mutuels des u_i ne peuvent être constants. En effet on peut toujours choisir la base infinitésimale de G de manière que la transformation infinitésimale fixe associée aux différents points de (Σ) soit $X_1 + iX_2$; mais alors les fonctions $\xi_1 + i\xi_2$, $\eta_1 + i\eta_2$, nulles sur (Σ), seraient identiquement nulles, et l'hypersurface admettrait, en même temps que la transformation X_1, la transformation iX_1, ce qui est impossible (n. 17).

2° *Si l'un des rapports,* $\frac{u_1}{u_3}$ *par exemple, n'est pas constant, les valeurs numériques qu'il prend sur* (Σ) *doivent dépendre de deux paramètres réels;* dans le cas contraire, en effet, (Σ) serait le lieu de surfaces caractéristiques $\frac{u_1}{u_3} = \text{const.}$, dépendant d'un paramètre.

3° *L'hypersurface est transformée transitivement par* G; sinon chacun de ses points admettrait un sous-groupe à un paramètre de G; par suite la transformation infinitésimale associée à ce point serait *réelle*, et chacun des rapports $\frac{u_i}{u_j}$ ne prendrait que des valeurs réelles.

4° *L'hypersurface* (Σ) *est analytique*, car les équations finies du groupe G dépendant analytiquement des paramètres a, b, c du groupe, l'hypersurface est définie paramétriquement par des équations analytiques de la forme

$$x = f(x_0, y_0;\ a, b, c), \quad y = g(x_0, y_0;\ a, b, c),$$

(x_0, y_0) étant un point fixe de (Σ).

5° *Si* $\mathrm{X}_1 + i\mathrm{X}_2$ *est la transformation infinitésimale imaginaire associée* *à un point particulier* M_0 *de* (Σ), *il est impossible que* X_1 *et* X_2 *engendrent un sous-groupe de* G. Supposons en effet que X_1 et X_2 engendrent un groupe g, et soit (σ) la surface lieu des transformés de M_0 par g. La transformation infinitésimale associée à un point M de (σ) est la transformée de $X_1 + iX_2$ par la transformation de g qui amène M_0 en M; elle est donc de la forme $X_1 + uX_2$, et par suite, en tout point de (σ), on a

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi_1(x, y) + u\xi_2(x, y) = 0, \\ \eta_1(x, y) + u\eta_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Cela posé, le lieu des transformés de M_0 par le sous-groupe réel à un paramètre engendré par $e_1X_1 + e_2X_2$ est défini comme trajectoire des équations différentielles

$$\frac{dx}{e_1\xi_1 + e_2\xi_2} = \frac{dy}{e_1\eta_1 + e_2\eta_2},$$

ou encore

$$\frac{dx}{\xi_2} = \frac{dy}{\eta_2};$$

la surface (σ) est donc de la forme

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0),$$

$\varphi(x, y)$ étant une intégrale première de $X_2f = 0$; l'hypersurface (Σ) serait donc un lieu de surfaces caractéristiques, cas exclu.

IV. Détermination de toutes les structures possibles des groupes pseudo-conformes à trois paramètres laissant invariante une hypersurface.

30. Nous allons d'abord supposer que la transformation infinitésimale imaginaire associée à un point variable de (Σ) ne dépend que de deux paramètres réels variables, autrement dit que *la transformation associée à un point* M *est associée à tous les points d'une ligne à une dimension passant par* M.

Dans ces conditions, si $X_1 + iX_2$ est la transformation associée à un point particulier M_0, il existe nécessairement une transformation infinitésimale de G laissant invariante $X_1 + iX_2$, ou plutôt laissant invariant le groupe qu'elle engendre; cela veut dire que le crochet de cette transformation infinitésimale et de $X_1 + iX_2$ est un multiple de $X_1 + iX_2$. Cette transformation infinitésimale ne peut être de la forme $mX_1 + nX_2$, car l'égalité

$$(mX_1 + nX_2,\ X_1 + iX_2) = (\alpha + i\beta)(X_1 + iX_2),$$

ou
$$(X_1X_2) = \frac{\alpha + i\beta}{mi - n}(X_1 + iX_2),$$
n'est possible que si le second membre, *qui doit être à coefficients réels*, est nul; mais alors X_1 et X_2 engendreraient un groupe, ce qui est impossible (n. 29, 5°).

On peut donc supposer que la transformation infinitésimale considérée est X_3, avec
$$(X_3,\ X_1 + iX_2) = (\alpha + i\beta)(X_1 + iX_2),$$
ou
$$(X_3X_1) = \alpha X_1 - \beta X_2, \quad (X_3X_2) = \beta X_1 + \alpha X_2. \tag{6}$$
Si alors on pose
$$(X_1X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3 \qquad (\nu \neq 0), \tag{7}$$
l'identité de JACOBI donne
$$\alpha\nu = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha = 0, \tag{8}$$
puis
$$\lambda\beta = \mu\beta = 0. \tag{9}$$

31. Si $\beta = \lambda = \mu = 0$, on peut supposer $\nu = 1$ et on a un premier type
$$\boxed{(X_1X_3) = 0,\ (X_2X_3) = 0,\ (X_1X_2) = X_3}. \tag{A}$$

Si $\beta = 0$, λ et μ n'étant pas tous les deux nuls, si par exemple $\mu \neq 0$, on prendra
$$\frac{1}{\mu}X_1, \quad \lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3 \quad \text{et} \quad X_3$$
comme nouvelles transformations infinitésimales de base et on aura le type
$$\boxed{(X_1X_2) = X_2,\ (X_1X_3) = 0,\ (X_2X_3) = 0}; \tag{B}$$
on pourra supposer que la transformation infinitésimale associée à un point particulier de (Σ) est $X_1 + iX_2 + iX_3$.

Enfin, si $\beta \neq 0$, on pourra, en multipliant X_1, X_2, X_3 par des facteurs constants k, h, l, se ramener aux cas $\beta = 1$, $\nu = \pm 1$. On aura ainsi les deux types distincts
$$\boxed{(X_1X_2) = X_3,\ (X_1X_3) = X_2,\ (X_2X_3) = -X_1}, \tag{C}$$
$$\boxed{(X_1X_2) = -X_3,\ (X_1X_3) = X_2,\ (X_2X_3) = -X_1}; \tag{D}$$

dans chaque cas la transformation infinitésimale associée à un point particulier de (Σ) sera $X_1 + iX_2$.

32. *Supposons maintenant que les transformations infinitésimales associées à un point variable de* (Σ) *dépendent de trois paramètres réels.* Ce sont par exemple les transformées par G de $X_1 + iX_2$. Aucune transformation infinitésimale de G ne laisse alors invariant le groupe engendré par $X_1 + iX_2$. En particulier G n'admet aucune transformation infinitésimale *distinguée*, c'est-à-dire échangeable avec toutes les transformations de G.

Cela posé, les seuls groupes n'admettant aucune transformation infinitésimale distinguée rentrent dans les types suivants [17]

$$\text{(E)} \qquad \boxed{(X_1X_3) = X_1\,,\ (X_2X_3) = mX_2\,,\ (X_1X_2) = 0}\ ;$$

$$\text{(F)} \qquad \boxed{(X_1X_3) = X_1\,,\ (X_2X_3) = X_1 + X_2\,,\ (X_1X_2) = 0}\ ;$$

$$\text{(H)} \qquad \boxed{(X_1X_3) = mX_1 - X_2\,,\ (X_2X_3) = mX_2 + X_1\,,\ (X_1X_2) = 0}\ ;$$

$$\text{(K)} \qquad \boxed{(X_1X_3) = X_2\,,\ (X_2X_3) = -X_1\,,\ (X_1X_2) = X_3}\ ;$$

$$\text{(L)} \qquad \boxed{(X_1X_3) = X_2\,,\ (X_2X_3) = -X_1\,,\ (X_1X_2) = -X_3}\ .$$

Au point de vue de la seule structure, (K) est identique à (C) et (L) à (D). Naturellement les transformations de base ne sont plus choisies de manière que $X_1 + iX_2$ soit associée à un point particulier de (Σ).

Les deux catégories de types: (A), (B), (C), (D) d'une part; (E), (F), (H), (K), (L) d'autre part se séparent nettement; nous verrons en particulier que *les hypersurfaces des quatre premiers types admettent localement un groupe à 8 paramètres.* La raison profonde de ce résultat sera donnée plus loin, dans la seconde Partie de ce mémoire (n. 89).

V. Les hypersurfaces du type (A).

33. Nous allons d'abord chercher comment les transformations de G transforment entre elles les transformations infinitésimales de G^*. Pour cela

[17] S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, 2ième éd., Leipzig et Berlin, Teubner, 1930, III, p. 715. A noter cependant qu'il s'agit ici de groupes à paramètres réels.

nous considérons le *groupe adjoint* de G [18]. On a

$$(u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3\,,\; X_1) = -u_2X_3\,,$$
$$(u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3\,,\; X_2) = u_1X_3\,,$$
$$(u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3\,,\; X_3) = 0\,;$$

par suite, les transformations infinitésimales du groupe adjoint sont

$$E_1 \equiv -u_2\frac{\partial f}{\partial u_3}, \quad E_2 \equiv u_1\frac{\partial f}{\partial u_3}, \quad E_3 \equiv 0,$$

et ses transformations finies sont

$$u_1' = u_1\,, \quad u_2' = u_2\,, \quad u_3' = u_3 - au_2 + bu_1\,.$$

En particulier les transformées de $X_1 + iX_2$ sont

$$X_1 + iX_2 + (b - ai)X_3 = X_1 + iX_2 + ixX_3\,,$$

en ramenant, par une transformation pseudo-conforme, le coefficient de X_3 à être égal à ix. En ce qui concerne la coordonnée x, les transformations infinitésimales de G sont donc

$$X_1 \equiv -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 \equiv i\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_3 \equiv 0.$$

On pourra donc poser

$$X_1 \equiv -\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$X_2 \equiv -i\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$X_3 \equiv \eta_3\frac{\partial f}{\partial y},$$

avec

$$\eta_1 + i\eta_2 + ix\eta_3 = 0.$$

Prenons maintenant pour y un invariant de $X_1 - iX_2$, avec

$$\eta_1 - i\eta_2 = 0;$$

en exprimant que l'on a $(X_1 - iX_2\,,\; X_3) = 0$, on trouve $\frac{\partial \eta_3}{\partial x} = 0$, ce qui permet, en prenant $\int \frac{dy}{\eta_3}$ comme nouvelle variable y, de poser $\eta_3 = 1$. On en déduit

$$\text{(A)}\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &\equiv -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2}ix\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv -i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2}x\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 &\equiv \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

([18]) Loc. cit. ([17]), I, Kap. 6.

Les équations finies de G sont

$$(\mathrm{G_A}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + a + ib, \\ y' = y + \frac{1}{2}(b + ia)x + \frac{1}{4}i(a^2 + b^2) + c. \end{array} \right.$$

L'hypersurface (Σ) est le lieu des points transformés de $(0, y_0)$ ou, en remplaçant $y - y_0$ par y, le lieu des points

$$(\Sigma_{\mathrm{A}}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = a + ib, \\ y = c + \frac{1}{4}i(a^2 + b^2); \end{array} \right.$$

son équation est

$$(\Sigma_{\mathrm{A}}) \qquad 2\frac{y - \bar{y}}{i} - x\bar{x} = 0.$$

C'est une hyperconique, mais privée du point à l'infini dans la direction de l'axe des y. C'est une hypersurface simplement connexe.

34. Passons à la détermination des hypersurfaces non simplement connexes du type (A). Il faut déterminer un groupe proprement discontinu de transformations pseudo-conformes laissant (Σ) invariante et laissant invariante chaque transformation infinitésimale de G. Si M' est le transformé de M par une opération de ce groupe, la transformation infinitésimale $X_1 + iX_2 + ixX_3$ associée à M sera transformée en $X_1 + iX_2 + ix'X_3$; *il en résulte immédiatement, pour toute opération du groupe de connexion,*

$$x' = x.$$

Le groupe de connexion changera tout invariant de $X_1 - iX_2$ en un autre invariant, par suite y sera transformée en une fonction de y; mais, comme la transformation $X_3 = \frac{\partial f}{\partial y}$ doit rester invariante, on aura

$$y' = y + \mathrm{c^{te}};$$

la constante devra être réelle pour que (Σ) soit invariante.

Finalement toute opération du groupe de connexion de (Σ') est de la forme

$$x' = x, \quad y' = y + a \qquad (a \text{ réel});$$

le seul groupe proprement discontinu satisfaisant à cette condition est de la forme

$$x' = x, \quad y' = y + nh \qquad (n \text{ entier arbitraire, } h \text{ réel}).$$

Posons alors

$$X = x, \quad Y = e^{-\frac{2i\pi y}{h}};$$

les fonctions X et Y sont uniformes sur (Σ'), et l'équation de (Σ') est par suite

$$Y\bar{Y} = e^{\frac{\pi}{h}X\bar{X}},$$

ou, par un changement de variables évident,

$$(\Sigma'_{\mathrm{A}}) \qquad Y\bar{Y} = e^{X\bar{X}}.$$

Les équations du groupe G' de (Σ') sont

$$(\mathrm{G}'_{\mathrm{A}}) \qquad \begin{cases} X' = X + a + ib \\ Y' = Ye^{(a-ib)X + \frac{1}{2}(a^2+b^2) + ic}. \end{cases}$$

35. On doit maintenant se demander, pour chacune des hypersurfaces (Σ_{A}) et (Σ'_{A}), quel est son plus grand groupe de transformations pseudo-conformes. Pour (Σ_{A}), il est manifestement formé de toutes les transformations homographiques qui laissent invariante l'hyperconique (Σ_{A}), en laissant invariant le point à l'infini dans la direction de Oy. Ce groupe est à cinq paramètres et a pour équations

$$(10) \qquad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta & (\alpha \neq 0), \\ y' = \alpha\bar{\alpha}y + \frac{1}{2}i\alpha\bar{\beta}x + \frac{1}{4}i\beta\bar{\beta} + c & (c \text{ réel}). \end{cases}$$

Quant au groupe de (Σ'_{A}), il correspond à celles des transformations précédentes qui sont invariantes par

$$x' = x, \quad y' = y + h,$$

ce qui exige $\alpha\bar{\alpha} = 1$. Le groupe de (Σ'_{A}) est donc à quatre paramètres réels, et ses équations finies sont, en remplaçant α par e^{ia},

$$(11) \qquad \begin{cases} X' = e^{ia}X + \beta \\ Y' = Ye^{\bar{\beta}e^{ia}X + \frac{1}{2}\beta\bar{\beta} + ic} \end{cases} \qquad (a,\ c \text{ réels}).$$

36. En résumé, il y a deux hypersurfaces non globalement équivalentes du type (A). *L'une, simplement connexe, est l'hyperconique privée d'un de ses points: elle admet globalement un groupe* (10) *pseudo-conforme connexe à 5 paramètres. L'autre, non simplement connexe, dont l'équation est réductible à*

$$Y\bar{Y} = e^{X\bar{X}},$$

admet globalement un groupe (11) *à 4 paramètres.*

VI. Les hypersurfaces du type (B).

37. Les équations de structure étant

(B) $$(X_1 X_2) = X_2, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = 0,$$

les transformations infinitésimales du groupe adjoint sont

$$E_1 \equiv -u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad E_2 \equiv u_1 \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad E_3 \equiv 0,$$

et ses équations finies sont

$$u_1' = u_1, \quad u_2' = a u_2 + b u_1, \quad u_3' = u_3.$$

Les transformées de $X_1 + iX_2 + iX_3$ peuvent donc être mises sous la forme $X_1 + xX_2 + iX_3$. Par suite, les transformations infinitésimales de G sont

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv -x \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 &\equiv \phantom{-x\frac{\partial f}{\partial x} +} \eta_3 \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

On peut choisir pour y un invariant de la transformation $X_1 - iX_2 + iX_3$; on aura alors

$$\begin{aligned} \eta_1 + x\eta_2 + i\eta_3 &= 0, \\ \eta_1 - i\eta_2 + i\eta_3 &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\eta_2 = 0, \quad \eta_1 + i\eta_3 = 0.$$

Les équations de structure donnent $\frac{\partial \eta_3}{\partial x} = 0$, ce qui permet de poser $\eta_3 = 1$. On a donc

$$(G_B) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &\equiv -x \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} \qquad\quad , \\ Y_3 &\equiv \phantom{-x\frac{\partial f}{\partial x} - i} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Les équations finies de ce groupe sont

$$x' = e^c x + a, \quad y' = y + b + ic;$$

(Σ) est le lieu des transformés du point (i, y_0) d'où, en remplaçant $y - y_0$ par y,

$$(\Sigma_B) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a + ie^c, \\ y &= b + ic; \end{aligned} \right.$$

l'équation de (Σ_B) est

$$(\Sigma_B) \qquad \frac{x-\bar{x}}{i} - e^{\frac{y-\bar{y}}{i}} = 0.$$

38. L'hypersurface (Σ_B) est simplement connexe. On aura le groupe de connexion de toute autre hypersurface localement équivalente du type (B) en remarquant que, comme dans le cas du type (A), on aura, pour toute opération de ce groupe,

$$x' = x;$$

d'autre part y sera transformée en une fonction de y, nécessairement de la forme $y' = y + c^{te}$, la constante étant réelle.

Le groupe de connexion est donc nécessairement de la forme

$$x' = x, \quad y' = y + nh \qquad (n \text{ entier}, h \text{ réel}).$$

En posant

$$X = x, \quad Y = e^{-\frac{2i\pi}{h}y},$$

on obtiendra pour équation de (Σ'_B),

$$(\Sigma'_B) \qquad \frac{X-\bar{X}}{i} \quad (Y\bar{Y})^{\frac{h}{2\pi}} = 0 \qquad (Y \neq 0).$$

Les équations finies de (G'_B) sont

$$(G'_B) \qquad \begin{cases} X' = e^c X + a, \\ Y' = Y e^{-\frac{2i\pi}{h}(b+ic)}. \end{cases}$$

En particulier, on retrouve, pour $\mathrm{h} = 2\pi$, *l'hyperconique* $\mathrm{X} - \bar{\mathrm{X}} - \mathrm{i}\mathrm{Y}\bar{\mathrm{Y}} = 0$ *privée des points situés sur la droite* $\mathrm{Y} = 0$.

39. Le plus grand groupe pseudo-conforme de (Σ_B) s'obtient facilement en remarquant que, localement, (Σ_B) admet le groupe à 8 paramètres qui se déduit du groupe homographique de l'hyperconique

$$X - \bar{X} - iY\bar{Y} = 0$$

en posant $X = x$, $Y = e^{-iy}$. Il est clair que y restant fini sur (Σ_B), il ne faudra prendre, des transformations de ce groupe, que celles qui laissent invariante la droite $Y = 0$. On trouve sans difficulté le groupe à 4 paramètres

$$X' = \frac{aX+b}{cX+d}, \quad Y' = \frac{e^{ih}Y}{cX+d} \quad (a, b, c, d, h \text{ réels}, ad - bc = 1),$$

d'où, pour le groupe de (Σ_B),

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y' = y - h - i \log(cx+d). \tag{12}$$

40. En conclusion, nous voyons que *l'hypersurface* (Σ_B) *simplement connexe admet un groupe à 4 paramètres* (12); *il y a une infinité d'hypersurfaces* (Σ'_B) *non simplement connexes, à savoir* [19]:

$$\frac{X-\bar{X}}{i} - (Y\bar{Y})^m = 0 \quad (Y \neq 0) \ (m \text{ constante positive}),$$

dont chacune admet un groupe à 4 paramètres, à savoir:

$$X' = \frac{aX+b}{cX+d}, \quad Y' = \frac{e^{ih}Y}{(cX+d)^{\frac{1}{m}}}. \tag{13}$$

Ces hypersurfaces ne sont pas globalement équivalentes entre elles, sinon leurs groupes de connexion pourraient être transformés entre eux par une des transformations pseudo-conformes qui laissent invariante (Σ_B), ce qui n'est pas.

VII. Les hypersurfaces du type (C).

41. Les équations de structure étant

$$(X_1X_2) = X_3, \quad (X_1X_3) = X_2, \quad (X_2X_3) = -X_1,$$

les transformations infinitésimales du groupe adjoint sont

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv -u_2\frac{\partial f}{\partial u_3} - u_3\frac{\partial f}{\partial u_2}, \\ E_2 &\equiv u_1\frac{\partial f}{\partial u_3} + u_3\frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ E_3 &\equiv u_1\frac{\partial f}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}. \end{aligned}$$

Elles laissent invariante la forme quadratique $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$; le groupe adjoint est le groupe linéaire réel qui laisse cette forme invariante. Comme

[19] En posant

$$X = \frac{i}{2}\frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad Y = \frac{\eta}{(1-\xi)^{\frac{1}{m}}},$$

l'hypersurface (Σ'_B) a pour équation

$$\xi\bar{\xi} + (\eta\bar{\eta})^m = 1 \qquad (\eta \neq 0);$$

sous cette forme elle a été rencontrée par THULLEN, *Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen* (« Math. Ann. », 104, 1931, pp. 244-259).

les paramètres $u_1 = 1$, $u_2 = i$, $u_3 = 0$ annulent cette forme, les transformations infinitésimales associées aux différents points de (Σ) sont celles dont les coefficients annulent la forme quadratique. On peut les écrire sous la forme

$$(1 - x^2)X_1 + 2xX_2 + (1 + x^2)X_3,$$

le point origine correspondant à $x = i$.

La quantité x est manifestement transformée par le groupe homographique réel. Du reste, en remarquant que $x = \frac{u_2}{u_1 + u_3} = \frac{u_3 - u_1}{u_2}$, on trouve, en ce qui concerne x,

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv -\frac{1 - x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x}, \\ X_2 &\equiv \quad -x\frac{\partial f}{\partial x}, \\ X_3 &\equiv \quad \frac{1 + x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

On posera donc

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv -\frac{1 - x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv \quad -x\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 &\equiv \quad \frac{1 + x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_3\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

En prenant pour y un invariant de $X_3 - X_1$, on aura

$$\begin{gathered} \eta_3 - \eta_1 = 0, \\ (1 - x^2)\eta_1 + 2x\eta_2 + (1 + x^2)\eta_3 = 0, \end{gathered}$$

d'où

$$\eta_1 = \eta_3 = -x\eta_2.$$

La relation

$$(X_3 - X_1,\ X_2) = X_1 - X_3$$

donne ensuite $\frac{\partial \eta_2}{\partial x} = 0$, ce qui permet de poser $\eta_2 = -\frac{i}{2}$.

Finalement on trouve

$$(\mathrm{G_C}) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &\equiv -\frac{1 - x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{ix}{2}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv \quad -x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 &\equiv \quad \frac{1 + x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{ix}{2}\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Les équations finies de ce groupe s'obtiennent facilement en remarquant que $\eta_k = \frac{i}{2}\xi'_k$, d'où

$$(\mathrm{G_C}) \qquad x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y' = y - i\log(cx+d) \qquad (ad - bc = 1).$$

42. L'hypersurface (Σ_C) est le lieu des transformés du point $(i,\, y_0)$ ou, en remplaçant $y - y_0$ par y, le lieu des points

$$(\Sigma_C) \qquad x = \frac{ai+b}{ci+d}, \quad y = -i\log(ci+d);$$

l'équation de cette hypersurface est

$$(\Sigma_C) \qquad \frac{x-\bar{x}}{2i} - e^{\frac{y-\bar{y}}{i}} = 0.$$

On voit que c'est la même hypersurface que (Σ_B) et on constate sans difficulté qu'on retrouve aussi les mêmes hypersurfaces (Σ'_B).

Les hypersurfaces du type (C) *sont donc les mêmes que celles du type* (B): *elles admettent globalement un groupe à 4 paramètres.*

VIII. **Les hypersurfaces du type** (D).

43. Les équations de structure étant

$$(X_1X_2) = -X_3, \quad (X_1X_3) = X_2, \quad (X_2X_3) = -X_1,$$

le groupe adjoint est formé des substitutions linéaires réelles qui laissent invariante la forme quadratique $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$. Comme les paramètres de $X_1 + iX_2$ annulent cette forme, les transformations infinitésimales imaginaires associées aux différents points de (Σ) peuvent être mises sous la forme

$$(1+x^2)X_1 + i(1-x^2)X_2 + 2ixX_2,$$

le point origine M_0 correspondant à $x = 0$.

Le groupe G a ses transformations infinitésimales de la forme

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv \frac{1+x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv i\,\frac{1-x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 &\equiv \qquad ix\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_3\frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}$$

et, là encore, on peut supposer $\eta_k = -\frac{1}{2}\xi'_k$, d'où

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv \frac{1+x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{x}{2}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv i\frac{1-x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{x}{2}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 &\equiv ix\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Les équations finies de ce groupe sont

$$x' = \frac{ax-b}{\bar{b}x+\bar{a}}, \quad y' = y + \log(\bar{b}x+\bar{a}) \qquad (a\bar{a}+b\bar{b}=1),$$

et l'hypersurface (Σ) est le lieu des transformés du point $(0, y_0)$, d'où en remplaçant $y - y_0$ par y:

$$x = -\frac{b}{\bar{a}}, \quad y = \log\bar{a}.$$

Un changement de variables évident, qui conduit aux nouvelles variables $x = -b$, $y = \bar{a}$, donne

$$(\Sigma_D) \qquad x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = 0,$$

avec le groupe

$$(G_D) \qquad \begin{cases} X_1 \equiv \frac{1}{2}\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ X_2 \equiv \frac{i}{2}\left(y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ X_3 \equiv \frac{i}{2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right), \end{cases}$$

dont les équations finies sont

$$(G_D) \qquad x' = ax - by, \quad y' = \bar{b}x + \bar{a}y \qquad (a\bar{a} + b\bar{b} = 1).$$

44. L'hypersurface (Σ_D) n'est autre que l'hyperconique (*hypersphère* de H. POINCARÉ); elle admet du reste globalement un groupe à 8 paramètres. Pour avoir les autres hypersurfaces (Σ_D) du type (D), cherchons leurs groupes de connexion possibles. Comme la transformation infinitésimale associée à un point de (Σ_D) est

$$(x^2+y^2)X_1 - i(x^2-y^2)X_2 + 2ixyX_3,$$

le rapport $\frac{y}{x}$ est conservé par toute opération du groupe de connexion. Cette opération est donc de la forme

$$x' = x\varphi(x, y),$$
$$y' = x\varphi(x, y);$$

mais comme elle laisse invariante l'hypersphère, c'est que $\varphi(x, y)$ reste de module égale à 1 sur (Σ_D): cela n'est possible que si cette fonction se réduit à une constante $e^{i\alpha}$. Or, les seuls groupes proprement discontinus engendrés par des transformations de la forme

$$x' = e^{i\alpha}x, \quad y' = e^{i\alpha}y$$

sont les groupes cycliques finis formés des puissances de

$$x' = e^{\frac{2i\pi}{n}}x, \quad y' = e^{\frac{2i\pi}{n}}y \qquad (n \text{ entier positif donné}).$$

Les hypersurfaces (Σ'_D) *cherchées s'obtiennent donc en regardant deux points de l'hypersphère comme identiques, s'ils se déduisent l'un de l'autre par une homothétie de centre* (0, 0) *admettant pour rapport d'homothétie une racine n-ième de l'unité.*

Ces hypersurfaces, pour $n > 2$, admettent globalement le groupe des transformations de l'hypersphère qui laissent fixe le point origine (0, 0). Ce groupe est à 4 paramètres et a pour équations finies

$$(14) \qquad x' = e^{ih}(ax - by), \quad y' = e^{ih}(\bar{b}x + \bar{a}y)$$
$$(a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \ h \text{ réel}).$$

En posant

$$\frac{x}{y} = X, \quad y^n = Y,$$

on a l'équation

$$Y\bar{Y} = \frac{1}{(1 + X\bar{X})^n};$$

mais la représentation analytique de (Σ'_D) ainsi obtenue n'est plus partout régulière, car les différents points $(x = e^{i\theta}, y = 0)$ de (Σ'_D) sont représentés par les mêmes coordonnées $(X = \infty, Y = 0)$.

45. En résumé, *appartiennent au type* (D) *l'hypersphère, qui admet globalement un groupe à 8 paramètres, et une infinité d'autres hypersurfaces dépendant d'un entier positif arbitraire* n, *qui admettent globalement chacune un groupe à 4 paramètres.*

Nous remarquons que les hypersurfaces des types (A), (B), (C), (D) *admettent toutes localement un groupe à 8 paramètres et globalement un groupe à 8, 5 ou 4 paramètres.*

IX. Les hypersurfaces du type (E).

46. Les équations de structure étant

$$(X_1X_3) = X_1, \quad (X_2X_3) = mX_2, \quad (X_1X_2) = 0,$$

avec une constante réelle $m \neq 0$, les transformations infinitésimales du groupe adjoint sont

$$E_1 \equiv -u_3 \frac{\partial f}{\partial u_1},$$
$$E_2 \equiv -mu_3 \frac{\partial f}{\partial u_2},$$
$$E_3 \equiv u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + mu_2 \frac{\partial f}{\partial u_2};$$

ce sont aussi, en coordonnées homogènes u_1, u_2, u_3, *les transformations infinitésimales de* G.

Comme la variable u_3 est invariante *et qu'elle ne peut être nulle,* sans quoi les transformations associées aux différents points de (Σ) seraient toutes de la forme $X_1 + uX_2$, on peut supposer $u_3 = 1$. En remplaçant u_1 par x et u_2 par y, on a donc

$$(\mathrm{G_E}) \qquad \begin{cases} X_1 \equiv -\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ X_2 \equiv -m\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 \equiv x\dfrac{\partial f}{\partial x} + my\dfrac{\partial f}{\partial y}, \end{cases}$$

avec les équations finies

$$(\mathrm{G_E}) \qquad \begin{cases} x' = cx + a, \\ y' = c^m y + b, \end{cases} \qquad (a, b, c \text{ réels}; \ c > 0).$$

On ne peut partir d'un point (x_0, y_0) pour lequel l'une des deux coordonnées, x_0 par exemple, serait réelle, car alors x resterait réelle en tout point de (Σ), qui serait un hyperplanoïde. Soient α et β les coefficients de i dans x_0, y_0; en remplaçant $\frac{x}{\alpha}$ par x et $\frac{y}{\beta}$ par y, on a l'hypersurface

$$(\Sigma_\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} x = ci + a, \\ y = c^m i + b, \end{cases}$$

dont l'équation est

$$(\Sigma_\mathrm{E}) \qquad \frac{y - \bar{y}}{2i} - \left(\frac{x - \bar{x}}{2i}\right)^m = 0, \quad \left(\frac{x - \bar{x}}{i} > 0\right).$$

Comme cette hypersurface est simplement connexe et que le groupe de connexion de toute hypersurface du même type doit laisser invariants les coefficients de la transformation infinitésimale $xX_1 + yX_2 + X_3$ associée à un point variable de (Σ), c'est que ce groupe se réduit à la transformation identique. *L'hypersurface* (Σ_E) *est donc la seule du type* (E).

47. Il y a lieu de se demander si (G_E) est le plus grand groupe pseudo-conforme laissant invariante (Σ_E). Remarquons d'abord qu'en général ce plus grand groupe sera à 3 paramètres; dans le cas contraire, en effet, il faudrait que la congruence des surfaces caractéristiques associées à (Σ_E), à savoir

$$\frac{y-b}{2i} - \left(\frac{x-a}{2i}\right)^m = 0,$$

satisfît à une équation différentielle réductible à $y'' = 0$: il est *nécessaire* pour cela que cette équation différentielle soit de la forme

$$y'' = Ay'^3 + By'^2 + Cy' + D,$$

A, B, C, D étant des fonctions analytiques de x, y. Or, ici, cette équation est

$$y'' = \frac{m(m-1)}{2i}\left(\frac{y'}{m}\right)^{\frac{m-1}{m-2}}.$$

Il faut exclure le cas $m = 1$, où les surfaces caractéristiques ne dépendraient que d'un paramètre; restent donc les cas $\frac{m-1}{m-2} = 0, 1, 2, 3,$ qui se réduisent à $m = 2$ et $m = \frac{1}{2}$; ce dernier se ramène au premier en changeant les rôles de x et y. *On peut du reste supposer* $|\mathrm{m}| \geq 1$.

Si donc m *est différent de* 2, le plus grand groupe pseudo-conforme de (Σ_E) est à 3 paramètres. Mais il pourrait contenir plusieurs familles connexes distinctes de transformations. Or toute transformation n'appartenant pas au groupe connexe (G_E) laisse nécessairement ce groupe invariant; par suite X_1, qui engendre un sous-groupe invariant de (G_E), est transformée en X_1 on en X_2, et réciproquement. Cette transformation est donc, soit de la forme

$$x' = \varphi(x), \quad y' = \psi(y),$$

soit de la forme

$$x' = \varphi(y), \quad y' = \psi(x).$$

Dans le premier cas, elle est de la forme

$$x' = cx + a, \quad y' = dy + b,$$

a, b, c, d étant réels; mais pour qu'elle laisse (Σ_E) invariante, il faut $c > 0$, $d = c^m$; on retrouve le groupe (G_E) lui-même.

Dans le second cas, on aurait

$$x' = cy + a, \quad y' = dx + b,$$

ce qui n'est possible que si $m = -1$, avec a, b, c, d réels, $c > 0$, $d = \frac{1}{c}$.

Par suite *le plus grand groupe pseudo-conforme de* (Σ_E) *est un groupe connexe à trois paramètres si* m, *supposé de valeur absolue supérieure ou égale à* 1, *est différent de* 2 *et de* -1; *il est formé de deux familles connexes à trois paramètres si* m $= -1$.

Si enfin $m = 2$, l'hypersurface est localement équivalente à l'hyperconique, comme on le voit en posant

$$x = X, \quad y + \frac{i}{2}x^2 = Y;$$

on obtient

$$\frac{Y - \bar{Y}}{i} - X\bar{X} = 0, \quad \left(\frac{X - \bar{X}}{i} > 0\right).$$

Mais il faut remarquer que la partie imaginaire de x étant positive, *il ne faut garder de l'hyperconique que les points pour lesquels* $X_2 > 0$. On vérifie sans difficulté que les transformations du groupe à 8 paramètres de l'hyperconique qui laissent invariante l'hypersurface (Σ_E) forment un seul groupe connexe à 3 paramètres.

Il n'y a donc que le cas m $= -1$ *pour lequel* (Σ_E) *admette globalement deux familles distinctes de transformations pseudo-conformes.*

X. Les hypersurfaces du type (F).

48. Les équations de structure étant

$$(X_1 X_3) = X_1, \quad (X_2 X_3) = X_1 + X_2, \quad (X_1 X_2) = 0,$$

les transformations infinitésimales de G sont, en coordonnées homogènes,

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv -u_3 \frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ X_2 &\equiv -u_3 \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\right), \\ X_3 &\equiv (u_1 + u_2)\frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2}. \end{aligned}$$

Là encore on peut supposer $u_3 = 1$ et, revenant aux coordonnées non homogènes x, y, prendre

$$(G_F) \qquad \begin{cases} X_3 \equiv -\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ X_3 \equiv -\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 \equiv (x+y)\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}, \end{cases}$$

avec les équations finies

$$(G_F) \qquad \begin{cases} x' = e^c(x+cy) + a, \\ y' = e^c y + b. \end{cases}$$

On peut, comme dans le cas précédent, définir (Σ_F) comme le lieu des transformés du point $(0, i)$, ce qui donne

$$(\Sigma_F) \qquad \begin{cases} x = a + ice^c, \\ y = b + ie^c. \end{cases}$$

Cette hypersurface est simplement connexe et on démontre facilement que (G_F) est son plus grand groupe pseudo-conforme.

XI. **Les hypersurfaces du type** (H).

49. Les équations de structure étant

$$(X_1X_3) = mX_1 - X_2, \quad (X_2X_3) = mX_2 + X_1, \quad (X_1X_2) = 0,$$

les transformations infinitésimales de G s'obtiennent par la même méthode que dans les deux cas précédents. On trouve

$$(G_H) \qquad \begin{cases} X_1 \equiv -m\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 \equiv -\dfrac{\partial f}{\partial x} - m\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ X_1 \equiv (mx+y)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (my-x)\dfrac{\partial f}{\partial y}, \end{cases}$$

avec les équations finies

$$(G_H) \qquad \begin{cases} x' = e^{mc}(x\cos c + y\sin c) + a, \\ y' = e^{mc}(-x\sin c + y\cos c) + b. \end{cases}$$

L'hypersurface peut être regardée comme le lieu des transformés du point $(i, 0)$; elle est définie paramétriquement par

$$(\Sigma_H) \qquad \begin{cases} x = a + ie^{mc}\cos c, \\ y = b - ie^{mc}\sin c. \end{cases}$$

Si $m \neq 0$, elle est simplement connexe et (G_H) est le plus grand groupe psendo-conforme qui la laisse invariante.

Si $m = 0$, l'hypersurface n'est plns simplement connexe. Le groupe (G_H) se réduit au groupe des déplacements euclidiens réels du plan, et (Σ_H) a pour équation

$$(\Sigma_{H_0}) \qquad (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + 4 = 0.$$

Elle admet une seconde famille de transformations pseudo-conformes qu'on obtient en combinant (G_{H_0}) avec une symétrie par rapport à une droite réelle du plan. On peut regarder l'hypersurface (Σ_{H_0}) comme simplement connexe, à condition de regarder l'espace des deux variables complexes comme formé d'une infinité de feuillets (à 4 dimensions), le passage d'un feuillet à l'autre se faisant par exemple par la cloison à trois dimensions

$$y_2 = 0, \quad x_2 > 0.$$

Nous laisserons de côte la question de savoir *si on peut, dans un espace analytique complexe à 2 dimensions complexes, supposé simplement connexe, réaliser cette hypersurface simplement connexe de manière que deux points appartenant à deux feuillets différents, mais ayant les mêmes coordonnées initiales* (x, y), *prennent dans le nouvel espace deux positions différentes, de telle sorte que l'hypersurface soit univalente dans cet espace.* Contentons-nous de remarquer que la *surface de ramification*, qui est ici $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, *n'est pas caractéristique* [20].

XII. Les hypersurfaces du type (K): première espèce.

50. Nous avons déjà vu (n. 41) que le groupe adjoint n'est autre que le groupe projectif réel de la conique

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0,$$

que nous appellerons la *conique fondamentale.*

Chacune des hypersurfaces cherchées (Σ) pourra être regardée comme le lieu des transformés d'un certain point M_0 du plan projectif complexe par les transformations projectives réelles de la conique fondamentale. Mais plusieurs cas sont à distinguer, suivant la position par rapport à la conique fondamentale de la droite réelle qui contient ce point M_0, nécessairement imaginaire.

---

[20] La résolution de ce problème est du domaine de la théorie des fonctions.

Cette droite $M_0\bar{M}_0$ ne peut être tangente à la conique, car alors la transformation infinitésimale associée à M_0 engendrerait, avec la transformation imaginaire conjuguée, un groupe: il suffit pour le voir de prendre le cas particulier de la tangente $u_2 = u_3$, qui donnerait le sous-groupe engendré par X_1 et $X_2 + X_3$.

Cela posé, deux cas sont possibles, suivant que $M_0\bar{M}_0$ est extérieure à la conique ou la coupe.

51. *Supposons d'abord la droite réelle* $\mathrm{M}_0\bar{\mathrm{M}}_0$ *extérieure à la conique.*

On peut supposer que c'est la droite $u_3 = 0$; le point M_0 a des coordonnées $(1, u, 0)$; mais, par une transformation de G remplaçant respectivement

$$u_1,\ u_2,\ u_3$$

par

$$u_1 \cos\alpha - u_2 \sin\alpha, \quad u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha, \quad u_3,$$

on peut multiplier $\frac{u_1 + iu_2}{u_1 - iu_2} = \frac{1+iu}{1-iu}$ par $e^{2i\alpha}$, ce qui permet de donner à ce rapport une valeur réelle et positive k; on aura alors

$$u = i\frac{1-k}{1+k} = im \qquad (|m| < 1).$$

Le lieu des transformés du point $(1, im, 0)$ est facile à obtenir. En effet, quand on effectue sur u_1, u_2, u_3 une substitution linéaire *réelle* laissant invariante la forme $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$, la forme d'HERMITE $u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 - u_3\bar{u}_3$ est également invariante. On a donc, en tout point de (Σ),

$$\frac{u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 - u_3\bar{u}_3}{|u_1^2 + u_2^2 - u_3^2|} = \frac{1+m^2}{1-m^2}.$$

Le second membre est une constante réelle μ plus grande que 1. En remarquant que toute droite réelle qui coupe la conique fondamentale ne contient aucun point de l'hypersurface, on peut introduire des coordonnées non homogènes

$$\frac{u_2}{u_1} = x, \quad \frac{u_3}{u_1} = y,$$

et on a l'équation

$$1 + x\bar{x} - y\bar{y} = \mu\,|1 + x^2 - y^2|. \tag{15}$$

52. Il importe maintenant de voir si tout point satisfaisant à l'équation (15) fait partie de l'hypersurface (Σ_K). Il est clair d'abord que les points réels de la conique fondamentale satisfont à l'équation (15), mais ne peuvent être transformés du point imaginaire M_0. Nous allons voir que, ces points exclus, l'équation (15) définit *deux* hypersurfaces connexes distinctes.

Remarquons d'abord qu'un point imaginaire satisfaisant à l'équation (15) ne peut être situé sur une droite réelle ayant un point réel sur la conique fondamentale; en effet cette sécante pourrait, par une transformation de G, être ramenée à $x = 0$, et l'égalité

$$1 - y\bar{y} = \mu \,|\, 1 - y^2 \,|$$

est impossible, en vertu de l'inégalité

$$|\, 1 - y^2 \,| > 1 - |\, y^2 \,|.$$

Tout point imaginaire est, d'après cela, le transformé d'un point situé sur une droite réelle extérieure à la conique, qu'on peut supposer $y = 0$, et, d'après le raisonnement fait plus haut, on peut supposer que les coordonnées de ce point sont ($u_1 = 1$, $u_2 = im'$, $u_3 = 0$) ou ($x = im'$, $y = 0$). On aura alors

$$\mu = \frac{1 + m'^2}{1 - m'^2},$$

d'où $m' = \pm m$. *Or on ne peut passer par continuité du point* (1, im, 0) *au point* (1, $-im$, 0).

Pour nous rendre compte nettement de ce résultat important, remarquons que si on exprime les coordonnées d'un point réel de la conique fondamentale en fonctions rationnelles d'un paramètre réel t, par exemple

$$x = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad y = \frac{1 + t^2}{1 - t^2},$$

toute homographie réelle de la conique se traduit par une homographie réelle sur t, et réciproquement. Or les homographies réelles

$$t' = \frac{at + b}{ct + d}$$

forment deux familles distinctes, suivant que $ad - bc$ est > 0 ou < 0.

Cela posé, la polaire du point (1, im, 0), à savoir $1 + imx = 0$, coupe la conique fondamentale aux deux points donnés par

$$1 - t^2 + 2imt = 0,$$

d'où

$$t = im \pm \sqrt{1 - m^2};$$

au contraire les points où la polaire du point (1, $-im$, 0) coupe la conique sont

$$t = -im \pm \sqrt{1 - m^2}.$$

Or, les transformations homographiques réelles à déterminant $ad - bc > 0$ effectuées sur t conservent le signe du coefficient de i. Cela suffit pour prouver qu'aucune transformation du groupe connexe ne permet de passer du point $(1, im, 0)$ au point $(1, -im, 0)$.

53. L'hypersurface (Σ) lieu des transformés du point $(1, im, 0)$ s'obtient donc en ajoutant à l'équation (15) une inégalité qui exprime que la partie imaginaire des valeurs de t correspondant aux points de contact des tangentes menées à la conique fondamentale est d'un signe donné, positive per exemple. Ces valeurs de t sont racines de l'équation

$$1 - t^2 + 2xt - y(1 + t^2) = 0; \tag{16}$$

la somme des deux racines est $\frac{2x}{1+y}$. L'hypersurface (Σ_K) est donc définie par

$$(\Sigma_K) \qquad \begin{cases} 1 + x\bar{x} - y\bar{y} = \mu \mid 1 + x^2 - y^2 \mid, \\ x(1 + \bar{y}) - \bar{x}(1 + y) > 0. \end{cases}$$

On remarquera que *le plus grand groupe pseudo-conforme de* (Σ_K) *est connexe,* les tranformations homographiques sur t de déterminant $ad - bc < 0$ changeant (Σ_K) en une hypersurface distincte. Mais chaque point de (Σ_K) est invariant par une transformation non identique du groupe, celle qui échange entre elles les deux racines de (16).

54. Arrivons maintenant à la détermination des hypersurfaces localement équivalentes à (Σ_K). Toutes ces hypersurfaces sont des variétés de recouvrement de (Σ_K), puisqu'à chaque point d'une telle hypersurface est associée une transformation infinitésimale imaginaire déterminée de (G_K), c'est-à-dire un point déterminé de (Σ_K).

On en obtient immédiatement une par un procédé géométrique simple, en faisant correspondre à tout point (x, y) de (Σ_K) l'ensemble des deux valeurs de t, racines de (16), qui définissent les points d'intersection de la conique fondamentale avec la polaire de (x, y). Nous pouvons ordonner de deux manières différentes ces deux valeurs de t, que nous désignerons par ξ et η, et nous aurons ainsi une hypersurface recouvrant deux fois (Σ_K). On a

$$\xi + \eta = \frac{2x}{1+y}, \quad \xi\eta = \frac{y-1}{y+1},$$

d'où

$$x = \frac{\xi + \eta}{1 - \xi\eta}, \quad y = \frac{1 + \xi\eta}{1 - \xi\eta}.$$

On obtient ainsi, dans le demi-plan de POINCARÉ, un couple ordonné de points (ξ, η) dont la distance *non euclidienne* δ reste évidemment constante quand on effectue sur ξ et η une même homographie réelle à déterminant positif ([21]). L'équation de la nouvelle hypersurface (Σ'_K) est donc ([22]), en remarquant qu'elle contient le point

$$\xi = im + \sqrt{1-m^2}, \quad \eta = im - \sqrt{1-m^2},$$

soit

$$(\Sigma'_K) \qquad (\xi-\eta)(\bar\xi-\bar\eta) + sh^2\frac{\delta}{2}(\xi-\bar\xi)(\eta-\bar\eta) = 0 \qquad \left(\frac{\xi-\bar\xi}{i}>0\right),$$

soit

$$(\Sigma'_K) \qquad (\xi-\bar\eta)(\bar\xi-\eta) + ch^2\frac{\delta}{2}(\xi-\bar\xi)(\eta-\bar\eta) = 0 \qquad \left(\frac{\xi-\bar\xi}{i}>0\right),$$

soit enfin

$$(\Sigma'_K) \qquad (\xi-\bar\eta)(\bar\xi-\eta) - (\xi-\bar\xi)(\eta-\bar\eta) = \mu(\xi-\eta)(\bar\xi-\bar\eta) \qquad \left(\frac{\xi-\bar\xi}{i}>0\right).$$

Cette dernière équation peut se déduire directement de (15). On a du reste

$$sh\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} \quad \text{ou} \quad ch\frac{\delta}{2} = \frac{1}{m},$$

d'où

$$\mu = \frac{1+ch^2\frac{\delta}{2}}{sh^2\frac{\delta}{2}}.$$

55. On peut enfin arriver à une hypersurface simplement connexe en posant

$$\xi = X + e^Y, \quad \eta = X - e^Y,$$

d'où

$$4e^{Y+\bar Y} - sh^2\frac{\delta}{2}(e^Y - e^{\bar Y})^2 + sh^2\frac{\delta}{2}(X-\bar X)^2 = 0 \qquad \left(\frac{X-\bar X}{i}>0\right),$$

ou encore, en séparant les parties réelles et imaginaires,

$$(\Sigma''_K) \qquad X_2 = e^{Y_1}\sqrt{\sin^2 Y_2 + \frac{1}{sh^2\frac{\delta}{2}}} = e^{Y_1}\sqrt{\frac{\mu-\cos 2Y_2}{2}}.$$

([21]) Cette hypersurface a été rencontrée par E. et H. CARTAN (« Comptes-Rendus », 192, 1931, p. 710). Voir HENRI CARTAN. *Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés* (« Math. Annales », 106, 1932, pp. 540-573).

([22]) On applique la formule

$$sh\frac{\delta}{2} = \frac{d}{2\sqrt{yy'}},$$

d désignant la distance euclidienne des deux points de coordonnées rectangulaires (x, y) et (x', y'). Voir E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie projective complexe* (Paris, Gauthier-Villars, 1931, p. 85).

Sous cette forme, l'équation montre que l'hypersurface est simplement connexe, puisque chacun de ses points est défini analytiquement par la donnée de trois nombres réels finis X_1, Y_1, Y_2.

Les équations du groupe G sont ici

$$(17) \qquad X' = \frac{(aX+b)(cX+d) - ace^{2Y}}{(cX+d)^2 - c^2e^{2Y}}, \quad Y' = Y - \log\{(cX+d)^2 - c^2e^{2Y}\};$$

elles sont régulières en tout point de (Σ''_K), le dénominateur de X' ne pouvant s'annuler que si l'on a

$$cX_2 = ce^{Y_1}\sin Y_2, \quad \text{d'où } c = 0, \quad \text{et par suite } d = 0;$$

mais cela est incompatible avec la relation $ad - bc = 1$.

56. On peut maintenant de (Σ''_K) déduire toutes les hypersurfaces du type (K) qui sont variétés de recouvrement de (Σ_K). Le groupe de connexion proprement discontinu qui caractérise l'une quelconque d'entre elles doit laisser invariantes les deux quantités $\xi + \eta = 2X$, $\xi\eta = X^2 - e^{2Y}$. On a donc

$$(18) \qquad X' = X, \quad Y' = Y + ni\pi \qquad (n \text{ entier}).$$

Inversement, toute transformation de cette nature laisse invariante (Σ''_K), ainsi que chacune des transformations du groupe (17) de (Σ''_K). Le groupe cherché est donc de la forme

$$X' = X, \quad Y' = Y + nhi\pi \quad (h \text{ entier fixe positif}, n \text{ entier variable}).$$

En posant alors

$$X = x, \quad e^{\frac{2Y}{h}} = y \qquad (y \neq 0),$$

on obtient l'équation

$$sh^2\frac{\delta}{2}(x-\bar{x})^2 - sh^2\frac{\delta}{2}(y^h + \bar{y}^h) + 2\left(1 + ch^2\frac{\delta}{2}\right)(y\bar{y})^{\frac{h}{2}} = 0 \qquad \left(\frac{x-\bar{x}}{i} > 0\right),$$

ou encore, en introduisant les parties réelles et imaginaires,

$$(\Sigma'''_K) \qquad y_1^h - C_h^2 y_1^{h-2}y_2^2 + \ldots + 2x_2^2 = \mu(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{h}{2}} \qquad (x_2 > 0).$$

On retrouve (Σ_K), sous une autre forme analytique, en prenant $h = 1$.

57. Nous avons vu que l'hypersurface simplement connexe (Σ''_K) admettait le groupe connexe (17). Il est facile de voir qu'elle admet une autre famille connexe de transformations pseudo-conformes, à savoir celles qu'on obtient en combinant les transformations (17) avec la transformation

$$X' = X, \quad Y' = Y + i\pi,$$

qui ne rentre pas dans les formules (17). On obtient ainsi toutes les transformations pseudo-conformes de (Σ''_K), car si S est une quelconque de ces transformations, elle donne sur (Σ_K) une transformation pseudo-conforme déterminée qui produit sur (Σ_K) le même effet qu'une des transformations (17), puisque le groupe de (Σ_K) est connexe; par suite il existe une transformation de la même famille connexe que S qui laisse invariants tous les points de (Σ_K) et est donc de la forme (18). Or la transformation correspondant à $n=2$ fait partie des transformations (17); on peut donc supposer $n=1$, ce qu'il fallait démontrer.

De ce qui précède on déduit que le groupe pseudo-conforme de (Σ'''_K) est connexe pour h impair, formé de deux familles connexes pour h pair. En effet, dans la famille connexe de transformations de (Σ''_K) qui ne contient pas la transformation identique, se trouve, si h est impair, la transformation

$$X' = X, \quad Y' = Y + hi\pi$$

qui laisse invariants tous les points de (Σ'''_K); au contraire, si h est pair, aucune des transformations

$$X' = X, \quad Y' = Y + ni\pi \qquad (n \text{ impair})$$

ne laisse fixes les points de (Σ'''_K).

XIII. Les hypersurfaces du type (K) : deuxième espèce.

58. On aura une deuxième espèce d'hypersurfaces du type (K) en prenant, dans le plan de la conique fondamentale

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0,$$

un point imaginaire situé sur une sécante réelle de la conique et le lieu des transformés de ce point par le groupe homographique réel connexe G de cette conique. On peut supposer que cette sécante est $u_2 = 0$; mais, comme les transformations de G permettent de multiplier $\frac{u_1 - u_3}{u_1 + u_3}$ par un facteur réel et positif arbitraire, on peut supposer que cette quantité est de module 1, ce qui revient à dire que $\frac{u_1}{u_3}$ est purement imaginaire. La quantité u_3 ne pouvant s'annuler pour aucun point de l'hypersurface, nous poserons

$$\frac{u_1}{u_3} = x, \quad \frac{u_2}{u_3} = y.$$

Cherchons donc le lieu des transformés du point $(x = im,\ y = 0)$. On a

pour ce point
$$x\bar{x}+y\bar{y}-1=m^2-1, \quad |x^2+y^2-1|=m^2+1.$$
Tous les points de l'hypersurface satisfont donc à l'équation
$$x\bar{x}+y\bar{y}-1=\mu\,|x^2+y^2-1|, \tag{19}$$
avec
$$\mu=\frac{m^2-1}{m^2+1}, \quad -1<\mu<1.$$

Naturellement il ne faut conserver que les point *imaginaires* satisfaisant à l'équation (19). Mais, réciproquement, tout point imaginaire satisfaisant à (19) est situé sur une droite réelle qui ne peut être extérieure à la conique, sans quoi μ serait plus grand que 1. Cette droite, étant sécante, est la transformée, par une transformation de G, de $y=0$; le point considéré est donc le transformé d'un point ($x=im'$, $y=0$) et on a par suite
$$\frac{m'^2-1}{m'^2+1}=\frac{m^2-1}{m^2+1}, \quad m'=\pm m.$$

Mais ici le point ($x=-im$, $y=0$) est transformé du point ($x=im$, $y=0$), par la transformation
$$x'=-x, \quad y'=-y$$
qui fait partie du sous-groupe *continu*
$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha, \quad y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha$$
de G. Par suite, *l'hypersurface cherchée* ($\Sigma_{K'}$) *est le lieu des points imaginaires satisfaisant à* (19).

Un cas particulier remarquable est le cas $\mu=0$. *On a dans ce cas le lieu des points imaginaires de l'hyperconique* $\mathrm{x}\bar{\mathrm{x}}+\mathrm{y}\bar{\mathrm{y}}=1$, c'est-à-dire l'hyperconique privée de la ligne à une dimension, lieu de ses point réels.

59. On pourrait aussi considérer les points de la conique fondamentale situés sur la polaire d'un point variable de l'hypersurface, donnés paramétriquement par l'équation
$$(1-t^2)x+2ty-(1+t^2)=0.$$
En particulier le point ($x=im$, $y=0$) conduit aux deux valeurs de t:
$$\xi=\sqrt{\frac{im-1}{im+1}}, \quad \eta=-\sqrt{\frac{im-1}{im+1}}.$$
En regardant ξ et η comme les affixes de deux points, on a un couple de points situés l'un dans le demi-plan positif, l'autre dans le demi-plan négatif

de POINCARÉ. La distance non euclidienne δ du premier point au conjugué du second est donnée par

$$sh\frac{\delta}{2} = m.$$

On obtient ainsi l'hypersurface

$$(\xi - \bar{\eta})(\bar{\xi} - \eta) - m^2(\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) = 0 \qquad \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{i} > 0\right), \tag{20}$$

équivalente à $(\Sigma_{K'})$, parce que le couple (η, ξ) ne peut pas se déduire par continuité du couple (ξ, η).

L'hypersurface $(\Sigma_{K'})$ admet un groupe mixte formé de deux familles connexes de transformations pseudo-conformes, la seconde famille s'obtenant par composition des transformations de la première famille avec la symétrie

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

Dans le cas de l'hypersurface (20), cette symétrie s'écrit

$$\xi' = -\eta, \quad \eta' = -\xi,$$

de sorte que les deux familles de transformations sont

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad \eta' = \frac{a\eta + b}{c\eta + d} \qquad (ad - bc > 0),$$

et

$$\xi' = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \quad \eta' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d} \qquad (ad - bc < 0).$$

Nous ne traiterons pas le problème de la recherche des hypersurfaces localement équivalentes à $(\Sigma_{K'})$ et appartenant au même type. Contentons-nous de remarquer qu'on a une hypersurface simplement connexe en regardant le produit topologique des deux demi-plans de POINCARÉ (ξ) et (η) comme formé d'une infinité de feuillets, le passage de l'un à l'autre se faisant par la coupure $\eta_1 = \xi_1$, $-\eta_2 < \xi_2$, où l'on a posé $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$: l'hypersurface (20) devient alors simplement connexe; *la surface de ramification $\eta = \bar{\xi}$ n'est pas caractéristique.*

XIV. Les hypersurfaces du type (L).

60. Les équations de structure sont ici

$$(X_1X_2) = X_3, \quad (X_2X_3) = X_1, \quad (X_3X_1) = X_2.$$

Le groupe adjoint est le groupe homographique réel de la *conique fondamentale*

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0.$$

L'hypersurface cherchée est le lieu des transformés d'un point imaginaire particulier, qu'on peut supposer situé sur la droite $u_3 = 0$, et dont on peut ramener les coordonnées homogènes aux valeurs $(1, im, 0)$, avec $|m| < 1$. On a alors l'équation

$$(\Sigma_L) \qquad u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + u_3\bar{u}_3 = \mu\,|u_1^2 + u_2^2 + u_3^2| \qquad \left(\mu = \frac{1+m^2}{1-m^2} > 1\right).$$

Tout point vérifiant l'équation précédente peut réciproquement être regardé comme le transformé de l'un des points $(1, \pm im, 0)$. Mais le point $(1, -im, 0)$ est lui-même le transformé de $(1, im, 0)$ par la transformation

$$u_1' = u_1, \quad u_2' = -u_2, \quad u_3' = -u_3,$$

qui fait partie d'un sous-groupe continu de G.

Le groupe des homographies de la conique fondamentale, et par suite celui de (Σ_L), ne contient qu'une famille connexe de transformations. En effet, toute homographie de la conique peut être ramenée à une substitution linéaire orthogonale de déterminant 1; il y a donc correspondance biunivoque entre ces homographies et les rotations de la sphère, qui forment une seule famille connexe.

61. On peut avoir une variété de recouvrement de (Σ_L) en introduisant le paramètre t des points de la conique fondamentale, défini par les équations

$$u_1 = 1 - t^2, \quad u_2 = i(1 + t^2), \quad u_3 = 2t.$$

Par ce choix du paramètre, deux points imaginaires conjugués de la conique ont leurs paramètres t et t' liés par la relation

$$t' = \frac{1}{\bar{t}}.$$

Cela posé, les transformations de G se traduisent analytiquement par les transformations homographiques sur t de la forme

$$(21) \qquad t' = \frac{at - b}{\bar{b}t + \bar{a}}, \quad \text{avec} \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1.$$

La polaire du point $(1, im, 0)$ rencontre la conique fondamentale en deux points donnés par

$$1 - t^2 - m(1 + t^2) = 0, \quad \text{ou} \quad t^2 = \frac{1-m}{1+m}.$$

Représentons chaque valeur de t par un point de la sphère de Riemann, de telle sorte que deux points diamétralement opposés correspondent à deux valeurs t et $-\frac{1}{\bar{t}}$, en prenant, par exemple, pour coordonnées rectangulaires

X, Y, Z d'un point de la sphère,

$$X = \frac{t+\bar{t}}{1+t\bar{t}}, \quad Y = \frac{i(t-\bar{t})}{1+t\bar{t}}, \quad Z = \frac{1-t\bar{t}}{1+t\bar{t}}.$$

Les transformations (21) définissent alors les rotations de la sphère, qui ne changent pas la distance élémentaire de deux points. Pour les deux points $\pm\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}$, cette distance δ, comptée sur la sphère, est donnée par

$$\cos\frac{\delta}{2} = m.$$

On obtient ainsi comme variété de recouvrement de (Σ_L) *l'hypersurface* (Σ'_L) *lieu des couples ordonnés* (ξ, η) *de points de la sphère de Riemann situés à une distance constante* δ *l'un de l'autre.*

L'équation de (Σ'_L) est

$$(\Sigma'_L) \qquad (\xi-\eta)(\bar{\xi}-\bar{\eta}) = \operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}(1+\xi\bar{\eta})(1+\eta\bar{\xi});$$

elle pourrait se déduire directement de l'équation de (Σ_L) en posant

$$u_1 = 1 - \xi\eta, \quad u_2 = i(1+\xi\eta), \quad u_3 = \xi + \eta.$$

62. L'hypersurface (Σ'_L) n'est pas simplement connexe. En effet elle est, au point de vue de l'Analysis situs, homéomorphe à la variété représentative des rotations de la sphère, puisque tout point de (Σ'_L) se déduit d'un point particulier par une rotation et une seule. Or le groupe des rotations de la sphère n'est pas simplement connexe; il admet un groupe de recouvrement simplement connexe, qui le recouvre deux fois, à savoir le groupe

$$\begin{aligned} u' &= au - bv \\ v' &= \bar{b}u + \bar{a}v \end{aligned} \qquad (a\bar{a} + b\bar{b} = 1).$$

Nous laisserons de côté la question de savoir s'il existe une hypersurface simplement connexe du type (L): elle recouvrirait deux fois (Σ'_L) et quatre fois (Σ_L).

XV. Les hypersurfaces qui admettent globalement un groupe à plus de trois paramètres.

63. Comme nous le verrons plus loin, et comme cela résulte des travaux de A. TRESSE [1], une hypersurface qui admet localement un groupe pseudo-conforme à plus de trois paramètres admet localement un groupe à 8 paramètres, localement semblable au groupe homographique d'une hyperconique.

Par suite *si une hypersurface admet globalement un groupe à plus de trois paramètres, ce sous-groupe est isomorphe à un sous-groupe du groupe à 8 paramètres de l'hyperconique.*

Or, les seuls groupes homographiques du plan à paramètres complexes qui ne laissent invariant ni un point, ni une droite sont les groupes à trois paramètres qui laissent invariante une conique et le groupe homographique général à 8 paramètres [23]. Par conséquent tout sous-groupe à plus de trois paramètres réels du groupe de l'hyperconique laisse invariant un point ou une droite. D'autre part, s'il laisse invariante une droite, il laisse aussi invariant un point, à savoir le pôle de la droite par rapport à l'hyperconique; dans tous les cas il y a donc au moins un point invariant.

1° Si ce point est sur l'hyperconique, nous avons vu qu'il a au plus 5 paramètres, auquel cas c'est le groupe (10) (n. 35); s'il a moins de 5 paramètres, c'est un de ses sous-groupes. Dans le premier cas, l'hyperconique privée du point invariant est simplement connexe et nous avons vu qu'alors il n'y avait pas d'autre hypersurface admettant le même groupe. Dans le second cas, le groupe est à 4 paramètres; l'hypersurface cherchée admet pour hypersurface de recouvrement l'hyperconique privée d'un point et le groupe de connexion correspondant doit laisser invariante chaque transformation du groupe à 4 paramètres. Or les méthodes de S. Lie montrent que tout sous-groupe à 4 paramètres du groupe (10) est engendré par les transformations infinitésimales

$$\begin{aligned}(m+in)x\frac{\partial f}{\partial x}+2my\frac{\partial f}{\partial y},\\ \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\,ix\frac{\partial f}{\partial y},\\ i\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\,x\frac{\partial f}{\partial y},\\ \frac{\partial f}{\partial y},\end{aligned}$$

où m et n désignent deux constantes réelles. Toute transformation qui laisse invariantes les trois dernières transformations infinitésimales est de la forme

$$x'=x,\quad y'=y+h;$$

elle ne peut laisser invariante la première que si $m=0$. On retombe alors sur l'hypersurface (Σ'_A) du n. 34, avec le groupe (11) (n. 35).

2° Si le point invariant n'est pas sur l'hyperconique, le groupe est à 4 paramètres et on retrouve les hypersurfaces des types (B), (C) et (D).

---

[23] S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen* [17], III, p. 94.

Toutes les hypersurfaces admettant globalement un groupe à plus de 3 paramètres ont donc déjà été obtenues.

XVI. Résumé général.

63.bis *Si une hypersurface admettant un groupe pseudo-conforme transitif est localement équivalente à l'hypersphère, elle est globalement équivalente à l'une des hypersurfaces suivantes:*

1°		$x\bar{x} + y\bar{y} = 1$ (hypersphère);
2°	(A)	$\frac{y-\bar{y}}{2i} = x\bar{x}$ (hypersphère privée d'un point);
3°	(A)	$y\bar{y} = e^{x\bar{x}}$;
4°	(B)	$\frac{y-\bar{y}}{2i} = e^{\frac{x-\bar{x}}{2i}}$;
5°	(B)	$x\bar{x} + (y\bar{y})^m = 1$ avec $y \neq 0$ $(m > 0)$;
6°	(D)	$y\bar{y}(1 + x\bar{x})^n = 1$ (n entier positif);
7°	(E)	$\frac{y-\bar{y}}{2i} = \left(\frac{x-\bar{x}}{2i}\right)^2$ avec $\frac{x-\bar{x}}{2i} > 0$;
8°	(K')	Hypersphère privée de ses points réels (ou l'une de ses variétés de recouvrement).

La première admet un groupe à 8 paramètres, la seconde un groupe à 5 paramètres; les quatre suivantes un groupe à 4 paramètres, les deux dernières un groupe à 3 paramètres.

Si une hypersurface admettant un groupe pseudo-conforme transitif n'est pas localement équivalente à l'hypersphère, elle est globalement équivalente à l'une des hypersurfaces suivantes ou à l'une de leurs variétés de recouvrement:

1°	(E)	$\frac{y-\bar{y}}{2i} = \left(\frac{x-\bar{x}}{2i}\right)^m$, avec $\frac{x-\bar{x}}{2i} > 0$ $(\lvert m\rvert \geq 1,\ m \neq 1, 2)$;
2°	(F)	$\frac{y-\bar{y}}{2i} = e^{\frac{x-\bar{x}}{y-\bar{y}}}$;
3°	(H)	$(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + 4e^{2m \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\bar{x}}{y-\bar{y}}} = 0$;
4°	(K)	$1 + x\bar{x} - y\bar{y} = \mu\lvert 1 + x^2 - y^2\rvert$, avec $\frac{x(1+\bar{y}) - \bar{x}(1+y)}{i} > 0$ $(\mu > 1)$;
5°	(K')	$x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = \mu\lvert x^2 + y^2 - 1\rvert$, sauf les point réels $(\lvert\mu\rvert < 1,\ \mu \neq 0)$;
6°	(L)	$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = \mu\lvert x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3\rvert$ $(\mu > 1)$.

CHAPITRE III.

Les invariants pseudo-conformes d'une hypersurface.

I. Position du problème.

64. Il est entendu que les hypersurfaces que nous allons considérer dans ce Chapitre seront analytiques et ne seront pas des hyperplanoïdes. Nous pouvons écrire l'équation d'une telle hypersurface sous la forme

$$F(x,\ y;\ \bar{x},\ \bar{y}) = 0, \tag{1}$$

F étant une fonction analytique de ses quatre arguments, qui sera réelle quand on donnera à $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les valeurs complexes conjuguées de celles qui seront attribuées à x et y. Remarquons que les dérivées partielles F_x et $F_{\bar{x}}$, F_y et $F_{\bar{y}}$ sont alors complexes conjuguées.

L'équation de Pfaff

$$i(F_x dx + F_y dy) = 0, \tag{2}$$

dont le premier membre est réel quand le point $(x,\ y)$ est sur l'hypersurface et quand $dx,\ dy$ se rapportent à un déplacement infiniment petit sur cette hypersurface, représente l'élément plan caractéristique tangent à l'hypersurface au point considéré (n. 13). Elle a une signification intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de tout changement analytique de variables portant sur x et y.

Si nous exprimons les coordonnées x et y d'un point de l'hypersurface en fonctions analytiques de trois paramètres réels $u,\ v,\ w$, le premier membre de l'équation (2) devient une expression de Pfaff réelle

$$\omega \equiv A du + B dv + C dw, \tag{3}$$

$A,\ B,\ C$ étant des fonctions analytiqnes réelles de $u,\ v,\ w$.

Introduisons en même temps, dans le cas $F_y \neq 0$, la différentielle dx, qui s'exprime sous la forme

$$dx = \omega_1 \equiv (P + iP_1)du + (Q + iQ_1)dv + (R + iR_1)dw. \tag{4}$$

65. Considérons une seconde hypersurface

$$\Phi(x',\ y';\ \bar{x}',\ \bar{y}') = 0,$$

équivalente à la précédente; exprimons $x',\ y'$ en fonctions analytiques de trois paramètres réels $u',\ v',\ w'$ et désignons par $\tilde{\omega}$ et $\tilde{\omega}_1$ les formes analogues à ω et ω_1. Comme les éléments plans caractéristiques tangents des deux hypersurfaces se correspondent, on aura, par la correspondance pseudo-conforme qui est censée exister entre les deux hypersurfaces,

$$\tilde{\omega} = \rho\omega, \tag{5}$$

ρ étant une fonction analytique réelle de u, v, w; on aura d'autre part

$$dx' = \alpha dx + \beta dy,$$

ou

$$\tilde{\omega}_1 = \lambda\omega_1 + \mu\omega, \tag{6}$$

λ et μ étant des fonctions analytiques complexes de u, v, w.

Réciproquement, supposons que par une correspondance ponctuelle analytique convenable entre les deux hypersurfaces, on ait des relations de la forme (5) et (6); x' et y' deviennent des fonctions analytiques des variables réelles u, v, w, et l'on a, d'après (5) et (6), des relations de la forme

$$dx' = \alpha dx + \beta dy,$$
$$dy' = \gamma dx + \delta dy.$$

La première montre que le déterminant fonctionnel de x', x, y est une fonction analytique de u, v, w qui s'annule en tous les points de la première hypersurface, c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles des variables: elle est donc identiquement nulle et, par suite, si l'on regarde x, y, x' comme des fonctions analytiques des trois variables *complexes* u, v, w, la quantité x' est une fonction analytique de x, y; il en est de même de y'. Il existe donc une transformation pseudo-conforme faisant passer de la première hypersurface à la seconde et réalisant entre elles deux la correspondance ponctuelle donnée.

On peut ajouter que, cette correspondance ponctuelle étant fixée, la transformation pseudo-conforme est unique. Dans le cas contraire en effet, en désignant par

$$x' = \varphi(x, y), \quad \text{et} \quad x' = \varphi_1(x, y),$$
$$y' = \psi(x, y), \quad « \quad y' = \psi_1(x, y),$$

deux transformations distinctes répondant aux conditions voulues, la fonction $\varphi(x, y) - \varphi_1(x, y)$, nulle en tous les points de la première hypersurface, serait identiquement nulle.

66. On peut compléter le résultat précédent en remarquant que la donnée de trois formes de Pfaff analytiques $\omega, \omega_1, \overline{\omega}_1$ linéairement indépendantes en du, dv, dw, la première réelle, les deux dernières imaginaires conjuguées, définit toujours une hypersurface ou plutôt une classe d'hypersurfaces équivalentes. En effet les équations

$$\omega = 0, \quad \omega_1 = 0 \tag{7}$$

peuvent être considérées comme un système de deux équations différentielles du premier ordre entre les trois variables complexes u, v, w. Soit x, y un système d'*intégrales premières* indépendantes de ces équations: ce sont des fonctions analytiques de u, v, w:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(u, v, w), \\ y = g(u, v, w). \end{array} \right. \tag{8}$$

En donnant maintenant à u, v, w des valeurs réelles, les équations (8) définissent une hypersurface

$$F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = 0. \tag{9}$$

On a d'autre part des identités de la forme

$$\omega \equiv \alpha dx + \beta dy, \quad \omega_1 \equiv \gamma dx + \delta dy. \tag{10}$$

La forme ω est réelle quand on donne à u, v, w, du, dv, dw des valeurs réelles, c'est-à-dire quand on se déplace sur l'hypersurface. On a par suite entre dx, dy, $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, quand on se place en un point de l'hypersurface, une relation *identique* de la forme

$$\alpha dx + \beta dy - (\bar{\alpha} d\bar{x} + \bar{\beta} d\bar{y}) \equiv \sigma i (F_x dx + F_y dy + F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y}),$$

d'où

$$\omega = \alpha dx + \beta dy = \sigma i (F_x dx + F_y dy),$$

σ étant évidemment réel.

La seconde relation (10) montre d'autre part que ω_1 est une combinaison linéaire de dx et de $i(F_x dx + F_y dy)$. Par suite les formes associées à l'hypersurface (9) suivant le procédé exposé au n. 2 sont, la première un multiple de la forme ω donnée, la seconde une combinaison linéaire des formes ω_1 et ω données.

Si on avait choisi deux autres intégrales premières indépendantes x' et y' des équations (7), on aurait eu une transformée pseudo-conforme de l'hypersurface (9).

Si l'on se limite, ce que nous ferons désormais, aux hypersurfaces qui ne sont pas des hyperplanoïdes, la forme réelle ω doit être choisie de telle sorte que l'équation $\omega = 0$ ne soit pas complètement intégrable.

REMARQUE. — Si l'on écrit l'équation $\omega \equiv \alpha dx + \beta dy = 0$ sous la forme $dy - y'dx = 0$, le système $\omega = \omega_1 = 0$ prend la forme $dy - y'dx = 0$, $dy' - \psi(x, y, y')dx = 0$; on retrouve ainsi les surfaces caractéristiques associées comme intégrales de l'équation $y'' = \psi(x, y, y')$.

67. Le problème de l'équivalence de deux hypersurfaces peut maintenant s'énoncer de la manière suivante.

PROBLÈME. — *Etant données d'une part trois formes de Pfaff*

$$\begin{aligned}\omega &= Adu + Bdv + Cdw,\\ \omega_1 &= (P + iP_1)du + (Q + iQ_1)dv + (R - iR_1)dw,\\ \bar{\omega}_1 &= (P - iP_1)du + (Q - iQ_1)dv + (R - iR_1)dw,\end{aligned}$$

linéairement indépendantes, la première réelle, les deux dernières imaginaires conjuguées, à coefficients fonctions analytiques des variables réelles u, v, w, *l'équation* $\omega = 0$ *n'étant pas complètement intégrable;*

d'autre part trois formes analogues

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= A'du' + B'dv' + C'dw',\\ \tilde{\omega}_1 &= (P' + iP_1')du' + (Q' + iQ_1')dv' + (R' + iR_1')dw',\\ \bar{\tilde{\omega}}_1 &= (P' - iP_1')du' + (Q' - iQ_1')dv' + (R' - iR_1')dw',\end{aligned}$$

construites avec les variables u', v', w';

reconnaître s'il existe une transformation analytique réelle faisant passer des variables u, v, w *aux variables* u', v', w' *et telle que, par cette transformation, on ait des identités de la forme*

$$\tilde{\omega} \equiv \gamma\omega, \quad \tilde{\omega}_1 \equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega, \tag{11}$$

γ, α, β *étant des fonctions analytiques, dont la première réelle, de* u, v, w.

C'est un cas particulier d'un problème que j'ai traité d'une manière générale [5].

68. Nous allons transformer le problème. Considérons les relations (11). Introduisons deux séries de variables auxiliaires

$$\rho, \lambda, \mu \quad \text{et} \quad \rho', \lambda', \mu',$$

les variables ρ et ρ' étant réelles, les autres complexes, et posons

$$\begin{aligned}\Omega &= \rho\omega, \quad \Omega_1 = \lambda(\omega_1 + \mu\omega);\\ \Pi &= \rho'\tilde{\omega}, \quad \Pi_1 = \lambda'(\tilde{\omega}_1 + \mu'\tilde{\omega}).\end{aligned}$$

Il est clair que les identités

$$\Pi \equiv \Omega, \quad \Pi_1 \equiv \Omega_1 \tag{12}$$

peuvent être résolues en prenant pour u', v', w' les fonctions de u, v, w qui réalisent les identités (11) et en posant

$$\rho' = \frac{1}{\gamma}\rho, \quad \lambda' = \frac{1}{\alpha}\lambda, \quad \mu' = \frac{\alpha\mu - \beta}{\gamma}.$$

Si les deux hypersurfaces sont équivalentes, il est donc possible de réaliser les identités (12) en prenant pour u', v', w', λ', μ', ρ' des fonctions analytiques convenablement choisies de u, v, w, λ, μ, ρ.

Réciproquement, supposons qu'on puisse trouver des fonctions analytiques u', v', w', λ', μ', ρ' de u, v, w, λ, μ, ρ réalisant les identités (12). On aura alors des identités de la forme (11); par suite du', dv', dw' seront des combinaisons linéaires de du, dv, dw, de sorte que les identités (11) seront réalisées par une transformation analytique faisant passer des variables u, v, w aux variables u', v', w'. Les deux hypersurfaces seront donc équivalentes.

Nous pouvons donc dire *en un certain sens*, grâce à l'introduction des variables auxiliaires nouvelles λ, μ, ρ, que les formes Ω, Ω_1, $\overline{\Omega}_1$ sont invariantes par toute transformation pseudo-conforme.

69. Revenons aux formes de PFAFF initiales ω, ω_1, $\overline{\omega}_1$. Nous allons les soummettre à une condition qui ne restreindra en rien la généralité du problème. Le covariant bilinéaire [24] ω' n'est pas nul, en tenant compte de $\omega = 0$, puisque cette dernière équation n'est pas complètement intégrable; on a une relation de la forme

$$\omega' = ia[\omega_1\overline{\omega}_1] + b[\omega\omega_1] + \bar{b}[\omega\overline{\omega}_1], \tag{13}$$

le coefficient a n'étant pas nul. Quand on remplace ω_1 par $\alpha\omega_1$ et ω par $\gamma\omega$, ce coefficient a, comme on le voit immédiatement, est multiplié par $\frac{\gamma}{\alpha\bar{\alpha}}$; on peut donc toujours s'arranger pour qu'il soit égal à 1. Si ces conditions sont réalisées pour les formes ω, ω_1, $\overline{\omega}_1$ d'une part, pour les formes $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_1$, $\overline{\tilde{\omega}}_1$ d'autre part, les identités (11) prennent la forme

$$\tilde{\omega} \equiv \alpha\bar{\alpha}\omega, \quad \tilde{\omega}_1 \equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega;$$

au lieu d'introduire trois variables auxiliaires ρ, λ, μ, il suffira alors d'en introduire deux, λ et μ, en posant

$$\Omega = \lambda\bar{\lambda}\omega, \quad \Omega_1 = \lambda(\omega_1 + \mu\omega). \tag{14}$$

([24]) Voir, pour la notion de covariant linéaire et le calcul extérieur, E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, Hermann, 1922).

Supposons par exemple qu'on prenne

$$\omega_1 = dx;$$

on aura

$$\omega = ik(F_x dx + F_y dy) = -ik(F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y}),$$

k étant un facteur réel que nous allons déterminer. Le calcul de ω' donne

$$\omega' = \left[\frac{dk}{k}\,\omega\right] + ik\,\{\, F_{x\bar{x}}[d\bar{x}\, dx] + F_{x\bar{y}}[d\bar{y}\, dx] + F_{y\bar{x}}[d\bar{x}\, dy] + F_{y\bar{y}}[d\bar{y}\, dy]\,\}.$$

On peut exprimer dy en fonction linéaire de dx et ω:

$$dy = -\frac{F_x}{F_y}\,dx + \frac{1}{ikF_y}\,\omega,$$

et de même

$$d\bar{y} = -\frac{F_{\bar{x}}}{F_{\bar{y}}}\,d\bar{x} - \frac{1}{ikF_{\bar{y}}}\,\omega;$$

en remplaçant et supprimant les termes qui contiennent ω, on trouve

$$i = -ik\,\frac{F_{x\bar{x}}F_y F_{\bar{y}} + F_{y\bar{y}}F_x F_{\bar{x}} - F_{x\bar{y}}F_y F_{\bar{x}} - F_{y\bar{x}}F_x F_{\bar{y}}}{F_y F_{\bar{y}}} = -ik\,\frac{L(F)}{F_y F_{\bar{y}}},$$

$L(F)$ étant l'expression de E. E. LEVI. Nous poserons donc

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega = -i\,\frac{F_y F_{\bar{y}}}{L(F)}\,(F_x dx + F_y dy) = i\,\frac{F_y F_{\bar{y}}}{L(F)}\,(F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y}),\\ &\omega_1 = dx, \quad \bar{\omega}_1 = d\bar{x}.\end{aligned}\right.$$

70. Les formes ω, ω_1, $\bar{\omega}_1$ étant ainsi choisies, nous aurons

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega' = i[\omega_1\bar{\omega}_1] + b[\omega\omega_1] + \bar{b}[\omega\bar{\omega}_1],\\ &\omega'_1 = 0,\\ &\bar{\omega}'_1 = 0.\end{aligned}\right.$$

Introduisons la convention d'écriture suivante. f étant une fonction de point sur l'hypersurface, nous poserons

$$(17)\qquad df = f_0\omega + f_1\omega_1 + f_{\bar{1}}\bar{\omega}_1.$$

Si en particulier f est donnée comme fonction analytique de x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$, on aura identiquement par rapport à dx, dy, $d\bar{x}$, $d\bar{y}$,

$$\begin{aligned} f_x dx + f_y dy + f_{\bar{x}} d\bar{x} + f_{\bar{y}} d\bar{y} = &-if_0\,\frac{F_y F_{\bar{y}}}{L(F)}\,(F_x dx + F_y dy) + f_1 dx + f_{\bar{1}} d\bar{x}\\ &+ \rho\,(F_x dx + F_y dy + F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y}),\end{aligned}$$

ρ étant un coefficient convenablement choisi. On en déduit

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} f_0 &= i\frac{L(F)}{(F_y F_{\bar y})^2}(f_y F_{\bar y} - f_{\bar y} F_y), \\ f_1 &= \frac{f_x F_y - f_y F_x}{F_y}, \\ f_{\bar 1} &= \frac{f_{\bar x} F_{\bar y} - f_{\bar y} F_{\bar x}}{F_{\bar y}}. \end{aligned} \right.$$

Si f est une fonction réelle, il en est de même de f_0, les quantités f_1 et $f_{\bar 1}$ étant imaginaires conjuguées.

Les dérivées des fonctions b et $\bar b$ sont liées par une relation simple, qu'on obtient en exprimant que la dérivée extérieure de ω' est nulle; cette dérivée est, comme le montre un calcul facile,

$$(b_{\bar 1} - \bar b_1)[\omega\omega_1\bar\omega_1];$$

nous poserons

$$(19)\qquad b_{\bar 1} = \bar b_1 = c;$$

la quantité c est évidemment réelle. On a du reste

$$b = \frac{1}{F_y}\left\{ -2\frac{F_{x\bar y}F_y - F_{y\bar y}F_x}{F_{\bar y}} + \frac{L_x F_y - L_y F_x}{L(F)} \right\}.$$

Nous aurons à introduire d'autres dérivées des quantités b, $\bar b$, c. Auparavant remarquons que la dérivation extérieure de l'équation (17) nous donne

$$(if_0 + f_{\bar 1 1} - f_{1\bar 1})[\omega_1\bar\omega_1] + (bf_0 + f_{10} - f_{01})[\omega\omega_1] + (\bar b f_0 + f_{\bar 1 0} - f_{0\bar 1})[\omega\bar\omega_1] = 0.$$

On a donc les relations générales

$$f_{1\bar 1} - f_{\bar 1 1} = if_0, \quad f_{01} - f_{10} = bf_0, \quad f_{0\bar 1} - f_{\bar 1 0} = \bar b f_0.$$

Nous en déduisons les relations

$$(20)\qquad \begin{gathered} b_{0\bar 1} = c_0 + \bar b b_0, \quad \bar b_{01} = c_0 + b\bar b_0, \\ c_{1\bar 1} - c_{\bar 1 1} = ic_0, \end{gathered}$$

ce qui nous permettra de poser

$$(20^{\text{bis}})\qquad c_{1\bar 1} = g + \frac{1}{2}ic_0, \quad c_{\bar 1 1} = g - \frac{1}{2}ic_0,$$

g et c_0 étant réels.

II. Recherche d'un système d'expressions de Pfaff covariantes.

71. Revenons maintenant au problème de l'équivalence. Nous substituons aux formes ω, ω_1, $\bar\omega_1$ définies par les formules (15) les formes covariantes plus générales

$$\Omega = \lambda\lambda\omega, \quad \Omega_1 = \lambda(\omega_1 + \mu\omega), \quad \bar{\Omega}_1 = \bar{\lambda}(\bar{\omega}_1 + \bar{\mu}\omega). \tag{14}$$

On obtient, par dérivation extérieure, en tenant compte de (16),

$$\begin{aligned}
\Omega' &= \left[\left(\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\right)\Omega\right] + \lambda\bar{\lambda}\,\{\, i[\omega_1\bar{\omega}_1] + b[\omega\omega_1] + \bar{b}[\omega\bar{\omega}_1]\,\},\\
\Omega_1' &= \left[\frac{d\lambda}{\lambda}\,\Omega_1\right] + \left[\frac{d\mu}{\bar{\lambda}}\,\Omega\right] + \lambda\mu\,\{\, i[\omega_1\bar{\omega}_1] + b[\omega\omega_1] + \bar{b}[\omega\bar{\omega}_1]\,\},\\
\bar{\Omega}_1' &= \left[\frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\,\bar{\Omega}_1\right] + \left[\frac{d\bar{\mu}}{\lambda}\,\Omega\right] + \bar{\lambda}\bar{\mu}\,\{\, i[\omega_1\bar{\omega}_1] + b[\omega\omega_1] + \bar{b}[\omega\bar{\omega}_1]\,\}.
\end{aligned}$$

Comme Ω, Ω_1, $\bar{\Omega}_1$, et par suite aussi Ω', Ω_1', $\bar{\Omega}_1'$, sont invariantes quand on passe de l'hypersurface donnée à une autre équivalente, les expressions

$$\left\{\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{d\lambda'}{\lambda'} + \frac{d\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}'} - \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\right)\Omega\right],\\
&\left[\left(\frac{d\lambda'}{\lambda'} - \frac{d\lambda}{\lambda}\right)\Omega_1\right] + \left[\left(\frac{d\mu'}{\bar{\lambda}'} - \frac{d\mu}{\bar{\lambda}}\right)\Omega\right],\\
&\left[\left(\frac{d\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}'} - \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\right)\bar{\Omega}_1\right] + \left[\left(\frac{d\bar{\mu}'}{\lambda'} - \frac{d\bar{\mu}}{\lambda}\right)\Omega\right],
\end{aligned}\right. \tag{21}$$

quand on y remplacera λ', $\bar{\lambda}'$, μ', $\bar{\mu}'$ par leurs expressions en fonction de u, v, w, λ, $\bar{\lambda}$, μ, $\bar{\mu}$, ne contiendront plus que les différentielles du, dv, dw. Il en est de même par suite des quantités

$$\frac{d\lambda'}{\lambda'} - \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \frac{d\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}'} - \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}, \quad \frac{d\mu'}{\bar{\lambda}'} - \frac{d\mu}{\bar{\lambda}}, \quad \frac{d\bar{\mu}'}{\lambda'} - \frac{d\bar{\mu}}{\lambda}.$$

En effet, si, par exemple, la première de ces quatre formes contenait un terme en $d\mu$, ce terme fournirait, dans la seconde expression (21), un terme en $[d\mu\Omega_1]$ qui devrait se retrouver changé de signe dans le second terme de la même expression, ce qui est impossible.

Cela posé, introduisons des variables auxiliaires nouvelles A, B, C,..., et posons

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_2 &= \frac{d\lambda}{\lambda} + A\omega_1 + B\bar{\omega}_1 + C\omega, & \bar{\Omega}_2 &= \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} + \bar{B}\omega_1 + \bar{A}\bar{\omega}_1 + \bar{C}\omega,\\
\Omega_3 &= \frac{1}{\bar{\lambda}}(d\mu + D\omega_1 + E\bar{\omega}_1 + F\omega), & \bar{\Omega}_3 &= \frac{1}{\lambda}(d\bar{\mu} + \bar{E}\omega_1 + \bar{D}\bar{\omega}_1 + \bar{F}\omega).
\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Si deux hypersurfaces sont équivalentes, il est clair qu'on *pourra exprimer les quantités* u′, v′, w′, λ′, μ′, A′, B′, C′, D′, E′, F′ *relatives à la seconde hypersurface en fonction des quantités analogues relatives à la première, et cela* *de façon à réaliser l'égalité chacune à chacune des formes* Ω, Ω_1, $\bar\Omega_1$, Ω_2, $\bar\Omega_2$, Ω_3, $\bar\Omega_3$. La réciproque est évidente.

Calculons alors les quantités invariantes

$$\begin{aligned}&\Omega' + [\Omega(\Omega_2 + \bar\Omega_2)] - i[\Omega_1\bar\Omega_1],\\ &\Omega_1' + [\Omega_1\Omega_2] + [\Omega\Omega_3],\\ &\bar\Omega_1' + [\bar\Omega_1\bar\Omega_2] + [\Omega\bar\Omega_3];\end{aligned}$$

on trouve

$$\Omega' + [\Omega(\Omega_2 + \bar\Omega_2] - i[\Omega_1\bar\Omega_1] = \lambda\bar\lambda\,\{(b + i\bar\mu + A + \bar B)[\omega\omega_1] + (\bar b - i\mu + \bar A + B)[\omega\bar\omega_1]\},$$

$$\begin{aligned}\Omega_1' + [\Omega_1\Omega_2] + [\Omega\Omega_3] = {}&\lambda(i\mu + B)[\omega_1\bar\omega_1] +\\ &+ \lambda(b\mu + A\mu - C + D)[\omega\omega_1] + \lambda(\bar b\mu + B\mu + E)[\omega\bar\omega_1].\end{aligned}$$

Au lieu de regarder A, B,..., comme des variables indépendantes, *nous pouvons les astreindre à la condition que les seconds membres soient identiquement nuls;* c'est évidemment une condition invariante. Nous prendrons donc

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}&B = -i\mu, \quad \bar B = i\bar\mu, \quad A = -(b + 2i\bar\mu), \quad \bar A = -(\bar b - 2i\mu),\\ &D = C + 2i\mu\bar\mu, \quad E = -\mu(\bar b - i\mu),\\ &\bar D = C - 2i\mu\bar\mu, \quad \bar E = -\bar\mu(b + i\bar\mu).\end{aligned}\right.$$

Nous poserons par suite

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}&\Omega_2 = \frac{d\lambda}{\lambda} - (b + 2i\bar\mu)\omega_1 - i\mu\bar\omega_1 + C\omega,\\ &\bar\Omega_2 = \frac{d\bar\lambda}{\bar\lambda} + i\bar\mu\omega_1 - (\bar b - 2i\mu)\bar\omega_1 + \bar C\omega,\\ &\Omega_3 = \frac{1}{\bar\lambda}\,[d\mu + (C + 2i\bar\mu)\omega_1 - \mu(\bar b - i\mu)\bar\omega_1 + F\omega],\\ &\bar\Omega_3 = \frac{1}{\lambda}\,[d\bar\mu - \bar\mu(b + i\bar\mu)\omega_1 + (\bar C - 2i\mu\bar\mu)\,\bar\omega_1 + \bar F\omega],\end{aligned}\right.$$

et nous aurons

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned}&\Omega' = -[\Omega(\Omega_2 + \bar\Omega_2)] + i[\Omega_1\bar\Omega_1],\\ &\Omega_1' = -[\Omega_1\Omega_2] - [\Omega\Omega_3],\\ &\bar\Omega_1' = -[\bar\Omega_1\bar\Omega_2] - [\Omega\bar\Omega_3].\end{aligned}\right.$$

Nous avons maintenant les variables auxiliaires complexes λ, μ, C, F et les formes covariantes Ω, Ω_1, $\bar\Omega_1$, Ω_2, $\bar\Omega_2$, Ω_3, $\bar\Omega_3$.

72. Considérons la forme

$$\Omega_2 - \bar\Omega_2 = \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{d\bar\lambda}{\bar\lambda} - (b + 3i\bar\mu)\omega_1 + (\bar b - 3i\mu)\bar\omega_1 + (C - \bar C)\omega,$$

et formons la quantité

$$\Omega_2' - \overline{\Omega}_2' - 3i[\Omega_1\overline{\Omega}_3] - 3i[\overline{\Omega}_1\Omega_3].$$

Elle est égale, en laissant de côté les termes qui contiennent ω en facteur, a

$$[4i(C - \overline{C}) + 2c - 12\mu\overline{\mu}][\omega_1\overline{\omega}_1].$$

On aura une nouvelle relation invariante en annulant le coefficient de $[\omega_1\overline{\omega}_1]$, ce qui exprime que l'expression totale s'annule avec ω (ou Ω). Nous poserons donc

$$C = \rho + \frac{1}{4}ic - \frac{3}{2}i\mu\overline{\mu}, \quad \overline{C} = \rho - \frac{1}{4}ic + \frac{3}{2}i\mu\overline{\mu}, \tag{26}$$

ρ étant une variable auxiliaire *réelle*. En achevant le calcul, on trouve

$$\begin{aligned}\Omega_2' - \overline{\Omega}_2' - 3i[\Omega_1\overline{\Omega}_3] - 3i[\overline{\Omega}_1\Omega_3] = {} & \left(3i\overline{F} - \frac{3}{2}\mu\overline{\mu}^2 - 3i\overline{\mu}\rho + \frac{3}{4}c\overline{\mu} - b_0 - \frac{1}{2}ic_1 + \frac{1}{2}ibc\right)[\omega\omega_1] \\ & + \left(3iF + \frac{3}{2}\mu^2\overline{\mu} - 3i\mu\rho - \frac{3}{4}c\mu + \overline{b}_0 - \frac{1}{2}ic_{\overline{1}} + \frac{1}{2}i\overline{b}c\right)[\omega\overline{\omega}_1].\end{aligned}$$

Nous aurons encore des relations invariantes en annulant le second membre, ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}i\mu^2\overline{\mu} + \mu\rho - \frac{1}{4}ic\mu + \frac{1}{6}(c_{\overline{1}} - \overline{b}c + 2i\overline{b}_0), \\ \overline{F} &= -\frac{1}{2}i\mu\overline{\mu}^2 + \overline{\mu}\rho + \frac{1}{4}ic\overline{\mu} + \frac{1}{6}(c_1 - bc - 2ib_0). \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Nous poserons pour abréger

$$l = c_1 - bc - 2ib_0, \quad \overline{l} = c_{\overline{1}} - \overline{b}c + 2i\overline{b}_0. \tag{28}$$

73. Formons maintenant $\Omega_2 + \overline{\Omega}_2$:

$$\Omega_2 + \overline{\Omega}_2 = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}} - (b + i\overline{\mu})\omega_1 - (\overline{b} - i\mu)\overline{\omega}_1 + 2\rho\omega;$$

sa dérivée extérieure introduira $d\rho$; on éliminera en partie $d\mu$ et $d\overline{\mu}$ en formant la combinaison

$$\Omega_2' + \overline{\Omega}_2' - i[\Omega_1\overline{\Omega}_3] + i[\overline{\Omega}_1\Omega_3];$$

on trouve que cette expression s'annule avec ω et est égale à

$$\begin{aligned}[(2d\rho + i\mu d\overline{\mu} - i\overline{\mu}d\mu)\omega] & - \left(\mu\overline{\mu}^2 - 2i\overline{\mu}\rho - 2b\rho - ib\mu\overline{\mu} + \frac{1}{2}c\overline{\mu} + b_0 - \frac{1}{6}il\right)[\omega\omega_1] \\ & - \left(\mu^2\overline{\mu} + 2i\mu\rho - 2\overline{b}\rho + i\overline{b}\mu\overline{\mu} + \frac{1}{2}c\mu + \overline{b}_0 + \frac{1}{6}i\overline{l}\right)[\omega\overline{\omega}_1].\end{aligned}$$

On aura une nouvelle forme covariante en posant

$$(29)\quad \Omega_4 = \frac{1}{\lambda\bar\lambda}\Big\{ d\rho + \frac{i}{2}(\mu d\bar\mu - \bar\mu d\mu) + \left(\frac{1}{2}\mu\bar\mu^2 - i\bar\mu\rho - b\rho - \frac{1}{2}ib\mu\bar\mu + \frac{1}{4}c\bar\mu + \frac{1}{2}b_0 - \frac{1}{12}il\right)\omega_1$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\mu^2\bar\mu + i\mu\rho - \bar b\rho + \frac{1}{2}i\bar b\mu\bar\mu + \frac{1}{4}c\mu + \frac{1}{2}\bar b_0 + \frac{1}{12}i\bar l\right)\bar\omega_1 + G\omega\Big\},$$

G désignant une variable auxiliaire nouvelle, réelle.

On aura, en tenant compte des résultats précédents,

$$(30)\quad \begin{cases} \Omega_2' = 2i[\Omega_1\bar\Omega_3] + i[\bar\Omega_1\Omega_3] - [\Omega\Omega_4], \\ \bar\Omega_2' = -i[\Omega_1\bar\Omega_3] - 2i[\bar\Omega_1\Omega_3] - [\Omega\Omega_4]. \end{cases}$$

Remarquons que la forme Ω_4 est *réelle.*

74. Passons enfin au calcul de Ω_3'; pour éliminer les différentielles $d\bar\lambda$, $d\mu$, $d\bar\mu$, $d\rho$, formons

$$\Omega_3' + [\Omega_1\Omega_4] + [\bar\Omega_2\Omega_3].$$

On trouve, en tenant compte de (20), (20^{bis}) et (28),

$$\frac{1}{\bar\lambda}\Big\{\left[\frac{11}{48}c^2 + \frac{1}{6}(b\bar b c + b\bar l + \bar b l - g) + \frac{1}{6}i(\mu l - \bar\mu\bar l) - \frac{1}{4}c\mu\bar\mu + \rho^2 + \frac{1}{4}\mu^2\bar\mu^2 - G\right][\omega\omega_1]$$
$$- \frac{1}{6}(\bar l_{\bar 1} - 2\bar b\bar l)[\omega\bar\omega_1]\Big\}.$$

On pourra donc poser d'une manière invariante

$$(31)\quad G = \frac{11}{48}c^2 + \frac{1}{6}(b\bar b c + b\bar l + \bar b l - g) + \frac{1}{6}i(\mu l - \bar\mu\bar l) - \frac{1}{4}c\mu\bar\mu + \rho^2 + \frac{1}{4}\mu^2\bar\mu^2.$$

En introduisant maintenant, pour abréger, la notation

$$(32)\quad r = \frac{1}{6}(\bar l_{\bar 1} - 2\bar b\bar l),$$

on aura les formules

$$(33)\quad \begin{cases} \Omega_3' = -[\Omega_1\Omega_4] - [\Omega_2\bar\Omega_3] - \dfrac{r}{\lambda\bar\lambda^3}[\Omega\bar\Omega_1], \\ \bar\Omega_3' = -[\Omega_1\Omega_4] - [\bar\Omega_2\Omega_3] - \dfrac{\bar r}{\lambda^3\bar\lambda}[\Omega\Omega_1]. \end{cases}$$

75. Résumons maintenant les résultats obtenus:

THÉORÈME. — *Il est possible, par l'introduction de trois variables auxiliaires* λ, μ. ρ, *dont les deux premières sont complexes et la dernière est réelle, d'associer à une hypersurface donnée un système de huit formes de Pfaff covariantes*

$$\Omega,\ \Omega_1,\ \bar\Omega_1,\ \Omega_2,\ \bar\Omega_2,\ \Omega_3,\ \bar\Omega_3,\ \Omega_4,$$

dont la première et la dernière sont réelles, linéairement indépendantes par rapport à du, dv, dw, $d\lambda$, $d\bar\lambda$, $d\mu$, $d\bar\mu$, $d\rho$, *et satisfaisant à des relations de la forme*

$$
(34)\qquad
\begin{cases}
\Omega' = i[\Omega_1\bar\Omega_1] - [\Omega(\Omega_2 + \bar\Omega_2)],\\
\Omega_1' = -[\Omega_1\Omega_2] - [\Omega\Omega_3],\\
\bar\Omega_1' = -[\bar\Omega_1\bar\Omega_2] - [\Omega\bar\Omega_3],\\
\Omega_2' = 2i[\Omega_1\bar\Omega_3] + i[\bar\Omega_1\Omega_3] - [\Omega\Omega_4],\\
\bar\Omega_2' = -i[\Omega_1\bar\Omega_3] - 2i[\bar\Omega_1\Omega_3] - [\Omega\Omega_4],\\
\Omega_3' = -[\Omega_1\Omega_4] - [\bar\Omega_2\Omega_3] - R[\Omega\bar\Omega_1],\\
\bar\Omega_3' = -[\bar\Omega_1\Omega_4] - [\Omega_2\bar\Omega_3] - R[\Omega\Omega_1].
\end{cases}
$$

En faisant dans ces formes $\lambda = 1$, $\mu = \rho = 0$, *on obtient d'abord les formes initiales* ω, ω_1, $\bar\omega_1$, *puis les formes suivantes, construites avec les seules variables* u, v, w *et leurs différentielles,*

$$
(35)\qquad
\begin{cases}
\omega_2 = -b\omega_1 + \frac{1}{4}ic\omega,\\
\bar\omega_2 = -\bar b\bar\omega_1 - \frac{1}{4}ic\omega,\\
\omega_3 = \frac{1}{4}ic\omega_1 + \frac{1}{6}\bar l\omega,\\
\bar\omega_3 = -\frac{1}{4}ic\bar\omega_1 + \frac{1}{6}l\omega,\\
\omega_4 = -i\,\frac{l + 4ib_0}{12}\,\omega_1 + i\,\frac{\bar l - 4i\bar b_0}{12}\,\bar\omega_1 + \left[\frac{11}{48}c^2 + \frac{1}{6}(b\bar bc + b\bar l + \bar bl - g)\right]\omega.
\end{cases}
$$

On peut alors écrire

$$
(36)\qquad
\begin{cases}
\Omega = \lambda\bar\lambda\omega,\\
\Omega_1 = \lambda(\omega_1 + \mu\omega),\\
\bar\Omega_1 = \bar\lambda(\bar\omega_1 + \bar\mu\omega),\\
\Omega_2 = \dfrac{d\lambda}{\lambda} + \omega_2 - 2i\bar\mu\omega_1 - i\mu\bar\omega_1 + \left(\rho - \frac{3}{2}i\mu\bar\mu\right)\omega,\\
\bar\Omega_2 = \dfrac{d\bar\lambda}{\bar\lambda} + \bar\omega_2 + i\bar\mu\omega_1 + 2i\mu\bar\omega_1 + \left(\rho + \frac{3}{2}i\mu\bar\mu\right)\omega,\\
\Omega_3 = \dfrac{1}{\bar\lambda}\left[d\mu + \omega_3 + \mu\bar\omega_2 + \left(\rho + \frac{1}{2}i\mu\bar\mu\right)\omega_1 + i\mu^2\bar\omega_1 + \mu\left(\rho + \frac{i}{2}\mu\bar\mu\right)\omega\right],\\
\bar\Omega_3 = \dfrac{1}{\lambda}\left[d\bar\mu + \bar\omega_3 + \bar\mu\omega_2 - i\bar\mu^2\omega_1 + \left(\rho - \frac{1}{2}i\mu\bar\mu\right)\bar\omega_1 + \bar\mu\left(\rho - \frac{i}{2}\mu\bar\mu\right)\omega\right],\\
\Omega_4 = \dfrac{1}{\lambda\bar\lambda}\Big[d\rho + \frac{i}{2}(\mu d\bar\mu - \bar\mu d\mu) + \omega_4 - i\bar\mu\omega_3 + i\mu\bar\omega_3 + \left(\rho + \frac{i}{2}\mu\bar\mu\right)\omega_2 + \left(\rho - \frac{i}{2}\mu\bar\mu\right)\bar\omega_2\\
\qquad - i\bar\mu\left(\rho + \frac{1}{2}i\mu\bar\mu\right)\omega_1 + i\mu\left(\rho - \frac{1}{2}i\mu\bar\mu\right)\bar\omega_1 + \left(\rho^2 + \frac{1}{4}\mu^2\bar\mu^2\right)\omega\Big].
\end{cases}
$$

Les ω_i *satisfont aux mêmes relations* (34) *que les* Ω_i, *mais avec un coefficient* r *différent: on a*

$$R = \frac{r}{\lambda\bar{\lambda}^3}, \quad \bar{R} = \frac{\bar{r}}{\lambda^3\bar{\lambda}}. \tag{37}$$

On pourrait enfin calculer Ω_4', mais on peut prévoir la forme du résultat en dérivant extérieurement l'équation qui donne Ω_2'; on obtient ainsi

$$-i[\Omega\Omega_3\bar{\Omega}_3] + [\Omega(\Omega_2 + \bar{\Omega}_2)\Omega_1] + [\Omega\Omega_4'] = 0,$$

d'où une expression de la forme

$$\Omega_4' = i[\Omega_3\bar{\Omega}_3] - [(\Omega_2 + \bar{\Omega}_2)\Omega_4] - S[\Omega\Omega_1] - \bar{S}[\Omega\bar{\Omega}_1]. \tag{38}$$

Remarquons que b et b font intervenir les dérivés partielles du second ordre du premier membre de l'équation de l'hypersurface, b_0 et c les dérivés du troisième ordre, l celles du quatrième ordre, g et r celles du cinquième. L'expression r est un *invariant différentiel relatif*; on verrait qu'il en est de même de s, valeur à laquelle se réduit S pour $\lambda = 1$, $\mu = \rho = 0$.

Ajoutons une dernière remarque. Supposons que, ω, ω_1, $\bar{\omega}_1$, ω_2, $\bar{\omega}_2$, ω_3, $\bar{\omega}_3$, ω_4 désignent 8 expressions de Pfaff, dont la première et la dernière sont réelles, les trois premières étant linéairement indépendantes, et que ces 8 expressions satisfassent aux relations analogues à (34). *On peut vérifier par le calcul que les expressions données par* (36) *satisfont automatiquement à des relations de la forme* (34): ce sont même les expressions les plus générales qui satisfassent à cette condition et telles que Ω soit multiple de ω et Ω_1 combinaison linéaire de ω_1 et de ω.

III. Cas où l'invariant relatif r s'annule.

76. Si l'invariant relatif r s'annule, il en est de même de s. En effet la dérivation extérieure de l'équation (34) qui donne Ω_3' conduit à la relation

$$-\bar{S}[\Omega\Omega_1\bar{\Omega}_1] = 0, \quad \text{d'où} \quad \bar{S} = 0.$$

Toutes les hypersurfaces pour lesquelles r $= 0$ *sont équivalentes entre elles et on peut passer de l'une à l'autre par une infinité de transformations pseudo-conformes dépendant de huit constantes arbitraires réelles.*

Soit en effet une seconde hypersurface pour laquelle $r = 0$; soient Π_i les formes associées à cette hypersurface et construites avec les paramètres de position u', v', w' et les variables auxiliaires λ', μ', ρ'. Le système de Pfaff

$$\Pi_i = \Omega_i \tag{39}$$

où u', v', w', λ', $\bar{\lambda}'$, μ', $\bar{\mu}'$, ρ' sont regardées comme huit fonctions inconnues des 8 variables indépendantes u, v, w, λ, $\bar{\lambda}$, μ, $\bar{\mu}$, ρ est complètement intégrable, d'après le théorème de FROBENIUS ([25]); en effet les dérivées extérieures $\Pi_i' - \Omega_i'$ s'annulent toutes en tenant compte des équations (39) du système, puisque les seconds membres des formules (34) et (38) qui donnent les Ω_i' (et aussi les Π_i') ne font intervenir que des coefficients *constants*, R et S étant nuls. La solution générale du système (39) dépend alors de huit constantes arbitraires réelles.

En particulier chacune des hypersurfaces considérées admet un groupe à 8 paramètres réels de transformations pseudo-conformes et les relations (34) et (38) définissent la *structure* de ce groupe.

On peut préciser le résultat précédent. Considérons une région de l'hypersurface suffisamment petite pour que, dans cette région, le déterminant des coefficients de du, dv, dw dans ω, ω_1, $\bar{\omega}_1$ ne s'annule jamais. Les équations (39) sont alors, dans cette région, résolubles sans ambiguïté par rapport à du', dv', dw', $d\lambda'$, $d\bar{\lambda}'$, $d\mu'$, $d\bar{\mu}'$, $d\rho'$ et admettent une solution et une seule telle que pour

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0, \quad \lambda = \bar{\lambda} = 1, \quad \mu = \bar{\mu} = \rho = 0,$$

on ait

$$u' = u_0', \quad v' = v_0', \quad w' = w_0', \quad \lambda' = \lambda_0', \quad \bar{\lambda}' = \bar{\lambda}_0', \quad \mu' = \mu_0', \quad \bar{\mu}' = \bar{\mu}_0', \quad \rho' = \rho_0',$$

où $\lambda_0' \neq 0$, et où (u_0, v_0, w_0), (u_0', v_0', w_0') sont deux points arbitrairement donnés de la région. Comme cette solution dépend analytiquement des constantes d'intégration $u_0', \dots, \rho_0'$, il en résulte que *les transformations pseudo-conformes qu'admet localement l'hypersurface forment une famille connexe dépendant de 8 paramètres réels.*

77. Prenons en particulier *l'hyperconique*

$$F \equiv \frac{y - \bar{y}}{i} - x\bar{x} = 0. \tag{40}$$

On a ici

$$L(F) = -1,$$

$$\omega = dy - i\bar{x}dx, \quad \omega_1 = dx, \quad \bar{\omega}_1 = d\bar{x},$$

$$\omega' = i[dx d\bar{x}] = i[\omega_1 \bar{\omega}_1].$$

Les coefficients b et $\bar{b}$ étant nuls, il en est de même de c, l et r.

([25]) E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux* ([21]), pp. 99-100.

Les hypersurfaces pour lesquelles r $=0$ *sont donc celles qui sont localement équivalentes à l'hyperconique* (40).

Ici le groupe est bien connu, il est formé de transformations homographiques.

IV. Cas où l'invariant r n'est pas nul.

78. Si r n'est pas nul, nous allons montrer qu'on peut exprimer d'une manière invariante les variables λ, μ, ρ en fonction de u, v, w.

Remarquons en effet que R est un invariant *absolu*, mais qui dépend naturellement des variables auxiliaires λ et $\bar\lambda$ en vertu de (37). Nous aurons une détermination invariante de λ et $\bar\lambda$ en réduisant R à l'unité, ce qui donne

$$\lambda\bar\lambda^3 = r, \quad \lambda^3\bar\lambda = \bar r,$$

d'où

$$\lambda\bar\lambda = \sqrt[4]{r\bar r}, \qquad \lambda^2 = \frac{\bar r}{\sqrt[4]{r\bar r}}.$$

Il y a deux manières de satisfaire à ces relations. En désignant par ε l'une des quantités $+1$ et -1, nous poserons

$$\lambda = \varepsilon\sqrt{\frac{\bar r}{\sqrt[4]{r\bar r}}}. \tag{41}$$

79. Considérons maintenant la forme covariante $\Omega_2 + \bar\Omega_2$, à savoir

$$\Omega_2 + \bar\Omega_2 = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\bar\lambda}{\bar\lambda} - (b + i\bar\mu)\omega_1 - (\bar b - i\mu)\bar\omega_1 + 2\rho\omega$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{r} + \frac{\bar r_1}{\bar r}\right) - b - i\bar\mu\right]\omega_1 + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_{\bar 1}}{r} + \frac{\bar r_{\bar 1}}{\bar r}\right) - \bar b + i\mu\right]\bar\omega_1 + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{r} + \frac{\bar r_0}{\bar r}\right) + 2\rho\right]\omega.$$

On aura des relations invariantes en annulant le second membre, ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4}i\left(\frac{r_{\bar 1}}{r} + \frac{\bar r_{\bar 1}}{\bar r}\right) - i\bar b, \\ \bar\mu &= -\frac{1}{4}i\left(\frac{r_1}{r} + \frac{\bar r_1}{\bar r}\right) + ib, \\ \rho &= -\frac{1}{8}\left(\frac{r_0}{r} + \frac{\bar r_0}{\bar r}\right). \end{aligned}\right. \tag{42}$$

80. *Il ne reste plus maintenant aucune variable auxiliaire.* Les quantités λ et $\bar{\lambda}$ s'expriment au moyen des dérivées partielles des cinq premiers ordres du premier membre de l'équation de l'hypersurface, tandis que μ, $\bar{\mu}$ et ρ font intervenir les dérivées jusqu'au sixième ordre. Les formes Ω_2, $\bar{\Omega}_2$, Ω_3, $\bar{\Omega}_3$ et Ω_4 deviennent des combinaisons linéaires de Ω, Ω_1, $\bar{\Omega}_1$. Les coefficients de Ω_2 sont du sixième ordre, ceux de Ω_3, $\bar{\Omega}_3$ et Ω_4 du septième ordre.

Nous poserons, sans faire le calcul effectif,

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \alpha\Omega_1 - \bar{\alpha}\,\bar{\Omega}_1 + i\beta\Omega,\\
\bar{\Omega}_2 &= -\alpha\Omega_1 + \bar{\alpha}\,\bar{\Omega}_1 - i\beta\Omega,\\
\Omega_3 &= i\gamma\Omega_1 + \theta\,\bar{\Omega}_1 + \eta\Omega,\\
\bar{\Omega}_3 &= \bar{\theta}\Omega_1 - i\bar{\gamma}\,\bar{\Omega}_1 + \bar{\eta}\Omega,\\
\Omega_4 &= \sigma\Omega_1 + \bar{\sigma}\,\bar{\Omega}_1 + \zeta\Omega,
\end{aligned}$$

β et ζ étant réels. Mais la relation $\Omega_2 + \bar{\Omega}_2 = 0$, dérivée extérieurement, donne, d'après (34),

$$i[\Omega_1\bar{\Omega}_3] - i[\bar{\Omega}_1\Omega_3] - 2[\Omega\Omega_4] = 0,$$

ou, en développant,

$$(\bar{\gamma} - \gamma)[\Omega_1\bar{\Omega}_1] - (2\sigma + i\bar{\eta})[\Omega\Omega_1] - (2\bar{\sigma} - i\eta)[\Omega\bar{\Omega}_1] = 0.$$

On a donc

$$\bar{\gamma} = \gamma, \quad \sigma = -\frac{1}{2}i\bar{\eta}, \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{2}i\eta,$$

d'où les formules définitives

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Omega_2 &= -\bar{\Omega}_2 = \alpha\Omega_1 - \bar{\alpha}\,\bar{\Omega}_1 + i\beta\Omega,\\
\Omega_3 &= i\gamma\Omega_1 + \theta\bar{\Omega}_1 + \eta\Omega,\\
\bar{\Omega}_3 &= \bar{\theta}\Omega_1 - i\gamma\bar{\Omega}_1 + \bar{\eta}\Omega,\\
\Omega_4 &= -\frac{1}{2}i\bar{\eta}\Omega_1 + \frac{1}{2}i\eta\bar{\Omega}_1 + \zeta\Omega,
\end{aligned}\right.$$

avec β, γ et ζ réels, α, θ et η complexes.

La condition d'équivalence de deux hypersurfaces non localement équivalentes à une hyperconique est donc la possibilité d'établir entre ces deux hypersurfaces une correspondance ponctuelle analytique qui réalise l'égalité chacune à chacune des formes Ω, Ω_1 *et* $\bar{\Omega}_1$, *ainsi que l'égalité chacune à chacune des quantités* α, β, γ, θ, η, ζ.

Il y a cependant à l'énoncé précédent une restriction essentielle, tenant à l'indétermination de $\varepsilon = \pm 1$. Quand on change ε de signe, λ change de signe, μ et ρ ne changent pas; par suite, d'après (36), les formes Ω, Ω_2 et Ω_4 ne changent pas. les formes Ω_1 et Ω_3 changent de signe; par conséquent, d'après (43), les quantités β, γ, θ, ζ ne changent pas, les quantités α. η changent de signe. Par suite au lieu des égalités

$$\Pi = \Omega,\ \Pi_1 = \Omega_1,\ \overline{\Pi}_1 = \overline{\Omega}_1; \qquad (44)$$
$$\alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta,\ \gamma' = \gamma,\ \theta' = \theta,\ \eta' = \eta,\ \zeta' = \zeta,$$

on peut avoir les égalités

$$\Pi = \Omega,\ \Pi_1 = -\Omega_1,\ \overline{\Pi}_1 = -\overline{\Omega}_1; \qquad (45)$$
$$\alpha' = -\alpha,\ \beta' = \beta,\ \gamma' = \gamma,\ \theta' = \theta,\ \eta' = -\eta,\ \zeta' = \zeta.$$

La condition d'équivalence réside dans la possibilité de réaliser soit les équations (44), *soit les équations* (45), *par une correspondance ponctuelle convenablement choisie.*

81. On voit en particulier que si *deux hypersurfaces sont localement équivalentes entre elles sans être équivalentes à une hyperconique et si* A *et* A′ *sont deux points homologues, il existe au plus deux transformations pseudo-conformes de la première hypersurfaee dans la seconde amenant* A *en* A′; en effet chacun des systèmes (44) et (45) admet au plus une solution telle que u', v', w' prennent des valeurs numériques données pour des valeurs données de u, v, w. Il ne peut exister deux transformations distinctes que si au point A et au point A' on a $\alpha = \eta = 0$.

En particulier *une hypersurface non localement équivalente à une hyperconique admet au plus une transformation pseudo-conforme non identique laissant fixe un de ses points.*

Nous verrons un peu plus loin que si cette transformation non identique existe, *quel que soit le point considéré*, l'hypersurface admet un groupe à trois paramètres.

V. Invariants différentiels fondamentaux et dérivés.

82. Les neuf quantités α, $\bar{\alpha}$, β, γ, θ, $\bar{\theta}$, η, $\bar{\eta}$, ζ sont des invariants différentiels pseudo-conformes; nous les appellerons les invariants *fondamentaux.* Chacun d'eux I donne par dérivation naissance à trois invariants nouveaux (invariants dérivés) I_0, I_1, $I_{\bar{1}}$ définis par l'identité

$$dI \equiv I_0\Omega_0 + I_1\Omega_1 + I_{\bar{1}}\overline{\Omega}_1. \qquad (46)$$

Chaque invariant dérivé donne naissance à son tour à des invariants dérivés (du second ordre) et ainsi de suite.

Il existe des relations entre ces invariants dérivés successifs. Pour les obtenir, remarquons d'abord qu'en tenant compte de (34) et de (43), on a les formules importantes

$$
(47) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\Omega' &= i[\Omega_1 \bar{\Omega}_1], \\
\Omega_1' &= \bar{\alpha}[\Omega_1 \bar{\Omega}_1] + i(\beta - \gamma)[\Omega\Omega_1] - \theta[\Omega\bar{\Omega}_1], \\
\bar{\Omega}_1' &= -\alpha[\Omega_1 \bar{\Omega}_1] - \bar{\theta}[\Omega\Omega_1] - i(\beta - \gamma)[\Omega\bar{\Omega}_1].
\end{aligned}
\right.
$$

Cela posé, on a d'abord entre les premiers invariants dérivés des invariants fondamentaux et ces invariants fondamentaux eux-mêmes une série de relations obtenues en exprimant que les équations (34), *où l'on suppose* R, $\bar{R} = 1$, sont vérifiées. Le calcul donne, en tenant compte des expressions (43) de Ω_2, $\bar{\Omega}_2$, Ω_3, $\bar{\Omega}_3$, Ω_4 et des relations (47),

$$
(48) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\bar{\alpha}_1 + \alpha_{\bar{1}} = 2\alpha\bar{\alpha} - \beta - 3\gamma, \\
&\alpha_0 - i\beta_1 = -i\alpha(\beta - \gamma) - \bar{\alpha}\bar{\theta} - \frac{3}{2} i\bar{\eta}, \\
&\bar{\alpha}_0 + i\beta_{\bar{1}} = i\bar{\alpha}(\beta - \gamma) - \alpha\theta + \frac{3}{2} i\eta, \\
&\theta_1 - i\gamma_{\bar{1}} = 2\alpha\theta - \frac{3}{2} i\eta, \\
&\bar{\theta}_{\bar{1}} + i\gamma_1 = 2\bar{\alpha}\bar{\theta} + \frac{3}{2} i\bar{\eta}, \\
&\theta_0 - \eta_{\bar{1}} = 2i\beta\theta + \bar{\alpha}\eta - 1, \\
&\bar{\theta}_0 - \bar{\eta}_1 = -2i\beta\bar{\theta} + \alpha\bar{\eta} - 1, \\
&\eta_1 - i\gamma_0 = \alpha\eta + \gamma^2 - \theta\bar{\theta} - \zeta, \\
&\bar{\eta}_{\bar{1}} + i\gamma_0 = \bar{\alpha}\bar{\eta} + \gamma^2 - \theta\bar{\theta} - \zeta.
\end{aligned}
\right.
$$

En second lieu, la relation (46), dérivée extérieurement en tenant compte de (47), donne

$$
(49) \qquad
\begin{aligned}
I_{1\bar{1}} - I_{\bar{1}1} &= iI_0 + \bar{\alpha}I_1 - \alpha I_{\bar{1}}, \\
I_{01} - I_{10} &= i(\beta - \gamma)I_1 - \bar{\theta}I_{\bar{1}}, \\
I_{0\bar{1}} - I_{\bar{1}0} &= -i(\beta - \gamma)I_{\bar{1}} - \theta I_1.
\end{aligned}
$$

VI. Les conditions effectives d'équivalence.

83. La discussion des conditions d'équivalence de deux hypersurfaces se fait comme dans les cas classiques analogues. Nous nous bornerons à deux cas, le cas général où trois des neuf invariants fondamentaux sont des fonctions indépendantes de u, v, w, et le cas où les invariants fondamentaux sont tous constants.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas. Supposons que pour une hypersurface donnée trois invariants fondamentaux réels, que nous désignons par I, J, K, soient des fonctions indépendantes de u, v, w. Il faudra d'abord, pour qu'une seconde hypersurface soit équivalente à la première, que les invariants de même nom I', J', K' soient aussi des fonctions indépendantes de u', v', w'. Il faudra ensuite que les relations qui lient I, J, K et les six autres invariants fondamentaux soient les mêmes pour les deux hypersurfaces (à condition de choisir convenablement le signe ε pour la seconde hypersurface, quand on a choisi ce signe pour la première).

Mais cela ne suffira pas en général. Il faudra encore que les relations qui existent entre I, J, K et leurs invariants dérivés du premier ordre soient les mêmes pour les deux hypersurfaces.

Les conditions nécessaires précédentes sont aussi suffisantes. En effet établissons entre les deux hypersurfaces la correspondance ponctuelle définie par les relations

$$I' = I, \quad J' = J, \quad K' = K;$$

par cette correspondance on aura l'égalité chacun à chacun des neuf invariants fondamentaux. De plus les relations

$$\begin{aligned} dI &= I_0\Omega + I_1\Omega_1 + I_{\bar 1}\overline{\Omega}_1, \\ dJ &= J_0\Omega + J_1\Omega_1 + J_{\bar 1}\overline{\Omega}_1, \\ dK &= K_0\Omega + K_0\Omega_0 + K_{\bar 1}\overline{\Omega}_1, \end{aligned}$$

et les relations analogues

$$\begin{aligned} dI' &= I_0'\Pi + I_1'\Pi_1 + I_{\bar 1}'\overline{\Pi}_1, \\ dJ' &= J_0'\Pi + J_1'\Pi_1 + J_{\bar 1}'\overline{\Pi}_1, \\ dK' &= K_0'\Pi + K_1'\Pi_1 + K_{\bar 1}'\overline{\Pi}_1, \end{aligned}$$

montrent que, par la correspondance ponctuelle envisagée, on a

$$\Pi = \Omega, \quad \Pi_1 = \Omega_1, \quad \overline{\Pi}_1 = \overline{\Omega}_1.$$

Cela suffit (n. 78) pour l'équivalence.

84. Supposons maintenant que pour une hypersurface donnée les invariants fondamentaux soient tous constants. Il suffit du reste pour cela que les invariants α, $\bar\alpha$, $\beta - \gamma$, θ, $\bar\theta$ qui figurent dans les formules (47) soient constants, comme le montrent immédiatement les relations (48). S'il en est ainsi, il faudra que pour la seconde hypersurface, les invariants fondamentaux soient également constants et, par un choix convenable du signe ε, égaux chacun à chacun à ceux de la première hypersurface. Ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes, car les équations

$$\Pi = \Omega, \quad \Pi_1 = \Omega_1, \quad \overline{\Pi}_1 = \overline{\Omega}_1,$$

nécessaires et suffisantes pour réaliser l'équivalence, sont complètement intégrables, puisque, d'après l'hypothèse faite, les dérivées extérieures $\Pi' - \Omega'$, $\Pi_1' - \Omega_1'$, $\bar{\Pi}_1' - \bar{\Omega}_1'$ s'annulent en tenant compte des équations elles-mêmes, les formules (47) montrant que les expressions Π', Π_1', $\bar{\Pi}_1'$ contiennent les mêmes coefficients constants que Ω', Ω_1', $\bar{\Omega}_1'$.

Dans ce second cas, les transformations pseudo-conformes qui réalisent l'équivalence dépendent de trois constantes arbitraires. Autrement dit, *toute hypersurface dont les neuf invariants fondamentaux sont constants admet un groupe à trois paramètres de transformations pseudo-conformes.*

On peut préciser davantage. Si l'invariant α est nul, ce qui entraîne, d'après (48), $\eta = 0$, il existe une transformation pseudo-conforme non identique laissant invariante l'hypersurface et laissant fixe un de ses points arbitrairement donné. Il n'en existe pas si $\alpha \neq 0$. Du reste la propriété qui vient d'être énoncée dans le cas $\alpha = 0$ peut se traduire *globalement* de deux manières différentes: *ou bien les transformations pseudo-conformes de l'hypersurface en elle-même forment une seule famille connexe ou bien elles forment deux familles connexes distinctes.*

85. Cherchons, pour terminer, tous les cas dans lequels il existe une transformation pseudo-conforme non identique laissant fixe un point arbitrairement donné d'une hypersurface et laissant localement invariante cette hypersurface. Cela s'exprime par les conditions

$$\alpha = \eta = 0.$$

Les relations (48) donnent alors successivement

$$\beta + 3\gamma = 0, \quad \beta_1 = \beta_{\bar{1}} = 0, \quad \theta_1 = \bar{\theta}_{\bar{1}} = 0,$$
$$\theta_0 = 2i\beta\theta - 1, \quad \bar{\theta}_0 = -2i\beta\bar{\theta} - 1,$$
$$-i\gamma_0 = i\gamma_0 = 0.$$

Il en résulte d'abord que β et γ sont des constantes. La seconde relation (49), appliquée à l'invariant θ, donne, en tenant compte de ce que θ_1 et θ_{01} sont nuls,

$$-\bar{\theta}\theta_{\bar{1}} = 0, \quad \text{ou} \quad \theta_{\bar{1}} = 0;$$

la première relation (49), appliquée encore à θ, donne

$$i\theta_0 = 0;$$

par suite θ est une constante, ainsi que $\bar{\theta}$. Tous les invariants fondamentaux sont constants et l'hypersurface admet un groupe à trois paramètres.