

Sulle condizioni necessarie e sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi di forma parametrica.

Memoria di GIANFRANCO CIMMINO (a Napoli).

Sunto. - Viene provato, togliendo alcune restrizioni che occorreano nelle dimostrazioni di altri autori, che, per un integrale doppio di forma parametrica, le condizioni che esso sia semidefinito positivo e semiregolare, oltrechè necessarie, sono anche sufficienti perchè esso sia inferiormente semicontinuo in tutto un campo.

In un recente lavoro di R. CACCIOPPOLI ⁽¹⁾ si trovano formulate, come condizioni necessarie e sufficienti per la semicontinuità inferiore in tutto un campo degli integrali doppi di forma parametrica, le seguenti: 1°) che l'integrale da minimizzare sia *semidefinito positivo* (cioè che la relativa funzione integranda F non sia mai negativa), 2°) che esso sia *semiregolare* (cioè che la relativa funzione E di Weierstrass non sia mai negativa).

Il fatto che queste condizioni riescono necessarie, come si mostra facilmente con esempi ⁽²⁾, mentre poi riescono sufficienti le analoghe condizioni nel caso degli integrali semplici ⁽³⁾ (caso in cui esse non sono, però, più necessarie) rendeva presumibile il teorema enunciato da R. CACCIOPPOLI nel suo studio citato; in questo egli peraltro, ponendosi nelle ipotesi più generali e considerando superficie supposte soltanto *quadrabili* ⁽⁴⁾, si limita a dimostrare che per la semicontinuità dell'integrale è sufficiente, o che esso sia semidefinito e regolare (cioè $F \geq 0$, $E > 0$), oppure definito e semiregolare

⁽¹⁾ *Gli integrali doppi di forma parametrica nel calcolo delle variazioni*, « Atti del R. Ist. Veneto », **93**. 705-730, (1935).

⁽²⁾ Cfr. R. CACCIOPPOLI, loc. cit., p. 717 e p. 724.

⁽³⁾ L. TONELLI, *Calcolo delle Variazioni*, t. I, p. 275. Si noti che il termine *quasi-regolare* dell'enunciato di TONELLI non ha lo stesso significato del termine *semiregolare* qui usato. Ammessa l'esistenza delle derivate seconde della F , la condizione di semiregolarità nel senso qui indicato porta di conseguenza quella di quasi-regolarità nel senso di TONELLI (v. TONELLI, loc. cit., p. 211).

⁽⁴⁾ Secondo la teoria sviluppata dallo stesso R. CACCIOPPOLI, che trovasi riassunta nel Capitolo I del lavoro citato.

($F > 0$, $E \geq 0$). Lo scopo della presente ricerca è quello di colmare l'ultima lacuna rimasta, provando, cioè, la sufficienza delle condizioni $F \geq 0$, $E \geq 0$.

Mi pongo qui nell'ipotesi semplificatrice che le superficie di cui si tratta siano *regolari* ⁽⁵⁾. È intuitivamente chiaro che tale ipotesi di regolarità deve essere sovrabbondante; ma, dato che il risultato finale si presenta così notevolmente semplice, mi è parso non privo d'interesse stabilirlo per ora soltanto sotto ipotesi di natura elementare per le superficie, evitando così le più delicate considerazioni che si richiederebbero nel caso generale.

Si noti infine che, se mi limito a considerare il caso degl'integrali doppi, i ragionamenti esposti si estendono tuttavia immediatamente anche al caso degl'integrali n -pli.

§ 1. Preliminari sulle superficie.

1. Siano $x(u, v)$, $y(u, v)$ due funzioni continue con derivate parziali prime continue in un dominio limitato D del piano uv , la cui frontiera sia composta da un numero finito di archi di curva dotati in ogni punto di tangente variabile con continuità. Diciamo Σ l'immagine del dominio D sul piano xy nella trasformazione

$$(1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

La Σ sarà una *superficie piana* che potrà ricoprirsi più volte, ed eventualmente, in alcuni punti, anche infinite volte, vale a dire che una stessa coppia di valori x, y può essere la trasformata di più (eventualmente anche infinite) coppie u, v . Per *frontiera* e *punti interni* di Σ s'intendono rispettivamente i corrispondenti in (1) della frontiera e dei punti interni di D .

L'*area* (semplice) di Σ è fornita dall' $\iint_D \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$, l'*area totale* dall' $\iint_D \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$; la *parte positiva* e la *parte negativa dell'area* di Σ sono fornite rispettivamente dalla semisomma e dalla semidifferenza fra l'area totale e l'area semplice.

Se il punto (x, y) è l'immagine in (1) di un numero finito n di punti (u, v) , in nessuno dei quali lo jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ si annulli (oltre eventualmente ad altri punti (u, v) , in ciascuno dei quali lo jacobiano medesimo sia zero),

⁽⁵⁾ Nel senso specificato al n.° 2.

il numero n si dirà l'*ordine totale* di (x, y) rispetto a Σ ; e se fra gli n punti (u, v) ve ne sono n_1 in cui lo jacobiano è positivo ed n_2 in cui esso è negativo, i due numeri n_1 ed n_2 verranno detti rispettivamente *ordine positivo* ed *ordine negativo* di (x, y) rispetto a Σ , e la loro differenza $n_1 - n_2$ sarà l'*ordine* (semplice) di (x, y) rispetto a Σ .

L'insieme dei punti di Σ per cui non resta così definito l'ordine, cioè l'insieme dei punti (x, y) che corrispondono secondo (1) a infiniti punti (u, v) , oppure sono immagini di punti (u, v) in cui lo jacobiano si annulla, deve necessariamente riuscire trascurabile agli effetti della integrazione che fornisce l'area di Σ , sicchè questa potrà ottenersi anche integrando l'ordine rispetto alle variabili x, y , sull'insieme dei punti (x, y) pei quali l'ordine stesso è stato definito. E analogamente l'area totale, la parte positiva e la parte negativa dell'area di Σ si potranno ottenere ordinatamente mediante un'integrazione rispetto alle variabili x, y dell'ordine totale, dell'ordine positivo e dell'ordine negativo.

Per l'ordine di un punto interno (x, y) rispetto a Σ si può dare anche la seguente definizione, equivalente all'altra: congiungendo (x, y) con un punto che descriva la frontiera di Σ nel verso che corrisponde in (1) al verso positivo ⁽⁶⁾ sulla frontiera di D , il raggio congiungente descriverà un cammino angolare equivalente (quando si trascurino angoli di eguale ampiezza percorsi in versi contrari) a un numero finito di angoli giri nel verso positivo o nel verso negativo, oppure equivalente a zero; il numero, corrispondentemente positivo, negativo o nullo, di questi angoli giri dà l'ordine del punto (x, y) rispetto a Σ .

2. Date tre funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ continue con le derivate parziali prime nel dominio D , l'immagine S nello spazio xyz del dominio D , secondo le equazioni

$$(2) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

si dirà una *superficie regolare* di dominio base D , e le (2) si diranno una *rappresentazione parametrica regolare* di S .

I *punti interni* e la *frontiera* di S sono ordinatamente i corrispondenti secondo (2) dei punti interni e della frontiera di D .

⁽⁶⁾ Cioè il verso indicato dall'asse tangente che con la normale interna forma una coppia ordinata congruente alla coppia degli assi coordinati x, y .

L'area di S , fornita dall' $\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} dudv$, nel

caso particolare che S si riduca a una superficie piana, diventa l'area totale di questa.

3. Supponiamo ora di avere una successione di coppie di funzioni $x_n(u, v)$, $y_n(u, v)$, tutte continue in D insieme con le derivate parziali prime, e tali che, uniformemente in D , sia

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(u, v) = x(u, v), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(u, v) = y(u, v).$$

Indichiamo con Σ_n la superficie piana rappresentata da

$$(4) \quad x = x_n(u, v), \quad y = y_n(u, v).$$

Sia, poi, $\Sigma(\rho)$ una porzione di Σ , che abbia una distanza positiva ρ dalla frontiera di Σ (per esempio, l'insieme di tutti i punti di Σ aventi distanza $> \rho$ dalla frontiera), essendo ρ una quantità inferiore al semidiametro di Σ ; e diciamo $D(\rho)$ quella porzione di D , che ha per immagine in (1) $\Sigma(\rho)$.

Poichè le (3) sussistono uniformemente in D , tutti i punti di $\Sigma(\rho)$ faranno parte di Σ_n , da un certo valore di n in poi, ciascuno con lo stesso ordine semplice, come è chiaro in base alla interpretazione geometrica di questo, cui abbiamo accennato in fine del n.º 1. La porzione di Σ_n che si viene così ad ottenere sarà l'immagine in (4) di un'altra porzione $\Delta_n(\rho)$ di D , e riuscirà

$$(5) \quad \iint_{D(\rho)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv = \iint_{\Delta_n(\rho)} \frac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(u, v)} dudv,$$

giacchè tanto il primo che il secondo membro rappresentano l'area di $\Sigma(\rho)$.

4. Sia data una successione di superficie regolari S_n , con le rappresentazioni parametriche regolari

$$(6) \quad x = x_n(u, v), \quad y = y_n(u, v), \quad z = z_n(u, v),$$

e col dominio base D ; e si supponga che, uniformemente in D , sia

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(u, v) = x(u, v), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(u, v) = y(u, v), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(u, v) = z(u, v),$$

laddove le (2) forniscano a loro volta una rappresentazione parametrica regolare della superficie regolare S .

Da quanto abbiamo osservato nel n.º precedente discende facilmente la seguente proposizione:

Detto F_1, F_2, F_3 tre costanti, ρ una quantità opportunamente piccola, $S(\rho)$ la porzione di S che rimane, quando si tolgono da S tutti i punti aventi distanza $\leq \rho$ dalla frontiera, $D(\rho)$ l'insieme dei punti di D avente per immagine $S(\rho)$ in (2), si potrà determinare, da un certo valore di n in poi, un altro campo $\Delta_n(\rho) < D$, tale che riesca

$$(8) \quad \iint_{D(\rho)} \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = \iint_{\Delta_n(\rho)} \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \frac{\partial x_n}{\partial u} & \frac{\partial y_n}{\partial u} & \frac{\partial z_n}{\partial u} \\ \frac{\partial x_n}{\partial v} & \frac{\partial y_n}{\partial v} & \frac{\partial z_n}{\partial v} \end{vmatrix} dudv,$$

almeno tutte le volte che la funzione integranda al primo membro abbia un minimo valore assoluto positivo in D .

Infatti, escludendo il caso privo d'interesse che le F_1, F_2, F_3 siano tutte nulle, diciamo ξ, η, ζ i coseni direttori di un asse equiverso al vettore di componenti F_1, F_2, F_3 ; diciamo poi ξ', η', ζ' e ξ'', η'', ζ'' i coseni direttori di altri due assi, che col primo formino una terna ortogonale, e definiamo in D due nuove funzioni $\alpha(u, v), \beta(u, v)$ mediante le posizioni

$$(9) \quad \alpha = \xi'x + \eta'y + \zeta'z, \quad \beta = \xi''x + \eta''y + \zeta''z,$$

e analogamente le due funzioni $\alpha_n(u, v), \beta_n(u, v)$, mediante le stesse posizioni con le x_n, y_n, z_n invece delle x, y, z .

Ciò posto, la (8) si riduce, a meno del fattore costante $\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$, alla seguente

$$\iint_{D(\rho)} \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)} dudv = \iint_{\Delta_n(\rho)} \frac{\partial(\alpha_n, \beta_n)}{\partial(u, v)} dudv.$$

Siamo così ricondotti al caso del n.º precedente; infatti la frontiera della superficie piana Σ , rappresentata da $\alpha = \alpha(u, v), \beta = \beta(u, v)$, col dominio base D , per ρ sufficientemente prossimo a zero, avrà una distanza positiva dalla frontiera di quella porzione $\Sigma(\rho)$ della Σ stessa, che corrisponde alla porzione $D(\rho)$ di D , giacchè, in base alle (9), i punti (α, β) di Σ possono pensarsi come le proiezioni, su un piano perpendicolare al vettore di componenti F_1, F_2, F_3 , dei punti (x, y, z) di S ; e il coseno dell'angolo formato da codesto piano col piano tangente a S , coincidendo a meno del fattore

costante $\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$ con la funzione integranda del primo membro di (8), resterà in valore assoluto inferiormente limitato da una quantità positiva.

§ 2. Ipotesi e generalità sugli integrali.

5. Fissiamo adesso le ipotesi che intendiamo di supporre verificate per l'integrale di cui studieremo la semicontinuità. L'integrale sarà del tipo

$$(10) \quad I = \iint_D F(x, y, z; X, Y, Z) dudv,$$

dove le x, y, z , espresse in funzione u, v , forniscono una rappresentazione parametrica regolare di una superficie regolare S col dominio base D (n.º 2), e dove si è posto per brevità

$$(11) \quad X = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad Y = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad Z = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Per la $F(x, y, z; X, Y, Z)$ supporremo, in primo luogo, che essa sia continua, insieme con le derivate parziali prime, rispetto a X, Y, Z , al variare del punto (x, y, z) in un campo (insieme aperto) A , nel quale sia contenuta la superficie S , e per ogni terna di valori X, Y, Z non tutti nulli; in secondo luogo, che essa sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto a X, Y, Z , sicchè varrà l'equazione di EULERO

$$(12) \quad F(x, y, z; X, Y, Z) = XF_X + YF_Y + ZF_Z;$$

infine, per ogni punto (x, y, z) del campo A e ogni coppia di punti (X, Y, Z) , (A, B, C) diversi dall'origine supporremo verificate le due disuguaglianze

$$(13) \quad F(x, y, z; X, Y, Z) \geq 0,$$

$$(14) \quad E(x, y, z; X, Y, Z; A, B, C) = F(x, y, z; A, B, C) - AF_X(x, y, z; X, Y, Z) - \\ - BF_Y(x, y, z; X, Y, Z) - CF_Z(x, y, z; X, Y, Z) \geq 0.$$

Si consideri una qualsiasi successione di superficie regolari S_n , con le rappresentazioni parametriche regolari (6) e col dominio base D , per cui siano verificate, uniformemente in D , le relazioni di limite (7); definendo le X_n, Y_n, Z_n con posizione analoga alla (11), si costruisca l'integrale doppio

$$(15) \quad I_n = \iint_D F(x_n, y_n, z_n; X_n, Y_n, Z_n) dudv.$$

Il nostro scopo è di dimostrare che riesce

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \min. I_n \geq I.$$

A tal fine, proveremo che, in conseguenza delle indicate ipotesi, la differenza $I_n - I$, o si può scindere nella somma di vari termini, dei quali alcuni sono non negativi, mentre gli altri, per valori opportunamente scelti dell'indice n , si possono ridurre in valore assoluto inferiori a una quantità positiva piccola a piacere, oppure, sempre per opportuni valori di n si può far diventare maggiore di una quantità positiva grande a piacere. Poichè le ipotesi fatte sulla successione delle S_n sussistono del pari per ogni sottosuccessione di essa, dal nostro ragionamento si concluderà dunque che, in ogni successione estratta dalla $I_1 - I, I_2 - I, \dots$, esistono infiniti termini superiori a una quantità negativa prefissata a piacere, ciò che prova appunto la (16).

6. Premettiamo, in questo numero, alcuni lemmi riguardo alle funzioni $F(x, y, z; X, Y, Z)$ verificanti le ipotesi enunciate or ora.

Se, per una certa terna di valori x, y, z , esistono tre costanti non tutte nulle λ, μ, ν , tali che, qualunque sia il punto X, Y, Z diverso dall'origine, riesca ⁽⁷⁾

$$(17) \quad \lambda F_X(x; X) + \mu F_Y(x; X) + \nu F_Z(x; X) = 0,$$

allora la $F(x; X)$ non può essere che identicamente zero al variare di X, Y, Z .

Invero, dall'ipotesi fatta discende che, qualunque siano le quantità A, B, C, t , la $F(x, y, z; A + \lambda t, B + \mu t, C + \nu t)$ è indipendente da t ; in particolare, $F(x; \lambda t)$ è zero qualunque sia t . Detta τ un'altra quantità arbitraria, sarà quindi, tenendo conto dell'omogeneità,

$$\frac{F(x; A\tau + \lambda t) - F(x; \lambda t)}{\tau} = \frac{|\tau|}{\tau} F(x; A).$$

Ma il primo membro, per $\tau \rightarrow 0$, deve avere il limite determinato e finito

$$AF_X(x; \lambda t) + BF_Y(x; \lambda t) + CF_Z(x; \lambda t),$$

mentre il secondo membro tende a $F(x; A)$ o a $-F(x; A)$, secondochè $\tau \rightarrow 0$ per valori positivi o per valori negativi. Ciò non implica contraddizione

⁽⁷⁾ Per brevità, qui e in seguito, per ciascuna delle terne di argomenti da cui dipendono le funzioni che si considerano, scriviamo soltanto il primo argomento.

soltanto nel caso che $F(x; A)$ sia zero, onde, per l'arbitrarietà di A, B, C , resta provato quanto si voleva.

Se, per una data terna di valori x, y, z , la $F(x; X)$ non è identicamente zero al variare di X, Y, Z , allora l'insieme \mathcal{E}_0 degli eventuali punti X, Y, Z , oltre all'origine, in cui $F(x; X) = 0$, è un insieme convesso costituito da semirette per l'origine, formanti tutte con una certa direzione angoli di ampiezza non superiore a una certa quantità $< \frac{\pi}{2}$.

Dal fatto che la funzione E di Weierstrass non è mai negativa segue, invero, che, per ogni t ,

$$F(x; A) \geq \frac{d}{dt} F(x; X + At),$$

onde, integrando rispetto a t e sostituendo poi le X, Y, Z con le stesse quantità moltiplicate per $1 - t$, risulta, per t compreso fra 0 ed 1,

$$F(x; At + X(1 - t)) \leq F(x; A)t + F(x; X)(1 - t).$$

Pertanto, se (A, B, C) e (X, Y, Z) sono due punti in cui la F è inferiore a una certa quantità ω , in ogni punto del segmento che li congiunge la F sarà pure inferiore ad ω . L'insieme $\mathcal{E}(\omega)$ dei punti (X, Y, Z) in cui riesce $F(x; X) \leq \omega$ (e quindi, in particolare, \mathcal{E}_0) è un insieme convesso.

Poichè inoltre, per l'omogeneità di F , è chiaro che \mathcal{E}_0 si compone di semirette per l'origine, basterà provare ormai che \mathcal{E}_0 non può essere formato da tutti i punti compresi in un angolo diedro con lo spigolo passante per l'origine, perchè allora manifestamente esisteranno piani passanti per l'origine e non aventi ulteriori punti in comune con \mathcal{E}_0 , ed essendo \mathcal{E}_0 un insieme chiuso, per una direzione perpendicolare a un piano cosiffatto si verificherà evidentemente quanto afferma l'enunciato.

Ma se \mathcal{E}_0 contenesse tutta una retta r per l'origine, esso sarebbe necessariamente formato da rette parallele a r , e lo stesso varrebbe per l'insieme $\mathcal{E}(\omega)$, qualunque sia ω ; sicchè F dovrebbe essere costante su ogni retta parallela a r , cioè, detti λ, μ, ν i coefficienti di direzione di r , varrebbe identicamente la (17), ciò che, in base al lemma precedente, contraddice l'ipotesi che $F(x; X)$ non sia identicamente nulla.

Se, per una data terna di valori x, y, z , la $F(x; X)$ non è identicamente zero al variare di X, Y, Z , ad ogni quantità positiva ω sufficientemente piccola si potranno far corrispondere una quantità $\theta > 0$ e un raggio r , tali che,

per ogni raggio formante con r un angolo minore di $\frac{\pi}{2} + \theta$, detti ξ, η, ζ i rispettivi coseni direttori, riesca $F(\mathbf{x}; \xi) > \omega$.

Infatti, l'insieme dei punti comuni all'insieme \mathcal{E}_0 , considerato or ora e alla superficie sferica di centro nell'origine e raggio unità, secondo quanto risulta dalla dimostrazione precedente, se non è vuoto, è tutto contenuto in un emisfero, senza nessun punto in comune col cerchio massimo che delimita l'emisfero stesso. Egualmente accadrà per l'insieme dei punti comuni ad $\mathcal{E}(\omega)$ e alla medesima sfera, quando ω è sufficientemente prossimo a zero, per ragione di continuità. Detto θ il minimo della distanza sferica da un punto di $\mathcal{E}(\omega)$ a un punto del suddetto cerchio massimo ed r il raggio perpendicolare al piano di questo e situato nel semispazio che non contiene $\mathcal{E}(\omega)$, è chiaro allora che, per r e θ così definiti, si verificherà quanto afferma l'enunciato.

§ 3. Semicontinuità degl'integrali.

7. Per raggiungere lo scopo indicato in fine del n.º 5, ci converrà distinguere due diversi casi, secondo quanto adesso stabiliremo. Fissiamo anzitutto una quantità positiva σ , minore sia del massimo di F che del massimo di $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ su S . Diciamo $S(\sigma)$ quella porzione di S , in cui riesce $F > \sigma$, $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} > \sigma$, e $D(\sigma)$ la porzione di D , che ha per immagine, in (2), $S(\sigma)$ e la sua frontiera. Scomponiamo poi $D(\sigma)$ in un numero finito di domini parziali $D^{(h)}(\sigma)$, ciascuno limitato da un numero finito di archi di curva dotati in ogni punto di tangente variabile con continuità. Sia δ il massimo dei diametri dei domini $D^{(h)}(\sigma)$, e siano $S^{(h)}(\sigma)$, $S_{,,}^{(h)}(\sigma)$ le porzioni, rispettivamente di S e di $S_{,,}$, corrispondenti a $D^{(h)}(\sigma)$. Fissata poi ancora una quantità positiva ρ , minore del semidiametro di $S^{(h)}(\sigma)$, togliamo da $S^{(h)}(\sigma)$ e, per n sufficientemente grande, da $S_{,,}^{(h)}(\sigma)$ tutti i punti aventi dalle rispettive frontiere una distanza minore di ρ , e diciamo $S^{(h)}(\rho, \sigma)$, $S_{,,}^{(h)}(\rho, \sigma)$ rispettivamente le porzioni rimanenti, e $D^{(h)}(\rho, \sigma)$, $D_{,,}^{(h)}(\rho, \sigma)$ le corrispondenti porzioni di $D^{(h)}(\sigma)$.

Ciò posto, potranno presentarsi le due alternative seguenti:

1) o, per ogni σ , esiste un numero positivo P_σ tale che, per una opportuna decomposizione di $D(\sigma)$, per valori di δ e ρ arbitrariamente prossimi a zero e per valori di n arbitrariamente grandi, riesca

$$\sum_h \text{area } S_{,,}^{(h)}(\rho, \sigma) \leq P_\sigma,$$

2) oppure, per σ abbastanza piccolo, comunque si assegni un numero positivo P , si possono trovare un δ_P , un ρ_P e un n_P tali che, per ogni decomposizione di $D(\sigma)$ con $\delta < \delta_P$ e per $\rho < \rho_P$, $n > n_P$, sia

$$\sum_n \text{area } S_n^{(h)}(\rho, \sigma) > P.$$

A proposito di queste alternative, aggiungiamo qui un'osservazione, che ci tornerà utile in seguito. Siano $\xi^{(h)}$, $\eta^{(h)}$, $\zeta^{(h)}$ i coseni direttori di un asse, che con la normale in un punto variabile di $S^{(h)}(\sigma)$ formi un angolo di ampiezza limitata superiormente da una quantità minore di $\frac{\pi}{2}$, cioè tale che $|\xi^{(h)}X + \eta^{(h)}Y + \zeta^{(h)}Z|$ sia limitato inferiormente in $D^{(h)}(\sigma)$ da una quantità maggiore di zero, e determiniamo, come è indicato nel n.º 4, un insieme $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma) < D^{(h)}(\sigma)$, tale che sia

$$(18) \quad \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)} (\xi^{(h)}X_n + \eta^{(h)}Y_n + \zeta^{(h)}Z_n) dudv = \iint_{D^{(h)}(\rho, \sigma)} (\xi^{(h)}X + \eta^{(h)}Y + \zeta^{(h)}Z) dudv.$$

Ebbene, detta $T_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ la porzione di $S_n(\sigma)$ corrispondente a se vale l'alternativa 1), oppure l'alternativa 2), allora la circostanza specificata in 1), o rispettivamente in 2), si presenterà egualmente, ove si sostituiscono le $S_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ con le $T_n^{(h)}(\rho, \sigma)$.

Ciò riuscirà manifesto, ove si riconosca che, fissati ρ , σ e la decomposizione di $D(\sigma)$ in domini parziali $D^{(h)}(\sigma)$, e presa a piacere una quantità positiva $\rho' < \rho$, da un certo valore di n in poi $T_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ conterrà $S_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ e $S_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ conterrà $T_n^{(h)}(\rho, \sigma)$. Ora a tale proposito si può osservare che $T_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ risulta definita come quella porzione di $S_n^{(h)}(\sigma)$, che è contenuta entro il cilindro formato da tutte le rette con la direzione $\xi^{(h)}$, $\eta^{(h)}$, $\zeta^{(h)}$ condotte per i punti della frontiera di $S^{(h)}(\rho', \sigma)$, onde, prendendo n sufficientemente grande, si potrà rendere minore di una quantità prefissata piccola a piacere la distanza di ogni punto di $T_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ da $S^{(h)}(\rho', \sigma)$, così come la distanza di ogni punto di $S_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ da $S^{(h)}(\rho, \sigma)$. Sicchè, essendo $S^{(h)}(\rho, \sigma)$ contenuta in $S^{(h)}(\rho', \sigma)$ ed essendo maggiore di zero la distanza tra la frontiera di $S^{(h)}(\rho, \sigma)$ e quella di $S^{(h)}(\rho', \sigma)$, è chiaro come, sempre per n sufficientemente grande, delle due porzioni $S_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ e $T_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ di $S_n^{(h)}(\sigma)$ la prima debba esser contenuta nella seconda; e allo stesso modo si vede come, a sua volta, $T_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ sia contenuta in $S_n^{(h)}(\rho', \sigma)$.

8. Supponiamo ora che si presenti l'alternativa 1). In ogni dominio parziale $D^{(h)}(\sigma)$ fissiamo un punto $(u^{(h)}, v^{(h)})$ e, convenendo di rappresentare

il valore assunto da una funzione di u, v nel punto $(u^{(h)}, v^{(h)})$ con l'aggiunta alla lettera, che simboleggia quella funzione, dell'indice superiore h , determiniamo, secondo quanto è detto nel n.º 4, un campo $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma) < D^{(h)}(\sigma)$, tale che risulti

$$(19) \quad \iint_{\bar{D}^{(h)}(\rho, \sigma)} [X F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \dots] dudv = \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)} [X_n F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \dots] dudv,$$

laddove si noti che, in virtù di (12) e (13), la funzione integranda al primo membro sarà certamente sempre superiore a una quantità maggiore di zero in tutto il dominio $D^{(h)}(\sigma)$, purchè la quantità δ si scelga sufficientemente piccola. Diciamo infine $T_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ la porzione di S_n corrispondente a $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ e chiamiamo $D(\rho, \sigma)$ e $\Delta_n(\rho, \sigma)$ rispettivamente la somma delle porzioni $D^{(h)}(\rho, \sigma)$ e quella delle porzioni $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ di $D^{(h)}(\sigma)$.

Chiarito in tal modo il significato dei simboli, scriviamo la seguente identità:

$$(20) \quad I_n \quad I = \iint_{\bar{D} - \Delta_n(\rho, \sigma)} F(x_n; X_n) dudv - \iint_{\bar{D} - D(\sigma)} F(x; X) dudv - \iint_{D(\sigma) - D(\rho, \sigma)} F(x; X) dudv + \\ + \Sigma \left[\iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)} \{ F(x_n; X_n) - F(x^{(h)}; X_n) \} dudv + \iint_{\bar{D}^{(h)}(\rho, \sigma)} \{ F(x^{(h)}; X^{(h)}) - F(x; X) \} dudv + \right. \\ \left. + \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)} F(x^{(h)}; X_n) dudv - F(x^{(h)}; X^{(h)}) \cdot \text{mis } D^{(h)}(\rho, \sigma) \right].$$

Agli ultimi due termini sotto al segno di Σ in questa uguaglianza sostituiamo un'altra espressione ad essi equivalente: tenendo presenti le (12) e (13), scriviamo cioè

$$\iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)} F(x^{(h)}; X_n) dudv - F(x^{(h)}; X^{(h)}) \cdot \text{mis } D^{(h)}(\rho, \sigma) = \iint_{\bar{D}^{(h)}(\rho, \sigma)} [(X - X^{(h)}) F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \dots] dudv + \\ + \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)} F(x^{(h)}; X_n) dudv - \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)} [X_n F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \dots] dudv,$$

oppure anche, indicando con $\bar{\Delta}_n^{(h)}$ un campo arbitrariamente fissato in $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ e ricordando l'espressione (14) della funzione E di Weierstrass,

$$(21) \quad \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)} F(x^{(h)}; X_n) dudv - F(x^{(h)}; X^{(h)}) \cdot \text{mis } D^{(h)}(\rho, \sigma) = \iint_{\bar{D}^{(h)}(\rho, \sigma)} [(X - X^{(h)}) F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \dots] dudv + \\ + \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma) - \bar{\Delta}_n^{(h)}} F(x^{(h)}; X_n) dudv + \iint_{\bar{\Delta}_n^{(h)}} E(x^{(h)}; X^{(h)}; X_n) dudv - \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma) - \bar{\Delta}_n^{(h)}} [X_n F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \dots] dudv.$$

Ciò posto, dato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, fissiamo, come è evidentemente sempre possibile, un σ , minore del massimo di F e del massimo di $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ su S , così prossimo a zero che il secondo integrale al secondo membro di (20) risulti minore di ε . Prendendo δ sufficientemente prossimo a zero, potremo poi sempre ottenere che, per n sufficientemente grande, risulti in tutto $D^{(h)}(\sigma)$

$$(22) \quad |F(x_n; X_n) - F(x^{(h)}; X_n)| < \frac{\varepsilon}{P_\sigma} \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2},$$

come si riconosce tenendo presente il fatto che, per quanto si è supposto, le $x_n(u, v)$, $y_n(u, v)$, $z_n(u, v)$ sono uniformemente continue in D , e ricordando la supposta omogeneità di F .

Inoltre, per la supposta continuità delle $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$, prendendo, ove occorra, un δ ancora più prossimo a zero, si potrà far sì che, in tutto $D^{(h)}(\sigma)$, sia

$$(23) \quad |F(x^{(h)}; X^{(h)}) - F(x; X)| < \varepsilon, \quad |(X - X^{(h)})F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \dots| < \varepsilon.$$

Infine, prendendo anche ρ abbastanza piccola, potremo ottenere che il terzo integrale al secondo membro di (20) sia $< \varepsilon$.

Premesso ciò, esaminiamo i diversi termini in cui resta decomposta la differenza $I_n - I$, secondo le formole (20) e (21). Il primo integrale al secondo membro di (20) è non negativo, per (13); il secondo e il terzo sono minori di ε ; il primo integrale sotto al segno di Σ è, per (22), in valore assoluto minore di

$$\frac{\varepsilon}{P_\sigma} \cdot \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)} \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} dudv = \frac{\varepsilon}{P_\sigma} \cdot \text{area } T_n^{(h)}(\rho, \sigma);$$

il secondo è, per (23), in valore assoluto minore di $\varepsilon \cdot \text{mis } D^{(h)}(\rho, \sigma)$; il terzo e il quarto sono sostituiti dal secondo membro di (21), dove il primo integrale è pure, per (23), in valore assoluto minore di $\varepsilon \cdot \text{mis } D^{(h)}(\rho, \sigma)$, il secondo e il terzo sono non negativi, per (13) e (14), e l'ultimo, che va poi preso col segno meno, sarà non positivo, ove si determini il campo $\bar{\Delta}_n^{(h)}$, del quale possiamo ancora disporre ad arbitrio, come l'insieme dei punti di $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ in cui è positiva la funzione integranda.

Per l'osservazione fatta nel n.º 7, poichè supponiamo che sia verificata l'alternativa 1), potremo determinare δ e ρ prossimi a zero ed n grande come ora si è detto, in maniera tale che riesca inoltre

$$\sum_n \text{area } T_n^{(h)}(\rho, \sigma) \leq P_\sigma.$$

Si riconosce allora come, in base a (20) e (21), la differenza $I_n - I$ resti decomposta in una somma di termini, di cui alcuni positivi o nulli e i rimanenti complessivamente limitati in valore assoluto dalla quantità $\varepsilon(3 + 2 \text{mis} D)$, che, per l'arbitrarietà di ε , si può rendere piccola a piacere.

9. Passiamo adesso al caso che si verifichi l'alternativa 2) (n.º 7). In ogni punto di $S(\sigma)$, per il modo come abbiamo definita questa porzione di S , riesce

$$F\left(x; \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) > \frac{\sigma}{M},$$

ove si indichi con M il massimo di $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ su S .

Diciamo $C(\sigma)$ un intorno di $S(\sigma)$ formato da tutti i punti aventi da $S(\sigma)$ distanza minore di una data quantità, e $C^{(h)}(\sigma)$ l'intorno di $S^{(h)}(\sigma)$ formato dai punti aventi da $S^{(h)}(\sigma)$ distanza minore della stessa quantità. Per ragione di continuità, in ogni punto (x, y, z) di $C(\sigma)$, la F , per una opportuna terna di valori, con somma dei quadrati eguale ad 1, dei secondi argomenti, si manterrà superiore a una costante maggiore di zero. In base al terzo lemma del n.º 6, detta ω una quantità positiva sufficientemente prossima a zero, sarà allora possibile determinare, non appena il massimo diametro δ dei domini di decomposizione $D^{(h)}(\sigma)$ sia abbastanza piccolo, una costante θ e, per ogni dominio parziale $D^{(h)}(\sigma)$, un raggio $r^{(h)}$, tali che, detti ξ, η, ζ i coseni direttori di un qualsiasi raggio formante con $r^{(h)}$ un angolo di ampiezza minore di $\theta + \frac{\pi}{2}$, per ogni punto (x, y, z) di $C^{(h)}(\sigma)$, riesca $F(x, \xi) > \omega$.

Supponiamo inoltre che δ sia pure così prossimo a zero, che, per ciascuna delle porzioni $S^{(h)}(\sigma)$, la normale in un punto variabile formi sempre con una certa direzione, un angolo di ampiezza non superiore a una fissata quantità θ' minore di θ .

Ciò posto, si potrà determinare un $\alpha > 0$ e una direzione $(\xi^{(h)}, \eta^{(h)}, \zeta^{(h)})$ formante con $r^{(h)}$ un angolo minore di θ , tale che $|\xi^{(h)}X + \eta^{(h)}Y + \zeta^{(h)}Z|$ sia limitato inferiormente, in $D^{(h)}(\sigma)$, da una quantità maggiore di zero e tale che sia

$$(24) \quad \iint_{D_n^{(h)}(\rho, \sigma)} |X_n \xi^{(h)} + Y_n \eta^{(h)} + Z_n \zeta^{(h)}| \, dudv \geq \alpha \cdot \text{area } S_n^{(h)}(\rho, \sigma).$$

Infatti, fra le direzioni $(\xi^{(h)}, \eta^{(h)}, \zeta^{(h)})$ formanti con $r^{(h)}$ un angolo $< \theta$ e tali che $|\xi^{(h)}X + \eta^{(h)}Y + \zeta^{(h)}Z|$ superi in tutto $D^{(h)}(\sigma)$ una costante maggiore di zero, vi sono certamente tutte quelle formanti con una certa direzione

fissa un angolo minore di $\frac{\theta - \theta'}{2}$. Fra queste se ne potranno scegliere tre $(\xi_i^{(h)}, \eta_i^{(h)}, \zeta_i^{(h)})$ ($i = 1, 2, 3$) formanti un triedro non degenere; e, qualunque siano X_n, Y_n, Z_n , riuscirà

$$\sum_{i=1,2,3} (\xi_i^{(h)} X_n + \eta_i^{(h)} Y_n + \zeta_i^{(h)} Z_n)^2 \geq N^2 \cdot (X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2),$$

dove N^2 si potrà porre uguale al quadrato del determinante $\begin{vmatrix} \xi_1^{(h)} & \eta_1^{(h)} & \zeta_1^{(h)} \\ \xi_2^{(h)} & \eta_2^{(h)} & \zeta_2^{(h)} \\ \xi_3^{(h)} & \eta_3^{(h)} & \zeta_3^{(h)} \end{vmatrix}$,

diviso per la somma dei quadrati dei minori di 2° grado del determinante medesimo. In ogni punto di $D_n^{(h)}(\rho, \sigma)$, sarà verificata una almeno delle tre disuguaglianze

$$|\xi_i^{(h)} X_n + \eta_i^{(h)} Y_n + \zeta_i^{(h)} Z_n| \geq \frac{N}{\sqrt{3}} \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}, \quad (i=1, 2, 3),$$

sicchè le $\xi_i^{(h)}, \eta_i^{(h)}, \zeta_i^{(h)}$, per un valore almeno di i , danno luogo alla (24), ove si ponga $\alpha = \frac{N}{3\sqrt{3}}$; onde si riconosce pure che α non dipende da δ , ma soltanto da θ e θ' .

Fissate in tal modo le $\xi^{(h)}, \eta^{(h)}, \zeta^{(h)}$ ⁽⁸⁾, determiniamo poi al solito modo il $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ in maniera che valga la (18). Per n sufficientemente grande e $\rho' < \rho$, $\Delta_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ conterrà $D_n^{(h)}(\rho, \sigma)$, e pertanto sarà pure

$$(25) \quad \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho', \sigma)} |X_n \xi^{(h)} + Y_n \eta^{(h)} + Z_n \zeta^{(h)}| dudv > \alpha \cdot \text{area } S_n^{(h)}(\rho, \sigma).$$

E se indichiamo con $\bar{\Delta}_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ l'insieme dei punti di $\Delta_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ in cui è

$$(26) \quad X_n \xi^{(h)} + Y_n \eta^{(h)} + Z_n \zeta^{(h)} > 0,$$

da (18) e (25) deduciamo

$$(27) \quad \iint_{\bar{\Delta}_n^{(h)}(\rho', \sigma)} (X_n \xi^{(h)} + Y_n \eta^{(h)} + Z_n \zeta^{(h)}) dudv > \frac{1}{2} \alpha \cdot \text{area } S_n^{(h)}(\rho, \sigma) + \\ + \frac{1}{2} \iint_{D_n^{(h)}(\rho', \sigma)} (X \xi^{(h)} + Y \eta^{(h)} + Z \zeta^{(h)}) dudv.$$

(8) Le $\xi^{(h)}, \eta^{(h)}, \zeta^{(h)}$ verranno a dipendere da n , in quanto che, al variare di n , in generale si dovrà scegliere volta a volta uno diverso fra i tre assi del triedro fissato; ma ciò non ha importanza per la dimostrazione del testo.

D'altra parte, la (26) assicura che il vettore X_n, Y_n, Z_n forma un angolo acuto con $(\xi^{(h)}, \eta^{(h)}, \zeta^{(h)})$, e pertanto forma un angolo $< \theta + \frac{\pi}{2}$ con $r^{(h)}$, onde, non appena n sia sufficientemente grande affinchè $S_n(\sigma)$ sia contenuta nell'intorno $C(\sigma)$ di $S(\sigma)$ considerato in principio di questo n.º, risulterà

$$(28) \quad \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho', \sigma)} F(x_n; X_n) dudv \geq \omega \cdot \iint_{\Delta_n^{(h)}(\rho', \sigma)} \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} dudv.$$

Ma l'integrale al secondo membro di questa disuguaglianza evidentemente supera quello al primo membro della (27). Sommando, dunque, rispetto ad h , e tenendo conto del fatto che F non è mai negativa, da (27) e (28) si ricava infine

$$\iint_D F(x_n; X_n) dudv > \frac{1}{2} \omega \alpha \cdot \Sigma \text{area } S_n^{(h)}(\rho, \sigma) + \frac{1}{2} \omega \Sigma \iint_{D_n^{(h)}(\rho', \sigma)} (X\xi^{(h)} + Y\eta^{(h)} + Z\zeta^{(h)}) du dv.$$

Dei due termini al secondo membro, il secondo è limitato superiormente in valor assoluto da $\frac{1}{2} \omega \cdot \text{area } S$, mentre il primo, poichè ci troviamo ora nell'alternativa 2) del n.º 7, si potrà rendere grande a piacere; infatti, come abbiamo rilevato, ω ed α sono quantità fissate indipendentemente da ρ e δ , per tutti i valori sufficientemente piccoli di queste. E con ciò resta completata la dimostrazione.