Sopra alcune applicazioni degli invarianti adiabatici.

Memoria di DARIO GRAFFI (a Cagliari).

Sunto. - *Nel primo capitolo si generalizza e si perfeziona il metodo trattato in ricerche precedenti per verificare se l'errore commesso ritenendo invarianti adiabatici gli integrali ciclici di BOHR-SOMMERFELD di un sistema meccanico qualora i parametri non variano in maniera infinitamente lenta e graduale rimane entro limiti prefissati. I risultati vengono applicati al problema del moto armonico con forza di richiamo variabile col tempo e al problema dei due corpi di massa variabile dimostrando come una insignificante variazione di eccentricità dell'orbita di uno dei due corpi rispetto all'altro non sia incompatibile con una enorme variazione di massa.*

Nel secondo capitolo viene indicata un metodo di integrazione approssimata per i sistemi meccanici con parametri dipendenti dal tempo, e si calcola un valore maggiore per l'errore commesso con questa approssimazione.

Nel terzo capitolo si tratta, in vista di ricerche future, lo studio di un sistema meccanico con due parametri variabili di cui uno solo in maniera prossima ad essere infinitamente lenta e graduale, e si dimostra come gl'integrali ciclici del sistema possono venire approssimati con altre grandezza di più facile calcolo.

INTRODUZIONE

L'esistenza di invarianti adiabatici per un sistema meccanico, dipende anzitutto, come è noto, dal variare infinitamente lento ⁽¹⁾ di alcuni parametri del sistema stesso. Siccome tale condizione non è mai in pratica verificata esattamente, abbiamo, in note precedenti ⁽²⁾, stabiliti metodi per calcolare se l'errore commesso nelle applicazioni degli invarianti adiabatici resta compreso entro limiti prefissati. E questi risultati abbiamo applicato al problema dei due corpi con massa variabile.

⁽¹⁾ Come del resto è notissimo non basta ammettere che i parametri varino in maniera infinitamente lenta, ma occorrono altre condizioni per assicurare l'invarianza adiabatica. Ma su questo e sul concetto di variazione infinitamente lenta di un parametro torneremo in seguito.

⁽²⁾ Gli invarianti adiabatici come metodo d'integrazione approssimata di equazioni differenziali. « Rendiconti Accademia dei Lincei », I sem., 1932, pag. 657. Limitazione dei valori degli invarianti adiabatici con applicazione al problema delle masse variabili. Parte I e II « Atti Accademia Torino », 1933.

Nel presente lavoro, completeremo ed estenderemo quelle ricerche. Ci limiteremo però ancora a sistemi con un grado di libertà, e le grandezze che al limite potrebbero essere invarianti adiabatici, saranno gli integrali ciclici di BOHR-SOMMERFELD.

Crediamo opportuno per far comprendere meglio lo scopo del lavoro esporre brevemente i principali risultati che in esso verranno conseguiti.

Cominceremo con ottenere, sia pure seguendo metodi già esposti nelle altre note citate, una nuova formula per il limite superiore dell'errore che si commette considerando quegli integrali di SOMMERFELD come invarianti. Queste formule, che sono in sostanza generalizzazione di quelle ottenute in un caso particolare del problema delle masse variabili ⁽¹⁾, offrono alcuni notevoli vantaggi rispetto alle altre finora ottenute. Infatti tali formule sono di più facile applicazione ai sistemi meccanici, di più, contenendo grandezze dipendenti dai parametri (e non esplicitamente dal tempo come le formule delle altre note), ossia la variazione ⁽²⁾ totale dei parametri stessi in un periodo e nell'intervallo in cui si studia l'eventuale variabilità dell'integrale di SOMMERFELD, è più spedito ottenere da esse deduzioni generali e di carattere pratico.

Applicheremo questi risultati ai problemi già presi in esame nelle altre note, e cioè al moto armonico con forza d'attrazione dipendente dal tempo e al problema dei due corpi di massa variabile. Nel primo caso otterremo limiti superiori dell'errore commesso in generale più bassi di quelli trovati nella nostra nota citata del 1932. Nel secondo caso potremo generalizzare con opportune ipotesi i risultati che in altri lavori abbiamo ottenuti con leggi speciali per la variazione della massa, cioè verificheremo che una variazione sensibile sull'eccentricità dell'orbita descritta da un corpo rispetto all'altro si può ottenere ammettendo, anzitutto, enormi variazioni della massa dei due corpi.

⁽¹⁾ Sull'eccentricità dell'orbita nel problema dei due corpi di massa variabile. « Rendiconti Accademia dei Lincei », I sem., 1934, pag. 144 e 223.

⁽²⁾ Il concetto di variazione totale si trova esposto p. es. in L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Bologna 1923, I vol., pag. 40. Siccome in questo trattato a pag. 171 per le funzioni assolutamente continue (e quindi in particolare per le funzioni derivabili e con derivata continua a cui sempre ci limiteremo) si dimostra che la variazione

totale di una funzione $f(x)$ in un intervallo (a, b) vale $\int_a^b |f'| dx$ noi intenderemo sempre questo

integrale come la variazione di $f(x)$ in (a, b) . È da notare che se $f(x)$ è sempre crescente o decrescente la variazione totale vale $|f(b) - f(a)|$.

Verificheremo inoltre che le formule di questo lavoro sono applicabili anche ad intervalli infiniti, il che non sarebbe possibile con quelle delle altre Note ⁽¹⁾.

Passeremo poi a vedere se è possibile ottenere per mezzo del concetto di invariante adiabatico un metodo d'integrazione approssimata delle equazioni del moto di un sistema meccanico, riprendendo così uno studio iniziato nel 1932 e risoluto per il caso particolare del moto armonico ora ricordato. Noi vedremo che questo metodo non è sempre applicabile per tutto l'intervallo in cui si può ritenere l'integrale ciclico invariante con errore trascurabile, salvo casi molto particolari. Però se limitiamo il metodo d'integrazione ad un intervallo in cui è trascurabile il quadrato della variazione del parametro ⁽²⁾, allora diventa pure trascurabile l'errore commesso nel sostituire la soluzione esatta con quella approssimata. Si noterà che una analoga proprietà vale per il metodo delle perturbazioni, ma a noi sembra il nostro metodo più semplice, e quello che più importa, è che con questo metodo si può conoscere un limite superiore dell'errore commesso.

Infine svolgeremo la seguente questione che ci si è presentata in un problema di meccanica celeste. Studieremo il caso di un sistema meccanico in cui vi sono due parametri, uno solo però variabile in una maniera prossima a quella che assicura l'invarianza adiabatica degli integrali ciclici. Troveremo che l'integrale ciclico in un intervallo in cui resta finita la variazione totale dei due parametri, si avvicina approssimativamente ad una grandezza di più facile calcolo, almeno in certi casi. O per meglio dire calcoleremo un limite superiore per l'errore che si commette sostituendo all'integrale ciclico questo valore approssimato e vedremo che tale limite diventa tanto più piccolo quanto più la variazione del primo parametro si avvicina a quella che assicura l'invarianza adiabatica. Termineremo con la discussione della portata e dell'applicabilità di questo risultato ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Notiamo che le formule citate valgono qualunque sia il modo di variazione dei parametri ma, come vedremo, esse danno errori tanto più piccoli quanto più il detto modo di variazione si avvicina a quello che assicura l'invarianza adiabatica.

⁽²⁾ A rigore l'intervallo in cui è valida la nostra integrazione approssimata non coincide con quello indicato nel testo, ma ne differisce in generale di poco. La cosa sarà naturalmente precisata più avanti.

⁽³⁾ In un sunto dei miei lavori già citati, fatti dal WINTNER sui « Zentralblatt für Mathematik » (5-15 e 7-372) si afferma che l'idea delle mie altre ricerche non è nuova, perchè l'ebbe già il KNESER (« Mathematischen Annalen », 91, 155, 1924). Debbo dichiarare che a me sembra essere scopo del KNESER quello di dare una dimostrazione esatta dell'invarianza adiabatica degli integrali ciclici di BOHR-SOMMERFELD, mentre la mia ricerca si propone (ripetiamolo) di ottenere un limite superiore per l'errore commesso, qualora i parametri non varino nel

CAPITOLO I.

1. Formule introduttive. — Si abbia un sistema meccanico ad un grado di libertà retto dalle equazioni Hamiltoniane nelle variabili p e q :

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$$

dove la funzione di HAMILTON $\mathcal{H}$ dipende, oltre che da p e q , da un certo numero di parametri variabili col tempo. Noi supporremo per fissare le idee che questi parametri siano in numero di due e li indicheremo con le lettere a e b . Adoperiamo due parametri in vista delle questioni che tratteremo nel terzo capitolo, sebbene per gli scopi di questo basterebbe usare, (e il procedimento sarebbe più semplice) un parametro solo.

Passiamo a formulare le ipotesi fondamentali per la nostra ricerca. Ammetteremo anzitutto che ad ogni valore per a e b compreso entro un certo campo (connesso) C si possa coordinare un campo A del piano delle p, q tale che le soluzioni di (1) con a e b costanti e con condizioni iniziali entro il corrispondente A siano periodiche e tutte contenute in A . Potremo perciò ad ogni valore a, b di C ed ad ogni p, q contenuto nel corrispondente A coordinare l'integrale ciclico di BOHR-SOMMERFELD $J = \oint pdq$. Queste J relative ai punti di A le supporremo variabili con continuità fra due valori J_1 e J_2 alla loro volta dipendenti con continuità da a, b . Ammetteremo anche, benchè non sia strettamente necessario, nello spazio delle J, a, b , convesso il campo (che diremo campo B) limitato da J_1, J_2 e da una superficie cilindrica retta di base C .

Supporremo poi che si possa esprimere $\mathcal{H}$ come funzione univoca di J, a, b , che per ogni (a, b) di C e per ogni J compreso i corrispondenti J_1, J_2 , $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J}$ sia sempre dello stesso segno e che i valori iniziali di p e q siano compresi nel campo A relativo ad $a(0), b(0)$.

modo che assicura l'invarianza adiabatica degli integrali ora citati. Di più nella sua Nota il KNESER non fa alcuna applicazione dei suoi risultati, tanto meno al problema delle masse variabili, nel quale gli invarianti adiabatici furono introdotti solo nel 1928 dal LEVI-CIVITA. Per queste ragioni mi sembra inesatta l'asserzione del WINTNER.

Debbo dichiarare però che ho preso dal KNESER alcune notazioni.

Si osservi ancora che in questo lavoro si usa l'espressione limite superiore dell'errore, ma che sarebbe più esatto adoperare il termine valore maggiorante.

Ciò posto potremo formare l'equazione di JACOBI ponendo in luogo di E la $\mathcal{H}(J, a, b)$. Mediante un integrale completo di questa equazione $V(q, J, a, b)$ (integrale che si ottiene facilmente mediante una quadratura) potremo avere la nota trasformazione canonica delle variabili p e q in nuove variabili di cui una è la J e l'altra la sua coniugata che indicheremo con $-w$. Tale trasformazione sarà data ovviamente dalle equazioni:

$$(2) \quad p = \frac{\partial V}{\partial q} \quad -w = -\frac{\partial V}{\partial J}$$

le quali come è noto definiscono p e q come funzioni periodiche di w con periodo 1 s'intende per (a, b) costante e entro C e J compreso fra i corrispondenti J_1, J_2 .

Allora le equazioni relative alle J e w saranno sempre del tipo Hamiltoniano con la funzione di HAMILTON uguale alla $H(J, a, b) + \frac{\partial V}{\partial t}$

$$(3) \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{\partial}{\partial(-w)} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad \frac{d(-w)}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial J} + \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \right).$$

Ora la V è funzione esplicita del tempo solo attraverso a e b perciò è:

$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial a} a' + \frac{\partial V}{\partial b} b'.$$

Se ora indichiamo con $J_a, J_b, w_a, w_b, \omega$ rispettivamente le derivate $\frac{\partial^2 V}{\partial w \partial a}, \frac{\partial^2 V}{\partial w \partial b}, \frac{\partial^2 V}{\partial J \partial a}, \frac{\partial^2 V}{\partial J \partial b}, \frac{\partial H}{\partial J}$, le (3) assumono la forma:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dJ}{dt} = -a'J_a - b'J_b \\ \frac{dw}{dt} = \omega + a'w_a + b'w_b. \end{cases}$$

Le J_a, J_b, w_a, w_b saranno in generale funzioni di J, w, a, b . Esse godono anzitutto della seguente proprietà. Essendo come è noto $\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}$ ⁽¹⁾, fissati

⁽¹⁾ Per comprendere ciò si osservi che esprimendo la $V(q, J, a, b)$ in funzione di w cioè ponendo al posto q la sua espressione in funzione di w si ottiene una funzione multi-forme tale cioè che se w aumenta di uno la V aumenta di J ossia si ha:

$$(a) \quad V(q(w+1), J, a, b) = V(q(w), J, a, b) + J.$$

E questa relazione è immediata conseguenza dell'altra:

$$V(q(w+1), J, a, b) - V(q(w), J, a, b) = \oint p dq = J.$$

α , b e J (s'intende (α, b) entro C , J fra J_1 e J_2) funzioni periodiche di w con periodo 1 saranno tali anche J_α , J_b , w_α , w_b . Di più sarà:

$$(6) \quad \int_w^{w+1} J_\alpha dw = \int_w^{w+1} \frac{\partial^2 V}{\partial w \partial \alpha} dw = \left[\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right]_w^{w+1} = 0$$

e analogamente:

$$(7) \quad \int_w^{w+1} J_b dw = 0.$$

Ammetteremo poi che le ω , J_α , J_b , w_α , w_b siano per ogni α , b in C e per ogni J e w comprese rispettivamente fra J_1 e J_2 , w' , $w' + 2$ (w' numero reale qualunque) sempre limitate e a rapporto incrementale limitato rispetto a tutte quattro le variabili, α , b , J , w . È ovvio, per la periodicità delle nostre funzioni, che queste ipotesi valgono per ogni w ferme restando i limiti per α , b e per J . Ovviamente poi le equazioni (5) e tutte le loro proprietà sono valide fino a che dalle J e w che si ottengono risolvendo tali equazioni corrispondono per le (2) valori di p e q compresi entro C cioè fino a che $J(t)$ resta compresa fra le J_1 e J_2 corrispondenti ad $\alpha(t)$, $b(t)$.

A questo punto, sarà bene notare che le ipotesi che abbiamo ora ricordate si potrebbero dedurre da altre più semplici fatte sulle equazioni (1). Abbiamo creduto opportuno non seguire questa via che ci porterebbe troppo lontano.

Passiamo ora ad alcune definizioni relative ai parametri. Ripetiamo che per variazione totale $V(\alpha, t)$ del parametro α in un intervallo $(0, t)$ intenderemo l'espressione:

$$(8) \quad V(\alpha, t) = \int_0^t \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt$$

Derivando ora la (4) rispetto ad α avremo ricordando che la $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ che compare nelle nostre formule si ottiene derivando V mantenendo costante q si ha:

$$(9) \quad \left\{ \frac{\partial V \partial q}{\partial q \partial \alpha} \right\}_{w+1} + \left\{ \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\}_{w+1} = \left\{ \frac{\partial V \partial q}{\partial q \partial \alpha} \right\}_w + \left\{ \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\}_w$$

dove nel primo membro i termini si suppongono calcolati in $w+1$ nel secondo membro in w a parità s'intende di α , b , J . Ora $\frac{\partial V}{\partial q} = p$ è funzione periodica di periodo 1 di w così pure sarà $\frac{\partial q}{\partial \alpha}$ essendo periodica di periodo 1 per ogni α , b in C la q . Si ha allora che il primo termine al primo membro di (9) si elide col primo termine al secondo membro restando così:

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\}_{w+1} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\}_w$$

e ciò dimostra la periodicità di $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ rispetto a w . Analoga dimostrazione vale per $\frac{\partial V}{\partial b}$.

che se a è sempre crescente o decrescente in $(0, t)$ diviene:

$$(9) \quad V(a, t) = |a(t) - a(0)|.$$

Se invece a non è sempre crescente o decrescente ma ha in $(0, t)$ un numero finito di massimi o minimi l'espressione di $V(a, t)$ non è più così semplice, ma il calcolo di essa non è affatto difficile.

Convieni infatti per eseguire questo calcolo, dividere l'intervallo $(0, t)$ in un certo numero di tratti in cui $a(t)$ è sempre crescente o decrescente ed applicare a questi tratti la formula (9). Analoghe definizioni valgono per il parametro b .

Intenderemo poi per periodo del moto, relativo all'istante t , il periodo del moto retto dalle (1) con J, a, b costanti e uguali a $J(t), a(t), b(t)$ e con $\mathcal{H}$ uguale al valore corrispondente a $J(t), a(t), b(t)$. Questo periodo $T(t)$ vale ov-

vviamente $\frac{1}{\omega(J(t), a(t), b(t))}$ ⁽⁴⁾.

Diremo perciò variazione del parametro a o b nel periodo T corrispondente all'istante t (grandezza che indicheremo con $\Delta_t a, \Delta_t b$ o se non vi è luogo ad equivoco con $\Delta a, \Delta b$) la variazione di questo parametro nel periodo $t, t + T(t)$. Sarà cioè:

$$(10) \quad \Delta_t a = \int_t^{t+T(t)} \left| \frac{da}{dt} \right| dt \quad \Delta_t b = \int_t^{t+T(t)} \left| \frac{db}{dt} \right| dt.$$

Se la variazione di un parametro per ogni valore di t di un certo intervallo $(0, h)$ si può considerare come infinitesima diremo che il parametro varia in $(0, h)$ in maniera infinitamente lenta. Infine diremo (seguendo in sostanza il LEVI-CIVITA) che un parametro a o b varia in $(0, h)$ in maniera graduale quando si può considerare come infinitesimo per ogni $0 < t < h$ la variazione totale delle sue derivate in $t, t + T(t)$ rispetto al valore assoluto della derivata stessa calcolata nel punto $\bar{t}$ intermedio fra t e $t + T(t)$ e tale che $|a'(\bar{t})| T(t)$ o $|b'(\bar{t})| T(t)$ valga $\Delta_t a$ o $\Delta_t b$. Cioè: affinchè il parametro a vari in maniera graduale deve essere infinitesima l'espressione che indicheremo con $\Delta_t a'$

$$(11) \quad \Delta_t a' = \frac{\int_t^{t+T} \left| \frac{d^2 a}{dt^2} \right| dt}{\left| \frac{da}{dt} \right|_{t+\theta T}},$$

in cui $t + \theta T = \bar{t}$. Analoga definizione si può dare per $\Delta_t b'$.

⁽⁴⁾ Si noti che in seguito ammetteremo ω positiva. Se ciò non fosse si può sempre ridursi a questo caso cambiando t in $-t$.

2. **Calcolo di un fondamentale limite superiore.** — Consideriamo l'equazione differenziale:

$$(12) \quad \frac{dJ}{dt} = -a'J_a - b'J_b$$

e l'altra equazione differenziale nella y

$$(13) \quad \frac{dy}{dt} = b'\bar{J}_b.$$

Dove $\bar{J}_b$ non è altro che J_b in cui però in luogo di J si è messo la y grandezza che ora preciseremo. Noi ci proponiamo di calcolare un intervallo entro cui la differenza fra J e y resta in modulo inferiore ad un numero η positivo prefissato, ma tale che in un certo intervallo $(0, h')$, $y(t) + \eta$ sia sempre inferiore al corrispondente J_2 , $y(t) - \eta$ superiore al corrispondente J_1 ⁽⁴⁾. La y è poi definita oltre che dell'equazione (13) anche dalla condizione:

$$(13') \quad y(0) = J(0) = J_0$$

la quale per la continuità di J_1 e J_2 e per il fatto che J_0 è compreso fra la J_1 e J_2 corrispondente a $a(0)$, $b(0)$, assicura l'esistenza di $(0, h')$.

Ora per ragioni di continuità esisterà evidentemente un certo intervallo intorno all'origine $(0, h)$ compreso in $(0, h')$ in cui $|J - y| \leq \eta$. Ciò assicura che in $(0, h)$, J è compreso fra J_1 e J_2 e perciò sono applicabili tutte le proprietà ammesse per il sistema (5). Allora sottraendo membro a membro la (13) dalla (12) e integrando l'espressione ottenuta da 0 a t' ($t' \leq h$) abbiamo:

$$(14) \quad |J - y| \leq \left| \int_0^{t'} a' J_a dt \right| + \left| \int_0^{t'} b' (J_b - \bar{J}_b) dt \right|.$$

Proponiamoci dunque di calcolare un limite superiore $I(t')$ di $\left| \int_0^{t'} a' J_a dt \right|$.

A questo scopo, mediante i punti $t_1 = \frac{1}{\omega(J(0), a(0), b(0))}$

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{\omega(J(t_1), a(t_1), b(t_1))} \dots t_r = \frac{1}{\omega(J(t_{r-1}), a(t_{r-1}), b(t_{r-1}))} + t_{r-1}$$

$$t_{n-1} = t_{n-2} + \frac{1}{\omega(J(t_{n-2}), a(t_{n-2}), b(t_{n-2}))}$$

(4) S'intende che $(0, h')$ deve essere tale che in esso $a(t)$ e $b(t)$ siano entro C .

dividiamo l'intervallo $(0, t)$ in n parti, supponendo che:

$$t_n = t_{n-1} + \frac{1}{\omega(J(t_{n-1}), a(t_{n-1}), b(t_{n-1}))}$$

sia superiore a t' . Allora avremo:

$$(15) \quad \left| \int_0^t a' J_a dt \right| \leq I_{01} + I_{12} \dots I_{r, r+1} \dots + \left| \int_{t_{n-1}}^t a' J_a dt \right|$$

dove:

$$(16) \quad I_{r, r+1} = \left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a' J_a dt \right|.$$

Calcoliamo ora un limite superiore per $I_{r, r+1}$. A questo scopo consideriamo la funzione, J_a' ottenuta ponendo in J_a al posto di $J(t)$, $a(t)$, $\omega(t)$, $J(t_r)$, $a(t_r)$, $w_i(t)$ essendo $w_i(t)$ uguale a $w(t_r) + \frac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r}$. Potremo scrivere:

$$(17) \quad I_{r, r+1} \leq \left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a'(J_a - J_a') dt \right| + \left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a' J_a' dt \right|.$$

Ora dalla prima di (5) si ha per l'intervallo (t_r, t_{r+1})

$$(18) \quad \begin{aligned} |J(t) - J(t_r)| &= \left| \int_{t_r}^t a' J_a dt + \int_{t_r}^t b' J_b dt \right| \\ &\leq M_a \int_{t_r}^t |a'| dt + M_b \int_{t_r}^t |b'| dt. \end{aligned}$$

Dove M_a e M_b sono rispettivamente i limiti superiori di $|J_a|$ e $|J_b|$ per ogni $a(t)$ e $b(t)$ con t variabile in $(0, t')$, per qualunque w e per J compreso fra il massimo di $y(t) + \eta$ e il minimo di $y(t) - \eta$ s'intende in $(0, t')$ ⁽¹⁾. Le M_a , M_b sono finite per le ipotesi fatte sulle limitazioni di J_a , J_b .

(1) Può darsi che qualche J , a , b compresi fra i limiti ora indicati cada fuori del campo B in cui sono definite le J_a , J_b . Siccome però i valori di queste grandezze che compaiono nelle nostre equazioni sono calcolate per J , a , b entro B , noi intenderemo che M_a e M_b sono i limiti superiori di $|J_a|$ e $|J_b|$ per quei valori di J , a , b compresi fra i limiti precisati nel testo e interni a B . O in altre parole potremo convenire che le J_a e J_b per valori di J , a , b fuori di B sono nulle. Queste avvertenze valgono anche con le ovvie modificazioni per casi analoghi che incontreremo in seguito.

D'altra parte abbiamo dalla seconda delle (5):

$$(19) \quad w(t) = \int_{t_r}^t \omega(J, a, b) dt + \int_{t_r}^t \alpha' w_a dt + \int_{t_r}^t b' w_b dt + w(t_r).$$

Perciò si ha subito:

$$(20) \quad |w(t) - w_i(t)| \leq \int_{t_r}^t |\omega(J, a, b) - \omega(J(t_r), a(t_r), b(t_r))| dt \\ + \left| \int_{t_r}^t \alpha' w_a dt \right| + \left| \int_{t_r}^t b' w_b dt \right|.$$

E poichè si suppone la ω Lipschitziana, esisteranno tre numeri positivi H , K_a , K_b tali che:

$$(21) \quad |\omega(J, a, b) - \omega(J(t_r), a(t_r), b(t_r))| \leq \\ \leq H |J(t) - J(t_r)| + K_a |a(t) - a(t_r)| + \\ + K_b |b(t) - b(t_r)| \leq (M_a H + K_a) \int_{t_r}^t |\alpha'| dt + (M_b H + K_b) \int_{t_r}^t |b'| dt.$$

Le H , K_a , K_b sono prese relativamente a tutti i valori di t ⁽⁴⁾ compresi fra t_r e t_{r+1} e a tutti i valori di J compresi fra il massimo e il minimo di $J(t)$ in (t_r, t_{r+1}) .

Se ora sostituiamo nella (20) la (21) e indichiamo con A e B i valori massimi di $|w_a|$, $|w_b|$ per ogni w , per ogni t di $(0, t')$ e per J compreso fra il massimo di $Y + \eta$ e il minimo di $Y - \eta$ in $(0, t')$, abbiamo:

$$(22) \quad |w(t) - w_i(t)| \leq \int_{t_r}^t dt (M_a H + K_a) \int_{t_r}^t |\alpha'| dt + \\ + \int_{t_r}^t dt (M_b H + K_b) \int_{t_r}^t |b'| dt + A \int_{t_r}^t |\alpha'| dt + B \int_{t_r}^t |b'| dt.$$

Ciò posto torniamo alla (17). Poichè J_a è per ipotesi Lipschitziana potremo trovare quattro numeri positivi R , S , P , Q tali che per ogni w e per

⁽⁴⁾ Più precisamente di $a(t)$, $b(t)$ per t compreso ecc.. In seguito useremo spesso la locuzione abbreviata del testo.

valori di J e t compresi fra gli stessi limiti indicati a proposito, di H, K_a, K_b sia:

$$(23) \quad |J_a - J_a'| \leq R |J(t) - J(t_r)| + S |w(t) - w(t_r)| + \\ + P |a(t) - a(t_r)| + Q |b(t) - b(t_r)|.$$

Abbiamo allora ricordando la (18) e la (21):

$$(24) \quad I_{r, r+1} \leq R \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| M_a dt \int_{t_r}^t |a'| dt + R \int_{t_r}^{t_{r+1}} dt M_b |a'| \int_{t_r}^t |b'| dt \\ + S \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| (M_a H + K_a) dt \int_{t_r}^t dt \int_{t_r}^t |a'| dt + S \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt (M_b H + K_b) \int_{t_r}^t dt \int_{t_r}^t |b'| dt \\ + SA \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \int_{t_r}^t |a'| dt + SB \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \int_{t_r}^t |b'| dt \\ + P \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \int_{t_r}^t |a'| dt + Q \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \int_{t_r}^t |b'| dt \\ + \left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a' J_a' dt \right|.$$

Ora si ha subito:

$$(25) \quad \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| \int_{t_r}^t |a'| dt = \frac{1}{2} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \right)^2 \\ \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \int_{t_r}^t |b'| dt \leq \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \int_{t_r}^{t_{r+1}} |b'| dt \\ \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \int_{t_r}^t dt \int_{t_r}^t |a'| dt \leq \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| \int_{t_r}^t |a'| dt (t - t_r) \leq \frac{t_{r+1} - t_r}{2} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \right)^2 \\ \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \int_{t_r}^t dt \int_{t_r}^t |b'| dt \leq \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \int_{t_r}^t |b'| dt (t - t_r) \leq (t_{r+1} - t_r) \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \int_{t_r}^t |b'| dt.$$

Abbiamo poi con una semplice integrazione per parti:

$$(26) \quad \int_{t_r}^{t_{r+1}} a' J_a' dt = a'(t_{r+1}) \int_{t_r}^{t_{r+1}} J_a' dt - \int_{t_r}^{t_{r+1}} a'' \int_{t_r}^t J_a' dt.$$

Ora J_a' non è altro che la J_a in cui sono fissati i valori di J , a , b e solo la w_1 è variabile. Di più la w_1 per $t = t_r$ vale $w(t_r)$ per $t = t_{r+1}$ vale $w(t_r) + 1$. Si ha perciò ricordando la (7)

$$\int_{t_r}^{t_{r+1}} J_a' dt = \frac{1}{\omega} \int_{w_1(t_r)}^{w_1(t_r)+1} J_a' dw_1 = 0.$$

Quindi dalla (26) si ha:

$$(27) \quad \left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a' J_a' dt \right| \leq M_a(t_{r+1} - t_r) \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a''| dt \leq \frac{M_a \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a''| dt \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt}{|\bar{a}'|}.$$

Essendo $|\bar{a}'|$ quel valore di $|a'|$ compreso fra t_r e t_{r+1} tale che

$$|\bar{a}'|(t_{r+1} - t_r) = \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt.$$

Perciò sostituendo nella (24) abbiamo:

$$(28) \quad I_{r, r+1} \leq Z_r(\Delta t_r a)^2 + Z_r'(\Delta t_r b)(\Delta t_r a) + M_a \Delta t_r a' \Delta t_r a.$$

Dove:

$$(29) \quad Z_r = \frac{RM_a + S(M_a H + K_a)(t_{r+1} - t_r) + SA + P}{2}$$

$$(30) \quad Z_r' = RM_b + S(M_b H + K_b)(t_{r+1} - t_r) + SB + Q.$$

D'altra parte si ha:

$$(31) \quad \left| \int_{t_{n-1}}^{t'} a' J_a dt \right| \leq M_a \int_{t_{n-1}}^{t'} |a'| dt \leq M_a \Delta t_{n-1} a.$$

Indichiamo ora con Z e Z' due numeri superiori rispettivamente a tutti i Z_r e Z_r' . Siano poi $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$ i valori massimi in $(0, t')$ di $\Delta t_r a$ e $\Delta t_r a'$ per ogni t di $(0, t')$. Allora ricordando, che $V(a, t') > V(a, t_{n-1})$, $V(b, t') > V(b, t_{n-1})$ si ha sostituendo nella (15) i limiti superiori ora ottenuti:

$$(32) \quad \left| \int_0^{t'} a' J_a dt \right| \leq Z \Delta_m a V(a, t') + Z' \Delta_m a V(b, t') + M_a \Delta_m a' V(a, t') + M_a \Delta_m a.$$

Il secondo membro di (32) è il cercato limite superiore che verrà indicato con $I(t')$.

Prima di chiudere questo paragrafo aggiungiamo la seguente osservazione. Si consideri una funzione g di J , $g = f(J)$ funzione tale che $f'(J)$ sia sempre positiva o sempre negativa, quando J varia fra il massimo valore di J_2 e il minimo valore di J_1 relativo all'intervallo $(0, h')$. Allora si potrà invertire questa relazione e scrivere $J = \varphi(g)$. Ciò permette di scrivere le nostre equazioni in modo da avere come incognite la g . Si ponga infatti nelle ω , J_a , J_b , w_a , w_b delle (5) in luogo di J la $\varphi(g)$. Poi si moltiplichi la prima delle (5) per $f'(J) = f'(\varphi(g))$. Si ottiene così:

$$\frac{dg}{dt} = -\alpha' f'(\varphi(g)) J_a - b' f'(\varphi(g)) J_b, \quad \frac{dw}{dt} = \omega + \alpha' w_a + b' w_b.$$

Ora se si suppone f' e φ limitate e Lipschitziane si ottiene subito che i termini moltiplicati per α' , b' al secondo membro delle equazioni ora scritte godono delle stesse proprietà di J_a , J_b e w_a , w_b e lo stesso può dirsi della ω .

Perciò i risultati ora ottenuti per J valgono anche per g naturalmente tenendo conto dei diversi valori che ora assumono i secondi membri delle equazioni che definiscono w e g .

3. Regole per il calcolo pratico della espressione $I(t)$. — Nella (32) compare la Z , Z' , M_a , $\Delta_m \alpha$, $\Delta_m \alpha'$ perciò dobbiamo anzitutto indicare qualche metodo per il calcolo di queste grandezze in un intervallo $(0, t')$ inferiore a $(0, h)$.

Si osservi anzitutto che M_a , M_b sono quantità valide in base alla loro definizione per qualunque r e si calcolano trovando il massimo valore di J_a , J_b per t in $(0, t')$ per ogni w e J compreso fra il valore massimo in $(0, t')$ di $y + \eta$ e il valore minimo sempre in $(0, t')$ di $y - \eta$ valori che indicheremo rispettivamente con $y_{\max} + \eta$ e $y_{\min} - \eta$.

Passiamo ora alle Z . Perciò prendiamo in esame i termini che compaiono nelle Z . In esse vi sono anzitutto le A , B indipendenti da r perchè valgono rispettivamente i limiti superiori di $|w_a|$, $|w_b|$ per t in $(0, t')$ e compreso fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$ e per ogni w . Le R , S , P , Q definite dalle (23) e che compaiono nella espressione di Z , devono coincidere (almeno sotto condizioni di derivabilità per J_a , J_b che supponiamo largamente soddisfatte) rispettivamente con un valore assoluto di $\frac{\partial J_a}{\partial J}$, $\frac{\partial J_a}{\partial w}$, $\frac{\partial J_a}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial J_a}{\partial b}$ nel campo definito da $-\infty < w < +\infty$, $t_r < t < t_{r+1}$ ⁽¹⁾, J compreso fra il massimo e il minimo

(1) O meglio fra $a(t)$, $b(t)$ comprese rispettivamente fra i loro massimi e minimi in (t_r, t_{r+1})

di $J(t)$ in (t_r, t_{r+1}) ⁽¹⁾. Analogamente H, K_a, K_b non sono altro che valori assoluti di $\frac{\partial \omega}{\partial J}, \frac{\partial \omega}{\partial a}, \frac{\partial \omega}{\partial b}$ calcolati in un punto del campo ora descritto. Infine

$t_{r+1} - t_r$ non è altro che $\frac{1}{\omega(J(t_r), a(t_r), b(t_r))}$. Ora il calcolo esatto di queste grandezze è impossibile perchè bisognerebbe conoscere $J(t)$ e $w(t)$ che sono incognite. Se ne può calcolare un limite superiore prendendo il valore massimo di queste grandezze per ogni t di $(0, t')$ per ogni w , e per ogni J compreso fra $y_{\max} + \eta, y_{\min} - \eta$. Ponendo queste grandezze nelle espressioni di Z_r e Z_r' si troverebbe un valore superiore a qualunque Z_r e Z_r' e questo valore si potrebbe prendere rispettivamente per Z e Z' .

Vi è però la possibilità di ottenere valori più bassi di Z e Z' in base alle seguenti osservazioni che faremo riferendoci a Z perchè analogamente si può procedere per Z' .

In Z intervengono le espressioni $H(t_{r+1} - t_r), K_a(t_{r+1} - t_r)$. Ora H è un valore di $\left| \frac{\partial \omega}{\partial J} \right|$ calcolato per t compreso fra t_r e t_{r+1} e per J compreso fra il massimo e il minimo di $J(t)$ in t_r, t_{r+1} . Perciò si ha ⁽²⁾:

$$H = \left| \left(\frac{\partial \omega}{\partial J} \right)_{t_r} + \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial J^2} \right\} (J - J(t_r)) + \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial J \partial a} \right\} (a(t) - a(t_r)) + \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial J \partial b} \right\} (b(t) - b(t_r)) \right|.$$

Dove $\left\{ \frac{\partial \omega}{\partial J} \right\}_{t_r}$ è il valore di $\frac{\partial \omega}{\partial J}$ calcolato in t_r , mentre $\frac{\partial^2 \omega}{\partial J^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial J \partial a}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial J \partial b}$ sono valori di queste derivate calcolate per J, a e b nel campo descritto a proposito di H . Quindi ricordando che $|J - J(t_r)| < M_a \Delta_m a + M_b \Delta_m b$, $|a - a(t_r)| < \Delta_m a$, $|b - b(t_r)| < \Delta_m b$ quantità queste di solito molto piccole, risulta opportuno prendere qualche volta come valore maggiorante di $H(t_{r+1} - t_r)$ l'espressione:

$$(34) \quad \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial J} \right\}_{\max} + \frac{\left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial J^2} \right\}_{\max} (M_a \Delta_m a + M_b \Delta_m b) + \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial J \partial a} \right\}_{\max} \Delta_m a + \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial J \partial b} \right\}_{\max} \Delta_m b}{\omega_{\min}}$$

dove il simbolo max o min accanto alle parentesi indica il massimo o il minimo del valore assoluto della espressione entro parentesi per ogni J compreso fra $y_{\max} + \eta, y_{\min} - \eta$ e ogni t di $(0, t')$. Analoghe considerazioni si possono fare per $K_a S(t_{r+1} - t_r)$.

(1) Cioè per un valore di $J(t)$ in questo intervallo.

(2) Si noti che i valori di t in cui sono calcolati $a(t)$ e $b(t)$ possono anche essere diversi.

Si può calcolare facilmente un altro limite superiore per $H(t_{r+1} - t_r)$, $K_a(t_{r+1} - t_r)$ qualora sia $\omega = f(J)e^{ha+kb}$ con h e k numeri indipendenti da J , a , b . Si ha infatti

$$(35) \quad t_{r+1} - t_r = \frac{e^{-ha(t_r) - kb(t_r)}}{f(J(t_r))}$$

$$(36) \quad H = |f'(J(\bar{t}))e^{ha(t) + kb(t)}|$$

dove t e $\bar{t}$ sono valori intermedi fra t_r e t_{r+1} . Quindi:

$$(37) \quad H(t_{r+1} - t_r) \leq \frac{\{f'(J(t))\}_{\max}}{\{f(J(t))\}_{\min}} e^{|h|\Delta_m a + |k|\Delta_m b}.$$

Si ha poi usando le stesse notazioni:

$$(38) \quad K_a = |hf(J')e^{ha(t) + kb(t)}|.$$

Per cui:

$$(39) \quad K_a(t_{r+1} - t_r) < |h| \frac{\{f(J)\}_{\max}}{\{f(J)\}_{\min}} e^{|h|\Delta_m a + |k|\Delta_m b}$$

dove $|f(J)|_{\max}$, $|f(J)|_{\min}$, $|f'(J)|_{\min}$ significano rispettivamente il massimo o il minimo di $|f(J)|$, $|f'(J)|$ per J variabile fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$ ⁽⁴⁾.

Se occorre un limite superiore più basso si può scrivere:

$$\begin{aligned} |f(J')| &\leq |f(J(t_r))| + |J' - J(t_r)| \{f'(J)\}_{\max} \leq \\ &\leq f(J(t_r)) + \{f'(J)\}_{\max}(M_a \Delta_m a + M_b \Delta_m b) \end{aligned}$$

e una forma analoga vale per $f'(J)$. Allora si ha:

$$(41) \quad H(t_{r+1} - t_r) = \left(\frac{f'(J)}{f(J)} \Big|_{\max} + \frac{\{f''(J)\}_{\max}}{\{f(J)\}_{\min}} (M_a \Delta_m a + M_b \Delta_m b) \right) e^{|h|\Delta_m a + |k|\Delta_m b}$$

$$(42) \quad K_a(t_{r+1} - t_r) \leq |h| \left(1 + \frac{\{f'(J)\}_{\max}}{\{f(J)\}_{\min}} (M_a \Delta_m a + M_b \Delta_m b) \right) e^{|h|\Delta_m a + |k|\Delta_m b}$$

col solito significato per i termini entro parentesi graffa. Analoghe considerazioni valgono per $K_b(t_{r+1} - t_r)$.

Passiamo ora allo studio di $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$. Quando queste grandezze non sono assegnate come dato del problema e non sono facilmente calcolabili in base alle formule che le esprimono conviene calcolare di esse un limite superiore, in base alle seguenti considerazioni.

(4) Si noti che se h è positivo e a decrescente si può sopprimere nell'esponentiale il $\Delta_m a$. Lo stesso accade se h è negativo e a crescente. Le stesse conclusioni valgono con le ovvie modificazioni per il parametro b .

Cominciando da $\Delta_m a$ si deve notare che esso è sempre inferiore ad $\frac{a'_{\max}}{\omega_{\min}}$ essendo $a'_{\max}$ il valore massimo di $|a'|$ in $(0, t')$, $\omega_{\min}$ il valore minimo di ω in $(0, t')$ e per J compreso fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$. Di questo limite superiore abbiamo fatto varie applicazioni nelle altre nostre note relative agli invarianti adiabatici.

Però si può trovare per $\Delta_m a$ un limite superiore che di regola è più basso di quello ora accennato. Infatti se $\bar{t}$ è un punto dell'intervallo (t_r, t_{r+1}) abbiamo:

$$(43) \quad a'(t) = a'(t_r) + (t - t_r)a''(\bar{t}).$$

Allora si ha:

$$(44) \quad \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'| dt \leq |a'(t_r)| \int_{t_r}^{t_{r+1}} dt + \left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a''(\bar{t})(t - t_r) dt \right|$$

$$\leq \left| \frac{a'(t_r)}{\omega(J(t_r), a(t_r), b(t_r))} \right| + \frac{|a''|_{\max}}{2} (t_{r+1} - t_r)^2$$

dove $|a''|_{\max}$ è il valore massimo di $|a''|$ in $(0, t')$. Quindi si ha subito:

$$(45) \quad \Delta_m a \leq \left| \frac{a'}{\omega} \right|_{\max} + \frac{|a''|_{\max}}{2\omega_{\min}^2}$$

indicando con $\left| \frac{a'}{\omega} \right|_{\max}$ il valore massimo di $\left| \frac{a'}{\omega} \right|$ per ogni t di $(0, t')$ e per ogni J compreso fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$.

Ora siccome avviene spesso in pratica che $\frac{|a''|_{\max}}{2\omega_{\min}^2}$ è trascurabile rispetto $\left| \frac{a'}{\omega} \right|_{\max}$ e questo termine è inferiore dal più uguale ad $\frac{a'_{\max}}{\omega_{\min}}$ se ne conclude che questo limite superiore per $\Delta_m a$ può essere più conveniente dell'altro calcolato con la $\frac{a'_{\max}}{\omega_{\min}}$. È da notare che ponendo fin da principio nelle nostre formule in luogo $|a'|$ il suo limite superiore $|a'|_{\max}$ il termine $S(M_a H + K_a)(t_{r+1} - t_r)$ nell'espressione di Z_r va moltiplicato per $\frac{1}{3}$ mentre il termine analogo nell'espressione di Z_r' va diviso per 2, e $V(a, t')$ viene sostituito con $|a'|_{\max} t'$.

Passiamo ora allo studio di $\Delta_m a'$. Un suo limite superiore è evidentemente $\frac{|a''|_{\max}}{\omega_{\min} a'_{\min}}$ essendo $a'_{\min}$ il valore minimo di $|a'|$ in $(0, t')$. Oppure si

può moltiplicare denominatore e numeratore dell'espressione di $\Delta_t a'$ per $t_{r+1} - t_r$ e allora un limite superiore di $\Delta_m a'$ è dato da $\frac{|a''|_{\max}}{\omega_{\min} \Delta_{\min} a}$ essendo $\Delta_{\min} a$ il valore minimo di $\Delta_t a$ in $(0, t)$.

Questi limiti superiori hanno però l'inconveniente di non essere applicabili qualora in qualche punto di $(0, t)$ sia a' o $\Delta_t a$ nulla. Conviene nei casi ora ricordati modificare un po' la forma del termine $M_a \Delta_m a' V(a, t)$. Si ricordi perciò che questo termine sorge dalla somma di integrali del tipo:

$$\left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a'' J_a dt \right|.$$

Ora si ha subito la relazione:

$$(46) \quad \left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a'' J_a dt \right| \leq M_a |a''|_{\max} \int_{t_r}^{t_{r+1}} dt = \frac{M_a |a''|_{\max} (t_{r+1} - t_r)}{2\omega_{\min}}.$$

Per cui nelle espressioni di $I(t)$ in luogo di $M_a V(a, t) \Delta_t a'$ si può mettere $\frac{M_a |a''|_{\max} t'}{2\omega_{\min}}$. Questa sostituzione è stata sempre fatta nelle nostre note sugli invarianti adiabatici.

Oppure si può osservare che è:

$$\left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a'' J_a dt \right| < \frac{M_a}{\omega_{\min}} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a''| dt$$

per cui in luogo $M_a V(a, t) \Delta_m a'$ possiamo mettere (s'intende nella espressione di $I(t')$) $\frac{M_a}{\omega_{\min}} V(a', t)$.

È poi ovvio che in qualche caso speciale dalle formule di definizioni di $\Delta_t a$, $\Delta_t a'$ si possono ottenere valori per $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$ sfruttando le particolari proprietà di a e a' (⁴).

4. Caso in cui b è costante. Calcolo di t' e altre proprietà. — Rimandando al Capitolo terzo lo studio del caso in cui b è variabile, supponiamo d'ora in poi b costante per cui $y(t)$ si riduce a J_0 (valore di J per $t=0$) e

(⁴) Osserviamo che in seguito indicheremo i massimi o minimi di $|a'|$ o $|a''|$ semplicemente con i simboli $a'_{\max}$ o $a''_{\max}$.

resta così:

$$(47) \quad |J - J_0| \leq \left| \int_0^t \alpha' J_a dt \right| \leq (Z \Delta_m \alpha + M_a \Delta_m \alpha') V(a, t) + M_a \Delta_m \alpha = I(t).$$

Da questa formula troviamo un metodo per verificare se t' è compreso entro l'intervallo $(0, h)$. Per questo scopo osserviamo anzitutto che $I(t')$ è definita in tutto $(0, h')$ perchè per tutti i valori t' di questo intervallo si possono definire $Z, M_a, \Delta_m \alpha, \Delta_m \alpha', V(a, t')$. Osserviamo poi che $I(t')$ è una funzione non decrescente di t' perchè è prodotto e somma di termini che sono tali. Naturalmente questa $I(t')$ è limite superiore di $|J - J_0|$ nell'intervallo $(0, h)$ in cui $J_0 - \eta < J < J_0 + \eta$.

Ora è facile dimostrare il teorema: se $I(t')$ è per $t' < h'$ inferiore a η certamente t' è interno a $(0, h)$ e lo stesso accade di tutti i t' inferiori a t' .

Infatti o l'intervallo $(0, h)$ coincide con $(0, h')$ e allora il nostro teorema è dimostrato, oppure $h < h'$ allora $|J(h) - J_0| = \eta$. Ma se $I(t') < \eta$ non può essere $t' > h$ altrimenti si avrebbe $I(t') \geq I(h) \geq \eta$ contro l'ipotesi. Perciò la verifica se t' è interno ad h e quindi vale la (47) si ottiene provando che $I(t')$ è inferiore a η .

È interessante il caso in cui si possa prendere η abbastanza piccolo per cui sia possibile $h' = \infty$. Allora se $I(t)$ resta per $t \rightarrow \infty$ inferiore a η la $I(t)$ si può applicare in tutto l'intervallo $(0, \infty)$ cioè la (47) può servire per prevedere valori assintotici di $|J - J_0|$. È da notare che dovendo restare $I(t)$ finito occorre che $V(a, t)$ resti pure finito ⁽¹⁾.

Si noti ora che se $\Delta_m \alpha$ e $\Delta_m \alpha'$ si possono considerare infinitesime cioè se α varia in maniera infinitamente lenta e graduale, allora se per ogni t' finito o infinito la $V(a, t')$ è finita risulta $|J - J_0|$ inferiore per ogni t finito a qualunque ε minore di η , e perciò per l'arbitrarietà di ε , $J = J_0$ per ogni valore di t quindi anche al limite per $t \rightarrow \infty$. Si ha così che se un parametro varia in maniera infinitamente lenta e graduale la J resta costante per tutto l'intervallo anche infinito in cui $V(a, t)$ resta finita purchè esista un numero η tale che per ogni t' sia $J_2 - \eta > J_0 > J_1 + \eta$. Sotto questa forma viene spesso enunciato il concetto d'invariante adiabatico ⁽²⁾.

⁽¹⁾ In seguito nella espressione di $I(t)$ porremo talvolta in luogo di M_a soltanto M .

⁽²⁾ Notiamo che i fisici sostituiscono spesso alla nozione di variazione graduale del parametro quella di variazione non in fase col moto. Questa nozione è più generale ma più difficile a mettere in equazione.

5. Applicazione al problema del moto armonico con forza di richiamo dipendente dal tempo. — Intenderemo per moto armonico con forza di richiamo dipendente dal tempo, un moto retto dall'equazione:

$$(48) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2 q$$

essendo q la coordinata e ω una funzione reale e positiva del tempo. Evidentemente questo moto per ω costante è periodico, e ciò per ogni $\omega > 0$ e per ogni p, q , quindi C coincide con $(0, \infty)$, e il corrispondente A con tutto il piano. Come abbiamo visto in altri lavori ⁽¹⁾ ponendo:

$$(49) \quad q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \cos 2\pi w \quad p = \frac{dq}{dt} = \sqrt{2J\omega} \sin 2\pi w.$$

Abbiamo subito:

$$(50) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} p^2 + \frac{\omega^2 q^2}{2} = \omega J$$

il che ci dice $\mathcal{H}$ funzione univoca di J e $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} > 0$. Di più poichè $\mathcal{H}$ può assumere qualunque valore positivo la J varia da zero a infinito per cui $J_1 = 0, J_2 = \infty$ cioè J_1 e J_2 variano con continuità e il campo J, ω è convesso. In base alle (49) abbiamo subito con trasformazioni esposte nella nostra nota citata ⁽²⁾:

$$(50) \quad \frac{dJ}{dt} = -J\alpha' \sin 4\pi w$$

$$(51) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{e^a}{2\pi} + \frac{\alpha'}{4\pi} \cos 4\pi w$$

essendo $a = \log \omega$. È facile vedere che $\omega = e^a, J_a = \sin 4\pi w, w_a = \cos 4\pi w$ sono funzione limitate e Lischiptziane per ogni a di $(-\infty, \infty)$, J di $(0, \infty)$, w di $(-\infty, \infty)$ verificando perciò che sono soddisfatte tutte le condizioni necessarie per applicare le nostre formule.

Ora nella equazione (50) si può prendere come incognita non J ma $\log J$ ottenendosi la formula:

$$(52) \quad \frac{d \log J}{dt} = -\alpha' \sin 4\pi w.$$

Poichè J può variare fra i limiti $(0, \infty)$ $\log J$ può variare fra $(-\infty, +\infty)$ perciò qualunque sia il valore iniziale di J, J_0 e qualunque sia η (finito)

⁽¹⁾ Cfr. il primo lavoro citato a pag. 1.

⁽²⁾ Si osservi che la w vale la θ della nota citata divisa per 2π .

l'intervallo $(0, h)$ coincide con $(0, \infty)$ in quanto chè per qualunque η finito $\log J_0 \pm \eta$ è sempre entro i limiti in cui le soluzioni di (48) sono periodiche. Ora dalla (52) si ha subito $M_a = 1$, $R = P = 0$, $S = 4\pi$ mentre dalla (51) risulta $H = 0$, $K_a = \frac{e^a}{2\pi}$, $A = \frac{1}{4\pi}$. Quanto a $(t_{r+1} - t_r)$ si può prendere $\pi e^{-a(t_r)}$ perchè le J_a e v_a sono periodiche di periodo $\frac{1}{2}$ rispetto a v . Allora si ha per la (39) e tenendo presente questo valore di $t_{r+1} - t_r$, $K_a(t_{r+1} - t_r) = \frac{e^{\Delta_m a}}{2}$. Quindi si ha:

$$(53) \quad Z = \pi e^{\Delta_m a} + \frac{1}{2}.$$

Allora per le nostre formule si ha:

$$(54) \quad \left| \log \frac{J(t')}{J_0} \right| \leq \left(\pi e^{\Delta_m a} + \frac{1}{2} \right) \Delta_m a V(a, t') + \Delta_m a' V(a, t') + \Delta_m a = I(t').$$

E questa equazione vale per qualunque t' tale che $V(a, t')$ sia finita. Infatti la nostra relazione vale per qualunque $t' < h$ con h scelta in modo che in $(0, h)$ sia:

$$\left| \log \frac{J(t')}{J_0} \right| < \eta.$$

Ora per provare se t' è in h basta provare che $I(t')$ è inferiore a η . Ma η non appare nell'espressione di $I(t')$ perciò possiamo prenderla a nostro arbitrio purchè finita e quindi la sceglieremo sempre superiore ad ogni $I(t')$ finito ⁽¹⁾. Resta così provato la nostra asserzione e cioè si può applicare la (54) per qualunque t' che rende $V(a, t')$ finito.

Ora nella nostra nota del 1932 avremo trovato la formula (scambiando in essa t_1 con t')

$$(55) \quad \log \frac{J}{J_0} = \frac{\pi |\omega'|_{\max}}{\omega_{\min}^2} + \left(\pi + \frac{\pi^2}{3} \right) \frac{|\omega'_{\max}|^2}{\omega_{\min}^4} \omega_{\max} t' + \frac{\pi \omega''_{\max}}{2 \omega_{\min}^3} \omega_{\max} t'$$

dove il simbolo max o min posto al fianco di una espressione indica il valore massimo o minimo di quella espressione in valore assoluto.

Per fare un raffronto fra il secondo membro di (55) e quello di (54) è bene modificare la (5') per avere termini fra loro confrontabili sebbene sia probabile che la (54) dia sempre risultati migliori della (55). Per fare questo

(1) Più precisamente fissato un $I(t')$ finito sceglieremo η superiore a $I(t')$. Con ciò resta provato che t' è in $(0, h)$.

confronto basta dunque mettere in luogo del termine $\Delta a'' V(a, t)$ il termine $\frac{a''_{\max}(t_{r+1} - t_r)}{2}$ come si è già indicato nel paragrafo 4. Di più si ha:

$$(56) \quad \Delta_m a < a'_{\max}(t_{r+1} - t_r)_{\max} = \pi \frac{\omega'_{\max}}{\omega_{\min}^2} \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} > 1,$$

$$(57) \quad \begin{aligned} V(a, t') &= \int_0^{t'} \left| \frac{d\omega}{dt} \right| d\omega \leq \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max} t' \leq \frac{\omega'_{\max}}{\omega_{\min}} t' \\ \frac{a''_{\max}(t_{r+1} - t_r)_{\max} t'}{2} &\leq \frac{\pi \omega''_{\max}}{2 \omega_{\min}^2} t' + \frac{\pi \omega'^2_{\max}}{2 \omega_{\min}^3} t'. \end{aligned}$$

Ponendo poi sin da principio in luogo di $|a'|$ il suo valore massimo $a'_{\max}$ la Z diventa $\frac{\pi}{3} e^{\Delta_m a} + \frac{1}{2}$. Essendo poi di solito $\Delta_m a$ molto piccolo si può ammettere $\frac{\pi^2}{3} e^{\Delta_m a} + \pi$ ⁽¹⁾ sia poco diverso da $\frac{\pi^2}{3} + \pi$.

Ora un semplice raffronto fra la (54) e (55) tenendo conto delle (56) e (57) ci fa vedere che le formule ora ottenute danno in generale limitazioni più basse di quelle di noi trovate qualche anno fa.

6. Applicazione al problema delle masse variabili. — In base alle formule sovrascritte potremo calcolare con molta facilità un limite superiore per le variazioni dell'eccentricità dell'orbita osculatrice nel problema dei due corpi di massa variabile. Otterremo delle limitazioni non molto diverse da quelle trovate per il caso delle masse decrescenti nella nostra nota del 1934 già citata, ma le troveremo molto più rapidamente e valide qualunque sia il modo di variazione della massa.

In base al risultato delle nostre note ⁽²⁾ il problema dei due corpi di massa variabile si riconduce al seguente sistema Hamiltoniano in cui c è la costante delle aree B il prodotto della massa totale per la costante di gravitazione K :

$$(58) \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{B}{r^2} + \frac{c^2}{r^3}, \quad \frac{dr}{dt} = p, \quad \mathcal{H} = \frac{p^2}{2} - \frac{2B}{r} + \frac{c^2}{2r^2}.$$

Ora è notissimo che per qualunque valore di B positivo esiste un campo C in cui le soluzioni del sistema (58) sono periodiche. Perciò in questo campo si potrà costruire la J e la corrispondente eccentricità ε che vale

⁽¹⁾ Se a è crescente allora per l'osservazione di pag. 15 si può porre in questa formula $\Delta_m a = 0$.

⁽²⁾ Vedi in particolare la citata nota dell'« Accademia di Torino ».

$\sqrt{1 - \frac{4\pi^2 c^2}{J^2}}$. È poi noto che le (58) hanno soluzioni periodiche fino a quando ε è inferiore a 1 e positivo, perciò i valori J_1, J_2 saranno i valori $4\pi c$ e ∞ corrispondenti a $\varepsilon = 0, \varepsilon = 1$.

Perciò fino a che le p e q restano nella C ossia fino a che ε resta compreso fra 0 e 1 si può trasformare le equazioni (58) in altre contenenti la J e la sua variabile coniugata w e in base all'osservazione contenuta alla fine del paragrafo secondo possiamo ricondurci a equazioni che hanno per incognite ε e w . Queste equazioni già ottenute in altre note sono della forma:

$$(59) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\alpha' \frac{(1 - \varepsilon^2) \cos u}{1 - \varepsilon \cos u},$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{e^2 a (1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi c^3} + \frac{\alpha'}{2\pi} \left(\frac{\sin u}{\varepsilon} + \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin u \cos u}{1 - \varepsilon \cos u} \right).$$

In cui $a = \log B$, u è una grandezza definita dalla equazione di KEPLERO

$$(60) \quad 2\pi w = u - \varepsilon \sin u.$$

Evidentemente nel caso delle masse costanti u è l'anomalia eccentrica e w l'anomalia media. Le (59), (60) valgono dunque per $0 < \varepsilon < 1$.

Noi dovremo supporre naturalmente le condizioni iniziali tali che ε_0 resulti compreso fra 0 e 1.

Dalle formule sovra scritte è poi facile vedere che $H = -\frac{2\pi B^2}{J^2}$ e quindi $\frac{\partial \omega}{\partial J} > 0$ e che J_a e w_a soddisfano alle condizioni poste per esse. Noi porremo poi sempre $\eta < 1 - \varepsilon_0$, $\eta < \varepsilon_0$ in modo che l'intervallo $(0, h)$ in cui $\varepsilon_0 + \eta < \varepsilon_2$, $\varepsilon_0 - \eta > \varepsilon_1$ coincida con l'intervallo $(0, \infty)$.

Posto ciò passiamo al calcolo di $I(t')$. Abbiamo intanto i seguenti limiti superiori per (*) M_a, R, S, P , validi per qualunque w e t e per ε compreso fra $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0 + \eta$, $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_0 - \eta$ (**):

$$M_a = (1 + \varepsilon_{\max}), \quad R = \left\{ \frac{\partial J_a}{\partial \varepsilon} \right\} = \left\{ \frac{+ 2\varepsilon \cos u}{1 - \varepsilon \cos u} - \frac{(1 - \varepsilon^2) \cos^2 u}{(1 - \varepsilon \cos u)^2} + \frac{\partial J_a}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{2\varepsilon \cos u}{1 - \varepsilon \cos u} - \frac{(1 - \varepsilon^2) \cos^2 u}{(1 - \varepsilon \cos u)^2} + \left(\frac{(1 - \varepsilon^2) \sin u}{1 - \varepsilon \cos u} + \frac{(1 - \varepsilon^2) \varepsilon \sin u \cos u}{(1 - \varepsilon \cos u)^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right\}.$$

(*) Qui intendiamo per J_a e w_a i termini che moltiplicano α' nelle (59). Naturalmente anche le J_a e w_a soddisferebbero a quelle condizioni.

(**) La parentesi graffa attorno ad alcuni termini significa che questi termini sono calcolati in modulo per un valore di $a(t)$ e uno di $\varepsilon(t)$ con t intermedio fra (t_r, t_{r+1}) in modo da soddisfare a quelle condizioni per cui si introducono nelle nostre formule.

Ma è:

$$2\pi w = u - \varepsilon \sin u.$$

Quindi derivando rispetto a ε

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \frac{\sin u}{1 - \varepsilon \cos u}.$$

Perciò si ha:

$$R = \left\{ \frac{2\varepsilon \cos u}{1 - \varepsilon \cos u} - \frac{(1 - \varepsilon^2) \cos^2 u}{(1 - \varepsilon \cos u)^2} + \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin^2 u}{(1 - \varepsilon \cos u)^3} \right\} \leq \frac{1 + 3\varepsilon_{\max}}{1 - \varepsilon_{\max}} + \frac{1 + \varepsilon_{\max}}{(1 - \varepsilon_{\max})^2}.$$

Si ha poi:

$$S = \left\{ \frac{\partial J_a}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} \right\} = \left\{ \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin^2 u}{(1 - \varepsilon \cos u)^3} \cdot 2\pi \right\} \leq \frac{2\pi(1 + \varepsilon_{\max})}{(1 - \varepsilon_{\max})^2}$$

$$A = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin u}{\varepsilon} + \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin u \cos u}{1 - \varepsilon \cos u} \right\} \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\min}} + 1 + \varepsilon_{\max} \right)$$

$$P = 0.$$

Passiamo ora al calcolo di $H(t_{r+1} - t_r)$ e $K_a(t_{r+1} - t_r)$. Essendo ω del tipo $f(\varepsilon)e^{ha}$ con $f(\varepsilon) = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi c^3}$ e $h = 2$ si ha dalla (41), dopo semplici considerazioni:

$$H(t_{r+1} - t_r) \leq \left(\frac{1 + 3\varepsilon_{\max} e^{2\Delta_m a}}{(1 - \varepsilon_{\max}^2)} + \frac{3(1 - 2\varepsilon_{\min}^2)(1 + \varepsilon_{\max})}{(1 - \varepsilon_{\max}^2)^2} \Delta_m a e^{2\Delta_m a} \right)$$

e dalla (42)

$$K_a(t_{r+1} - t_r) = \left(2e^{2\Delta_m a} + \frac{6\varepsilon_{\max}(1 + \varepsilon_{\max})(1 - \varepsilon_{\min}^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \varepsilon_{\max}^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta_m a e^{2\Delta_m a} \right).$$

Si ha allora:

$$(61) \quad Z = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1 + 3\varepsilon_{\max})(1 + \varepsilon_{\max})}{1 - \varepsilon_{\max}} + \frac{(1 + \varepsilon_{\max})^2}{(1 - \varepsilon_{\max})^2} \right\} +$$

$$+ \frac{2\pi \cdot 3\varepsilon_{\max} (1 + \varepsilon_{\max})^2}{(1 - \varepsilon_{\max})^2 (1 - \varepsilon_{\max}^2)} e^{2\Delta_m a} + 2\pi \frac{2(1 + \varepsilon_{\max})}{(1 - \varepsilon_{\max})^2} e^{2\Delta_m a}$$

$$\frac{(1 + \varepsilon_{\max})}{(1 - \varepsilon_{\max})^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\min}} + (1 + \varepsilon_{\max}) \right) +$$

$$+ \frac{2\pi(1 + \varepsilon_{\max})}{(1 - \varepsilon_{\max})^2} \Delta_m a e^{2\Delta_m a} \left\{ \frac{3(1 - 2\varepsilon_{\min}^2)(1 + \varepsilon_{\max})^2}{(1 - \varepsilon_{\max}^2)^2} + \frac{6\varepsilon_{\max}(1 + \varepsilon_{\max})(1 - \varepsilon_{\min}^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \varepsilon_{\max}^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Ora è da notare che a una formula non molto diversa siamo giunti nel nostro lavoro citato a pag. 2 e precisamente questa Z (supponendo nullo $\Delta_m a$) a un valore minore della θ che in tali note abbiamo calcolato. Anzi essendo

$\Delta_m a$ nelle applicazioni sempre molto piccolo possiamo ritenere la θ sempre superiore a Z perciò faremo le deduzioni seguenti in base ai valori numerici di θ che abbiamo già calcolato in altra occasione.

Abbiamo dunque applicando la (32)

$$(62) \quad |\varepsilon - \varepsilon_0| \leq \theta V(a, t') \Delta_m a + (1 + \varepsilon_{\max}) \Delta_m a' V(a, t') + (1 + \varepsilon_{\max}) \Delta_m a$$

e otteniamo così una formula analoga a quella trovata nelle nostre note precedenti ma valida per qualunque modo di variazione della massa. E questa formula si può applicare per tutto l'intervallo $(0, h)$ in cui la $|\varepsilon - \varepsilon_0|$ resta inferiore a η . Anzi da essa è facile dedurre un limite inferiore per la variazione di massa necessaria affinché $|\varepsilon - \varepsilon_0|$ raggiunga il valore prefissato η . Difatti si ha che quel valore di t' che rende il secondo membro di (62) uguale a η è certamente inferiore o al più uguale al valore h in cui $\varepsilon - \varepsilon_0$ può valere η . Siccome $V(a, t')$ è crescente se ne deduce che il valore di $V(a, t')$ che soddisfa il secondo membro di (62) eguagliato a η dà il cercato limite inferiore. Supponendo ora la massa $m(t)$ sempre crescente o decrescente, si ha $V(a, t') = \left| \log \frac{m(t')}{m_0} \right|$ (essendo m_0 la somma delle masse dei due corpi per $t=0$) e perciò:

$$(63) \quad \left| \log \frac{m(t')}{m_0} \right| = \frac{\eta - (1 + \varepsilon_{\max}) \Delta_m a}{\theta \Delta_m a + (1 + \varepsilon_{\max}) \Delta_m a'} \quad (').$$

Vediamo ora di applicare queste formule al caso delle stelle doppie in cui la massa diminuisce per irraggiamento, caso già da noi studiato nelle note citate. In esse supponendo $\eta = \frac{1}{100}$ si è trovato θ inferiore a 200.

Ovviamente poi $1 + \varepsilon_{\max} < 2$. Resta da conoscere il valore di $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$. Ora per il sistema Terra-Sole all'epoca presente questo numero secondo il JEANS sarebbe dell'ordine di 10^{-13} . In altre epoche questo numero poteva essere diverso perchè tale era la massa del sole. Però si può pensare che non sia variato di molto al trascorrere del tempo perchè se è ovvio che più grande è la massa più grande è l'energia irradiata, questo effetto può essere, almeno in parte, compensato dal fatto che più grande è la massa più breve risulta di solito il periodo. Comunque poichè le stelle doppie hanno masse e periodi diversi dal sistema sole-terra noi faremo i nostri calcoli per diversi valori di $\Delta_m a$.

Quanto a $\Delta_m a'$ i dati sono molto più incerti, noi faremo per ciò l'ipotesi

(') S'intende che η si suppone superiore a $(1 + \varepsilon_{\max}) \Delta_m a'$

(in qualche caso particolare verificata ⁽¹⁾) che esso sia dell'ordine di grandezza di $\Delta_m a$. Allora avremo dalla (63) ponendo per semplificare i calcoli e per stare più al sicuro $\Delta_m a' = 100 \Delta_m a$

$$\left| \log \frac{m(t)}{m_0} \right| = \frac{1}{400} \frac{2\Delta_m a}{\Delta_m a}$$

e ponendo $\Delta_m a = 10^{-n}$ e ricordando che in questo caso la massa è decrescente

$$(64) \quad \frac{m_0}{m(t)} = e^{0,25(10^{-2} - 2 \cdot 10^{-n})10^{n-2}}.$$

Si vede subito da questa formula che $n = 13$ si ha sensibilmente $\frac{m_0}{m(t)} = e^{2,5 \cdot 10^8}$ cioè per avere variazioni di ε di un centesimo la massa dovrebbe subire una enorme diminuzione. Dalla (64) si vede subito che il valore $\frac{m_0}{m}$ pur diminuendo m rimane enorme fino a che $n \geq 6$. Esso può diventare possibile solo per valori di n minori di 6. Si può perciò concludere che per avere variazione anche piccolissime di eccentricità occorre invocare nelle stelle doppie enormi variazioni di masse, o valori per le variazioni relative di massa in un periodo troppo diversi da quelli comunemente ammessi.

Agli stessi risultati eravamo giunti in altre note considerando però particolari leggi di variazioni delle masse. Qui i risultati sono ottenuti in modo molto più generale, e con calcoli più facili. Vi è però l'ipotesi di $\Delta a'$ dell'ordine di Δa ipotesi che non sappiamo controllare in generale essendo del resto tale controllo di competenza degli astronomi. Comunque ci sembra di aver trovato delle formule per lo studio delle variazioni di eccentricità al variare della massa ancora più semplici di quelle da noi date nelle altre note.

Vogliamo da ultimo osservare che $V(a, t) = \log \frac{m_0}{m(t)}$ se la massa è de-

(¹) Si noti che nel caso della legge del JEANS, (*Astronomy and Cosmogony*, pag. 130-131) si ha $\frac{dB}{dt} = -\alpha B^3$ con α costante e la nostra ipotesi su $\Delta a'$ risulta verificata. Difatti

$$\frac{da}{dt} = -\alpha e^{2a}, \quad \Delta a = \alpha \int_{t_r}^{t_{r+1}} e^{2a} dt, \quad \Delta a' = 2\alpha \int_{t_r}^{t_{r+1}} e^{4a-2\bar{a}} dt \quad \text{dove } \bar{a} \text{ è un valore di } t \text{ intermedio fra}$$

t_r e t_{r+1} . Siccome a varia in t_r, t_{r+1} di quantità trascurabili si può supporre $e^{2(a-\bar{a})} = 1$ e perciò risulta subito $\Delta a' = 2\Delta a$ cioè Δa e $\Delta a'$ sono dello stesso ordine di grandezza. Si noti che il ragionamento vale ponendo in luogo dell'esponente 3 qualunque esponente e perciò è applicabile anche per la legge proposta dall'ARMELLINI (« Rendiconti Lincei » II sem., 1932).

crescente, tende all'infinito per $t \rightarrow \infty$ se $m(t)$ per $t \rightarrow \infty$ tende allo zero. In questo caso le formule ora sviluppate non ci permettono di affermare che $|\varepsilon - \varepsilon_0|$ resta sempre limitato perchè il secondo membro di (62) tende all'infinito. Ciò è conforme del resto a risultati dell'ARMELLINI ⁽¹⁾ che ha mostrato la ε tendere per $t \rightarrow \infty$ all'infinito qualora $m(t)$ tenda allo zero (sempre per $t \rightarrow \infty$) d'ordine sufficientemente grande. Quindi nel caso ora ricordato i nostri metodi non ci permettono di prevedere valori assintotici per ε al tendere di t all'infinito.

Però se $m(t)$ per $t \rightarrow \infty$ non tende allo zero, allora se $a(t)$ è tale che $V(a, t)$ resti sempre finita (come accade spesso in questioni che si presentano nella pratica) le nostre formule conservano sempre valori finiti e da esse si potrà, almeno in qualche occasione, prevedere l'andamento assintotico di ε . Ritroviamo così in un caso particolare quanto si è affermato in generale e cioè che le formule sviluppate in questo lavoro, permettono a differenza di quelle usate nelle nostre note precedenti, di studiare variazioni di grandezze per intervalli di lunghezza infinita.

CAPITOLO II.

7. Considerazioni generali sull'integrazione approssimata di equazioni differenziali col metodo degli invarianti adiabatici. — Nella nostra nota del 1932 già citata abbiamo integrato approssimativamente, usando il concetto d'invariante adiabatico, l'equazione del moto armonico con forza variabile col tempo, determinando anche un limite superiore per l'errore che si commette sostituendo quella soluzione approssimata alla soluzione esatta.

Si presenta perciò spontanea l'idea di estendere tale metodo d'integrazione approssimata a qualunque sistema meccanico con un grado di libertà del tipo ora considerato con un solo parametro a variabile.

Questa estensione non ci è riuscita, anzi non la riteniamo possibile. Per giustificare questa asserzione crediamo opportuno ripetere la dimostrazione più naturale per il calcolo della soluzione approssimata e del limite superiore per l'errore commesso sostituendo la soluzione approssimata a quella esatta, e vedremo che detto limite superiore non resta affatto piccolo in tutto l'intervallo in cui J si può ritenere costante come avviene nel caso sovra ricordato del moto armonico.

⁽¹⁾ « Rendiconti Accademia dei Lincei », II sem., 1932.

Si consideri perciò il nostro sistema (5) in cui si porrà $b' = 0$ essendo ora soltanto a variabile. Avremo allora:

$$(65) \quad \begin{cases} \frac{dJ}{dt} = -a'J_a \\ \frac{dv}{dt} = \omega + a'v_a \end{cases}$$

e integrando da $(0, a \ t')$ queste equazioni abbiamo:

$$(66) \quad J = J_0 - \int_0^{t'} a' J_a dt$$

$$(67) \quad v = v_0 + \int_0^{t'} \omega dt + \int_0^{t'} a' v_a dt.$$

Ora si è visto che l'integrale a secondo membro di (66) un certo intervallo $(0, t')$ equivale ad una quantità finita moltiplicata per $\Delta_m a$ o $\Delta_m a'$. Perciò se $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$ sono abbastanza piccole si può ritenere in $(0, t')$, $J = J_0$.

Passiamo alla (67). Per l'ultimo integrale che in essa vi figura si potrebbero applicare i metodi già usati per l'integrale a secondo membro

di (18) metodi però che sarebbero validi nel caso in cui fosse $\int_v^{v+1} v_a dt = 0$ es-

sendo l'integrazione fatta supponendo a e J costanti. Questa ipotesi non è necessariamente sempre verificata nella pratica ma essa può presentarsi in vari casi particolari per esempio nel problema dei due corpi di massa variabile. Allora ammessa tale ipotesi l'ultimo integrale a secondo membro di (67) risulta dell'ordine di $\Delta_m a$ o $\Delta_m a'$ e quindi trascurabile se tali sono $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$. Ma a secondo membro di (65) si presenta l'integrale di ω il quale non si può calcolare in modo esatto perchè ω è in generale funzione di J e si sa soltanto che la J vale approssimativamente J_0 nell'intervallo $(0, t')$.

A prima vista si potrebbe pensare che il sostituire nella espressione di ω in luogo di J , J_0 (ottenendo così una soluzione approssimata di (65)) conduca ad errori piccoli, ma calcolando per la via più naturale il limite superiore dell'errore commesso sostituendo nella (65) J_0 a J esso non risulta dell'ordine di $\Delta_m a$. Infatti indicato con $\omega(J, a)$, $\omega(J_0, a)$ rispettivamente il valore vero di ω e quello che si ottiene quando in luogo di J si pone J_0 l'errore μ che si commette sostituendo nell'integrale di ω , J_0 in luogo di J sarebbe

$$(68) \quad \mu = \left| \int_0^t (\omega(J, a) - \omega(J_0, a)) dt \right|.$$

Per trovare un limite superiore di questo errore, si potrebbe procedere così ricordando che $|\omega(J, a) - \omega(J_0, a)| \leq H |J - J_0|$ ⁽¹⁾

$$(69) \quad \mu \leq \int_0^{t'} H |J - J_0| dt \leq H \left(Z \int_0^{t'} \Delta_m a V(a, t) dt + \int_0^{t'} M_a \Delta_m a' V(a, t) dt + \int_0^{t'} M_a \Delta_m a dt \right).$$

Il limite superiore per μ che ora si calcola non è dell'ordine di $\Delta_m a$. Per semplificare la dimostrazione supponiamo a variabile in modo lineare cioè $\Delta a' = 0$, $\Delta_m a = \frac{a'}{\omega_{\min}}$, $V(a, t) = a't$. Si ha allora:

$$(70) \quad \mu \leq \frac{HZ}{\omega_{\min}} \int_0^{t'} a'^2 t dt + H \int_0^{t'} \frac{M_a}{\omega_{\min}} a' dt = \frac{HZ}{2\omega_{\min}} (a't)^2 + \frac{HM_a}{\omega_{\min}} a't$$

e siccome all'ultimo membro di (70) non compare, $\Delta_m a$ ma $(a't)^2$ ossia $(V(a, t))^2$ quantità questa che si suppone finita ⁽²⁾ e perciò il limite superiore ora calcolato non è affatto trascurabile. Per questa ragione risulta dubbia e forse non lecita la sostituzione della J_0 a J nella (67).

Si obietterà che un limite superiore dell'errore commesso calcolato per altra via potrebbe risultare dell'ordine di $\Delta_m a$. Non mi è riuscito di dimostrare che questo fatto sia, almeno in generale, da escludersi, e del resto una dimostrazione del genere non avrebbe un eccessivo interesse. Vogliamo però notare che le considerazioni sopra riportate per il calcolo del limite superiore per μ si possono facilmente ripetere soltanto supponendo $|J - J_0|$ dell'ordine di $\Delta_m a V(a, t)$ e $\frac{\partial \omega}{\partial J}$ sempre dello stesso segno per t in $(0, t')$ e J compreso fra $J_0 - \eta$, $J_0 + \eta$ e si troverebbe che μ è dell'ordine di $(V(a, t))^2$. Ciò ci fa appunto ritenere che la soluzione approssimata ora costruita non sia valida in tutto l'intervallo $(0, t')$ in cui J si può ritenere uguale a J_0 .

Nel caso del moto armonico tale difficoltà non si presenta, perchè ω non dipende da J e perciò nel secondo integrale di (67) non è necessario sostituire J a J_0 .

⁽¹⁾ La H si suppone relativo a tutto l'intervallo $(0, t')$, ossia ora H è il valore massimo di $\frac{\partial \omega}{\partial J}$ per J compreso fra $J_0 - \eta$, $J_0 + \eta$ e t in $(0, t')$.

⁽²⁾ A rigore in questa equazione compare anche un termine in $a't$. Ma come vedremo questo termine si può fare almeno in qualche caso scomparire. Resta però il fatto che μ è inferiore solo a un termine in $V(a, t')$.

8. Integrazione approssimata di equazioni differenziali col metodo degli invarianti adiabatici. — Nonostante le affermazioni di carattere negativo del numero precedente dalle formule (66), (67) si può ancora ottenere una integrazione approssimata delle (65) purchè si limiti convenientemente l'intervallo $(0, t)$ in cui l'integrazione approssimata sia sostituibile a quella esatta, e si ammetta qualche altra ipotesi spesso verificata in pratica.

Noi supporremo anzitutto che $\frac{\partial V}{\partial a}$ e quindi w_a siano funzioni periodiche di w a valore medio nullo nell'intervallo $w, w+1$ e ciò per qualunque w , per qualunque J compreso fra $J_0 + \eta$, $J_0 - \eta$ e per qualunque $a(t)$. S'intende che il valor medio di $\frac{\partial V}{\partial a}$ si suppone calcolato supponendo J e a costante e solo variabile w .

In secondo luogo ammetteremo che nell'intervallo ⁽⁴⁾ $\left(0, \frac{1}{\omega(J(0), a(0))}\right)$ esista un valore t_0 di t tale che in esso sia $\frac{\partial V}{\partial a}(J(t_0), a(t_0), w(t_0)) = 0$. Questa ipotesi può ritenersi verificata in pratica per le seguenti ragioni. Si consideri la funzione $\frac{\partial V'}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial a}(J(0), a(0), w(0) + \omega(0)t)$ questa funzione essendo in $\left(0, \frac{1}{\omega(0)}\right)$ periodica a valor medio nullo assumerà in questo intervallo valori in parte positivi ed in parte negativi. Perciò se per fissare le idee la $\frac{\partial V'}{\partial a}$ è in $t=0$ positiva esisterà certamente un punto $\bar{t}$ dell'intervallo $\left(0, \frac{1}{\omega(0)}\right)$ in cui questa funzione è negativa. Ora poichè, come si è già visto varie volte e avremo occasione di ricordare più innanzi, la differenza fra $J(t) - J(0)$, $a(t) - a(0)$, $w(t) - \left(w(0) + \frac{t}{\omega(0)}\right)$ è in tutto $\left(0, \frac{1}{\omega(0)}\right)$ dell'ordine di $\Delta_m a$ in pratica molto piccolo possiamo ritenere per continuità in $\bar{t}$ $\frac{\partial V}{\partial a}$ negativa e perciò esisterà in $(0, \bar{t})$ ossia in $0, \frac{1}{\omega(0)}$ un valore t_0 per cui $\frac{\partial V}{\partial a}$ è nulla. Del resto con le considerazioni che precedono è facile verificare l'esistenza di t_0 .

Ciò posto torniamo alle nostre formule e osserviamo che si avrebbe:

$$(71) \quad w = w(0) + \int_0^{t'} \omega(J, a) dt + \int_0^{t'} a' w_a dt.$$

⁽⁴⁾ Per brevità l'estremo superiore di questo intervallo verrà indicato con $\frac{1}{\omega(0)}$.

Noi prenderemo come valore approssimato di w l'espressione $\bar{w}$ tale che ⁽¹⁾:

$$(72) \quad \bar{w} = w(0) + \int_0^{t'} \omega(J(t_0), a) dt + \int_0^{t'} a' w_a dt.$$

Sottraendo membro a membro la (71) dalla (72) si ha:

$$(73) \quad |w - \bar{w}| \leq \left| \int_0^{t'} \omega(J, a) dt - \omega(J(t_0), a) dt \right| + \left| \int_0^{t'} a' w_a dt \right|.$$

Quindi trovando un limite superiore del secondo membro di questa equazione ne segue subito un limite superiore per il primo. Ora ricordando la proprietà di w_a e ripetendo gli stessi calcoli fatti per il calcolo del limite

(1) Si noti che si ammette di conoscere $J(t_0)$ invece di J_0 . È possibile però calcolare un valore approssimato di $J(t_0)$, $J_1(t_0)$ tale che la sua introduzione in (72) porti ad un errore dell'ordine di $\Delta_m a \cdot a'_{\max} t'$ per le nostre approssimazione trascurabile. Noi porremo:

$$(x) \quad J_1(t_0) = J_0 - \int_0^{t_0} a' J_a' dt.$$

Essendo J_a' , analogamente al capitolo primo J_a , calcolata per $J = J_0$, $a = a(0)$, $\omega = \omega(0) + \frac{t}{\omega(0)}$. Allora integrando la (12) sottraendovi la (x) e ragionando nel modo con cui si è giunti alla (24) si ha:

$$|J(t_0) - J_1(t_0)| \leq Z(\Delta_m a)^2 \leq \frac{Z}{\omega_{\min}} \Delta_m a \cdot a'.$$

Quindi:

$$\left| \int_0^{t'} (\omega(J(t_0), a) - \omega(J_1(t_0), a)) dt \right| \leq \frac{ZH}{\omega_{\min}} \Delta_m a \cdot a'_{\max} t'$$

come dovevasi dimostrare.

Naturalmente si ammette nota anche t_0 . Questo valore si potrebbe calcolare approssimativamente nel seguente modo. Si indichi con $\left(\frac{\partial V'}{\partial a}\right)$ la $\frac{\partial V}{\partial a}(J_0, a(0), \omega(0)t)$, questa differisce come si è detto da $\frac{\partial V}{\partial a}$ di un termine dell'ordine di Δa , termine il cui massimo indicheremo con $P\Delta_m a$ essendo P un numero facilmente calcolabile. Allora t_0 sarà compreso fra quel valore t' in cui $\frac{\partial V'}{\partial a} - P\Delta_m a > 0$ e quel valore t'' in cui $\frac{\partial V'}{\partial a} + P\Delta_m a < 0$. Ammetteremo l'esistenza di t' , t'' e che $t'' - t'$ sia dell'ordine di $\Delta_m a$. Allora ragionando come precede è facile provare che se si prende come valore approssimato di t_0 un qualunque valore fra t' e t'' si commette ancora un errore dell'ordine di $\Delta_m a \cdot a'_{\max} t'$ cioè un errore trascurabile. Si potrebbe cercare anche un metodo di approssimazioni successive per il calcolo di t_0 che evitasse le ipotesi fatte in questa nota, ma non ne vale la pena giacchè questa ipotesi sono assai spesso verificate in pratica e del resto in pratica $J(t_0)$ e t_0 si ha nei dati del problema stesso.

superiore per $|J - J_0|$ si può dire che è:

$$(74) \quad \left| \int_0^{t'} a' v_a dt \right| = (\bar{Z} \Delta_m a + A \Delta_m a') V(a, t') + A \Delta_m a$$

essendo la $\bar{Z}$ costruita in modo analogo alla Z che appare nel limite superiore di $|J - J_0|$. Resta da trovare un limite superiore per il primo termine a secondo membro di (73).

A questo scopo si osservi che è valida la relazione:

$$(75) \quad \left| \int_0^{t'} \omega(J, a) - \int_0^{t'} \omega(J(t_0), a) dt \right| \leq \left| \int_0^{t_0} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)) dt \right| + \left| \int_{t_0}^{t'} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)) dt \right|.$$

Ora è:

$$(76) \quad \left| \int_0^{t_0} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)) dt \right| \leq H \int_0^{t_0} |J - J(t_0)| dt \leq \frac{MH \Delta_m a}{\omega(0)} \quad (1).$$

Molto più difficile è il calcolo di un valore maggiorante per l'ultimo integrale a secondo membro di (75). A questo scopo dividiamo l'intervallo (t_0, t') in n parti con i punti $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ punti tali che:

$$(77) \quad \tau_1 = t_0 + \frac{1}{\omega(J(t_0), a(t_0))} \quad \tau_{r+1} = \tau_r + \frac{1}{\omega(J(\tau_r), a(\tau_r))}.$$

Potremo perciò scrivere:

$$(78) \quad \left| \int_{t_0}^{t'} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)) dt \right| \leq \left| \int_{t_0}^{\tau_1} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)) dt \right| + \\ + \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)) dt \right| \cdot \dots \cdot \left| \int_{t_{n-1}}^t (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)) dt \right|.$$

Consideriamo ora l'integrale generico:

$$(79) \quad \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)) dt \right| \leq \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (\omega(J, a) - \omega(J(\tau_r), a)) dt \right| + \\ + \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (\omega(J(\tau_r), a) - \omega(J(t_0), a)) dt \right|.$$

(1) La relazione $|J(t_0) - J| \leq \frac{M \Delta_m a}{\omega(0)}$ valida per t in $(0, t_0)$ si ottiene subito dalla prima di (65) dopo averla integrata da t a t_0 .

Rifacendo lo stesso calcolo già fatto a proposito della espressione per il limite superiore di $J(t_r) - J_0$

$$(80) \quad |J(\tau_r) - J(t_0)| \leq (Z\Delta_m a + M\Delta_m a') V(a, \tau_r) \quad (1)$$

$$|J(\tau_r) - J(t_0)| \leq \frac{Z}{\omega_{\min}} a'^2_{\max} \tau_r + \frac{M}{2} \frac{a''_{\max}}{\omega_{\min}} \tau_r$$

con il noto significato per $a'_{\max}$, $a''_{\max}$.

Perciò si ha subito ricordando $t' > \tau_r$

$$(81) \quad \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \omega(J(\tau_r), a) - \omega(J(t_0), a) dt \right| \leq H \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} |J(\tau_r) - J_0| dt \leq$$

$$\leq H \left(\frac{Z a'^2_{\max}}{\omega_{\min}} + \frac{M}{2} \frac{a''_{\max}}{\omega_{\min}} \right) t' (\tau_{r+1} - \tau_r).$$

Quanto all'altro termine a secondo membro di (79) sono necessarie varie osservazioni. Anzitutto si noti che si ha:

$$(82) \quad \omega(J, a) = \omega(J(\tau_r), a(\tau_r)) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial J} \right)_{\tau_r} (J(t) - J(\tau_r)) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a} \right)_{\tau_r} (a(t) - a(\tau_r)) +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial J^2} \right\} (J(t) - J(\tau_r))^2 + 2 \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial J \partial a} \right\} (J(t) - J(\tau_r))(a(t) - a(\tau_r)) + \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} \right\} (a(t) - a(\tau_r))^2.$$

Dove $\left(\frac{\partial \omega}{\partial J} \right)_{\tau_r}$, $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a} \right)_{\tau_r}$ significa il valore di queste derivate calcolate per $J = J(\tau_r)$, $a = a(\tau_r)$ mentre le derivate entro parentesi graffa significano valori di queste derivate per valori di $J(\tau)$ e $a(\tau)$ per τ in τ_r, τ_{r+1} .

Con analogo significato dei simboli si ha:

$$(83) \quad \omega(J(\tau_r), a) = \omega(J(\tau_r), a(\tau_r)) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a} \right)_{\tau_r} (a(t) - a(\tau_r)) + \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} \right\} (a(t) - a(\tau_r))^2.$$

Allora se col suffisso max posto vicino ad una certa grandezza intendiamo al solito il massimo in valore assoluto di questa grandezza per J compreso fra $J_0 - \eta$ e $J_0 + \eta$ e a compresa fra $(0, t')$. Abbiamo sottraendo la (83) dalla (82) e sostituendo nel secondo membro di (79):

$$(84) \quad \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \omega(J, a) - \omega(J(\tau_r), a) dt \right| \leq \left| \left(\frac{\partial \omega}{\partial J} \right)_{\tau_r} \right| \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (J(t) - J(\tau_r)) dt \right| + L a'^2_{\max} (\tau_{r+1} - \tau_r)^3$$

(1) A rigore in luogo di $V(a, \tau_r)$ si dovrebbe mettere la variazione totale di a in t_0, τ_r . Ma essendo questa variazione inferiore a $V(a, \tau_r)$ conviene mettere nella (80) la $V(a, \tau_r)$.

con

$$(85) \quad L = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial J^2} \right\}_{\max} M_a^2 + \frac{2}{3} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial J \partial a} \right\}_{\max} M_a + \frac{2}{3} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} \right\}_{\max} \quad (1).$$

Calcoliamo ora un limite superiore per $\left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (J(t) - J(\tau_r)) dt \right|$. Si ricordi anzitutto:

$$(86) \quad \frac{dJ}{dt} = -a' J_a = -a' \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w}.$$

Si osservi poi che è:

$$(87) \quad \left| \frac{\partial^2 V(J(t), w(t), a(t))}{\partial a \partial w} - \frac{\partial^2 V\left(J(\tau_r), w(\tau_r) + \frac{t - \tau_r}{\tau_{r+1} - \tau_r}, a(\tau_r)\right)}{\partial a \partial w} \right| \leq \\ \leq R |J(t) - J(\tau_r)| + S \left| w(t) - w(\tau_r) - \frac{t - \tau_r}{\tau_{r+1} - \tau_r} \right| + P |a(t) - a(\tau_r)|.$$

E ricordando che $w(\tau_r) + \frac{t - \tau_r}{\tau_{r+1} - \tau_r}$ è analoga alla w_i usata nel paragrafo 2 del primo capitolo si può affermare che in base alla (21) il termine che moltiplica S è inferiore a $(M_a H + K_a)(\tau_{r+1} - \tau_r) + A \int_{\tau_r}^t |a'| dt$.

Si ha così indicando per brevità con $\left| \frac{\partial V(t)}{\partial a \partial w} - \frac{\partial V(\tau_r)}{\partial a \partial w} \right|$ il primo membro di (87)

$$(88) \quad \left| \frac{\partial V(t)}{\partial a \partial w} - \frac{\partial V(\tau_r)}{\partial a \partial w} \right| \leq (R M_a + S(M_a H + K_a)(\tau_{r+1} - \tau_r) + S A + P) \int_{\tau_r}^t |a'| dt \\ \leq 2Z a'_{\max} (t - \tau_r).$$

Quindi indicato per maggiore chiarezza $\left\{ \frac{\partial V}{\partial a \partial w} \right\}_{\tau_r}$ e $\left\{ \frac{\partial V}{\partial a} \right\}_{\tau_r}$ rispettivamente ⁽²⁾ la $\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w}$, $\frac{\partial V}{\partial a}$ calcolate per $J = J(\tau_r)$, $w = w(\tau_r) + \frac{t - \tau_r}{\tau_{r+1} - \tau_r}$, $a = a(\tau_r)$ e con a''_M un

(1) Ciò si ottiene ricordando che $J(t) - J(\tau_r) < M_a a'_{\max}(t - \tau_r)$, $|a(t) - a(\tau_r)| \leq a'_{\max}(t - \tau_r)$.

(2) Si noti che $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} \right)_{\tau_r}$ coincide con $\frac{\partial V(\tau_r)}{\partial a \partial w}$ sopra considerata.

valore di α'' per t compreso fra τ_r e τ_{r+1} si ha subito dalla (86):

$$(89) \quad J(t) - J(\tau_r) = \int_{\tau_r}^t \alpha' \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} dt = \alpha'(\tau_r) \int_{\tau_r}^t \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} dt + \int_{\tau_r}^t \alpha''_M (t - \tau_r) \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} dt =$$

$$= \alpha'(\tau_r) \int_{\tau_r}^t \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} \right\}_{\tau_r} dt + g(t) = \frac{\alpha'(\tau_r)}{\omega_r} \left[\left\{ \frac{\partial V}{\partial a} \right\} \right]_{\tau_r}^t + g(t)$$

dove si è indicato con $g(t)$ l'espressione:

$$(90) \quad g(t) = \int_{\tau_r}^t \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} \alpha''_M (t - \tau_r) dt + \alpha'(\tau_r) \int_{\tau_r}^t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} \right)_{\tau_r} \right) dt$$

e con ω_r la $\omega(J(\tau_r), \alpha(\tau_r))$. Abbiamo subito:

$$|g(t)| \leq \frac{M_\alpha \alpha''_{\max} (t - \tau_r)^2}{2} + Z \alpha'^2_{\max} (t - \tau_r)^2.$$

Si ha così:

$$(91) \quad \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (J(t) - J(\tau_r)) dt \right| \leq \left| \frac{\alpha'(\tau_r)}{\omega_r} \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right)_{\tau_r} dt - \frac{\alpha'(\tau_r)}{\omega_r^2} \left| \frac{\partial V(J(\tau_r), w(\tau_r), \alpha(\tau_r))}{\partial a} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} g(t) dt \right| \right| = + \left| \frac{\alpha'(\tau_r)}{\omega_r^2} \frac{\partial V}{\partial a} (J(\tau_r), w(\tau_r), \alpha(\tau_r)) \right| + \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} g(t) dt \right|.$$

Il primo termine a secondo membro si è potuto omettere in base alla relazione:

$$(92) \quad \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial a} \right\}_{\tau_r} dt = \frac{1}{\omega_r} \int_{w(\tau_r)}^{w(\tau_r)+1} \frac{\partial V \left(J(\tau_r), w(\tau_r) + \frac{t - \tau_r}{\tau_{r+1} - \tau_r}, \alpha(\tau_r) \right)}{\partial a} dw$$

e all'ipotesi che il valor medio di $\frac{\partial V}{\partial a}$ calcolato da w a $w+1$ con J e α costante è nullo.

Allora per trovare un limite superiore per $\left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (J(t) - J(\tau_r)) dt \right|$ rimane da trovarsi un limite superiore per $\frac{\partial V}{\partial a}$ calcolato per $t = \tau_r$ valore che ora indicheremo con $\frac{\partial V}{\partial a}(\tau_r)$.

Ora possiamo scrivere: ricordando che $\frac{\partial V}{\partial a}(t_0) = 0$

$$(93) \quad \left| \frac{\partial V(\tau_r)}{\partial a} \right| \leq \left| \frac{\partial V(\tau_r)}{\partial a} - \frac{\partial V(\tau_{r-1})}{\partial a} \right| \dots \left| \frac{\partial V(\tau_s)}{\partial a} - \frac{\partial V(\tau_{s-1})}{\partial a} \right| + \left| \frac{\partial V(\tau_1)}{\partial a} - \frac{\partial V(t_0)}{\partial a} \right|.$$

Calcoliamo ora un limite superiore per un generico dei termini che compaiono a secondo membro di (93). Si ha infatti:

$$(94) \quad \left| \frac{\partial V(\tau_s)}{\partial a} - \frac{\partial V(\tau_{s-1})}{\partial a} \right| \leq \left| \frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_s), w(\tau_s), a(\tau_s)) - \right. \\ \left. - \frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_{s-1}), w(\tau_{s-1}) + \omega(\tau_{s-1})(\tau_s - \tau_{s-1}), a(\tau_{s-1})) \right| + \\ + \left| \frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_{s-1}), w(\tau_{s-1}) + \omega(\tau_{s-1})(\tau_s - \tau_{s-1}), a(\tau_{s-1})) - \frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_{s-1}), w(\tau_{s-1}), a(\tau_{s-1})) \right|.$$

Ora l'ultimo termine è nullo per la periodicità di $\frac{\partial V}{\partial a}$. Quanto al primo indicato con M, A, Q rispettivamente al massimo di $\left(\frac{\partial V}{\partial a \partial w}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial J}\right)$, $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}$ per t in $(0, t')$, J in $J_0 - \eta, J_0 + \eta$ e per qualunque w si ha:

$$(95) \quad \left| \frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_s), w(\tau_s), a(\tau_s)) - \frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_{s-1}), w(\tau_{s-1}) + \omega(\tau_{s-1})(\tau_s - \tau_{s-1}), a(\tau_{s-1})) \right| \leq \\ \leq M_a |w(\tau_s) - w(\tau_{s-1}) - \omega(\tau_{s-1})(\tau_s - \tau_{s-1})| + A |J(\tau_s) - J(\tau_{s-1})| + \\ + Q |a(\tau_s) - a(\tau_{s-1})|.$$

Ora indicando con K un valore maggiorante in $(0, t')$ e $J_0 - \eta, J_0 + \eta$ per la grandezza finora indicato con questo simbolo e ricordando la (22)

$$(96) \quad |J(\tau_s) - J(\tau_{s-1})| \leq M_a \alpha'_{\max}(\tau_s - \tau_{s-1}) \\ |a(\tau_s) - a(\tau_{s-1})| \leq \alpha'_{\max}(\tau_s - \tau_{s-1}) \\ |w(\tau_s) - w(\tau_{s-1}) - \omega(\tau_{s-1})(\tau_s - \tau_{s-1})| \leq \left(\frac{K + HM_a}{\omega_{\min}} + A \right) \alpha'_{\max}(\tau_s - \tau_{s-1}).$$

Quindi si ha:

$$(97) \quad \left| \frac{\partial V(\tau_s)}{\partial a} - \frac{\partial V(\tau_{s-1})}{\partial a} \right| \leq \left(M_a \frac{K + HM_a}{\omega_{\min}} + 2M_a A + Q \right) \alpha'_{\max}(\tau_s - \tau_{s-1}).$$

Quindi si ha sostituendo in (94)

$$(98) \quad \left| \frac{\partial V(\tau_r)}{\partial a} \right| \leq \left(M_a \frac{(K + HM_a)}{\omega_{\min}} + 2M_a A + Q \right) \alpha'_{\max} t'.$$

Perciò tornando alla (91) abbiamo:

$$(99) \quad \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (J(t) - J(\tau_r)) dt \right| \leq \left(\frac{M_a(K + HM_a)}{\omega_{\min}} + 2M_a A + Q \right) \frac{\alpha'^2_{\max}}{\omega_{\min}} t'(\tau_{r+1} - \tau_r) +$$

$$+ \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \frac{M_a \alpha''_{\max} (t - \tau_r)^2}{2} dt + Z \alpha'^2_{\max} \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (t - \tau_r)^2 dt$$

$$(100) \quad \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (J(t) - J(\tau_r)) dt \right| \leq \left(\frac{M_a(K + HM_a)}{\omega_{\min}} + 2M_a A + Q \right) \frac{\alpha'^2_{\max}}{\omega_{\min}} t'(\tau_{r+1} - \tau_r) +$$

$$+ \frac{M_a \alpha''_{\max} (\tau_{r+1} - \tau_r)^3}{6} + \frac{Z \alpha'^2_{\max} (\tau_{r+1} - \tau_r)^3}{3} \leq$$

$$\leq \left[\left(\frac{M_a(K + HM_a)}{\omega_{\min}} + 2M_a A + Q + \frac{Z}{3} \right) \frac{\alpha'^2_{\max}}{\omega_{\min}} t' + \frac{M_a \alpha''_{\max}}{6 \omega_{\min}} t' \right] (\tau_{r+1} - \tau_r).$$

Quindi si ha:

$$(101) \quad \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)) dt \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{HM_a(K + HM_a)}{\omega_{\min}} + \frac{2HM_a A + HQ}{\omega_{\min}} + \frac{4}{3} \frac{ZH}{\omega_{\min}} \right) \alpha'^2_{\max} t'(\tau_{r+1} - \tau_r) +$$

$$+ \frac{L}{\omega_{\min}} \alpha'^2_{\max} t'(\tau_{r+1} - \tau_r) + \frac{2}{3} M_a H \frac{\alpha''_{\max}}{\omega_{\min}} t'(\tau_{r+1} - \tau_r) =$$

$$= m \alpha'^2_{\max} t'(\tau_{r+1} - \tau_r) + n \alpha''_{\max} t'(\tau_{r+1} - \tau_r).$$

Essendo:

$$(102) \quad m = \frac{HM_a(K + HM_a)}{\omega_{\min}} + \frac{2HM_a A + HQ}{\omega_{\min}} + \frac{4}{3} \frac{ZH}{\omega_{\min}} + \frac{L}{\omega_{\min}}$$

$$(103) \quad n = \frac{2}{3} \frac{M_a H}{\omega_{\min}}.$$

Si ha poi:

$$(104) \quad \left| \int_{\tau_{n-1}}^{t'} \omega(J(t), a) - \omega(J(t_0), a) dt \right|$$

$$\left| \int_{\tau_{n-1}}^{t'} \omega(J, a) - \omega(J(\tau_{n-1}), a) dt \right| + \left| \int_{\tau_{n-1}}^t \omega(J(\tau_{n-1}), a) - \omega(J(t_0), a) dt \right| \leq$$

$$\leq H \int_{\tau_{n-1}}^t |J(t) - J(\tau_{n-1})| dt + \frac{HZ \alpha'^2_{\max} t'}{\omega_{\min}} \int_{\tau_{n-1}}^{t'} dt + \frac{M_a H}{2} \frac{\alpha''_{\max} t'}{\omega_{\min}} \int_{\tau_{n-1}}^{t'} dt \leq$$

$$\leq \frac{H M \Delta m a}{\omega_{\min}} + |m \alpha'^2_{\max} t' + n \alpha''_{\max} t'| (t' - \tau_{n-1}).$$

Allora sommando la (104) con le (101) e (76) si ha:

$$(105) \quad \left| \int_0^{t'} \omega(J, a) - \omega(J(t_0), a) dt \right| \leq \frac{2HM}{\omega_{\min}} \Delta_m a + m(a'_{\max} t')^2 + na''_{\max} t'^2.$$

e da questa formula si ottiene facilmente, aggiungendo $(\bar{Z}\Delta_m a + A\Delta_m a')V(a, t) + A\Delta_m a$ la cercata espressione per il limite superiore dell'errore commesso nel sostituire alla soluzione esatta del sistema (65) la soluzione approssimata. Come si vede a parte il termine in $\Delta_m a$, che è di solito piccolissimo, l'errore dipende da $(a'_{\max} t')^2$ e $a''_{\max} t'^2$. Ora se la a variasse in modo lineare $a''_{\max} t'^2$ sarebbe nulla mentre $a'_{\max} t'$ sarebbe l'incremento che subisce la a nell'intervallo $(0, t')$.

Perciò in questo caso si può affermare che la nostra integrazione approssimata è valida nell'intervallo in cui si può ritenere infinitesimo il quadrato degli incrementi di a . Se invece a non varia in modo lineare non è possibile un enunciato così semplice del nostro risultato. Si può però osservare che essendo $\Delta_m a'$ molto piccolo nell'intervallo $(0, t')$ si può presumere $a''_{\max} t'^2$ dell'ordine di $(a'_{\max} t')^2$ ⁽¹⁾, e perciò si può ancora enunciare il teorema nel modo sopra indicato.

Comunque per più esattezza la formula (105) serve in ogni caso per verificare entro quale intervallo la soluzione approssimata è sostituibile a quella esatta. Prima di lasciare la questione, vogliamo notare che, come scende anche dalla nostra dimostrazione, sarebbe stato possibile trovare un limite superiore più basso di quello calcolato, ma esso sarebbe risultato assai più incomodo nelle applicazioni. Osserviamo poi che per esprimere l'errore commesso supponiamo noto il modo di variare di a ossia di conoscere $a'_{\max}$. Ma ciò è necessario altrimenti non sarebbe possibile il calcolo di $\int_0^{t'} \omega(J(t_0), a) dt$ ⁽²⁾.

9. Calcolo approssimato del numero delle oscillazioni. — Se il metodo d'integrazione approssimata delle nostre equazioni è valido solo per un intervallo di tempo che possiamo dire ristretto, rispetto all'intervallo in cui la J si

(1) Questa presunzione si può giustificare in base al fatto che $\Delta a'$, Δa sono dello stesso ordine di grandezza e $\frac{a'}{a'_{\max}}$, $\frac{a''}{a''_{\max}}$ sono in $(0, t')$ molto vicine all'unità. Allora è facile dedurre $a''_{\max}$ dell'ordine di $a'^2_{\max}$ cioè $a''_{\max} t'^2$ dell'ordine di $(a'_{\max} t')^2$.

(2) È poi ovvio che la nostra integrazione vale per t' nell'intervallo $(0, h)$ in cui $|J - J_0| < \eta$.

può ritenere costante, è possibile però partendo dalla (67) ottenere per certe grandezze delle approssimazioni valide per tutto l'intervallo in cui ΔJ si può ritenere trascurabile.

Noi calcoleremo con approssimazione più che sufficiente per tutti i bisogni della pratica, il numero delle oscillazioni che subisce il nostro sistema, intendendo per numero delle oscillazioni il numero delle volte in cui w assume valori interi, ossia in sostanza la w stessa, ma questa volta interessa che l'errore sia piccolo rispetto alla w non come nel paragrafo precedente rispetto all'unità. Questa ricerca può avere interesse per esempio se si volesse conoscere quante volte un pianeta è passato in un certo tempo al perielio.

Come è noto la w vale:

$$(106) \quad w = \int_0^{t'} \omega(J, a) dt + \int_0^{t'} \alpha' w_a dt.$$

Mentre il valore approssimato che noi proponiamo per il calcolo delle oscillazioni sarà

$$(107) \quad w' = \int_0^{t'} \omega(J_0, a) dt.$$

Quindi l'errore relativo commesso λ vale:

$$(108) \quad \lambda = \frac{\int_0^{t'} \omega(J, a) - \omega(J_0, a) dt + \int_0^{t'} \alpha' w_a dt}{\left| \int_0^{t'} \omega(J, a) dt + \int_0^{t'} \alpha' w_a dt \right|}.$$

Ossia:

$$(109) \quad \lambda = 1 - \frac{\int_0^{t'} \omega(J_0, a) dt}{\int_0^{t'} \omega(J_0, a) dt + \int_0^{t'} (\omega(J, a) - \omega(J_0, a)) dt + \int_0^{t'} \alpha' w_a dt}.$$

Ora è:

$$(110) \quad \left| \int_0^t \alpha' w_a dt \right| \leq (\bar{Z} \Delta_m a + A \Delta_m a') V(a, t) + A \Delta_m a.$$

Si ha poi applicando il teorema della media e indicando con $\bar{t}$ un va-

lore del tempo intermedio fra $(0, t')$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t'} (\omega(J, a) - \omega(J_0, a)) dt \right| = \left| \int_0^{t'} \omega(J_0, a) \left(1 - \frac{\omega(J, a)}{\omega(J_0, a)} \right) dt \right| = \\ & = \left| \int_0^{t'} \omega(J_0, a) dt \right| \left| \frac{\omega(J(\bar{t}), a(\bar{t})) - \omega(J_0, a(\bar{t}))}{\omega(J_0, a(\bar{t}))} \right| \leq \left| \int_0^{t'} \omega(J_0, a) dt \right| \frac{H}{\omega_{\min}} |J(\bar{t}) - J_0| \leq \\ & \leq \int_0^{t'} \omega(J_0, a) dt \left[\frac{H}{\omega_{\min}} [Z\Delta_m a + M_a \Delta_m a'] V(a, t') + \frac{HM_a}{\omega_{\min}} \Delta_m a \right]. \end{aligned}$$

Ossia :

$$(111) \quad \lambda = 1 - \frac{1}{1 + \frac{H}{\omega_{\min}} (Z\Delta_m a + M_a \Delta_m a') V(a, t') + \frac{\int_0^{t'} \omega(J_0, a) dt}{\int_0^{t'} \omega(J_0, a) dt} + \frac{HM_a \Delta_m a}{\omega_{\min}}}$$

Come si vede subito con una semplice riduzione questo limite superiore per λ è dell'ordine di $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$. E perciò se queste grandezze sono molto piccole risulta subito che λ è piccolo, restando così dimostrato il nostro asserto.

CAPITOLO III.

10. Generalità sui sistemi a due parametri variabili. — Riprendiamo ora il caso in cui il nostro sistema meccanico abbia due parametri a e b . Supporremo che a vari al solito in maniera tale che Δa e $\Delta a'$ siano molto piccoli cioè in modo da avvicinarsi a variare in maniera infinitamente lenta e graduale, mentre sul modo di variare di b non facciamo per ora alcuna ipotesi. Allora vogliamo dimostrare che la differenza fra J e la y definita nel capitolo primo, è nulla se a varia in modo infinitamente lento e graduale ed in ogni caso è possibile dare un limite superiore per la differenza $|J - y|$ in modo da poter verificare se la y è sostituibile alla J con sufficiente approssimazione.

Perciò riprendiamo la formula (14) del capitolo primo:

$$(112) \quad |J - y| \leq \left| \int_0^{t'} a' J_a dt \right| + \left| \int_0^{t'} b' (J_b - \bar{J}_b) dt \right|.$$

E poichè J_b è Lipschitziana possiamo scrivere:

$$(113) \quad |J_b - \bar{J}_b| \leq T |J - y|.$$

Essendo T il massimo di $\frac{\partial J_b}{\partial J}$ per t in $(0, t')$ e J compreso fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$ e per ogni w . Naturalmente come nel capitolo primo supponiamo $(0, t')$ compreso nell'intervallo $(0, h)$ in cui $|J - y|$ è inferiore a η .

Si ha allora:

$$(114) \quad |J - y| \leq I(t') + T \int_0^{t'} |b'| |J - y| dt.$$

Dove $I(t')$ è il limite superiore già calcolato per $\left| \int_0^{t'} \alpha' J_a dt \right|$ ossia $M_a \Delta_m a + (Z \Delta_m a + M_a \Delta_m a') V(a, t') + Z' \Delta_m a V(b, t)$.

Per trovare il limite superiore cercato si consideri la funzione soddisfacente all'equazione:

$$(115) \quad V = I(t') + T \int_0^{t'} |b'| V dt.$$

Noi dimostreremo anzitutto che V è maggiore di $|J - Y|$. A questo scopo si sottragga la (115) dalla (114). Si ha:

$$(116) \quad |J - y| - V \leq T \int_0^{t'} |b'| (|J - Y| - V) dt.$$

Ora per $t=0$ è $J - y = 0$ mentre V vale $I(0) = M_a \Delta_m a$. Allora per $t=0$, $|J - y| - V < 0$ e per continuità resterà tale in un intorno $(0, \delta)$. È facile vedere che l'intorno $(0, \delta)$ coincide con $(0, t')$. Difatti se fosse $\delta < t'$ sarebbe per $t = \delta$, $|J - y| - V = 0$. Ma essendo in $(0, \delta)$, $|J - y| - V$ negativo il secondo membro sarebbe per $t = \delta$ negativo, mentre il primo sarebbe nullo il che è assurdo. Segue perciò $|J - y| < V$ in tutto $(0, t')$.

Calcoliamo ora V in base alla sua definizione (115). Derivando questa equazione si ha:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dI}{dt} + T |b'| V = (Z \Delta_m a + M_a \Delta_m a') \left| \frac{da}{dt} \right| + Z' \Delta_m a \left| \frac{db}{dt} \right| + T |b'| V$$

e integrando questa equazione differenziale si ha:

$$\begin{aligned} V &= e^{\int_0^{t'} T|b'| dt} \int_0^t e^{-\int_0^t T|b'| dt} \left[(Z\Delta'_m a + M_a \Delta_m a') \left| \frac{da}{dt} \right| + Z'\Delta_m a \left| \frac{db}{dt} \right| \right] dt + V(0) \leq \\ &\leq e^{TV(b, t')} (\{ Z\Delta_m a + M_a \Delta_m a' \} V(a, t') + Z'\Delta_m a V(b, t') + M_a \Delta_m a). \end{aligned}$$

Quindi:

$$(117) \quad |J - y| \leq e^{TV(b, t')} (\{ Z\Delta_m a + M_a \Delta_m a' \} V(a, t') + Z'\Delta_m a V(b, t') + M_a \Delta_m a) = e^{TV(b, t')} I(t').$$

Da questa formula è facile anzitutto verificare in quale intervallo $(0, t')$ resta sicuramente $|J - y|$ inferiore a η perchè basta verificare per le ragioni esposte nel capitolo primo se in un certo intervallo è inferiore a η il secondo membro della formula in discorso. Naturalmente si vede subito che a parità di $V(a, t')$, $V(b, t')$ questo intervallo è tanto più ampio quanto più piccolo è $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$ anzi se la a varia in maniera infinitamente lenta e graduale la differenza fra J e y è nulla in qualunque intervallo $(0, t')$ ⁽¹⁾ finito o infinito in cui $V(a, t')$, $V(b, t')$ restano finite. Questo risultato si ottiene con considerazioni analoghe a quelle svolte nel paragrafo 4 del capitolo primo.

11. Osservazioni critiche. — Dobbiamo ora aggiungere alcune osservazioni sulla portata pratica del nostro risultato.

Si noterà anzitutto che la formula (117) è applicabile se $V(a, t')$, $V(b, t')$ sono finite. Ora affinchè $V(a, t')$ abbia un valore finito è abbastanza grande essendo $\Delta_m a$ molto piccolo, deve essere grande il numero di periodi compresi in $(0, t')$. Ma allora salvo casi speciali, dovrebbe essere Δb molto piccolo altrimenti $V(b, t')$ diventerebbe enorme e la nostra limitazione non sarebbe applicabile praticamente.

Sembrerebbe da ciò che in sostanza per applicare la (117) fosse necessario ammettere che la b vari in modo analogo alla a e che perciò il nostro risultato non avesse alcun valore perchè si riducesse al caso di un sistema in cui vi sono due parametri variabili come a . Si deve però notare che per avere $V(b, t')$ finito, si deve per quanto precede supporre in generale Δb piccolo, ma non vi è alcuna ipotesi da farsi su Δb . Perciò si può dire che il nostro risultato vale se b varia in una maniera che si avvicina ad essere

(1) S'intende compreso in $(0, h')$.

infinitamente lenta, ma non si avvicina affatto ad essere graduale. Questioni di questo genere si presentano nella meccanica celeste.

Altra obbiezione che si può fare al nostro risultato è che la y viene ricavata da una equazione differenziale in cui appare $\bar{J}_b$ che dipende da w la quale è incognita fino a che non si sappia integrare tutto il sistema (5). Perciò il nostro risultato è applicabile quando per altra via si conosce la $w(t)$ oppure il caso in cui si possa esprimere w come funzione di b perchè allora basta integrare l'equazione

$$\frac{dy}{dt} = -b\bar{J}_b$$

in cui la sola incognita è la y . Di questo caso vedremo una applicazione alla meccanica celeste.

Poi il nostro risultato può avere interesse qualora si vogliono conoscere alcune limitazioni per la J . In questo caso può essere facile trovare un limite superiore per y in base alla (13) e da questa risalire ad una limitazione per J .

Speriamo in ricerche future di mostrare alcune applicazioni delle formule ottenute in questo capitolo.