Sopra l'antipolo d'un piano nello spazio S_4 rispetto ad un iperellissoide.

Memoria di O. BOTTEMA (a Delft, Olanda).

A Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico

Sunto. - Generalizzando una nozione introdotta da Signorini l'autore associa ad ogni piano dello spazio a quattro dimensioni in cui sia dato un iperellissoide E un antipolo rispetto a E e ricerca la congruenza C di piani aventi un dato antipolo. Il risultato è: il luogo dei punti per i quali passa un solo piano di C è una superficie rigata F_4 secondo una generatrice. Le considerazioni possono essere estese allo spazio a n dimensioni e danno, se $n = 3$, un risultato dedotto da Bompiani.

1. SIGNORINI ⁽¹⁾ ha introdotto la nozione dell'antipolo di una retta rispetto ad un ellissoide. Questo punto è costruito come segue.

Siano dati un ellissoide E di centro O ed una retta r . Il punto O e la retta r determinano un piano α che sega sull'ellissoide una ellisse ϵ di area s ; ridotta questa ellisse per omotetia di centro O nel rapporto hs^{-1} (h costante), l'antipolo di r rispetto all'ellissoide è l'antipolo K di r rispetto all'ellisse ridotta ϵ' . SIGNORINI ha dimostrato che la nozione dell'antipolo è specialmente feconda in problemi di cinematica masse e di stereodinamica.

A proposito della nozione dell'antipolo BOMPIANI ⁽²⁾ ha pubblicato un articolo contenente una investigazione geometrica elegante. In tale articolo BOMPIANI determina il luogo delle rette aventi un dato antipolo K . Dall'articolo risulta che il luogo è una superficie rigata del 3° ordine F^3 , di cui la retta $d = OK$ è una direttrice doppia, mentre la polare d' di d è direttrice semplice.

2. Con una costruzione analoga a quella di SIGNORINI si può associare ad ogni piano dello spazio a quattro dimensioni S_4 in cui sia dato un iperellissoide E , un antipolo rispetto all'iperellissoide.

⁽¹⁾ A. SIGNORINI, *Estensione della nozione d'ellisse centrale d'inerzia ai fini della Dinamica dei solidi* (Rend. Acc. Lincei, S. VIII, vol. 1, 1946, 137-142); *Sopra alcune questioni di Geometria delle masse, Cinematica delle masse e Stereodinamica* (Annali di Mat., s. IV, t. 24, 1945, 1-11).

⁽²⁾ E. BOMPIANI, *Sopra una nozione di antipolarità fra rette nello spazio, occorrente in Dinamica* (Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5), 8, 1949, 412-422).

Poichè S_4 contiene ∞^6 piani, ad un dato antipolo apparterranno ∞^2 piani, in generale. In questo lavoro ricercheremo il luogo di questi piani(*).

3. Sia (nello spazio S_4) E un iperellissoide di centro O ; inoltre sia v un dato piano. Si consideri lo spazio $\alpha = (Q, v)$ e l'ellissoide ε , di volume s segato da α sull'iperellissoide; ridotto questo ellissoide per omotetia di centro O nel rapporto hs^{-1} (h costante), l'antipolo di v rispetto all'ellissoide ridotto ε' è l'antipolo K di v (rispetto all'iperellissoide E).

In un riferimento cartesiano ortogonale monometrico sia

$$\sum_{i=1}^4 \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$$

l'equazione dell'iperellissoide.

Siano $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ i coseni direttori del diametro $d = OK$; per i suoi punti è $x_i = \rho \lambda_i$ e $\sum \lambda_i^2 = 1$. Sia ρ_0 la distanza orientata di K da O . Lo spazio α , passante per d , ha un'equazione del tipo $\sum \alpha_i x_i = 0$ a cui è da aggiungere la condizione: $\sum \lambda_i \alpha_i = 0$; sia supposto inoltre: $\sum \alpha_i^2 = 1$.

Per il volume s della sezione ε si trova facilmente ricorrendo alle proiezioni di essa sui quattro spazi coordinati:

$$(1) \quad s^2 = \frac{\pi^2 a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2}{\sum a_i^2 \alpha_i^2}.$$

Un piano v di cui K è l'antipolo appartiene allo spazio α ; dunque d sega v in un punto H . Siano P_1, P_2 i punti d'intersezione di d con ε' .

Indicate con ρ_3, ρ_1, ρ_2 le distanze orientate di H, P_1, P_2 da O , deve aversi, per la definizione di K :

$$\rho_0 \rho_3 = \rho_1 \rho_2 = -\rho_1^2.$$

Per avere P_1 e P_2 può segarsi d con l'iperellissoide concentrico e omotetico a quello dato nel rapporto hs^{-1} ; quindi ρ_1 e ρ_2 sono le radici di

$$(2) \quad \rho^2 \sum \frac{\lambda_i^2}{a_i^2} = h^2 s^{-2}.$$

Dunque:

$$(3) \quad \rho_3 = -\frac{h^2}{\rho_0 s^2} \left(\sum \frac{\lambda_i^2}{a_i^2} \right)^{-1}$$

(*) L'autore molto ringrazia il Sig G. R. VELDKAMP per aver curato la redazione definitiva di questa Nota.

Il piano v è parallelo allo spazio polare del punto improprio $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, 0)$ di d . Questo spazio ha l'equazione

$$\sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2} = 0$$

e lo spazio passante per H e parallelo ad esso è:

$$\sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2} = \rho_s \sum \frac{\lambda_i^2}{a_i^2}$$

o, per la (3):

$$\sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2} = - \frac{h^2}{\rho_0 s^2}$$

cioè, conglobando in p una costante negativa ($= - h^2/\pi^2 a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 \rho_0$),

$$\sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2} = p \sum a_i^2 x_i^2.$$

Dunque possiamo individuare un piano che ha l'antipolo K con

$$(5) \quad \sum \alpha_i x_i = 0$$

e

$$(6) \quad \sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2} = p \sum a_i^2 x_i^2,$$

cui sono da aggiungere le condizioni:

$$\sum \lambda_i \alpha_i = 0, \quad \sum \alpha_i^2 = 1.$$

Abbiamo così dimostrato che l'insieme di piani di cui un dato punto K è l'antipolo, è una congruenza C .

4. Ogni piano della congruenza C sega d . Al variare di α_i l'intersezione di tutti gli spazi (6) con lo spazio improprio $x_5 = 0$ è il piano β , piano polare del punto improprio di d . Dunque tutti i piani di C hanno in comune con β una retta: la congruenza C è composta di piani passanti per un punto di d ed una retta di β .

Cerchiamo quali rette l di β corrispondono al punto $A(\rho\lambda_1, \rho\lambda_2, \rho\lambda_3, \rho\lambda_4)$ di d . Una retta l corrispondente a A è l'intersezione di β con uno spazio d'equazione (5) nella quale $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ devono essere determinati in tal modo che lo spazio (6) passa per A ; quindi:

$$\sum a_i^2 \alpha_i^2 = \mu,$$

avendo posto

$$\mu = \frac{\rho}{p} \sum \frac{\lambda_i^2}{a_i^2}.$$

Essendo $u_i = kx_i$, le coordinate omogenee dei piani u_i nello spazio improprio devono soddisfare le equazioni

$$(7) \quad \sum \lambda_i u_i = 0$$

e

$$(8) \quad \sum (a_i^2 - \mu) u_i^2 = 0.$$

Queste equazioni rappresentano rispettivamente una stella di piani (passanti per $D(\lambda_i)$) ed una superficie Q della 2^a classe. Abbiamo così trovato che *le rette l di β corrispondenti al punto A di d formano una curva della 2^a classe*. I piani della congruenza C sono piani tangenti di ∞^1 coni quadrici; i vertici dei coni sono sulla retta d . Ad ogni punto A di d appartiene una conica $k(A)$ di β ; i piani della congruenza passanti per A sono i piani per A e le tangenti di k .

Se si fa muovere il punto A sopra la retta d , ρ e μ sono variabili e dall'equazione (8) risulta che le coniche corrispondenti ai punti di d formano nel piano β una schiera. L'intersezione di β con la schiera delle superficie quadriche omofocali determinata per E .

5. Per ciascun punto P dello spazio S_4 passa una sola retta m , incontrante d e β . Essendo A e B i punti d'intersezione, $k(A)$ la conica corrispondente ad A , t_1 e t_2 le tangenti di $k(A)$ passanti per B , i piani (m, t_1) e (m, t_2) appartengono alla congruenza C . Dunque: *per qualunque punto P passano due piani di C aventi in comune una retta*. In generale due piani di C sono situati in due spazi paralleli e l'intersezione è un punto di β . Qualunque S_3 non contiene un piano di C .

6. La conica k è l'intersezione di β col cono circoscritto della superficie Q da D . Essendo tutti gli assi di E differenti, la schiera (8) non contiene degli elementi degeneri. Dunque k è una conica degeneri in due casi:

1) D è situato in β . In questo caso dobbiamo avere

$$\sum \frac{\lambda_i^2}{a_i^2} = 0,$$

ciò che non è possibile per un antipolo reale.

2) D è sopra Q . Vi sono tre valori μ_1, μ_2, μ_3 di μ tali che D è sopra Q . Essi sono le radici dell'equazione

$$\sum \frac{\lambda_i^2}{a_i^2 - \mu} = 0.$$

Se si suppone $a_1^2 > a_2^2 > a_3^2 > a_4^2$ queste radici sono reali e:
 $a_1^2 > \mu_1 > a_2^2 > \mu_2 > a_3^2 > \mu_3 > a_4^2$. Quindi: *vi sono tre punti reali A_1, A_2, A_3 di d tali che la conica $k(A)$ è una retta doppia di β ; per questi punti di d passa un solo piano della congruenza.*

7. Esaminiamo in generale la realtà della conica k . Se si prende $\mu > a_1^2$ o $\mu < a_4^2$ la superficie Q è immaginaria. Anche il cono circoscritto da D e la conica k sono immaginari.

Essendo Q una superficie reale, k è reale nel caso che D sia esterno alla superficie. L'equazione di Q nelle coordinate x_i è:

$$f(x_i) = \sum \frac{x_i^2}{a_i^2 - \mu} = 0.$$

Abbiamo dunque i casi seguenti:

- 1) $a_1^2 > \mu > a_2^2$; se $f(\lambda_i) < 0$, D è esterno a Q ;
- 2) $a_2^2 > \mu > a_3^2$; D è esterno a Q o sopra Q ;
- 3) $a_3^2 > \mu > a_4^2$; se $f(\lambda_i) > 0$, D è esterno a Q .

E però siamo condotti a: k è reale se $\mu_1 \geq \mu \geq \mu_3$. Quindi: *i punti di d per cui passano dei piani reali della congruenza formano il segmento A_1A_3 ; A_2 è contenuto nel segmento.*

8. Da ciò che precede risulta che i due piani di C passanti (secondo 5) per un qualunque punto P di S_4 possono essere reali e differenti, coincidenti o coniugati immaginari. I piani sono coincidenti nel caso che B sia sopra $k(A)$, cioè in caso che P sia sopra un cono di vertice A e direttrice $k(A)$.

Il piano polare di D rispetto alla superficie Q ha l'equazione

$$\sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2 - \mu} = 0$$

e per cono circoscritto di Q da D troviamo

$$\left[\sum \frac{\lambda_i^2}{a_i^2 - \mu} \right] \left[\sum \frac{x_i^2}{a_i^2 - \mu} \right] - \left[\sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2 - \mu} \right]^2 = 0,$$

che si può scrivere

$$(9) \quad \sum \frac{(\lambda_j x_i - \lambda_i x_j)^2}{(a_i^2 - \mu)(a_j^2 - \mu)} = 0.$$

La retta m per il punto $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$ di S_4 , che sega d e β , è nello spazio:

$$\sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2} = \sum \frac{\lambda_i y_i}{a_i^2}.$$

Il punto d'incontro A di m e d ha le coordinate $x_i = \rho \lambda_i$ a cui è da aggiungere la condizione:

$$\rho \sum \frac{\lambda_i^2}{a_i^2} = \sum \frac{\lambda_i y_i}{a_i^2}.$$

Quindi:

$$\mu = \frac{1}{\rho} \sum \frac{\lambda_i y_i}{a_i^2}.$$

Le coordinate (omogenee) del punto d'incontro B di m e β sono: $x_i = \rho \lambda_i - y_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $x_5 = 0$. Essendo B sopra il cono (9), P è sopra il cono di vertice A e di direttrice $k(A)$.

Dunque le coordinate dei punti P pei quali passa un solo piano di C soddisfano l'equazione

$$(10) \quad \sum_{i < j} \frac{(\lambda_j y_i - \lambda_i y_j)^2}{(a_i^2 - \mu)(a_j^2 - \mu)} = 0.$$

Scrivendo x_i invece di y_i per le coordinate, siamo condotti al teorema: *il luogo dei punti pei quali passa un solo piano di C è la varietà tridimensionale F_4 del quarto ordine:*

$$(11) \quad \mathfrak{F}_4 \equiv \sum (\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1)^2 (a_3^2 - \mu)(a_4^2 - \mu) = 0$$

essendo

$$\mu = \frac{1}{p} \sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2}.$$

Si vede facilmente che passano per P due piani reali e differenti di C se $F_4(P) < 0$, mentre i due piani sono immaginari coniugati se $F_4(P) > 0$. La retta d è retta doppia di F_4 ; β è un piano doppio. Le generatrici della superficie rigata F_4 sono le (∞^2) rette che congiungono un punto di d e un punto di β . La congruenza C è costituita dagli ∞^2 piani che toccano F_4 secondo una generatrice.

Si vede dall'equazione (11) che l'intersezione di F_4 collo spazio improprio $x_5 = 0$ soddisfa

$$(12) \quad \left(\sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2} \right)^2 \sum (\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1)^2 = 0.$$

Dunque l'intersezione è composta del piano doppio β e del cono circoscritto della superficie isotropa $\sum x_i^2 = 0$ da D .

9. Le considerazioni precedenti possono essere estese allo spazio S_n . In questo spazio, qualunque S_{n-2} ha un antipolo rispetto a un iperellissoide E . Vi sono ∞^{n-2} spazi S_{n-2} che hanno un dato antipolo. Essi sono spazi tangenti di una varietà F_n dell'ordine n ; l'equazione della varietà è conforme all'equazione (10).

Essendo $n > 4$, per un dato punto passano ∞^{n-4} di questi spazi.

10. Se $n = 3$, il risultato è: le rette di S_3 che hanno un dato antipolo rispetto all'ellissoide E sono le generatrici di una superficie rigata F_3 del terzo ordine:

$$\mathfrak{F}_3 \equiv \sum (\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1)(a_3^2 - \mu) = 0, \quad \mu = \frac{1}{\rho} \sum \frac{\lambda_i x_i}{a_i^2}.$$

Si vede facilmente che questa equazione equivale all'equazione del luogo dedotta da BOMPIANI ⁽³⁾.

Con ciò concludiamo questo lavoro che ha lo scopo di onorare un illustre geometra nell'occasione di una sua festa, lavoro di più che è ispirato da una delle sue numerose investigazioni interessanti.

⁽³⁾ BOMPIANI, l.c. p. 415.