Sur les courbes qui engendrent par translation une surface minima.

par RENÉ LAGRANGE (à Dijon, France)

À M. Enrico Bompiani pour son Jubilé scientifique

Résumé. - *Les courbes gauches qui engendrent par translation une surface minima sont les courbes à cône directeur quadratique pour lesquelles TR^2 const. On donne leurs équations intrinsèques et leur représentation explicite. On détermine aussi les courbes planes qui ont la même propriété.*

Si une courbe C engendre par translation une surface minima S , S est doublement de translation. Des génératrices par translation de S sont C , la directrice C_1 associée à C , et les courbes de longueur nulle. Un théorème de LOPHUS LIE entraîne que la réunion des cônes directeurs de ces directrices est un cône algébrique du quatrième ordre. Le cône directeur commun aux lignes de longueur nulle étant le cône isotrope, la réunion des cônes directeurs de C et C_1 est un cône quadratique.

Nous nous proposons de déterminer les génératrices telles que C . Le cône directeur est de degré au plus égal à 2. Si c'est une droite, C est elle-même une droite; S est un cylindre, et les surfaces minima cylindriques sont les plans. Cette réponse banale étant écartée, les seules courbes à examiner sont les courbes planes et celles à cône directeur quadratique. Dans le premier cas, C et C_1 sont planes, qu'on suppose naturellement dans des plans sécants. Dans le second cas, C et C_1 ont le même cône directeur, donc la même indicatrice sphérique, qui est une conique sphérique.

Avant de poursuivre, nous établissons une expression de la courbure géodésique d'une telle conique.

1. Nous définissons cette conique γ par l'intersection de la sphère unitaire Σ d'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0,$$

en axes rectangulaires $Ox_1x_2x_3$, et du cône Γ d'équation

$$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i} = 0.$$

Dans le cas général où nous nous plaçons, Γ n'est pas de révolution. Sa réalité suppose $a_1 a_2 a_3 < 0$, et, sans restreindre la généralité, on peut faire $a_1 > a_2 > 0 > a_3$.

Une représentation paramétrique de Γ , avec les deux paramètres q et H , est

$$(1) \quad \frac{x_i^2}{a_i} = \frac{(q + a_i)(a_j - a_k)}{H}, \quad i = 1, 2, 3,$$

où i, j, k désigne une permutation circulaire de 1, 2, 3. Sur γ , q et H sont liés par l'équation de Σ , ce qui donne tout de suite

$$(2) \quad H = \sum_{i=1}^3 a_i^2 (a_j - a_k) = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = - (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1).$$

Ainsi H est une constante, positive avec nos hypothèses. Le réalité des x_i réduit le domaine de variation de q au segment $[-a_1, -a_2]$.

De la différentiation de (1)

$$(3) \quad \frac{2}{x_i} dx_i = \frac{dq}{q + a_i},$$

résulte, pour le ds^2 de γ , l'expression

$$\left(\frac{ds}{dq}\right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{(q + a_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i (a_j - a_k) (q + a_j) (q + a_k)}{4H(q + a_1)(q + a_2)(q + a_3)}.$$

On voit tout de suite que le numérateur se réduit à

$$q \sum_{i=1}^3 a_i (a_j^2 - a_k^2) = -Hq,$$

donc

$$(4) \quad \left(\frac{ds}{dq}\right)^2 = \frac{-q}{4(q + a_1)(q + a_2)(q + a_3)},$$

quotient de deux termes positifs. En posant

$$(5) \quad \frac{du}{dq} = \frac{1}{2\sqrt{(q + a_1)(q + a_2)(q + a_3)}},$$

q est une fonction elliptique de u , et l'on peut choisir la détermination

$$(6) \quad ds = \sqrt{-q} \, du.$$

En posant $\frac{dq}{du} = q'$, les cosinus directeurs de la tangente $\vec{t}$ de γ sont

$$(7) \quad \lambda_i = \frac{dx_i}{ds} = \frac{x_i}{2(q + a_i)} \frac{q'}{\sqrt{-q}} = \frac{q'}{2H\sqrt{-q}} \frac{a_i(a_j - a_k)}{x_i}.$$

Un vecteur unitaire normal à Σ est le vecteur $\vec{v}$ de composantes x_1, x_2, x_3 , donc la normale géodésique $\vec{g} = \vec{v} \wedge \vec{t}$ de γ a les cosinus directeurs

$$\mu_i = x_j \lambda_k - x_k \lambda_j = \frac{q'}{2H\sqrt{-q}} \frac{a_k(a_i - a_j)x_j^2 - a_j(a_k - a_i)x_k^2}{x_j x_k}.$$

Grâce à (1) et (2), le numérateur de cette dernière fraction s'écrit

$$\frac{1}{H} a_j a_k (a_i - a_j)(a_j - a_k)(a_k - a_i) = -a_j a_k,$$

et

$$(8) \quad \mu_i = -\frac{q'}{2H\sqrt{-q}} \frac{a_j a_k}{x_j x_k}.$$

D'après

$$\frac{1}{\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{ds} = -\frac{1}{x_i} \frac{dx_i}{ds} + \frac{\sqrt{-q}}{q'} \frac{d}{ds} \left(\frac{q'}{\sqrt{-q}} \right),$$

la courbure géodésique de γ est

$$\frac{1}{R_g} = \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{d\lambda_i}{ds} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i^2 \mu_i}{x_i} = \frac{q'}{2H\sqrt{-q}} \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 a_j a_k.$$

Or

$$\lambda_i^2 a_j a_k = -\frac{q'^2 a_1 a_2 a_3}{4Hq} \frac{a_i(a_j - a_k)^2}{Hx_i^2} = -\frac{q'^2 a_1 a_2 a_3}{4Hq} \frac{a_j - a_k}{q + a_i},$$

et l'on est conduit à former

$$\sum_{i=1}^3 \frac{a_j - a_k}{q + a_i} = \frac{\sum_{i=1}^3 (a_j - a_k)(q + a_i)(q + a_k)}{(q + a_1)(q + a_2)(q + a_3)} = \frac{\sum_{i=1}^3 a_j a_k (a_j - a_k)}{(q + a_1)(q + a_2)(q + a_3)} = \frac{4H}{q'^2}.$$

Il vient ainsi

$$(9) \quad \frac{1}{R_g} = \frac{q'}{2H(-q)^{\frac{3}{2}}} \frac{a_1 a_2 a_3}{x_1 x_2 x_3}.$$

Son carré

$$\frac{1}{R_g^2} = \frac{q'^2 a_1 a_2 a_3}{-4H^2 q^3} \prod_{i=1}^3 \frac{a_i}{x_i^2},$$

prend, grâce à (1) et (5), la forme remarquable

$$(10) \quad \frac{1}{R_g^2} = \frac{a_1 a_2 a_3}{q^3}.$$

Les petits cercles de Σ sont fournis par le cas limite où a_2 tend vers a_1 . Les expressions (1) de x_1^2 et x_2^2 sont alors indéterminées, avec une vraie valeur arbitraire de $\frac{q+a_1}{a_1-a_2}$, lorsque q tend également vers a_1 . (10) est encore valable, avec la valeur constante $\frac{-a_3}{a_1}$. Les grands cercles correspondent au cas limite $a_1 > a_2 = 0 > a_3$; $\frac{1}{R_g}$ est bien nul, et réciproquement.

REMARQUE. - Le paramètre q de la représentation de γ est, à un facteur près, la puissance $\frac{2}{3}$ du rayon de courbure géodésique. Avec une conique plane

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} - 1 = 0, \quad a_1 > a_2,$$

la représentation

$$\frac{x_1^2}{a_1} = \frac{q+a_1}{2e}, \quad \frac{x_2^2}{a_2} = \frac{q+a_2}{-2e},$$

où $e = \frac{a_1-a_2}{2}$, utilise de même un paramètre q tel que la courbure $\frac{1}{R}$ vérifie la formule

$$\frac{1}{R^2} = -\frac{a_1 a_2}{q^3},$$

analogue à (10).

2. Les courbes C de l'espace qui ont un cône directeur quadratique sont celles dont l'indicatrice sphérique est une courbe γ du type qui précède. Étant donné les relations de SERRET-FRENET de C ,

$$(11) \quad \begin{cases} dA = \vec{t} ds, \\ d\vec{t} = \vec{n} d\sigma, \\ d\vec{n} = -\vec{t} d\sigma + \vec{b} d\tau, \\ d\vec{b} = -\vec{n} d\tau, \end{cases}$$

avec la courbure $\frac{1}{R} = \frac{d\sigma}{ds}$, et $\frac{1}{T} = \frac{d\tau}{ds}$, l'élément d'arc de γ est $d\sigma$, et sa courbure géodésique $\frac{1}{R_g} = \frac{R}{T}$. Les courbes C en question sont donc celles qui admettent des équations intrinsèques du type

$$(12) \quad \begin{cases} d\sigma = \sqrt{-q} du, \\ \left(\frac{T}{R}\right)^2 = \frac{q^3}{a_1 a_2 a_3}, \end{cases}$$

où q est la fonction elliptique de u définie par exemple par

$$(13) \quad u = \frac{1}{2} \int_{-a_1}^q \frac{dq}{\sqrt{(q+a_1)(q+a_2)(q+a_3)}},$$

avec $-a_1 \leq q \leq -a_2 < 0 < -a_3$. u décrit un segment $[0, u_0]$ lorsque q décrit $[-a_1, -a_2]$. C n'est complètement définie que par l'adjonction à (12) d'une équation $\frac{ds}{du} = f(u)$.

REMARQUES. - Les a_i ne sont définis qu'à un facteur positif près λ . En remplaçant de même q par λq , u est divisé par $\sqrt{\lambda}$.

Bien entendu, $q(u)$ s'exprime par la fonction de WEIERSTRASS en posant

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 3h, \quad a_i = h - e_i, \quad q = p - h,$$

mais c'est inutile ici.

3. Appliquons maintenant ces préliminaires à la recherche des surfaces minima S engendrées par la translation d'une courbe réelle C . Soit C_1 une directrice associée, qui joue le même rôle que C . Nous supposons que leurs courbures ne sont pas identiquement nulles. Soit $A(u)$ et $B(v)$ leurs points

courants, vérifiant dans le cas général des équations intrinsèques du type (12), avec les mêmes a_i . Lorsque C et C_1 sont planes, dans des plans sécants, on peut prendre Ox_1 parallèle à cette intersection, ce qui revient à faire $a_2 = a_3 = 0$ dans les formules générales.

Avec des notations dont la signification est évidente, écrivons ces relations (12) pour C et C_1 , soit

$$(14) \quad \begin{cases} d\sigma_u = \sqrt{-q(u)} du, \\ \frac{d\sigma_u}{d\tau_u} = \frac{[-q(u)]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-a_1 a_2 a_3}}. \end{cases}$$

$$(14') \quad \begin{cases} d\sigma_v = \sqrt{-q(v)} dv, \\ \frac{d\sigma_v}{d\tau_v} = \frac{[-q(v)]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-a_1 a_2 a_3}}. \end{cases}$$

C et C_1 sont précisées par la donnée supplémentaire des fonctions $\frac{ds_u}{du}$ et $\frac{ds_v}{dv}$. Les radicaux ont la même signification arithmétique dans (14) et (14') puisque, sur l'indicatrice commune γ , $\frac{1}{R_g} = \frac{R}{T}$ est une fonction continue qui ne devient ni nulle ni infinie dans l'intervalle de variation $[-a_1, -a_2]$ de q .

Le point courant M de la surface S est

$$(15) \quad M(u, v) = A(u) + B(v),$$

de sorte que les tangentes du réseau de référence sont

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{dA}{du} = \overrightarrow{t_u} \frac{ds_u}{du}, \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \frac{dB}{dv} = \overrightarrow{t_v} \frac{ds_v}{dv};$$

les coefficients E, G de la première forme de GAUSS sont

$$E = \left(\frac{ds_u}{du} \right)^2, \quad G = \left(\frac{ds_v}{dv} \right)^2.$$

Il vient ensuite

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} = \overrightarrow{t_u} \frac{d^2 s_u}{du^2} + \overrightarrow{n_u} \frac{ds_u}{du} \frac{ds_u}{du},$$

donc les coefficients D, D'' de la deuxième forme de GAUSS sont

$$D = - \left(\frac{ds_u}{du} \right)^2 \frac{ds_v}{dv} \frac{d\sigma_u}{du} (\overrightarrow{b_v} \overrightarrow{t_u}), \quad D'' = \frac{ds_u}{du} \left(\frac{ds_v}{dv} \right)^2 \frac{d\sigma_v}{dv} (\overrightarrow{b_v} \overrightarrow{t_u}).$$

S est minima pourvu que $DG + D'E = 0$, donc, après division par $\left(\frac{ds_u}{du}\right)^2 \left(\frac{ds_v}{dv}\right)^2$, pourvu que

$$(16) \quad \frac{ds_v}{dv} \frac{ds_u}{du} (\vec{b}_u \vec{t}_v) - \frac{ds_u}{du} \frac{ds_v}{dv} (\vec{b}_v \vec{t}_u) = 0.$$

Cette condition est tout à fait générale. Lorsque C est gauche, il en est de même pour C_1 , et on peut adjoindre les systèmes (14), (14') relatifs à l'indicatrice commune γ . Avec les notations du paragraphe 1, il vient

$$\begin{aligned} \vec{b}_u \vec{t}_v &= \vec{g}_u \vec{v}_v = \sum_{i=1}^3 \mu_i(u) x_i(v) = \frac{-q'(u)}{2H\sqrt{-q(u)}} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i a_k x_i(v)}{x_j(u) x_k(u)} \\ &= \frac{-a_1 a_2 a_3 q'(u)}{2H\sqrt{-q(u)} x_1(u) x_2(u) x_3(u)} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i(u) x_i(v)}{a_i}. \end{aligned}$$

La somme est symétrique en u, v ; d'après (9), son facteur n'est rien d'autre que

$$\frac{q(u)}{R_j(u)} = q(u) \frac{d\tau_u}{d\sigma_u} = - \frac{\sqrt{-a_1 a_2 a_3}}{\sqrt{-q(u)}},$$

et (16) se réduit à

$$(17) \quad \frac{ds_v}{dv} = \frac{ds_u}{du}.$$

La valeur commune de ces deux membres est constante, et fournit la donnée qui permet de préciser la nature de C et C_1 . Ces courbes, supposées gauches, sont *liées par une translation*. Le facteur constant arbitraire positif λ dont on dispose pour définir les a_i , et le sens de la mesure de s permet de donner à (17) la valeur 1, de sorte que C et C_1 soient définies par des équations intrinsèques

$$(18) \quad \begin{cases} d\sigma = \sqrt{-q(s)} ds \\ \left(\frac{T}{R}\right)^2 = \frac{q(s)^3}{a_1 a_2 a_3}, \end{cases} \quad a_1 > a_2 > 0 > a_3,$$

avec, par exemple,

$$(19) \quad s = \frac{1}{2} \int_{-a_1}^q \frac{dq}{\sqrt{(q+a_1)(q+a_2)(q+a_3)}}.$$

Dans ces formules, on ne peut plus modifier les a_i ; la multiplication des a_i et de q par un facteur $\lambda > 0$ conserve (18) à condition de multiplier s par $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$; C subit l'homothétie de rapport $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. (18) s'écrit encore

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{1}{R} = \sqrt{-q(s)}, \\ \frac{1}{TR^2} = \pm \sqrt{-a_1 a_2 a_3} = \text{const.} \end{cases}$$

Les courbes réelles gauches dont la translation engendre une surface minima sont les courbes à cône directeur quadratique pour lesquelles $TR^2 = \text{const.}$.

Elles dépendent, en grandeur, des trois paramètres a_i , qui n'interviennent que par leurs rapports dans la définition du cône. Les surfaces minima obtenues sont également les lieux des milieux des cordes d'une courbe du type (20), ce que H. POINCARÉ a appelé « surfaces de translation distinguées ».

Dans le cas limite $a_1 = a_2 > 0 > a_3$, C est une hélice circulaire, puisque $q = \text{const.}$, et S est le lieu des milieux des cordes d'une telle hélice.

4. Lorsque C et C_1 sont planes, nous pouvons faire $ds_u = du$, $ds_v = dv$, et choisir des axes cartésiens rectangulaires Ox , Oy , Oz , où Ox est l'intersection des plans de ces deux courbes. Prenons le plan de C pour plan Oxy . Si $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ désignent les vecteurs unitaires des trois axes, le plan OxY de C_1 est tel que OY soit parallèle au vecteur $\vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta$. Si

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = 0,$$

représentent C , tandis que C_1 a des équations

$$x = X(v), \quad y = Y(v) \cos \theta, \quad z = Y(v) \sin \theta,$$

les éléments de l'équation générale (16) sont ici

$$\begin{aligned} \vec{b}_u &= \vec{k}, & \vec{t}_u &= \frac{dx}{du} \vec{i} + \frac{dy}{du} \vec{j}, \\ \vec{b}_v &= -\vec{j} \sin \theta + \vec{k} \cos \theta, & \vec{t}_v &= \frac{dX}{dv} \vec{i} + \frac{dY}{dv} (\vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta). \end{aligned}$$

Par suite

$$\vec{b}_u \vec{t}_v = \frac{dY}{dv} \sin \theta, \quad \vec{b}_v \vec{t}_u = -\frac{dy}{du} \sin \theta, \quad \sin \theta \neq 0,$$

et (16) s'écrit

$$\frac{d\sigma_u}{du} \frac{dY}{dv} + \frac{d\sigma_v}{dv} \frac{dy}{du} = 0,$$

soit

$$(21) \quad \frac{dy(u)}{d\sigma_u} = - \frac{dY}{d\sigma_v} = \text{const} = a.$$

A une translation près, l'équation

$$\frac{dy}{d\sigma} = a$$

donne tout de suite

$$\frac{dy}{dx} = tg\sigma = tg \frac{y}{a},$$

d'où l'équation de C

$$(22) \quad x = a \text{Log} \left| \sin \frac{y}{a} \right|.$$

C a une infinité de branches, se déduisant de l'une d'elles par translation parallèle à Oy , de mesure $n\pi$ (n entier). Par exemple, une branche est fournie par

$$\sin \frac{y}{a} = e^{\frac{x}{a}}, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < y < a\pi, \quad a > 0.$$

L'équation de C_1 , également à une translation près, est

$$x = -a \text{Log} \left| \sin \frac{Y}{a} \right|.$$

Ainsi, C et C_1 sont encore égales, mais, en tant que directrice et génératrice associées, elles ne sont pas liées par translation. C_1 se déduit de C par une symétrie par rapport à la base Oy de C , suivie d'une rotation quelconque autour d'une asymptote.

On retrouve (22) en résolvant (18) dans le cas limite $a_2 = a_3 = 0$, en posant $a_1 = \frac{1}{a^2}$; puisque $-\frac{1}{a^2} \leq q \leq 0$, on peut faire

$$q = \frac{-1}{a^2 \text{ch}^2 t};$$

(19) se réduit à $s = at$, et la première équation (18) devient

$$(23) \quad R = a \operatorname{ch} \frac{s}{a}.$$

Ceci s'écrit encore

$$d\sigma = \frac{ds}{a \operatorname{ch} t} = \frac{dt}{\operatorname{ch} t},$$

ce qui permet de faire $e^t = tg \frac{\sigma}{2}$, $R = \frac{a}{\sin \sigma}$, avec $0 < \sigma < \pi$. Enfin, à une translation près,

$$x = \int \cos \sigma ds = a \int \cotg \sigma d\sigma = a \operatorname{Log} |\sin \sigma|,$$

$$y = \int \sin \sigma ds = a\sigma,$$

c'est-à-dire (22). Cependant, cette méthode ne fournit pas le lien géométrique entre C et C_1 .

5. *Equations explicites de la génératrice générale C.* Bien que q soit une fonction elliptique de l'arc s , les expressions des coordonnées x_i de C en fonction de q relèvent d'intégrales élémentaires. Pour suivre le point courant M de C lorsque q oscille dans le segment $[-a_1, -a_2]$, précisons le déplacement du point courant m de l'indicatrice sphérique γ . Celle-ci se décompose en deux courbes symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine, et il suffit de n'en considérer qu'une. Celle-ci se compose de quatre arcs $\widehat{m_0 m_1}$, $\widehat{m_1 m_2}$, $\widehat{m_2 m_3}$, $\widehat{m_3 m_0}$, limités aux plans de coordonnées $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, et orthogonaux à ces plans à leurs extrémités; deux arcs contigus sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan qui les sépare; chacun d'eux est décrit par m lorsque q décrit $[-a_1, -a_2]$ dans un sens ou dans l'autre. En désignant par $\xi_i(q)$ les coordonnées du point courant m de $\widehat{m_0 m_1}$, parcouru lorsque q croît de $-a_1$ à $-a_2$, on peut prendre les racines carrées de (1) sous la forme

$$(24) \quad \xi_i(q) = \sqrt{\frac{a_i(a_j - a_k)(q + a_i)}{H}} \quad -a_1 \leq q \leq -a_2,$$

et $\xi_2(-a_2) = 0$. L'arc suivant $\widehat{m_1 m_2}$ est le symétrique de $\widehat{m_0 m_1}$ par rapport à $x_2 = 0$, et son point courant a les coordonnées

$$(24') \quad \bar{\xi}_1(q) = \xi_1(q), \quad \bar{\xi}_2(q) = -\xi_2(q), \quad \bar{\xi}_3(q) = \xi_3(q), \quad -a_2 \geq q \geq -a_1,$$

avec $\bar{\xi}_1(-a_1) = 0$. L'arc suivant $\widehat{m_2 m_3}$ est symétrique de $\widehat{m_1 m_2}$ par rapport à $x_1 = 0$, et son point courant a les coordonnées

$$(24'') \quad \bar{\bar{\xi}}_1(q) = -\bar{\xi}_1(q), \quad \bar{\bar{\xi}}_2(q) = -\bar{\xi}_2(q), \quad \bar{\bar{\xi}}_3(q) = \bar{\xi}_3(q), \quad -a_1 \leq q \leq -a_2;$$

cet arc est symétrique de $\widehat{m_0 m_1}$ par rapport à l'axe Ox_3 ; l'arc suivant $\widehat{m_3 m_0}$ est symétrique de $\widehat{m_1 m_2}$ par rapport au même axe, ce qui donne le point courant

$$(24''') \quad \bar{\bar{\bar{\xi}}}_1(q) = -\bar{\xi}_1(q), \quad \bar{\bar{\bar{\xi}}}_2(q) = \bar{\xi}_2(q), \quad \bar{\bar{\bar{\xi}}}_3(q) = \bar{\xi}_3(q), \quad -a_2 \geq q \geq -a_1.$$

6. Lorsque m décrit γ dans l'ordre $m_0 m_1 m_2 m_3 m_0$, le point associé M de C décrit un arc $M_0 M_1 M_2 M_3 M_4$. Si l'on place M_0 à l'origine, et si on observe que q croît pour l'arc $\widehat{M_0 M_1}$, les coordonnées $x_i(q)$ du point courant M de cet arc sont

$$(25) \quad x_i(q) = \int_{-a_1}^q \bar{\xi}_i(q) \frac{ds}{dq} dq = \int_{-a_1}^q \bar{\xi}_i(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq.$$

Compte tenu de (19) et (24), ceci se réduit à

$$(26) \quad x_i(q) = \frac{1}{2} \int_{-a_1}^q \sqrt{\frac{a_i(a_j - a_k)}{H(q + a_j)(q + a_k)}} dq.$$

Ainsi,

$$x_3(q) = \sqrt{\frac{-a_3(a_1 - a_2)}{H}} \int_{-a_1}^q \frac{dq}{2 \sqrt{(q + a_1)(-q - a_2)}}.$$

En posant

$$(27) \quad \sqrt{-q - a_2} = \sqrt{a_1 - a_2} \cos \varphi, \quad \sqrt{q + a_1} = \sqrt{a_1 - a_2} \sin \varphi,$$

de sorte que φ croisse de 0 à $\frac{\pi}{2}$ lorsque q croît de $-a_1$ à $-a_2$, on a

$$x_3(q) = \sqrt{\frac{-a_3(a_1 - a_2)}{H}} \varphi.$$

On a de même

$$x_2(q) = \sqrt{\frac{a_2(a_1 - a_3)}{H}} \int_{-a_1}^q \frac{dq}{2 \sqrt{(q + a_1)(-q - a_3)}} = \sqrt{\frac{a_2(a_1 - a_3)}{H}} \psi,$$

en posant

$$\sqrt{-q-a_3} = \sqrt{a_1-a_3} \cos \psi, \quad \sqrt{q+a_1} = \sqrt{a_1-a_3} \sin \psi,$$

de sorte que $\psi = \text{Arc sin} \left(\sqrt{\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}} \sin \varphi \right)$ croît de 0 à $\text{Arc sin} \sqrt{\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}}$.

Enfin

$$x_1(q) = \sqrt{\frac{a_1(a_2-a_3)}{H}} \int_{-a_1}^q \frac{dq}{2\sqrt{(q+a_2)(q+a_3)}}$$

conduit à poser

$$\sqrt{-q-a_3} = \sqrt{a_2-a_3} \text{ch } \theta, \quad \sqrt{-q-a_2} = \sqrt{a_2-a_3} \text{sh } \theta,$$

de sorte que θ décroît de $\theta_0 = \arg \text{sh} \sqrt{\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}}$ à 0 lorsque q croît de $-a_1$ à $-a_2$; il vient alors

$$x_1(q) = \sqrt{\frac{a_1(a_2-a_3)}{H}} (\theta_0 - \theta);$$

en fonction de φ , $\theta = \arg \text{sh} \left(\sqrt{\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}} \cos \varphi \right)$. En résumé, l'arc $\widehat{M_0 M_1}$ est l'arc décrit par le point

$$(28) \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{a_1(a_2-a_3)}{H}} \left[\theta_0 - \arg \text{sh} \left(\sqrt{\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}} \cos \varphi \right) \right], \\ x_2 = \sqrt{\frac{a_2(a_1-a_3)}{H}} \text{Arc sin} \left(\sqrt{\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}} \sin \varphi \right), \\ x_3 = \sqrt{\frac{-a_3(a_1-a_2)}{H}} \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Les coordonnées de M_1 sont

$$(29) \quad \begin{cases} x_{1,1} = \sqrt{\frac{a_1(a_2-a_3)}{H}} \theta_0, & x_{2,1} = \sqrt{\frac{a_2(a_1-a_3)}{H}} \text{Arc sin} \sqrt{\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}}, \\ x_{3,1} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{-a_3(a_1-a_2)}{H}}. \end{cases}$$

Le long de l'arc suivant $\widehat{M_1 M_2}$, le point associé m de γ a les coordonnées (24') et q décroît de $-a_2$ à $-a_1$, donc les coordonnées $x_i(q)$ du point courant M sont

$$\bar{x}_i(q) = x_{i,1} + \int_{-a_2}^q \bar{\xi}_i(q) \frac{ds}{dq} dq = x_{i,1} - \int_{-a_2}^q \bar{\xi}_i(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq.$$

Il vient ainsi

$$(28') \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = x_{1,1} - \int_{-a_2}^q \bar{\xi}_1(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq = 2x_{1,1} - x_1 = \sqrt{\frac{a_1(a_2 - a_3)}{H}} (\theta_0 + \theta), \\ \bar{x}_2 = x_{2,1} + \int_{-a_2}^q \bar{\xi}_2(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq = x_2, \\ \bar{x}_3 = x_{3,1} - \int_{-a_2}^q \bar{\xi}_3(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq = 2x_{3,1} - x_3 = \sqrt{\frac{-a_3(a_1 - a_2)}{H}} (\pi - \varphi). \end{cases}$$

L'extrémité M_2 ($q = -a_1$, donc $\varphi = 0$) a les coordonnées

$$(29') \quad x_{1,2} = 2x_{1,1}, \quad x_{2,2} = 0, \quad x_{3,2} = 2x_{3,1}.$$

Le long de l'arc $\widehat{M_2 M_3}$, q croît de nouveau de $-a_1$ à $-a_2$, avec les coordonnées (24'') du point m de γ . Les coordonnées $\bar{x}_i(q)$ de son point courant M sont donc

$$\bar{x}_i(q) = x_{i,2} + \int_{-a_1}^q \bar{\xi}_i(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq,$$

soit

$$(28'') \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = x_{1,2} - \int_{-a_1}^q \bar{\xi}_1(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq = x_{1,2} - x_1 = \bar{x}_1, \\ \bar{x}_2 = x_{2,2} - \int_{-a_1}^q \bar{\xi}_2(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq = -x_2 = -\bar{x}_2, \\ \bar{x}_3 = x_{3,2} + \int_{-a_1}^q \bar{\xi}_3(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq = 2x_{3,1} + x_3 = 2x_{3,2} - \bar{x}_3. \end{cases}$$

Les coordonnées de M_3 sont

$$(29'') \quad x_{1,3} = x_{1,1}, \quad x_{2,3} = -x_{2,1}, \quad x_{3,3} = 3x_{3,1}.$$

Le long du quatrième arc M_3M_4 , q décroît de $-a_2$ à $-a_1$; le point m associé a les coordonnées (24'''), et les coordonnées $\bar{x}_i(q)$ du point courant M de C sont

$$\bar{x}_i(q) = x_{i,3} - \int_{-a_2}^q \bar{\xi}_i(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq,$$

soit

$$(28''') \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = x_{1,3} + \int_{-a_2}^q \bar{\xi}_1(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq = x_{1,3} - x_{1,1} + x_1 = x_1, \\ \bar{x}_2 = x_{2,3} - \int_{-a_2}^q \bar{\xi}_2(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq = x_{2,3} + x_{2,1} - x_2 = -x_2, \\ \bar{x}_3 = x_{3,3} - \int_{-a_2}^q \bar{\xi}_3(q) \left| \frac{ds}{dq} \right| dq = 2x_{3,2} - x_3. \end{cases}$$

Les coordonnées de M_4 sont

$$(29''') \quad x_{1,4} = x_{2,4} = 0, \quad x_{3,4} = 2x_{3,2}.$$

Les expressions (28') se déduisent de (28) en changeant φ en $\pi - \varphi$, ce qui change θ en $-\theta$, donc l'arc $\widehat{M_0M_2}$ est représenté par les seules équations (28) où φ croît de 0 à π . On voit également que $\widehat{M_2M_4}$ est symétrique de $\widehat{M_0M_2}$ par rapport à la parallèle à Ox_1 qui passe par M_2 , et qu'on peut le représenter par les équations de $\widehat{M_0M_2}$ après le changement de φ en $2\pi - \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$). (28) représente donc l'arc $\widehat{M_0M_4}$ en y faisant varier φ de 0 à 2π .

On peut naturellement prolonger cet arc par la translation de mesure $\pm 2\pi \sqrt{\frac{-a_3(a_1 - a_2)}{H}}$, parallèle à Ox_3 , itérée, ce qui revient à faire varier φ de $-\infty$ à $+\infty$ pour former une courbe indéfinie C . La suppression de la translation parallèle à Ox_1 que représente le terme en θ , dans (28) et une

symétrie par rapport à $x_2 O x_3$ donne de cette courbe C la représentation

$$(30) \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{a_1(a_2 - a_3)}{H}} \arg \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3}} \cos \varphi \right), \\ x_2 = \sqrt{\frac{a_2(a_1 - a_3)}{H}} \operatorname{Arc} \sin \left(\sqrt{\frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}} \sin \varphi \right), \\ x_3 = \sqrt{\frac{-a_3(a_1 - a_2)}{H}} \varphi, \quad -\infty < \varphi < \infty. \end{cases}$$

L'analogie avec l'hélice circulaire est remarquable. Celle-ci, qui est une solution limite de notre problème, s'en déduit d'ailleurs tout de suite lorsque a_2 tend vers a_1 . Les expressions limites de (30) sont en effet

$$(31) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{a_1}}{a_1 - a_3} \cos \varphi, \\ x_2 = \frac{\sqrt{a_1}}{a_1 - a_3} \sin \varphi, \\ x_3 = \frac{\sqrt{-a_3}}{a_1 - a_3} \varphi. \end{cases}$$