Un'osservazione sulle direzioni inflessionali d'una trasformazione Cremoniana tra due piani.

Memoria di EUGENIO G. TOGLIATTI, (a Genova).

A Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico.

Sunto. - *Si dà una costruzione geometrica delle direzioni inflessionali d'una trasformazione Cremoniana tra piani (o tra spazi a tre dimensioni).*

Data tra due piani π, π' una trasformazione biunivoca T che, nell'intorno di due punti omologhi O, O' sia analitica, e col Jacobiano non nullo, è noto che esistono in generale tre rette a, b, c uscenti da O e tre rette a', b', c' uscenti da O' tali che ogni ramo lineare di π avente in O un flesso con la tangente a (o b, o c) vien mutato da T in un ramo lineare avente in O' un flesso con la tangente a' (o rispettivamente b', o c'); tali rette danno le *direzioni inflessionali* uscenti da O e da O' (1). Escludiamo che nella coppia O, O' considerata esse siano indeterminate.

Ciò vale, in particolare, quando T è una trasformazione Cremoniana, che supporremo d'ordine $n > 1$; in tal caso la costruzione di quelle rette si può fare nel modo seguente (2). Diciamo Φ la rete omaloidica di π che corrisponde in T alle rette di π'. Alle rette di π' uscenti da O' corrispondono in π le curve C^n d'un fascio f, contenuto in Φ, ed avente in O un punto base semplice ordinario; le coniche polari di O stesso rispetto alle curve di f formeranno esse pure un fascio avente in O un punto base semplice ordinario; se A, B, C sono gli altri tre punti base di questo fascio di coniche, in questo sono contenute le tre coniche spezzate OA, BC; OB, CA; OC, AB; le curve di f di cui esse son coniche polari hanno in O un flesso con le tangenti rispettive OA, OB, OC; sono dunque queste le rette a, b, c richieste; le rette a', b', c' son quelle che corrispondono in π' alle tre curve anzidette di f.

(1) O. BORŮVKA, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs*, Publications de la faculté des sciences de l'université Masaryk, n° 72, 1926, 14.

(2) M. VILLA, *Ricerche locali sulle trasformazioni Cremoniane*, Mem. Acc. Bologna, (10) 1, 16 gennaio 1944, nota (4).

La costruzione precedente si può modificare alquanto, in modo da ottenere direttamente le rette a, b, c.

Siano infatti φ', φ'' due curve di Φ passanti per O, e tangenti in O rispettivamente a due rette diverse r', r''. Le due curve $\varphi' + r''$, $\varphi'' + r'$ definiscono un fascio g di C^{n+1}, aventi nei punti base di Φ le stesse multiplicità che vi hanno le curve di Φ, ed aventi in O un punto doppio con le tangenti fisse r' ed r''. Esisterà allora in g una curva avente in O un punto triplo; le sue tre tangenti in O sono le rette inflessionali a, b, c. Infatti, si consideri il fascio delle cubiche polari di O rispetto alle curve di g; esso è definito dalle cubiche polari di O rispetto alle curve $\varphi' + r''$, $\varphi'' + r'$, le quali si spezzano rispettivamente in r'' (od r') insieme con la conica polare di O rispetto a φ' (o φ''); perciò il fascio di quelle cubiche polari ha come punti base, diversi da O (che ne assorbe sei), i tre punti A, B, C del ragionamento di prima. D'altra parte la cubica polare di O rispetto alla C^{n+1} di g che ha in O un punto triplo si compone delle tre tangenti in O a detta curva, le quali pertanto coincideranno con le rette OA, OB, OC.

Il risultato è indipendente dalla scelta di φ' e φ''; ad illustrare maggiormente questa circostanza, si osservi che nello spazio S_{n+1}, ad $n+1$ dimensioni, i cui punti rappresentano linearmente le C^{n+1} aventi le stesse multiplicità delle curve di Φ ed aventi inoltre in O un punto doppio, le curve spezzate in una curva di Φ ed in una retta r passanti per O si rappresentano coi punti d'una quadrica ordinaria, situata in un S_3 avente un sol punto comune con l'S_{n-2} i cui punti rappresentano invece le C^{n+1} con le stesse multiplicità delle curve di Φ ed aventi inoltre in O un punto triplo; tale punto risulta allineato con tutte le coppie di punti della quadrica immagini di curve come le $\varphi' + r''$, $\varphi'' + r'$ di cui sopra.

Applichiamo la costruzione esposta al caso in cui T sia una trasformazione monoidale di ordine n; Φ avrà allora un punto base A di multiplicità $n-1$ ed inoltre $2(n-1)$ punti base semplici A_i. Prendiamo come curva φ' quella spezzata nella curva fondamentale C^{n-1} di Φ e nella retta OA; la retta r'' sia un'altra retta uscente da O. La retta r' coinciderà con OA, e si staccherà quindi dalle curve del fascio g come parte fissa. Il fascio residuo g', di ordine n, riesce così definito da due curve, una delle quali, la φ'' (tangente in O ad r''), ha in A la multiplicità $n-1$, mentre l'altra, costituita da r'' con la C^{n-1} fondamentale di Φ, ha in A la stessa multiplicità $n-2$ di detta C^{n-1} fondamentale e con le stesse tangenti; quest'ultima circostanza si verificherà dunque per tutte le curve del fascio g' diverse dalla φ''. Ed allora la curva di g avente in O un punto triplo si spezzerà nella retta OA ed in una C^n con O doppio, le cui tangenti in O saranno, insieme con OA, le rette inflessionali a, b, c. Giova osservare che le condizioni di avere in A la multiplicità $n-2$ con $n-2$ tangenti assegnate (le stesse della C^{n-1} fondamentale di Φ), di passare per i punti A_i e di avere in O un punto doppio, individuano una C^n, d'accordo col fatto che il risultato della costruzione non dipende dalla scelta di φ' e φ''. Dunque le rette inflessionali di T sono ora la retta OA e le due tangenti in O a quella C^n con O doppio, che ha in A la stessa multiplicità e le stesse tangenti della C^{n-1} fondamentale di Φ e che passa per i punti A_i; si ritrova cioè la costruzione a cui E. BOMPIANI era pervenuto con un calcolo [3]. La costruzione si applica anche per $n = 2$.

È noto [4] che anche in una rete di curve piane qualsiasi, vi sono tre curve aventi un flesso in un punto generico O del piano; le tre tangenti di flesso relative si possono avere con le costruzioni suesposte.

Analiticamente, se la rete considerata (omaloidica o no) è definita dalle tre curve:

$$\varphi_i \equiv a^{(i)}x_3^n + \theta_1^{(i)}x_3^{n-1} + \theta_2^{(i)}x_3^{n-2} + \ldots + \theta_n^{(i)} = 0, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

ove le $\theta_j^{(i)}$ sono forme di x_1, x_2 di grado j, l'equazione complessiva delle rette a, b, c è:

$$| a^{(i)}\, \theta_1^{(i)}\, \theta_2^{(i)} | = 0; \tag{2}$$

alla quale si perviene sia traducendo passo passo analiticamente la costruzione qui esposta, sia, più in breve, considerando una retta uscente da A_3, luogo quindi del punto $(t,\ mt,\ 1)$ al variare di t, e determinando poi m in modo che la retta faccia parte della conica polare di A_3 rispetto a qualche curva della rete.

Per un sistema lineare ∞^r di ipersuperficie d'ordine n in uno spazio S_r, le $2^r - 1$ rette inflessionali uscenti da un punto generico O si ottengono congiungendo O ai $2^r - 1$ punti base, diversi da O stesso, del sistema lineare ∞^{r-1} delle quadriche polari di O rispetto alle ipersuperficie del sistema

---

(3) E. BOMPIANI, *Sur les directions inflexionnelles d'une transformation de De-Jonquières*, Bull. Acad. Roum., 26, 1946, pp. 1-3.

(4) Questa proprietà è nota da tempo sotto quest'altra forma: *Se O è un punto base semplice ed ordinario d'un fascio di C^n piane, vi sono nel fascio, in generale, tre curve aventi in O un flesso;* S. KANTOR la dimostra per $n = 3$ (ma il suo ragionamento vale in generale) considerando la C^4 generata dal dato fascio di C^3 quando esso venga riferito (proiettivamente) al fascio delle tangenti in O, C^4 che ha in O un punto triplo. (*Ueber gewisse Curvenbüschel dritter und vierter Ordnung*, Wien Sitzungsber., I, 79, 1879, p. 787). Sullo stesso argomento si veda anche: a) K. DOEHLEMANN, *Ueber die Flächen, die sich durch eindeutig aufeinander bezogene Strahlenbündel erzeugen lassen*, Diss. München, 1889, p. 34; *Ueber lineare Systeme in der Ebene und im Raum und über deren Jacobi'sche Kurve beziehungsweise Jacobi'sche Fläche*, Math. Ann., 41, 1892, pp. 544-570, n. 6) a p. 550; b) G. B. GUCCIA, *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie*, Rend. Palermo, 9, 1894, pp. 1-64, teor. XXXVIII a p. 6.

passanti per O. L'altra costruzione si presenta meno semplice; ad es. per $r = 3$ essa è la seguente. Si prendano nel dato sistema lineare ∞^3 tre superficie φ', φ'', φ''' passanti per O ed aventi in O tre piani tangenti π', π'', π''' diversi e non formanti fascio. Le tre superficie $\varphi' + \pi'' + \pi'''$, $\varphi'' + \pi''' + \pi'$, $\varphi''' + \pi' + \pi''$ definiscono una rete avente in O un punto base triplo col cono tangente fisso $\pi' + \pi'' + \pi'''$; nella rete vi sarà quindi un fascio f di superficie aventi O come punto quadruplo; il fascio dei coni quartici di vertice O tangenti in O a queste ∞^1 superficie possiede 16 rette base, tre delle quali sono le rette comuni ai tre piani π', π'', π''' presi a due a due (perchè queste 3 rette stanno su tutte le superficie della rete considerata), mentre altre sei sono le tre coppie di tangenti principali di φ', φ'', φ''' nel punto O (in quanto ciascuna di queste ha incontro 5–punto in O con tutte le superficie della rete, e quindi anche con quelle del fascio f); le rimanenti sette sono le rette inflessionali cercate, come si può controllare ad es. con un facile calcolo: definendo il sistema lineare ∞^3 con quattro forme analoghe alle (1), tali sette rette son quelle che annullano la matrice (2), la quale ha ora 4 linee.