# Sopra gli scorrimenti proiettivi.

di F. MARCUS (a Iassy, Romania)

*A Enrico Bompiani in occasione del suo Giubileo scientifico*

**Sunto.** - *In questo lavoro diamo senza dimostrazioni* (1) *alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale dovuti alla nozione di scorrimento proiettivo che si deve al* BORTOLOTTI. *Si giunge a questi, dando una nuova caratterizzazione di questa nozione, ciò che permette a determinare tutte le superficie che ammettono scorrimenti proiettivi in sè. Caso particolare di queste sono quelle le cui linee di* DARBOUX *di un sistema sono pangeodetiche di* FUBINI *e che perciò corrispondono ad un problema di* E. BOMPIANI. *Si pone poi sotto una nuova luce risultati recenti di* LINGENBERG *sulle superficie che ammettono* $\infty^1$ *collineazioni in sè.*

I. 1. È ben noto che secondo BIANCHI [1], un movimento infinitesimo $Xf$ dello spazio $S_n$ è *uno scorrimento,* quando esso imprima a tutti punti spostamenti infinitesimi d'eguale ampiezza. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un movimento infinitesimo $Xf$ sia uno scorrimento è che le traiettorie del gruppo ad un parametro $G_1 \equiv [Xf]$ da esso generato, siano linee geodetiche dello spazio.*

Questa nozione metrica è stata estesa dal BORTOLOTTI [2] ad un $S_3$ proiettivo con la seguente definizione. *Si chiama scorrimento proiettivo di una superficie $\delta$ in sè, una deformazione proiettiva, per la quale tutti i punti di $\delta$ scorrano di tratti infinitesimi di eguale lunghezza proiettiva, cioè eguali nella metrica definita dal elemento lineare proiettivo $\frac{\mu_3}{\mu_2}$ di* FUBINI. *La condizione necessaria e sufficiente perchè una deformazione proiettiva di una superficie in sè sia uno scorrimento proiettivo è che le sue traiettorie siano pangeodetiche* [2].

Notando con

$$x' = x + \varepsilon(2Ax_u + 2Bxv), \tag{1}$$

la più generale deformazione infinitesima di $\delta$ in sè, ove $\varepsilon$ indica una

(1) Le dimostrazioni verranno pubblicate prossimamente nella «*Studii si cercetari stiintifice*». Academia R.P.R., Filiale Iasi, anul XII, 1961, fasc. 1.

costante infinitesima le cui potenze superiori alla prima vengono trascurate,

$$(2)\qquad \begin{cases} x_{uu} = \Theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x, \\ x_{vv} = \gamma x_u + \Theta_v x_v + p_{22} x, \end{cases} \qquad (\Theta = \log \beta\gamma),$$

il sistema canonico di FUBINI soddisfatto dalle coordinate $x$, e

$$(3)\qquad \frac{du}{A} = \frac{dv}{B}$$

le traiettorie della deformazione infinitesima, allora secondo BORTOLOTTI [2], il sistema

$$(4)\qquad \begin{cases} A_v = B_u = 0, \\ A_1 = -B_2 = \dfrac{A\psi_1 - B\psi_2}{3}, \\ \beta\psi_1 A^4 + 2\beta\psi_2 A^3 B - 2\gamma\psi_1 A B^3 - \gamma\psi_2 B^4 = 0, \end{cases}$$

con

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1 = A_u + A\Theta_u\,; \quad A_2 = A_v\,; \quad B_2 = B_v + B\Theta_v, \\ \psi_1 = (\log \beta\gamma^2)_u\,; \quad \psi_2 = (\log \beta\,\gamma)_v\,, \end{cases}$$

sono le condizioni affinchè la deformazione proiettiva (1) di $\sigma$ in sè, sia uno scorrimento proiettivo.

Osservando che $(4_3)$ è identicamente soddisfatta per $\psi_1 = \psi_2 = 0$, BORTOLOTTI deduce [2] pag. 111, il seguente risultato:

*Le superficie di coincidenza sono caratterizzate da ciò che ogni deformazione proiettiva di una tale superficie in sè, è uno scorrimento proiettivo.*

Sorge allora il problema dell' esistenza di altre superficie, oltre quelle di coincidenza, che ammettono scorrimenti proiettivi in sè. Secondo la definizione di BORTOLOTTI, se tali superficie esistono, queste oltre ad ammettere deformazioni proiettive in sè, dovranno anche verificare le condizioni (4) del BORTOLOTTI. Come è noto le superficie che ammettono deformazioni proiettive in sè sono state determinate da FUBINI-ČECH [3] ed un loro elenco si trova nel secondo tomo di [3] pag. 389-456.

Basta però osservare le espressioni di $\beta, \gamma$ delle superficie di specie $B_i (i = 1,\ 2\ \ldots\ 6)$ che ammettono $\infty^1$ deformazioni proiettive in se, per desistere a risolvere il problema in questo modo.

2. Uno degli scopi di questo lavoro è appunto quello di risolvere questo problema. A ciò siamo giunti dopo aver approfondito un po' il bel risultato di BORTOLOTTI, trovando un'altra caratterizzazione della nozione di scorrimento proiettivo di superficie in sè e che facilita moltissimo la risoluzione del problema.

Infatti possiamo dimostrare il seguente

TEOREMA. – *La condizione necessaria e sufficiente perchè una deformazione proiettiva di una superficie in sè sia uno scorrimento proiettivo, è che le sue traiettorie appartengono ad una congruenza W.*

Questo teorema oltre a risolvere il problema postoci, permette a completare i risultati di BORTOLOTTI e di porre sotto un altra luce alcuni risultati di BORŮVKA [4] ed in special modo risultati recenti di W. LINGENBERG [5]. Faremo anche vedere i legami fra qualcuno di questi e un risultato più vecchio di E. BOMPIANI [6].

**3. - Superficie che ammettono scorrimenti proiettivi in sè.**

Supponiamo che una superficie $\delta$ ammette una deformazione proiettiva in sè con un gruppo ad un parametro. Adoperando la normalizzazione di WILCZYNSKI, potremo scegliere i parametri $u$, $v$, tali da rendere

$$A = B = 1, \tag{6}$$

dopo di che si avrà per $\beta$, $\gamma$, il sistema

$$\left\{ \begin{aligned} &\beta_v + \beta_v = 0, \\ &\gamma_u + \gamma_v = 0. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Tenendo conto del nostro teorema, risulta che la deformazione proiettiva di $\delta$ in sè è uno scorrimento proiettivo se

$$\beta_v = \gamma_u . \tag{8}$$

Il problema di determinare tutte le superficie con $\infty^1$ deformazioni proiettivi in sè e che ammettono scorrimenti proiettivi si risolve adesso senza difficoltà. Basta verificare quali sono le superficie $B_i (i = 1, 2 \ldots 6)$ che soddisfano (8). In questo modo si trovano tutte le superficie cercate e che sono:

SPECIE $B_1$

Le superficie del n° 5 con (9) $F = ke^x - \dfrac{e^{2x}}{2} + k_1$, $(x = u - v)$. ($k$, $k_1$ costante).

SPECIE $B_2$

Tutte le superficie dal n° 9.

SPECIE $B_3$

Le superficie dal n° 12 con

(10) $$a = \pm 1 ; \quad \varepsilon = -1$$

Tutte le superficie del n° 13.
Le superficie del n° 18 con

(11) $$a = \pm 1 ; \quad \varepsilon_2 = 1.$$

Tutte le superficie del n° 23.

*Tra le classi di specie $B_4$, $B_5$, $B_6$, non esistono superficie che ammettono scorrimenti proiettivi.*

**4. - Superficie con $\infty^2$ deformazioni proiettivi in sè.**

Si può dimostrare che queste superficie, determinate in [3] pag. 390-393, non ammettono scorrimenti proiettivi. Abbiamo dunque il seguente risultato.

*Le superficie con $\infty^2$ deformazioni proiettivi in sè, non ammettono scorrimenti proiettivi.* Questo risultato non osservato da BORTOLOTTI da una seconda analogia con la nozione metrica di scorrimento, che BIANCHI [1] aveva definito soltanto per un $G_1$.

**5. - Superficie di coincidenza.**

Queste superficie sono considerate da FUBINI-CECH [3] come ammettendo $\infty^2$ deformazioni proiettivi in se. Perciò esse non possono ammettere degli scorrimenti proiettivi. Esse ammettono però un gruppo di deformazioni proiettivi in sè con un parametro e come tali ammettono degli scorrimenti proiettivi.

*Ma a differenza del risultato del* BORTOLOTTI [2], *non tutte le superficie di coincidenze ammettono scorrimenti proiettivi.* Infatti noi dimostriamo il seguente

TEOREMA. - *Soltanto le superficie di coincidenza che non sono minime proiettive, ammettono scorrimenti proiettivi.*

*Chiamando scorrimento omografico di una superficie in sè, una trasformazione proiettiva di una superficie in sè, per la quale i punti della superficie scorrano di tratti infinitesimi eguali nella metrica definita dall'ele-*

*mento lineare proiettivo della superficie*, possiamo completare il teorema precedente con il seguente risultato.

*Le superficie di coincidenza minime proiettive ammettono soltanto scorrimenti omògrafici in sè.* In fine da (7) e (8) risulta che le superficie che ammettono scorrimenti proiettivi, sono superficie T. E. (di TERRACINI-CARTAN) [7] e perciò le tangenti alle traiettorie ed alle loro coniugate generano congruenze di rete proiettivamente applicabili di seconda specie.

### II. 6. - Superficie con $\infty^1$ collineazioni in sè.

In una nota del 1929 O. BORŮVKA [4] studia il caso delle superficie proiettivamente deformabili e ammettendo $\infty^1$ collineazioni in sè. Recentemente W. LINGENBERG [5] studia ampiamente il caso delle superficie con un gruppo ad un parametro di collinèazioni in sè, chiamandole superficie $\Pi$. Così come osserva LINGENBERG, le più importanti superficie $\Pi$ sono quelle le cui traiettorie sono delle curve piane e che sono chiamate da questo autore, superficie A.P.R. (Allgemeine Proijektivortationsflächen).

Nel citato lavoro del LINGENBERG, un ruolo importante ha l'espressione

$$\Gamma = \beta - \gamma. \tag{12}$$

Ecco qualche teorema più importante del LINGENBERG.

1. *Le traiettorie del gruppo ad un parametro di una superficie* $\Pi$ *sono allora e soltanto allora piane, se si può realizzare per la superficie* $\Gamma = k (k = \text{cost.})$.

2. *Le superficie A. P. R. sono le superficie* $\Pi$ *per le quali le trasformate di* LAPLACE *di esse nel senso delle traiettorie e le loro coniugate, degenerano.*

Per le superficie notate da SÜSS P.R. (Projektivrotationsflächen) e che LINGENBERG caratterizza con

$$\Gamma = \beta - \gamma = 0 \tag{13}$$

si da il

TEOREMA. - *Per le superficie P. R. e soltanto per queste, i piani canonici formano un fascio ed i punti canonici sono allineati.*

A tutti questi risultati di LINGENBERG si possono dare delle interpretazioni geometriche che crediamo assai interessanti, utilizzando la nozione di scorrimento proiettivo con la caratterizzazione data più sopra. All'uopo dimostriamo anzitutto il

TEOREMA. - *La condizione necessaria e sufficiente perchè una deformazione proiettiva di una superficie in sè sia uno scorrimento proiettivo, è che* $\bar{\Gamma}$ (1) $= \beta + \gamma = k$, $(k = \text{cost.})$.

*Una prima osservazione.* Questo teorema ci dice che basta una operazione algebrica per determinare le superficie che ammettono scorrimenti proiettivi in sè.

*Seconda osservazione.* Questo teorema è valido anche nel caso degli scorrimenti omografici. Questa ci permette di dimostrare il seguente

TEOREMA. - *La superficie* $\Pi$ *con* $\beta + \gamma = k (k = \text{cost.})$. *e soltanto queste ammettono scorrimenti omografici, cioè le traiettorie sono pangeodetiche.*

Poi faccio vedere che in questo caso le traiettorie sono curve piane dimostrando il

TEOREMA. - *Se una superficie* $\Pi$ *ammette uno scorrimento omografico, allora e soltanto allora, le traiettorie sono piane.*

La dimostrazione si fa osservando che se $\beta + \gamma = k$ $(k = \text{cost})$ allora le traiettorie sono linee proiettive di B. SEGRE. Essendo anche pangeodetiche esse sono piane e linee coniche. Conseguentemente abbiamo il

TEOREMA. - *Le superficie* $\Pi$ *che ammettono scorrimenti omografici e soltanto queste, sono superficie A. P. R.*

Osservando che in questo caso le traiettorie sono piane e linee coniche ed appartengono ad una congruenza $W$, risulta che la rete $du^2 - dv^2 = 0$ è isotermo-coniugata. Per un risultato di MARCUS [8] segue che anche le curve $du + dv = 0$ sono piane e linee coniche. Perciò la rete è una rete di KOENIGS. Ciò che spiega il secondo teorema di LINGENBERG.

Nel caso delle superficie P. R., cioè se $\beta + \gamma = 0$, si osserva che le linee canoniche

$$\psi_1 du - \psi_2 dv = 0 \tag{14}$$

coincidono con le linee $du + dv = 0$. Visto che le superficie P. R. sono delle particolari superficie A.P.R., risulta che le linee $du + dv = 0$ sono così come abbiamo visto, linee piane e linee coniche, e perciò i piani canonici delle superficie P. R. formano un fascio.

Noi dimostriamo poi i risultati seguenti:

---

(1) L'espressione $\Gamma$ di LINGENBERG diventa nelle nostre notazioni $\bar{\Gamma} = \beta + \gamma$, perchè seguendo FUBINI-ČECH consideriamo $\beta = \beta(u - v)$, $\gamma = \gamma(u - r)$ mentre nel lavoro di LININBERG $\beta = \beta(u + v)$; $\gamma = \gamma(u + v)$.

1. *Se le traiettorie di uno scorrimento proiettivo sono piane, lo scorrimento è omografico.*

2. *Se le traiettorie di un gruppo $G_1$ di deformazioni proiettive di una superficie in sè, sono linee proiettive, le deformazioni sono delle collineazioni.*

3. *Le superficie* II *isotermo-asintotiche le cui traiettorie sono linee proiettive, sono superficie minime proiettive.*

4. *Se i piani canonici di una superficie con $\infty^1$ deformazioni proiettive in sè formano un fascio e le linee canoniche sono coniugate con le traiettorie, allora la superficie è di tipo P. R.*

5. *Se le linee coniugate con le traiettorie di uno scorrimento proiettivo di una superficie che non è di coincidenza stanno in un fascio di piani, lo scorrimento è omografico e la superficie è di specie P. R.*

7. Qualcuno di questi risultati possono essere considerati anche da un altro punto di vista. Abbiamo dimostrato che $\bar{\Gamma} = \beta + \gamma = k$ ($k =$ cost.) caratterizza gli scorrimenti proiettivi. Nel caso $k = 0$, cioè $\beta + \gamma = 0$, le traiettorie godono di un altra proprietà. Infatti, osservando che per le traiettorie si ha $du = dv$. risulta che

$$\beta du^3 + \gamma dv^3 = du^3(\beta + \gamma) = 0 \tag{15}$$

Dunque le traiettorie dello scorrimento proiettivo sono linee di DARBOUX. Ma esse sono anche pangeodetiche. Perciò abbiamo il seguente

TEOREMA. - $\bar{\Gamma} = \beta + \gamma = 0$, *caratterizza le superficie che ammettono scorrimenti proiettivi le cui traiettorie sono nello stesso tempo linee pangeodetiche di* FUBINI *e linee di* DARBOUX.

Questo teorema ci collega ad un risultato più vecchio di E. BOMPIANI. Infatti in una Memoria del 1926, E. BOMPIANI [6] si occupa del problema del comportamento delle linee di DARBOUX rispetto a l'equazione delle pangeodetiche di una superficie, dimostrando il

TEOREMA. - *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un sistema di linee di* DARBOUX *sia costituita da pangeodetiche, è che le linee canoniche costituiscono il sistema di* SEGRE *coniugato al precedente.*

Oltre le superficie di coincidenza non si danno in [6] esempi di superficie avendo un sistema di linee di DARBOUX che siano pangeodetiche. Nel nostro caso si possono dare esempi di tali superficie. Esse sono casi particolari delle superficie che ammettono scorrimenti proiettivi. Così noi abbiamo

SPECIE $B_1$

Le superficie dal n° 5 con

$$F = k_1 - e^{2(u-v)} \qquad (k_1 = \text{cost.}) \tag{16}$$

SPECIE $B_2$

Le superficie dal n° 9 con $b = 0$.

SPECIE $B_3$

Le superficie dal n° 12 con

$$a^2 = 1 \tag{17}$$

Tutte le superficie n° 13 e 23.

8. Ritornando di nuovo alle superficie II, e tenendo conto della interpretazione data alla espressione $\Gamma = \beta + \gamma = 0$, possiamo caratterizzare le superficie P. R. anche in questo modo:

*Le superficie* II *che ammettono scorrimenti omografici le traiettorie di cui sono delle linee di* DARBOUX *e soltanto questo, sono superficie P. R.*

Questo risultato, ed il teorema sopracitato del BOMPIANI, spiegano meglio il teorema di LINGENBERG sulle superficie P. R.

Le superficie P. R. sono determinate da

$$\left\{ \begin{aligned} & \beta = -\gamma = \varphi(u - v), \\ & L = M = -\frac{3\varphi^2}{2} - C, \end{aligned} \right. \tag{18}$$

con $\varphi$ funzione arbitraria di $u - v$ e $C$ costante arbitraria, essendo $L$, $M$ le ben note espressioni della teoria delle superficie [3].

In fine vogliamo ancora menzionare che sia nel lavoro di SÜSS [9] che nel lavoro di SU BUCHIN [11] e che sono citati dal LINGENBERG, non si osserva che le linee di DARBOUX del sistema che caratterizza secondo questi autori le superficie P. R. e A. R. (Affinrotationsflächen) sono anche pangeodetiche, *e che perciò queste superficie soddisfano al problema di* BOMPIANI.

## BIBLIOGRAFIA


[1] BIANCHI L., *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni,* Pisa Enrico Spoerri 1918.

[2] BORTOLOTTI E., *Sulle proprietà proiettive delle deformazioni infinitesimi di una superficie in sè.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo LIV 1930, pp. 97-111.

[3] FUBINI G. - ČECH E., *Geometria proiettiva differenyiale,* Tomo I e II. Zanichelli Bologna 1926.

[4] BORUVKA I. *Sur les surfaces projectivement deformables. ect.,* C. R. Acad. Sciences, T. 189. Paris 1929, pp. 964-966.

[5] LINGENBERG W. *Zur Differentialgeometrie der Flächen etc.* Mathematische Zeitschrift. Bd. 66-1957, S. 409-449.

[6] BOMPIANI E. *Rappresentazione geodetico-proiettiva fra due superficie.* « Annali di Mat. pura ed applicata ». Seria IV, T. III, 1926, pp. 171-188.

[7] MARCUS F., *Completări la unele rezultate de geometrie proiectivă diferentială.* Acad. R. P. R. Filiala Iasi, Studii si cercetări stiintifice, Matematică, anul VIII, 1957, pp. 37-47.

[8] — , *Sur les réseaux de Koenigs.* Revue de Mathématiques pures et appliquées. Acad. de la Rép. Pop. Roumaine, T. II, 1957, pp. 555-559.

[9] SÜSS W., *Projektivverwandte der Drehflächen und ihre* SEGRE-KURVEN. The Tôhoku Math. Journal, vol. 41, 1935-1936, pp. 308-310.

[10] SU BUCHIN, *On a certain class of surfaces whose Darboux curves of one system are conics.* Ibidem, vol. 36, 1633, pp. 241-252.