Zwei Beweise für die isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises.

Von K. TH. VAHLEN (in Wien).

Unter der Bezeichnung Differenzengeometrie fasse ich diejenigen Sätze der endlichen Geometrie zusammen, aus denen durch Grenzübergang Sätze der Differentialgeometrie hervorgehen. Natürlich sollen diese Sätze unter Vermeidung von Grenzprozessen bewiesen werden. Indem man zum Schluss den Grenzübergang macht, erhält man einen neuen Zugang zu dem betreffenden Sätze der Differentialgeometrie. Aber wichtiger ist es, dass man auf diesem Wege zu Sätzen kommt, die von der Differentialgeometrie übersprungen werden, da sie ihren Methoden nicht zugänglich sind. In einem in der Gesellschaft für Mathematik in Wien gehaltenen Vortrage (s. Monatshefte für Math. u. Phys. 1931) habe ich das an drei Beispielen erläutert. Der Satz von Gauss, die Totalkrümmung eines Flächenstückes plus geodätische Totalkrümmung des Randes gibt 4 Rechte, wurde für polyedrische Flächenstücke bewiesen, die durch unebene Polygone begrenzt sind. Die Unverbiegbarkeit geschlossener konvexer Flächen wurde für Fachwerke bewiesen, deren Stäbe die Kanten eines Dreieckspolyeders sind; sie müssen konvex sein, wenn unendlich kleine Verbiegbarkeit ausgeschlossen wird. Dass es nicht immer angebracht ist, krumme Flächen und Linien durch Polygone und Polyeder zu ersetzen, zeigt der a. a. O. gegebene sehr einfache Beweis des Vierscheitelsatzes, bei dem ich das Oval als aus Kreisbögen zusammengesetzt annehme.

Zu den wichtigsten Desideraten auf diesem Gebiete gehört nun unstreitig der Beweis der isoperimetrischen Haupteigenschaft des Kreises (1). Diese lässt sich bekanntlich dahin ausdrücken, dass zwischen dem Inhalt J und dem Umfang U eines ebenen nicht kreisförmigen Flächenstückes die Ungleichung besteht:

$$\frac{1}{4} U^2 - \pi J > o$$

(1) Für die Geschichte des Problems vergleiche man insbesondere: W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, Leipzig, 1916.

oder dass die quadratische Funktion

$$J + Ux + \pi x^2$$

für geeignete Werte von x negativ wird. Das soll im Folgenden auf zwei wesentlich verschiedenen Wegen bewiesen werden.

Einige allgemeine Bemerkungen sind vorauszuschicken, um den Gang der Beweise nicht mehr unterbrechen zu müssen. Für den Umfang sei der Umlaufsinn so festgesetzt, dass das Innere links liegt. Mehrfach umlaufene Teile kann man aus dem einfach umlaufenen herausnehmen und entsprechend ihrer Vielfachheit an diesen aussen berührend ansetzen. Dabei bleiben Umfang und Inhalt erhalten. Negativ zählende Teile lässt man fort. Dadurch wird der Umfang verkleinert, der Inhalt vergrössert. Man braucht also nur einfach umlaufene Flächenstücke zu betrachten. Einspringende Teile kann man durch das Stück der zugehörigen Doppeltangente (Doppelstützgraden) ersetzen. Dadurch wird der Umfang verkleinert, der Inhalt vergrössert. Das genügt für den zweiten der beiden folgenden Beweise. Für den ersten benötigt man eine Beseitigung der einspringenden Ecken, bei der die Seiten erhalten bleiben. Sind 0123... aufeinanderfolgende Eckpunkte und ist 012 eine einspringende Ecke, so ersetzen wir sie durch 01′2, sodass 0121′0 ein Parallelogramm ist. Jetzt kann 1′23 eine einspringende Ecke sein, dann wird sie ersetzt durch 1′2′3; usw. Das muss aber schliesslich aufhören, denn die Winkel 1′23, 2′34,..., deren Schenkel 1′2, 2′3,... parallel sind, müssen bei einem geschlossene Polygon schliesslich über 2 Rechte wachsen.

Dies vorausgeschickt, wird in dem ersten Beweise die obige Ungleichung dadurch abgeleitet, dass ein Vieleck durch eine endliche Anzahl ausführbarer Umformungen in ein umfanggleiches, inhaltgrösseres regelmässiges n — Eck übergeführt wird; für ein solches ist:

$$\frac{1}{4} U^2 - n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} J = 0.$$

Von folgenden Umformungen wird Gebrauch gemacht.

1) Umkehrung eines Segmentes. Eine Sehne teilt das Flächenstück in zwei Segmente; man kann die beiden Segmente längs der gemeinsamen Sehne im umgekehrten Sinn aneinanderlegen, gleichgültig, welches man umkehrt. Kehrt man das Segment $ABCDEFG$ und das Segment CDE um, so sind die Segmente ABC und EFG vertauscht. Man kann also den Seiten eines Vielecks jede Reihenfolge geben, ohne den Inhalt zu verändern.

2) Symmetrierung. Ein Viereck mit zwei gleichen Gegenseiten wird mit Erhaltung der Seiten vergrössert, indem man es in ein gleichschenkliges

Trapez, also in ein Kreisviereck verwandelt. Dasselbe gilt bei Segmenten, z. B. wird $ABCDEF$ mit $AB = EF$, $BC = DE$ durch Symmetrierung der Vierecke $ABEF$, $BCDE$ symmetriert.

3) Gleichmachung zweier (anstossender) Seiten. Man ersetze jede durch die halbe Summe beider, wodurch der Inhalt vergrössert wird.

4) Gleichmachung zweier Radien AO, BO mit Erhaltung der Sehne AB und des Winkels AOB. Dadurch wird das Dreieck AOB vergrössert, die Sehne mit dem zugehörigen Segment bleibt erhalten.

Dies vorausgeschickt, mache man zwei Seiten einander gleich: $(0) = (1)$. Die eine Hälfte einer dritten Seite vereinige man nach 3) mit (0) zu zwei gleichen Seiten $(00) = (01)$, die andere Hälfte mit (1) zu zwei gleichen Seiten $(10) = (11)$. Die vier gleichen Seiten $(00) = (01) = (10) = (11)$ vereinige man je mit einem Viertel einer vierten Seite zu je zwei gleichen, also im Ganzen zu acht gleichen Seiten $(000) = (001) = \ldots = (111)$. Usw. So erhält man ein dem gegebenen umfanggleiches, inhaltgrösseres n-Eck, dessen Seiten einander gleich sind und dessen Seitenzahl eine Potenz von zwei ist.

Man verbinde zwei Gegenecken durch eine Sehne, sodass also der Umfang gehälftet wird, und symmetriere nach (2) jedes der beiden Segmente. Dann verbinde man die zwei symmetrischen Gegenecken durch eine Sehne, sodass mit der ersten Sehne zusammen der Umfang geviertelt wird, und symmetriere die Segmente, die durch die zweite Sehne entstehen. Die beiden Sehnen schneiden sich senkrecht in einem Punkte o und teilen das Vieleck in vier kongruente (bzw. symmetrische) Quadranten. Deren Dreiecke mit rechtem Winkel bei o vergrössere man nach 4), während man ihre Segmente nach 2) symmetriert. Dann zerfallen die vier Quadranten in acht kongruente (bzw. symmetrische) Oktanten, mit denen man ebenso verfährt. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten kommt man zu einem regelmässigen Vieleck, womit der Satz bewiesen ist.

Der zweite Beweis bezieht sich auf ein Vieleck P, von dem mehrere Seiten ein Tangentenvieleck T eines ihm einbeschriebenen Kreises K bilden, der keine der übrigen Seiten von P schneidet. Nicht bei jedem Vieleck ist ein solcher Kreis vorhanden, aber jedes kann in ein umfanggleiches, flächengrösseres der verlangten Art umgeformt werden. Z. B. durch die Steinersche Symmetrisierung: man hälfte den Umfang durch eine Grade G und ersetze das flächenkleinere Segment durch das Spiegelbild des flächengrösseren an G. Dasselbe wiederholt man mit einer zu G senkrechten Graden H. Man vermeide, dass G oder H einer Vieleckseite parallel sind. Dann haben die auf G und H liegenden vier Scheitel maximale Entfernungen vom Mittelpunkt

$(GH) = o$, da man etwa einspringende Scheitel nach aussen klappt. Also giebt es auf dem Umfang mindestens vier minimale Entfernungen, also einen einbeschriebenen Kreis, der mindestens vier Seiten berührt und keine Seite schneidet.

Dies vorausgeschickt, seien $CC'C''\ldots$ die Ecken des Tangentenvielecks T, ferner J und U sein Inhalt und Umfang. Durch den Kreis K wird T zerlegt in die Kreisfläche πr^2 und die « Kappen », jede begrenzt von je zwei aufeinanderfolgenden Tangenten und dem Zwischenbogen von K. Die Inhalte dieser Kappen seien bzw. $i, i', i'', \ldots$ Von dem Vieleck P verläuft innerhalb der Kappe i (entsprechend bei $i', i'', \ldots$) ein konvexer Streckenzug $A \ldots B$ bestehend aus den Seiten $c_1, c_2, c_3, \ldots$, der mit den Abschnitten $CA = b$, $CB = a$ zusammen eine Kappe vom Inhalt j $(j', j'', \ldots)$ begrenzt. Die Abstände der Seiten $c_1, c_2, \ldots$ von o seien $r + h_1$, $r + h_2, \ldots$ Nun ist $Ur = 2J$, also

$$(1) \qquad J - Ur + \pi r^2 = -J + \pi r^2 = -i - i' - i'' - \ldots$$

Ferner ist

$$r(a + b) - \Sigma (r + h)c = 2j,$$

also

$$(2) \qquad -j + r(a + b - \Sigma c) = j + \Sigma hc.$$

Addiert man alle Gleichungen (2) zu (1) und bezeichnet mit J', U' Inhalt und Umfang von $P = ABA'B'A''B'', \ldots$, so erhält man

$$(3) \qquad J' - U'r + \pi r^2 = -(i - j - \Sigma hc) - (i' - j' - \Sigma h'c') - \ldots$$

Die Parallelogramme hc liegen zwischen der betr. Seite c und der zu ihr parallelen Tangente im Abstande h. Zieht man die beiden anderen Seiten parallel einer durch C und c gehenden Graden, so überdecken sich die Parallelogramme nicht, es ist also

$$(4) \qquad j + \Sigma hc < i,$$

woraus mit (3) zusammen folgt

$$J' - U'r + \pi r^2 < o,$$

was zu beweisen war.