Sulla convessità dei potenziali termodinamici per materiali con memoria (*) (**).

MAURO FABRIZIO (Bologna)

Sunto. – Si formula, per una vasta classe di materiali con memoria, un principio di convessità per l'energia rispetto ad un opportuno sistema di variabili indipendenti. Tale principio ci consente di definire ogni potenziale termodinamico associato all'energia, poichè assicura l'invertibilità di quelle relazioni funzionali che collegano fra loro i potenziali termodinamici. Inoltre ho dimostrato come, per il sistema di equazioni differenziali considerato, il principio di convessità garantisce la correttezza del problema di Cauchy.

1. – Introduzione.

Nella teoria termodinamica dei materiali con memoria che si è sviluppata ampiamente in questi ultimi anni [1] [2] [3] non si è a tutt'oggi pervenuti ad una opportuna estensione dell'ipotesi di *convessità* sui potenziali termodinamici, ipotesi che si assume nel caso di materiali non ereditari [4] [5] e questo nonostante tutte le teorie assiomatiche che si sono formulate ultimamente.

Mi sembra invece che la convessità sia un concetto caratterizzante di ogni teoria termodinamica sia per le restrizioni che comporta sui funzionali costitutivi, sia perchè consente nello studio dei sistemi differenziali quasilineari del primo ordine di stabilire condizioni di *correttezza* [4] [6], ma soprattutto risulta, come verificheremo, una condizione essenziale per l'*invertibilità* delle relazioni che consentono di operare sui potenziali termodinamici trasformazioni analoghe a quelle di Legendre nel caso di materiali privi di memoria.

Pertanto in questo mio lavoro, nell'ambito delle condizioni proposte da COLEMAN [1] per una certa classe di materiali con memoria, ho formulato un principio di convessità per l'energia rispetto ad un *opportuno sistema di variabili indipendenti*.

Poichè in termodinamica vengono utilizzati spesso, oltre all'energia, altri potenziali, come l'energia libera, l'entalpia ecc., ho studiato in che modo si trasmette su queste nuove grandezze la proprietà di convessità per l'energia.

Inoltre essendo questi potenziali collegati, come già accennato, gli uni agli altri da opportune trasformazioni che devono risultare invertibili, ho dimostrato che il principio di convessità costituisce una condizione necessaria e sufficiente per tale invertibilità e quindi per la definizione di ogni potenziale associato.

Devo precisare che mi sono limitato a studiare particolari sistemi che descrivono soltanto alcuni fenomeni fisici (gasdinamica, elettromagnetismo, magnetofluido-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei gruppi di ricerca per la matematica del C.N.R..

(**) Entrata in Redazione il 10 aprile 1974.

dinamica, ecc.); nello schema adottato non rientrano a rigore le equazioni generali della meccanica dei continui, ma desidero precisare che le condizioni e i risultati ottenuti si estendono anche alle equazioni dei continui. A tale proposito ricordiamo che COLEMAN e NOLL [5] sono pervenuti nel caso di materiali privi di memoria ed opportune condizioni di convessità nell'energia interna rispetto allo strain ed all'entropia mediante le disuguaglianze *CN*. (Vedi anche TRUESDELL e NOLL [12]).

Infine con le considerazioni termodinamiche sviluppate e utilizzando un risultato di VOL'PERT e HUDJAEV [7] sono pervenuto ad una formulazione delle condizioni di correttezza del problema di Cauchy relativo al sistema di equazioni differenziali considerato. Ho così completato ed esteso il lavoro di FRIEDRICHS e LAX [6], precisando meglio in che modo i principi termodinamici intervengono per una corretta impostazione del problema sia sotto l'aspetto fisico che matematico.

2. – Definizioni e ipotesi preliminari.

Supponiamo assegnata una configurazione di riferimento per il corpo $\mathcal{B}$ che consideriamo, delimitato da un dominio $\Omega \in R^3$; identifichiamo ciascun punto materiale $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ con il punto geometrico $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ corrispondente a $\mathbf{X}$ nella configurazione di riferimento, sia inoltre $I = \{t: t \in [0, T]\}$ l'intervallo della variabile temporale, a cui limiteremo i fenomeni che considereremo.

Un processo termodinamico su $\mathcal{B}$ è costituito da una m -upla di funzioni di (x, t) . Noi supporremo che, fra questa $n + 1$ costituiscano una classe di variabili termodinamiche indipendenti che indicheremo sinteticamente:

$$(1) \quad v(x, t) = (v_0(x, t), v_1(x, t), \dots, v_n(x, t))$$

Ora fissato x consideriamo la funzione v^t da $[0, \infty)$ a R^{n+1} definita:

$$v^t(s) = v(t - s) \quad s \in [0, \infty)$$

che chiameremo *storia* di v relativa al punto x e al tempo t .

La natura del materiale nel punto $\mathbf{X}$ è, come noto, espressa dalle così dette *equazioni costitutive*, noi limiteremo lo studio a materiali con memoria per cui le relazioni costitutive sono del tipo:

$$(2) \quad \varphi(t) = \tilde{\varphi}(v^t) \quad (*)$$

dove $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-n-1})$.

(*) Si potrebbe considerare più generalmente il caso in cui la lista delle equazioni costitutive contenga come variabili indipendenti anche il gradiente di v , cioè:

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(v^t; \nabla v)$$

tale caso non presenta però una maggiore generalità per quanto riguarda le considerazioni a cui ci limiteremo, si potrebbe dimostrare infatti, con considerazioni termodinamiche [1] che $\tilde{\varphi}$, sotto ipotesi molto ampie, non può dipendere da ∇v . In seguito comunque supporremo che soltanto il flusso di calore dipenda dal gradiente della temperatura.

L'energia ε solitamente non appartiene alla classe delle variabili indipendenti, ma a quella delle equazioni costitutive, pertanto all'insieme (2) appartiene

$$(3) \quad \varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon}(v^t).$$

Per pervenire ad una precisa formulazione del principio di convessità è importante precisare il dominio di definizione di $\tilde{\varepsilon}$ e le sue proprietà di regolarità. A questo proposito indichiamo con $\mathfrak{B}$ l'insieme delle funzioni ψ applicazione di $[0, \infty)$ in R^{n+1} tali che:

- i) ψ è continua e a supposto limitato in $[0, \infty)$;
- ii) ψ ammette derivata parziale destra limitata in $[0, \infty)$ e continua a tratti.

Seguendo COLEMAN e MIZEL [2] introduciamo quindi in $[0, \infty)$ una misura μ boreliana, non banale, regolare, σ -finita e nello spazio $\mathfrak{B}$ definiamo una generica norma $\|\cdot\|$ tale che lo spazio di Banach $\mathfrak{B}$, che si ottiene completando $\mathfrak{B}$ e ponendo uguali due funzioni ψ_1 e ψ_2 per cui $\|\psi_1 - \psi_2\| = 0$ verifichi le condizioni:

- a) se $\psi \in \mathfrak{B}$ allora $\psi = - (d/ds)\psi$ μ q.d. (*) appartiene a $\mathfrak{B}$;
- b) se $|\psi_1| \leq |\psi_2|$ q.d., allora $|\psi_1| \leq |\psi_2|$;
- c) data una $\{\psi_n\}$ in $\mathfrak{B}$, se $|\psi_n| \nearrow |\psi|$ μ -q.d. con $|\psi|$ μ -misurabile, allora $\psi \in \mathfrak{B}$ e inoltre $\|\psi_n\| \nearrow \|\psi\|$.

Inoltre per ogni $h \geq 0$ definiamo su $\mathfrak{B}$ gli operatori di *continuazione statica* T_h e di *sezione* S_h nel modo seguente: per ogni $\psi \in \mathfrak{B}$ [2]

$$(5) \quad T_h \psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \psi(0) & s \in [0, h] \\ \psi(s - h) & s \in (h, \infty) \end{cases}$$

$$(6) \quad S_h \psi \stackrel{\text{def}}{=} \psi(s + h) \quad s \in [0, \infty)$$

ovviamente $T_h \tilde{f}$ e $S_h \tilde{f}$ risultano definiti e lineari su $\mathfrak{B}$ e nelle ipotesi che T_h e S_h siano limitati secondo la norma di $\mathfrak{B}$, è possibile estendere per continuità questi operatori su tutto $\mathfrak{B}$, tali estensioni le indicheremo rispettivamente con T'_h , S'_h . Pertanto supporremo, in aggiunta alle condizioni a), b), c), che:

- d) gli operatori T_h , S_h sono limitati su $\mathfrak{B}$, inoltre le estensioni T'_h , S'_h coincidano con le operazioni di *continuazione statica* e di *sezione* su tutto $\mathfrak{B}$.

È utile quindi premettere che se $\psi \in \mathfrak{B}$, la restrizione ψ_r di ψ a $(0, \infty)$ la chiameremo *storia passata*, mentre l'insieme di tutte le funzioni ψ_r lo indicheremo con $\mathfrak{B}_r$.

(*) Con μ -q.d. intenderemo che la data relazione vale puntualmente per tutti gli $s \in [0, \infty)$ eccettuati al più i punti di un insieme $Y \in [0, \infty)$ per cui $\mu(Y) = 0$.

e come facilmente si dimostra, costituisce uno spazio di Banach se si sceglie come norma:

$$\|\psi_r\|_r = \|\psi\|_{i_{(0,\infty)}}$$

dove $i_{(0,\infty)}$ è la funzione caratteristica di $(0, \infty)$.

Infine osserviamo che sotto le ipotesi a)-d) si può dimostrare (*):

PROPOSIZIONE 1. — *La misura μ deve avere un atomo in $s=0$ ed è assolutamente continua in $(0, \infty)$ rispetto alla misura di Lebesgue. Inoltre lo spazio di Banach $\mathfrak{B}$ risulta algebricamente e topologicamente la somma diretta di R^{n+1} e di $\mathfrak{B}_r$; cioè:*

$$\mathfrak{B} = R^{n+1} \oplus \mathfrak{B}_r$$

questo comporta che la norma $\|\cdot\|$ di $\mathfrak{B}$ è equivalente alla norma $\|\cdot\|'$ definita:

$$(7) \quad \|\psi\|' = |\psi(0)| + \|\psi_r\|_r.$$

Ciò premesso, supporremo di limitarci a considerare materiali che verifichino le condizioni seguenti:

- 1) *I funzionali costitutivi sono definiti e continui su $\mathfrak{B}$;*
- 2) *L'energia interna $\tilde{\varepsilon}(v^t)$ è differenziabile secondo Fréchet con continuità almeno due volte.*

Osserviamo che per l'ipotesi 1) è possibile, in virtù della proprietà della norma di $\mathfrak{B}$, caratterizzare nei funzionali costitutivi e quindi nell'energia interna la dipendenza nella storia separando i contributi relativi all'istante attuale e alla storia passata, nel senso che:

$$(8) \quad \tilde{\varepsilon}(v^t) = \tilde{\varepsilon}(v^t(0); v_r^t)$$

dove $v^t(0)$ è il valore attuale e v_r^t la restrizione di v^t a $(0, \infty)$.

Mentre l'ipotesi di differenziabilità per $\tilde{\varepsilon}$ comporta l'esistenza per ogni $v^t \in \mathfrak{B}$ della derivata istantanea $\partial_v \tilde{\varepsilon}(v^t)$ e del differenziale $\delta_r \tilde{\varepsilon}(v^t|\cdot)$ definita [1]:

$$(9) \quad \tilde{\varepsilon}(v^t(0) + \tilde{v}^t(0); v_r^t) = \tilde{\varepsilon}(v^t(0); v_r^t) + (\partial_v \tilde{\varepsilon}, \tilde{v}^t(0)) + o(|\tilde{v}^t(0)|)$$

$$(10) \quad \tilde{\varepsilon}(v^t(0); v_r^t + \tilde{v}_r^t) = \tilde{\varepsilon}(v^t(0); v_r^t) + \delta_r \tilde{\varepsilon}(v^t|\tilde{v}_r^t) + o(|\tilde{v}_r^t|_r)$$

per tutti i $v^t, \tilde{v}^t \in \mathfrak{B}$ e dove $\delta_r \tilde{\varepsilon}(v^t|\tilde{v}_r^t)$ è un funzionale lineare in $\tilde{v}_r^t$ e $(\cdot, \cdot)$ rappresenta il prodotto scalare in R^{n+1} .

(*) Valgono infatti le condizioni richieste da COLEMAN e MIZEL [2] per formulare la Proposizione 1.

3. - Posizione del problema e principio di convessità.

In questo studio consideriamo una classe di processi fisici, che chiameremo *normali*, governati da sistemi differenziali *quasi-lineari* del primo ordine della forma:

$$(11) \quad u_t - A^i f_{x^i} = 0 \quad \left(u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad f_{x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)$$

dove u, f sono variabili vettoriali applicazione di $Q = \Omega \times I$ in R^n e A^i sono matrici $(n \times n)$ costanti e simmetriche.

Il sistema (11), che esprime le equazioni di moto, deve essere completato dalla legge di conservazione dell'energia:

$$(12) \quad \varepsilon_t - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{1}{2} (A^i f, f) - q_i \right] = 0$$

dove ε è la densità di energia e q_i le componenti del flusso di calore $\mathbf{q}$.

Ricordiamo che la propagazione ondosa relativa a fenomeni di gas-dinamica nella forma lagrangiana, di elettromagnetismo, di magnetofluidodinamica, ecc. è descritta da sistemi di equazioni del tipo (11), (12). Mentre le equazioni generali della meccanica dei continui non rientrano fra i sistemi (11), (12) ma ne costituiscono una particolare generalizzazione. I risultati che otterremo e il principio di convessità si possono comunque opportunamente estendere anche a queste equazioni.

Infine poniamo che ciascun processo verifichi il secondo principio della termodinamica che è espresso in forma precisa dalla disuguaglianza di Clausius-Duhem la quale in assenza di sorgenti di calore, se indichiamo con $\eta(x, t)$, $\theta(x, t)$ rispettivamente ha densità di *entropia* e la *temperatura* della particella x al tempo t e con $\mathbf{g} = \text{grad } \theta(x, t)$, si esprime in forma locale:

$$(13) \quad \eta_t \geq -\frac{1}{\theta} \text{div } \mathbf{q} + \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g}.$$

Pertanto il processo termodinamico descritto da (11), (12), (13) è individuato dall'insieme delle funzioni $\eta, u, f, \varepsilon, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{q}$. In questo schema noi supporremo:

I) la coppia $v = (\eta, u)$ costituisce una classe di variabili indipendenti

II) l'insieme delle relazioni costitutive è rappresentato, per ogni fissato $x \in \Omega$ dalle equazioni funzionali:

$$(14) \quad \begin{aligned} \varepsilon(t) &= \tilde{\varepsilon}(v^t) \\ f(t) &= \tilde{f}(v^t) \\ \theta(t) &= \tilde{\theta}(v^t) \\ \mathbf{q}(v) &= \tilde{\mathbf{q}}(v^t, \mathbf{g}). \end{aligned}$$

PRINCIPIO DI CONVESSITÀ. — *L'energia interna $\tilde{\varepsilon}$, relativa ad un sistema normale (11), (12) nell'ipotesi I), II) e verificante le condizioni 1), 2) risulta una funzione strettamente convessa dei valori istantanei delle variabili indipendenti, nel senso che:*

$$(15) \quad (\partial_v \partial_\varepsilon \tilde{\varepsilon}(v^t) \xi, \xi) > 0$$

per ogni $\xi \in R^{n+1}$, $\xi \neq 0$.

Per la particolare struttura delle equazioni (11), (12), e in virtù delle ipotesi I), II), la disuguaglianza (13) impone, come è noto, delle restrizioni sui funzionali costitutivi. Infatti utilizzando l'idea di COLEMAN [1] si dimostra fra l'altro:

TEOREMA 1. — *Nell'ipotesi 1), 2) sui funzionali costitutivi relativi ad un processo normale (11), (12) che verifichi I), II) si ha come conseguenza della disuguaglianza di Clausius-Duhem che, per ogni $v^t \in \mathfrak{B}$, $\tilde{f}$ e $\tilde{\theta}$ sono determinati da $\tilde{\varepsilon}$ mediante le relazioni:*

$$(16) \quad \tilde{\theta}(v^t) = \partial_\eta \tilde{\varepsilon}(v^t)$$

$$(17) \quad \tilde{f}(v^t) = \partial_u \tilde{\varepsilon}(v^t).$$

Infine precisiamo che il problema che tratteremo è costituito dal sistema delle equazioni (11), (12), (13) nelle ipotesi I), II), inoltre supporremo che il campo v verifichi le seguenti condizioni ai limiti:

$$(18) \quad v^0(x, s) = g(x, s) \quad x \in \Omega, \quad s \in [0, \infty)$$

$$(19) \quad (A^i u, u) n_i = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times I$$

dove $g(x, s)$ è una funzione nota su $\Omega \times [0, \infty)$, $\partial\Omega$ è la frontiera di Ω e n_i le componenti del versore normale ad Ω . Nel seguito pertanto penseremo sempre che lo spazio $\mathfrak{B}$ sia costituito soltanto da funzioni che verificano le condizioni (18) (19) e utilizzeremo le seguenti posizioni:

$$v \stackrel{\text{def}}{=} (\eta, u) = (v_0, v_1, \dots, v_n)$$

$$\mathfrak{f} \stackrel{\text{def}}{=} (\theta, f) = (f_0, f_1, \dots, f_n).$$

4. — Proprietà e conseguenze del Principio di convessità.

In termodinamica oltre all'energia vengono utilizzati spesso altri potenziali [11]. Ricorderemo l'energia libera ψ , l'entalpia κ , l'entalpia libera ζ , che sono definiti rispettivamente:

$$(20) \quad \psi = \varepsilon - \theta\eta$$

$$(21) \quad \kappa = \varepsilon - (f, u)$$

$$(22) \quad \zeta = \varepsilon - \theta\eta - (f, u).$$

Siamo interessati a studiare quali restrizioni discendono su questi potenziali del principio di convessità sull'energia.

Le relazioni (16), (17) che potremmo sinteticamente scrivere:

$$(23) \quad \mathfrak{f}(t) = \partial_v \mathcal{E}(v^t)$$

realizzano una applicazione da $\mathfrak{B}$ a R^{n+1} che nel seguito indicheremo più spesso

$$(24) \quad \mathfrak{f}(t) = \tilde{\mathfrak{f}}(v^t).$$

Rappresentiamo quindi con $\mathfrak{C}$ l'insieme delle funzioni da $[0, \infty)$ ad R^{n+1} definito:

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{f}^t: \mathfrak{f}^t(s) = \tilde{\mathfrak{f}}(v^{t-s}) \text{ per ogni } v^{t-s} \in \mathfrak{B}, \text{ ed } s \in [0, \infty)\}$$

la funzione (24) stabilisce così una corrispondenza da $\mathfrak{B}$ su $\mathfrak{C}$ mediante la relazione $\mathfrak{f}^t(s) = \mathfrak{f}(t-s) = \tilde{\mathfrak{f}}(v^{t-s})$. Tale nuova applicazione verrà indicata:

$$(25) \quad \mathfrak{f}^t = \tilde{\mathfrak{f}}(v^t).$$

Analogamente se:

$$\mathfrak{C}_r = \{f_r^t: f^t \in \mathfrak{C}\}$$

mediante (25) è possibile stabilire una funzione da $\mathfrak{C}_r$ a $\mathfrak{B}$, che rappresentiamo:

$$(26) \quad \mathfrak{f}_r^t = \tilde{\mathfrak{f}}_r(v_r^t).$$

Supponiamo pertanto:

CONDIZIONE I. — *Le funzioni (25), (26) si possono invertire nelle nuove funzioni a valori rispettivamente in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_r$, definite, continue su $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C}_r$ ed ivi differenziabili con continuità secondo Fréchet:*

$$(27) \quad v^t = \tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{f}^t)$$

$$(28) \quad v_r^t = \tilde{\mathfrak{v}}_r(\mathfrak{f}_r^t).$$

Pertanto da (27), per le proprietà di $\mathfrak{B}$, è possibile determinare la funzione a valori in R^{n+1} :

$$(29) \quad v(t) = \tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{f}^t).$$

Per i successivi sviluppi matematici è conveniente porre:

$$\begin{aligned} \hat{v} &= (v_0, \dots, v_l), & \hat{f} &= (\mathfrak{f}_0, \dots, \mathfrak{f}_l) \\ \check{v} &= (v_{l+1}, \dots, v_n), & \check{f} &= (\mathfrak{f}_{l+1}, \dots, \mathfrak{f}_n) \end{aligned}$$

dove l è un arbitrario intero, $0 \leq l \leq n$. Pertanto se:

$$(30) \quad \hat{f}^t = \tilde{\varphi}(\check{v}^t, \check{v}^t), \quad \hat{f}_r^t = \tilde{\varphi}_r(\hat{v}_r^t, \check{v}_r^t), \quad \hat{f}(t) = \tilde{\varphi}(\hat{v}(t), \check{v}(t))$$

rappresentano le prime $l+1$ componenti delle funzioni (23), (24), (25), noi supporremo tali relazioni invertibili, nel senso che, analogamente a (27), (28), (29), esistano tre nuove funzioni $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}_r$, $\tilde{\varphi}$ per cui:

$$(31) \quad \check{v}^t = \tilde{\varphi}(\hat{f}^t, \check{v}^t), \quad \check{v}_r^t = \tilde{\varphi}_r(\hat{f}_r^t, \check{v}_r^t), \quad \check{v}(t) = \tilde{\varphi}(\hat{f}(t), \check{v}(t)).$$

Consideriamo ora la generica funzione:

$$(32) \quad e = \varepsilon(v^t) - \sum_{i=0}^l v_i \tilde{f}_i(v^t) = \hat{f}(v^t) - (v, \hat{f}(v^t))'$$

essendo $(\cdot, \cdot)'$ il prodotto scalare in R^{l+1} .

In virtù di (31) possiamo pensare $\tilde{e}$ funzione di $\hat{f}^t, \check{v}^t$ che per le ipotesi 1), 2) su $\tilde{f}$ ed $\tilde{\varepsilon}$ è possibile rappresentare:

$$e(t) = \tilde{e}(\hat{f}(t), \check{v}(t); \hat{f}_r^t, \check{v}_r^t).$$

Inoltre (30)₃ per la continuità di $\tilde{f}$ e quindi di $\tilde{\varphi}$ possiamo rappresentarla:

$$(33) \quad \hat{f}(t) = \tilde{\varphi}(\hat{v}(t), \check{v}(t); \hat{v}_r^t, \check{v}_r^t)$$

che nell'ipotesi di invertibilità (31)₃ è equivalente:

$$(34) \quad \hat{v}(t) = \tilde{\varphi}(\hat{f}(t), \check{v}(t); \hat{f}_r^t, \check{v}_r^t).$$

Osserviamo che se sussiste l'invertibilità di (33) nel senso di equivalenza fra (33) e (34) allora discende anche l'invertibilità di (30)₁, (30)₂. Per tale motivo nel seguito pretenderemo soltanto l'invertibilità di (33).

Con le medesime considerazioni utilizzate da COLEMAN ([1] §§ 11-12) (*) possiamo affermare il seguente corollario del Teorema 1:

COROLLARIO. — *Nell'ambito di validità delle condizioni del Teorema 1 e inoltre nella ipotesi di invertibilità (31) per la relazione (30) si ha:*

$$(35) \quad \hat{v} = -\partial_{\hat{f}} \tilde{e}(\hat{f}^t, \check{v}^t) = \tilde{\varphi}(\hat{f}^t, \hat{v}^t) \\ \check{f} = \partial_{\check{v}} \tilde{e}(\hat{f}^t, \check{v}^t).$$

(*) Vedi anche COLEMAN e DILL [11].

Infatti derivando rispetto a $\hat{f}$ l'espressione (23):

$$\partial_{\hat{f}} \tilde{e} = \partial_{\hat{v}} \tilde{e} \partial_{\hat{f}} \hat{v} - \hat{v} - (\hat{f}, \partial_{\hat{f}} \hat{u})$$

e ricordando (24) si ha (35)₁: Con analogo procedimento si ottiene (35)₂. Possiamo così formulare il seguente teorema:

TEOREMA 2. — *Nell'ipotesi del Teorema 1 per $\tilde{e}$ e di invertibilità per*

$$(36) \quad \hat{f} = \partial_{\hat{v}} \tilde{e}(v^t)$$

la funzione $\tilde{e}(\hat{f}^t, \check{v}^t)$ ammette derivate istantanee almeno due volte e risulta strettamente convessa nei valori istantanei delle variabili v_i , ($i = l + 1, \dots, n$):

$$(37) \quad \sum_{i=1}^n \partial_{v_i} \partial_{v_j} \tilde{e} h_i h_j > 0$$

dove h_i sono le componenti di un vettore arbitrario non nullo di R^{n-l-1} , ed $\hat{f}^t$ è mantenuta costante. Mentre $\tilde{e}$ è una funzione strettamente concava nelle variabili istantanee $\hat{f}$ allorché le v^t sono a loro volta fissate, cioè:

$$(38) \quad \sum_{i=1}^l \partial_{v_i} \partial_{v_j} \tilde{e} g_i g_j < 0$$

essendo g_i le componenti di un vettore arbitrario non nullo di R^l .

DIMOSTRAZIONE. — Per ogni $t \in I$ supponiamo fissato il valore della storia passata v_r^t relativa all'istante t , da cui risulta fissata anche la storia passata $\hat{f}_r^t$ per la relazione (24). In queste ipotesi è quindi lecito supporre i funzionali dipendenti solo dalle variabili istantanee.

Quindi è conveniente esplicitare nella relazione (32) di $\tilde{e}$ la dipendenza nei valori attuali e nella storia passata:

$$(39) \quad \tilde{e}(\hat{f}(t), \check{v}(t); \hat{f}_r^t, \check{v}_r^t) = \tilde{e}(\tilde{\varphi}(\hat{f}^t, \check{v}^t), \check{v}(t); \tilde{\varphi}_r(\hat{f}_r^t, \check{v}_r^t), \check{v}_r^t) - (\hat{f}, \tilde{\varphi}(\hat{f}(t), \check{v}(t); \hat{f}_r^t, \check{v}_r^t))'.$$

Supponendo fissato il valore di $\hat{f}^t$ nella relazione (39) deriviamo rispetto al valore istantaneo di v :

$$(40) \quad \partial_{\check{v}} \tilde{e} = \partial_{\check{v}} \tilde{e} + \partial_{\hat{v}} \tilde{e} \partial_{\check{v}} \tilde{\varphi} - (\hat{f}, \partial_{\check{v}} \tilde{\varphi})'$$

dopo una ulteriore derivazione rispetto a $\check{v}$:

$$(41) \quad \partial_{\check{v}} \partial_{\check{v}} \tilde{e} = \partial_{\check{v}} \partial_{\check{v}} \tilde{e} + 2 \partial_{\hat{v}} \partial_{\check{v}} \tilde{e} \partial_{\check{v}} \tilde{\varphi} + \partial_{\hat{v}} \partial_{\check{v}} \tilde{e} \partial_{\check{v}} \tilde{\varphi} \partial_{\check{v}} \tilde{\varphi} + (\partial_{\hat{v}} \tilde{e} - \hat{f}) \partial_{\check{v}} \partial_{\check{v}} \tilde{\varphi}$$

ricordando che $\tilde{f} = \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon}$ e per (35)₁ si ha:

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon} &\in \partial_{\tilde{\gamma}} \varphi = \partial_{\tilde{\gamma}} f \partial_{\tilde{\gamma}} \varphi = - \partial_{\tilde{\gamma}} f \partial_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon}(\tilde{f}^t, \tilde{v}^t) \\ &= - \partial_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon}(\tilde{f}^t, \tilde{v}^t) \end{aligned}$$

pertanto:

$$(42) \quad 3 \partial_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon} = \partial_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon} + \partial_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varphi} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varphi}$$

Per l'ipotesi di stretta convessità su $\tilde{\varepsilon}$, abbiamo come conseguenza di (42), che $\tilde{\varepsilon}$ verifica la condizione (37).

Analogamente derivando $\tilde{\varepsilon}$ rispetto a $\tilde{f}$:

$$(43) \quad \partial_{\tilde{f}} \tilde{\varepsilon} = \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon} \partial \tilde{v} - \tilde{v} - f \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{v}$$

da cui dopo una ulteriore derivazione:

$$(44) \quad \partial_{\tilde{f}} \partial_{\tilde{f}} \tilde{\varepsilon} = \partial_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon} \partial_{\tilde{f}} \tilde{v} \partial_{\tilde{f}} \tilde{v} + (\partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon} - \tilde{f}) \partial_{\tilde{f}} \partial_{\tilde{f}} \tilde{v} - 2 \partial_{\tilde{f}} \tilde{v}$$

ma poichè $\tilde{f} = \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon}$ e $\partial_{\tilde{f}} \tilde{v} = - \partial_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon}$:

$$(45) \quad - \partial_{\tilde{f}} \partial_{\tilde{f}} \tilde{\varepsilon} = \partial_{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varepsilon} \partial_{\tilde{f}} \tilde{v} \partial_{\tilde{f}} \tilde{v}$$

pertanto per ogni fissato valore di v_r^t risulta verificata la relazione (38) per l'ipotesi di convessità su $\tilde{\varepsilon}$.

Poichè, come abbiamo visto l'ipotesi di invertibilità (34) è essenziale per formulare il Corollario 1 e il Teorema 2, occupiamoci di studiare le condizioni che assicurano tale invertibilità.

Innanzitutto supporremo la memoria di durata limitata, relativa all'intervallo $(0, T_0)$, cioè la storia corrispondente ai tempi superiori all'istante T_0 non influenza il valore dei funzionali costitutivi.

In primo luogo affrontiamo un caso particolare, semplice ma significativo. Supporremo $l = n + 1$ e la relazione (24) lineare e quindi limitata per l'ipotesi di continuità 1), inoltre lo spazio $\mathfrak{B}_r = L^p(0, \infty)$ ⁽¹⁾.

Pertanto si scriverà per $l = n + 1$ e per l'ipotesi di memoria limitata:

$$(46) \quad \tilde{f}(t) = \chi v(t) + \int_0^{T_0} \psi(s) v^t(s) ds$$

dove χ e ψ sono due tensori del secondo ordine il primo costante, mentre $\psi \in L^q(0, T_0)$

⁽¹⁾ Poichè la memoria risulta limitata all'intervallo $(0, T_0)$ in pratica viene utilizzato soltanto il valore della funzione in $(0, T_0)$.

($1/p + 1/q = 1$). Inoltre per il principio di convessità χ deve risultare un tensore definito positivo ⁽¹⁾, che pertanto ammette l'inverso χ^{-1} .

La relazione (46) può così essere scritta:

$$(47) \quad \chi^{-1} \dot{f}(t) = v(t) + \int_0^{x_0} K(s) v^t(s) ds$$

dove $K(s) = \chi^{-1} \psi(s)$.

L'invertibilità della relazione (47) è assicurata ⁽²⁾ dall'osservazione che se $v_1^t, v_2^t \in \mathfrak{B}$ sono due storie verificanti l'equazione (47), si ha per ogni $\tau \in (-\infty, t]$:

$$(48) \quad 0 = v_1(\tau) - v_2(\tau) + \int_0^{x_0} K(s) (v_1^t(s) - v_2^t(s)) ds$$

Quindi per un teorema dovuto a VOLTERRA ([8], pag. 260) deve risultare $v_1^t - v_2^t = 0$. Inoltre l'inverso sarà formalmente identico alla equazione (46), cioè è assicurato dal citato teorema di Volterra.

Infine per quanto riguarda il caso generale è possibile nell'ipotesi di memoria limitata pervenire alla seguente affermazione:

TEOREMA 3. — *Nelle ipotesi del Teorema 1 per l'energia $\tilde{\epsilon}$, la condizione di convessità risulta necessaria e sufficiente per l'invertibilità di (33) ⁽³⁾.*

(Necc.) Supponiamo pertanto la relazione (33) invertibile nel senso che discende da essa (34). In questa espressione supponiamo fissate la storia passata v_r^t , allora da (30)₂ risulta fissata anche la storia passata $\hat{f}_r^t$: Pertanto (34) risulta più concisamente espressa da:

$$(49) \quad v(t) = \tilde{\varphi}'(\hat{f}(t), v(t); v_r^t).$$

Affinchè, per ogni fissato $v_r^t \in \mathfrak{B}_r$, (33) si possa esprimere nella forma (49) occorre che il determinante jacobiano della trasformazione sia diverso da zero:

$$\det(\partial_{\hat{f}} \hat{f}(v^t)) \neq 0$$

cioè

$$\det(\partial_{\hat{v}} \partial_{\hat{f}} \tilde{\epsilon}(v^t)) \neq 0.$$

⁽¹⁾ Nel caso lineare l'ipotesi di convessità è conseguenza della condizione di positività dell'energia.

⁽²⁾ Contrariamente a quanto affermato da alcuni autori, la questione della invertibilità di (47) è risolubile e risulta affrontata anche da VOLTERRA [8].

⁽³⁾ Per invertibilità di (33) intenderemo che sia verificata la Condizione I con (25), (26) sostituiti rispettivamente da (33), (34).

Inoltre per l'ipotesi 2) di continuità nel differenziale secondo di $\tilde{\varepsilon}$ il segno del determinante rimane invariato per tutti i $v^t \in \mathfrak{B}$. Tale segno inoltre deve essere sempre positivo, infatti se per assurdo, fissato v_r^t e $\tilde{v}$:

$$\det (\partial_{\tilde{v}} \partial_{v_r} \tilde{\varepsilon}) < 0$$

allora $\tilde{\varepsilon}$ risulterebbe una funzione o concava o a sella di $\hat{v} \in R^{l+1}$ e quindi dovrebbe assumere valori negativi in $\mathfrak{B}$. Pertanto poichè in $\hat{v} = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ l è arbitrario, abbiamo che tutti i minori principali della matrice:

$$\|\partial_{\tilde{v}} \partial_{v_r} \tilde{\varepsilon}\|$$

devono risultare positivi.

(Suff.) In questa parte della dimostrazione supporremo $\mathfrak{B}_r = L^2(0, \infty)$ e la memoria limitata, ma i risultati sono comunque estendibili a spazi più generali.

Mediante la funzione $\tilde{f} = \tilde{f}(v^t)$ si può stabilire come già detto, una funzione che realizza una applicazione da $\mathfrak{B}$ su $\mathfrak{C}$ che abbiamo indicato:

$$(50) \quad \tilde{f}^t = \tilde{f}(v^t).$$

Tale applicazione sotto le ipotesi del Teorema 1 risulta invertibile, infatti poichè è a valori su tutto $\mathfrak{C}$, è sufficiente verificare che è iniettiva, cioè per $v_1^t, v_2^t \in \mathfrak{B}$ ed $\tilde{f}(v_1^t) = \tilde{f}(v_2^t)$ segue $v_1^t = v_2^t$. Dimosteremo ciò per assurdo, supponiamo pertanto che $v_1^t \neq v_2^t$, mentre: $\tilde{f}(v_1^t) = \tilde{f}(v_2^t)$. Da qui risulta, dalla definizione di $\tilde{f}$, che se poniamo $\tau = t - r$ con $r \in [0, \infty)$, poichè $v_1^r, v_2^r \in \mathfrak{B}$:

$$(51) \quad 0 = \tilde{f}(v_1^t) - \tilde{f}(v_2^t) = \int_0^1 \frac{d}{d\nu} \tilde{f}(\nu v_1^r + (1-\nu)v_2^r) d\nu = \\ = \int_0^1 [\partial_{\tilde{v}} \tilde{f}(\nu v_1^r + (1-\nu)v_2^r)(v_1(\tau) - v_2(\tau)) + \delta_r \tilde{f}(\nu v_1^r + (1-\nu)v_2^r | v_{1r}^r - v_{2r}^r)] d\nu$$

dove $\delta_r \tilde{f}$ è il differenziale di Frechét rispetto a v_r^r e quindi lineare in $v_{1r}^r - v_{2r}^r$ e continuo per l'ipotesi 1), 2).

Poichè come supposto $\mathfrak{B}_r = L^2(0, \infty)$ e la memoria limitata e $[0, T_0]$ deve esistere per il teorema di Riesz una funzione $B(\nu v_1^r + (1-\nu)v_2^r, s)$ a valori tensoriali e tale che ogni componente appartenga a $L^2(0, T_0)$ per cui:

$$(52) \quad \delta_r \tilde{f}(\nu v_1^r + (1-\nu)v_2^r | v_{1r}^r - v_{2r}^r) = \int_0^{T_0} B(\nu v_1^r + (1-\nu)v_2^r, s)(v_1^r(s) - v_2^r(s)) ds.$$

Quindi poniamo

$$(53) \quad A(\tau) = \int_0^1 \partial_v \tilde{f}(v v_1^\tau + (1-v)v_2^\tau) dv$$

$$(54) \quad C(\tau, s) = \int_0^1 B(v v_1^\tau + (1-v)v_2^\tau, s) dv$$

ricordando però che $A(\tau)$ e $C(\tau, s)$ dipendono da v_1^τ e v_2^τ .

Pertanto

$$(55) \quad \tilde{f}(v_1^\tau) - \tilde{f}(v_2^\tau) = A(\tau)(v_1(\tau) - v_2(\tau)) + \int_0^{x_0} C(\tau, s)(v_1^\tau(s) - v_2^\tau(s)) ds$$

inoltre per ogni arbitrario $\psi \in L^2(0, T)$ e a valori in R^{n+1} , abbiamo per $t' \leq t$:

$$0 = \int_{t'-x_0}^{t'} (\psi^{t'}(\tau), \tilde{f}(v_1^\tau) - \tilde{f}(v_2^\tau)) d\tau = \int_{t'-x_0}^{t'} \left(\psi^{t'}(\tau), A(\tau)(v_1(\tau) - v_2(\tau)) + \int_0^{x_0} C(\tau, s)(v_1^\tau(s) - v_2^\tau(s)) ds \right) d\tau$$

quindi indichiamo con $A^+(\tau) = A(t - \tau)$ e $C^+(\tau, s) = C(t - \tau + s, s)$ essendo C^x il trasporto di C , allora, dopo alcuni passaggi ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t'-x_0}^{t'} \left\{ (A^+(\tau) \psi(\tau), v_1^{t'}(\tau) - v_2^{t'}(\tau)) + \left(\int_0^{x_0} C^+(\tau, s) \psi^\tau(s) ds, v_1^{t'}(\tau) - v_2^{t'}(\tau) \right) \right\} d\tau \\ &= \int_{t'-x_0}^{t'} (A^+(\tau) \psi(\tau) + \int_0^x C^+(\tau, s) \psi^\tau(s) ds, v_1^{t'}(\tau) - v_2^{t'}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Consideriamo quindi l'equazione integrale studiata da VOLTERRA [8]:

$$A^+(\tau) \psi(\tau) + \int_0^{x_0} C^+(\tau, s) \psi^\tau(s) ds = \varrho(\tau)$$

dove $\varrho \in L^2(0, T)$. Tale equazione, nelle ipotesi in cui ci siamo messi, ammette sempre una soluzione $\psi \in L^2(0, T)$. (Vedi RIESZ e SZ. NAGY pag. 147 e il Teorema contenuto in [8], pag. 260). Pertanto da (56) si ha:

$$\int_0^{x_0} (\varrho(\tau), v_1^{t'}(\tau) - v_2^{t'}(\tau)) d\tau = 0$$

⁽¹⁾ Questi calcoli sono eseguiti in parte in [9].

poichè ϱ è arbitrario elemento di $L^2(0, T)$, necessariamente deve essere $v_{1r}^t = v_{2r}^t$, da cui, sempre per la condizione di convessità:

$$v_1^t = v_2^t.$$

Quindi (50) ammette una inversa:

$$(57) \quad v^t = \tilde{v}(f^t)$$

la cui restrizione all'intervallo $(0, \infty)$ indicheremo:

$$(58) \quad v_r^t = \tilde{v}_r(f_r^t).$$

Inoltre per la natura dello spazio $\mathfrak{B} = R^{n+1} \oplus \mathfrak{B}_r$, risulta che $v^t(0)$ è sempre ben definito, pertanto mediante (57) si può dedurre la funzione:

$$(59) \quad v(t) = \tilde{v}(\tilde{f}^t).$$

La dimostrazione utilizzata per stabilire l'invertibilità di (24) si può naturalmente applicare anche alla funzione (33).

5. – Condizioni di correttezza.

Le condizioni sviluppate nei numeri precedenti risultano importanti e necessarie per lo studio delle condizioni di correttezza del problema di Cauchy relativo al sistema (11), (12). Infatti tale correttezza è collegata molto direttamente alle limitazioni termodinamiche che abbiamo stabilito.

Per tale ragione in questo lavoro affronteremo codesto problema, limitandoci però a trattare soltanto il caso di materiali privi di memoria solo per una più precisa e chiara esposizione che per una reale difficoltà di calcolo.

Innanzitutto precisiamo la definizione di correttezza a cui faremo riferimento:

DEFINIZIONE (Correttezza). – *Chiameremo corretto il problema di Cauchy corrispondente al sistema di equazioni (11) (12) nelle ipotesi I, II, se per dati iniziali regolari, esiste un intervallo temporale $(0, t_0)$ per cui:*

- 1) *il sistema ammette soluzione,*
- 2) *la soluzione è unica,*
- 3) *la regolarità nei dati iniziali viene conservata.*

La particolare struttura delle equazioni costitutive (14), dove compare il flusso di calore $\mathbf{q}$ funzione di v e del gradiente della temperatura $\mathbf{g}$, ci suggerisce come

conveniente l'introduzione del potenziale energia libera ψ definita in (20). Le limitazioni termodinamiche come detto si modificheranno nel modo seguente:

$$(61) \quad \begin{aligned} \tilde{f} &= \partial_u \tilde{\psi}(u, \theta) \\ \tilde{\eta} &= -\partial_\theta \tilde{\psi}(u, \theta). \end{aligned}$$

Come si vede in virtù della trasformazione operata l'insieme delle variabili indipendenti è ora costituito da u e θ . Quindi il sistema (11), (12) viene formulato:

$$(62) \quad u_t - A^i \tilde{f}_{x^i}(u, \theta) = 0$$

$$(63) \quad \tilde{\varepsilon}_t - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{1}{2} (A^i \tilde{f}, \tilde{f}) - \tilde{q}_i(u, \theta, \nabla \theta) \right] = 0.$$

TEOREMA 4. — *Nell'ipotesi che il flusso di calore $\mathbf{q}$ verifichi la limitazione*

$$(64) \quad \partial_{\nabla \theta} \tilde{\mathbf{q}}(u, \theta, \nabla \theta) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \leq -\delta \mathbf{a}^2$$

valida per tutti $\mathbf{a} \in R^3$ e per un certo $\delta \in R^+$, il principio di convessità assicura la correttezza secondo la definizione data dal problema di Cauchy relativo al sistema (62), (63).

L'insieme delle equazioni (62), (63) può essere modificato, mediante le formule (16), (17); infatti ricordando che:

$$(65) \quad \tilde{\varepsilon}_t(u, \tilde{\eta}(u, \theta)) = (\partial_u \tilde{\varepsilon}, u_t) + \partial_\eta \tilde{\varepsilon} \eta_t = (\tilde{f}, u_t) + \theta(\eta_u, u_t) - \theta \partial_\theta \partial_\theta \psi \theta_t$$

si ha da (63) utilizzando (62):

$$(66) \quad -\theta \partial_\theta \partial_\theta \psi \theta_t + \theta(\partial_u \eta, A^i \tilde{f}_{x^i}) + \tilde{q}_{ix^i}(u, \theta, \nabla \theta) = 0.$$

Inoltre se moltiplichiamo scalarmente (62) per $\tilde{f}$ abbiamo:

$$(67) \quad (\tilde{f}, u_t) - (\tilde{f}, A^i \tilde{f}_{x^i}) = 0$$

derivando tale relazione rispetto ad u e ricordando (61)

$$\partial_u \partial_u \tilde{\psi} u_t - A^i \partial_u (\partial_u \tilde{f} \tilde{f}) u_{x^i} = 0.$$

È importante verificare che le matrici $\Gamma^i = A^i \partial_u (\partial_u \tilde{f} \tilde{f})$ (per ogni i) sono simmetriche, infatti

$$(A_{hk}^i f_{hu_r} f_k)_{u_s} = A_{hk}^i f_{hu_r u_s} f_k + A_{hk}^i f_{hu_r} f_{ku_s}.$$

Si vede quindi che il sistema (62), (63) si può rendere, se indichiamo con $\Sigma(u, \theta, \nabla\theta)$ una opportuna funzione che raggruppa alcuni termini di (66), nella forma:

$$(69) \quad \partial_u \partial_u \psi_t - \Gamma^i(u, \theta) u_{x^i} = 0$$

$$(70) \quad \theta \partial_\theta \partial_\theta \tilde{\psi} \theta_t + \Sigma(u, \theta, \nabla\theta) - \partial_{\nabla\theta} \tilde{q}_i(u, \theta, \nabla\theta) \nabla^i \theta = 0.$$

Dove $\partial_u \partial_u \psi$, per quanto visto nel Teorema 2, è per ogni θ una matrice definita positiva e simmetrica come le Γ^i , mentre $\psi_{\theta\theta}$ è una quantità sempre negativa. Quindi il sistema (69), per ogni fissato θ , è iperbolico secondo la definizione di Friedrichs, mentre (70) risulta in virtù della limitazione (64), per ogni fissato θ , una equazione di tipo parabolico. L'importanza di una formulazione del problema mediante tale sistema differenziale di tipo misto, va cercata nel fatto che il problema di Cauchy relativo, nelle ipotesi precisate ora, è corretto, come verificato da VOL'PERT e HUDJAEV [7].

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of Materials with Memory*, Arch. Rational Mech. Anal. **17**, (1964), pp. 1-46, 230-254.
- [2] B. D. COLEMAN and V. J. MIZEL, *On the General Theory of Fading Memory*, Arch. Rational Mech. Anal. **29** (1968), pp. 18-31.
- [3] W. D. DAY, *The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.
- [4] S. K. GODUNOV, *The Problem of a Generalized Solution in the Theory of Quasilinear Equations and in Gas Dynamics*, Russian Math. Surveys, **17**, pp. 145-156.
- [5] B. D. COLEMAN e W. NOLL, *On the thermostatics of continuous media*, Arch. Rational Mech. Anal. **4** (1959), pp. 97-128.
- [6] K. O. FRIEDRICHS and P. D. LAX, *Systems of Conservation Equations with a Convex Extension*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **68** (1971), pp. 1686-1688.
- [7] A. I. VOL'PERT and S. I. HUDJAEV, *On the Cauchy Problem for Composite systems of non linear differential Equations*, Math. USSR Sbornik **16** (1972), pp. 517-544.
- [8] V. VOLTERRA, *Sur la Théorie Mathématique des Phénomènes Hérititaires*, Jours. de Math., t. VII (1928), pp. 249-298.
- [9] M. FABRIZIO, *Dualità e Reciprocità per le Equazioni non lineari dell'Elettromagnetismo Ereditario, Nota I*, in corso di stampa, Atti Acc. Naz. dei Lincei, 1973.
- [10] F. RIESZ and B. SZ. NAGY, *Functional Analysis*, New York, F. Ungar, 1955.
- [11] B. D. COLEMAN e E. H. DILL, *On the thermodynamics of electromagnetic fields in materials with memory*, Arch Rational Mech. Anal. **41** (1971), pp. 132-165.
- [12] C. TRUESDELL - W. NOLL, *Encyclopedia of Physics*, Vol. III/3, ed. S. Flügge, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 1965.