Zur metrischen Differentialgeometrie auf den Bündeln der einfachen p -Vektoren und $(n-p)$ -Vektoren (*).

IMME HAUBITZ (Würzburg, Deutschland)

Summary. — *A previous paper [4] shows how the connection parameters for tangent simple p -vectors of a manifold can be split into p vectors and certain definite elements $\gamma_{\alpha\beta}^i$. In this paper the ensuing differential geometry is extended to the properties of both contra- and covariant simple p - and $(n-p)$ -vectors of this manifold. The five new invariant derivatives are proved to be similarly composed of a set of vectors and their derivatives. These allow for a simplified expression for the Gauss and Weingarten equations and consequently for the first variations of the respective areas and for the necessary minimal conditions.*

0. — Einleitung.

Eine Verallgemeinerung der Finsler-Geometrie zu einer Geometrie mit Areal für p -dimensionale tangentielle Parallelotope wurde etwa durch die Variationsrechnung mehrfacher Integrale nahegelegt. Dieses Areal ist aber schon durch eine Funktion auf den äußeren Produkten von je p Vektoren völlig bestimmt. Man betrachtet daher über einer Mannigfaltigkeit das Bündel der Graßmann-Kegel, also der zerlegbaren oder « einfachen » p -Vektoren. Die Definition dieses Bündels für endliche Differentiationsordnung wurde in [4] wiedergegeben.

Eine spezifische Schwierigkeit bietet die Abhängigkeit der $\binom{n}{p}$ Komponenten der einfachen p -Vektoren, von denen ja nicht alle wesentlich sind. Die gewöhnliche Differentiation nach diesen Komponenten ist also nicht durchführbar. Erst die Konstruktion der verallgemeinerten Ableitung durch W. BARTHEL [1] gab den Weg zu differentialgeometrischen Untersuchungen frei. Der von IWAMOTO [5] eingeführte metrische p -Tensor fügte sich als zweite Ableitung in den Kalkül der verallgemeinerten Ableitungen ein (vgl. die Eigenschaften A, B_0, B_1, C, C' und D aus [2] und [3]).

Die — zusätzliche — Struktur der Parallelverschiebung von einfachen p -Vektoren wird durch eine Zusammenhangsform vermittelt, deren Aufbau durch den Zerlegungssatz [4], S. 153 geklärt werden konnte. Dieser Zusammenhang beschränkt sich zunächst auf kontravariante Graßmannkegel.

Unter Zugrundelegung der Strukturen eines Areals, eines Volumens und eines metrischen Zusammenhanges beschäftigt sich [3] mit der resultierenden p -dimensionalen und $(n-p)$ -dimensionalen Flächentheorie. Dabei wird eine Erweiterungsmög-

(*) Entrata in Redazione il 17 dicembre 1974.

lichkeit der invarianten Differentiation angedeutet. In der vorliegenden Arbeit wird nun der Zusammenhang samt seiner Kopplung an das Areal auf das Bündel der kovarianten einfachen p -Vektoren und weiter auf die Bündel der einfachen $(n-p)$ -Vektordichten und -Vektoren fortgesetzt.

Wir werden für die fünf induzierten Zusammenhangskoeffizienten die Transformationseigenschaften, den Zerlegungssatz und die Ableitungsgleichungen von p - und $(n-p)$ -Flächen zusammenstellen. Dann wird die Variation des Areals und des Dualareals in den verschiedenen möglichen Gestalten angegeben.

ZUR BEZEICHNUNGSWEISE: n und p sind fest vorgegebene Dimensionszahlen. Bei den laufenden Indizes der Tensoren werden drei Arten unterschieden: kleine lateinische Buchstaben laufen von 1 bis n , kleine griechische von 1 bis p . Große lateinische Indizes stellen ein geordnetes schiefssymmetrisches p -tupel von kleinen lateinischen Indizes dar, etwa $I = [i_1 \dots i_p]$.

Über ein Paar aus einem oberen und einem unteren Index ist nach der Einsteinschen Konvention zu summieren, wobei die Summation bei großen Index-Buchstaben jedoch nur über die $\binom{n}{p}$ verschiedenen Gruppierungen $i_1 < \dots < i_p$ erstreckt wird.

Für $n - p$ setzt man auch $\bar{p}$, und entsprechend werden Indizes, die von $p + 1$ bis n laufen, mit $\bar{v}$ usw. bezeichnet.

1. – Induzierte Zusammenhänge.

Wir bauen auf die Begriffe und Ergebnisse aus [4] und [3] auf: M sei eine n -dimensionale C^4 -Mannigfaltigkeit und M_x ihr Tangentialraum in x .

Auf M wird die Struktur eines p -Areals durch eine Funktion

$$F: (x, X_\alpha) \in \bigcup_{x \in M} \bigwedge^p M_x \rightarrow R$$

mit folgenden Eigenschaften gegeben:

- (I) $F(x, X_\alpha) > 0$ für linear unabhängige Vektoren X_α ;
- (II) $F(x, \lambda_\alpha^z, X_\alpha) = \det(\lambda_\alpha^z) \cdot F(x, X_\alpha)$ für $\det(\lambda_\alpha^z) \geq 0$;
- (III) Für linear unabhängige X_α ist F von der Klasse C^3 .

$F(x, X_\alpha)$ heißt p -Areal des Parallelotops X_α .

Weiter bezeichne $GK^p(M_x) \subset \bigwedge^p M_x$ den nichtsingulären Graßmannkegel aller einfachen p -Vektoren im Raum der äußeren Produkte aus M_x . Damit bildet man die tangentialen Bündel $T(M)$, TGK^p und $T \bigwedge^p$ über M mit ihren Tangentialräumen $T(M)_x$, TGK^p_x und $T \bigwedge^p_x$.

Durch F wird eine Funktion

$$f: (x, X_1 \wedge \dots \wedge X_p) \in TGK^p(M_x) \rightarrow f(x, X_1 \wedge \dots \wedge X_p) := F(x, X_\alpha) \in R$$

induziert, für die entsprechend gilt:

- (i) $f(x, X) > 0$ für $X \neq 0$;
- (ii) $f(x, \lambda X) = \lambda f(x, X)$ für $\lambda \geq 0$;
- (iii) f ist für $X \neq 0$ C^3 -differenzierbar.

Die 1. und 2. verallgemeinerte Ableitung von f nach den Graßmannkoordinaten $X^I := p! X_{i_1}^{i_1} \dots X_{i_p}^{i_p}$ eines einfachen p -Vektors sind definiert als

$$\partial_I f(x, X) := \frac{p!}{f^{p-1}(x, X)} F_{i_1}^{[1} \dots F_{i_p}^{p]}(x, X)$$

$$\partial_{IX}^2 \left(\frac{1}{2} f^2 \right) (x, X) := \frac{p!^2}{f^{2(p-1)}(x, X)} \sum_{\alpha=0}^p \binom{p}{\alpha}^2 \Phi_{[i_1 i_{k_1}}^{[1]1]} \dots \Phi_{i_{\alpha} k_{\alpha}}^{\alpha \alpha} F_{i_{\alpha+1}}^{\alpha+1} F_{k_{\alpha+1}}^{\alpha+1} \dots F_{i_p] }^{p] } F_{k_p] }^{p] } (x, X_{\alpha}).$$

Dabei ist $F_i^{\alpha} := \partial_i^{\alpha} F(x, X_{\alpha})$ und $\Phi_{ik}^{\alpha\alpha} := F \partial_i^{\alpha} \partial_k^{\alpha} F - 2 F_i^{\alpha\alpha} F_k^{\alpha\alpha}$. Für diese Ableitungen hat man die Beziehungen A, B_0, B_1, C, C' und D aus [2] und [3].

Geometrisch wird ein kontravarianter p -Vektor gedeutet als das p -dimensionale Parallelotop durch den Ursprung und p Punkte mit einer festen Reihenfolge, die es mit einer (inneren) Orientierung versieht.

Ein kovarianter Vektor $\alpha \in V^*$ ist nicht direkt darstellbar. Die Linearform über V wird durch die Wirkung auf Vektoren $X \in V$ veranschaulicht, nämlich durch die Hyperebene

$$\{X | \alpha(X) = 1\}$$

und eine dazu parallele durch 0. Die Reihenfolge der Ebenen liefert eine Orientierung. Man faßt dieses Ebenenpaar auf als Zylinder über dem Rand eines Vektors mit « äußerer » Orientierung.

Allgemein kann man einen kovarianten p -Vektor X_I geometrisch durch einen Zylinder über dem Rand eines kontravarianten p -Vektors mit $(n-p)$ -dimensionalen Erzeugenden veranschaulichen. Dieser Zylinder hat wieder äußere Orientierung, d.h. das Parallelotop des kontravarianten p -Vektors ist mit einer Reihenfolge versehen.

Von den p -Vektoren geht man zu $\bar{p}$ -Vektordichten über. Dazu überschiebt man die einfachen p -Vektoren mit den zu jedem Koordinatensystem a priori vorhandenen n -Vektordichten

$$e_{I\bar{I}} := n! \delta_{i_1}^{[1} \dots \delta_{i_n]}^{n]} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{E}^{I\bar{I}} := n! \delta_{[1}^{i_1} \dots \delta_{n]}^{i_n}$$

und erhält so die zugeordnete ko- und kontravariante $\bar{p}$ -Vektordichte

$$\mathfrak{X}_{\bar{I}} = e_{I\bar{I}} X^I \quad \text{und} \quad \mathfrak{X}^{\bar{I}} = \mathbb{E}^{I\bar{I}} X_I$$

vom Gewicht (-1) und $(+1)$ [3].

Der Übergang zu Dichten ändert die geometrische Interpretation nicht. $\mathfrak{X}_{\bar{I}}$ ist ein p -dimensionales Parallelotop mit innerer Orientierung und $\mathfrak{X}^{\bar{I}}$ stellt man sich als Zylinder mit $\bar{p}$ -dimensionalen Erzeugenden und äußerer Orientierung vor.

Die so konstruierten Dichten werden in unsere Untersuchung einbezogen, da $\mathfrak{X}^{\bar{I}}$ das Äußerste an Transversalität darstellt, was ohne Einführung eines Volumens in der Mannigfaltigkeit M vorhanden ist.

Hat man aber eine *Volumenfunktion* auf M zur Verfügung, also eine Skalardichte vom Gewicht $(+1)$, die nirgends verschwindet, und die bezüglich jedes lokalen Koordinatensystems eine Komponentenfunktion $\mathfrak{F}: x \in U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ hat, so erreicht man den Raum der $\bar{p}$ -Vektoren

$$Y^{\bar{I}} := \frac{1}{\mathfrak{F}} \mathfrak{X}^{\bar{I}} \quad \text{und} \quad Y_{\bar{I}} := \mathfrak{F} \mathfrak{X}_{\bar{I}}.$$

$Y^{\bar{I}}$ wird durch ein $\bar{p}$ -dimensionales Parallelotop mit innerer Orientierung dargestellt und $Y_{\bar{I}}$ durch einen Zylinder über dem Rand eines kontravarianten $\bar{p}$ -Vektors mit p -dimensionalen Erzeugenden und äußerer Orientierung.

Die zweite Ableitung von $\frac{1}{2}f^2$ stellt unseren (kovarianten) metrischen Fundamental- p -Tensor dar:

$$g_{IK}(x, X) := \partial_{IK}^2(\frac{1}{2}f^2)(x, X),$$

der in X von 0. Ordnung homogen ist.

Der metrische Tensor bildet das Graßmannkegel-Bündel TGK^p der einfachen p -Vektoren nach dem Bündel TGK^{p*} der kovarianten einfachen p -Vektoren ab,

$$X^I \rightarrow X_I := g_{IK} X^K = f \partial_I f.$$

Dann ordnet

$$(1) \quad X^I \rightarrow Y^{\bar{I}} := \frac{1}{\mathfrak{F}} \mathfrak{G}^{\bar{I}I} g_{IK} X^K$$

jedem einfachen p -Vektor einen transversalen $\bar{p}$ -Vektor zu. (1) ist aber unter den Bedingungen (i)-(iii) noch keine Bijektion; dies erreicht man erst durch Hinzunahme der beiden zusätzlichen Eigenschaften [3], S. 30:

(iv) $\det g_{IK}(x, X) \neq 0$ für $X \neq 0$,

(v) $X \rightarrow X_I := g_{IK}(x, X) X^K$ sei für jedes $x \in M$ eine Bijektion.

Es lassen sich also aus X^I sukzessive gewisse geometrische Objekte herleiten, nämlich

$$(2) \quad \begin{aligned} X_I &= g_{IK} X^K, \\ \mathfrak{X}^{\bar{I}} &= \mathfrak{G}^{\bar{I}I} X_I = \mathfrak{G}^{\bar{I}I} g_{IK} X^K, \\ Y^{\bar{I}} &= \frac{1}{\mathfrak{F}} \mathfrak{X}^{\bar{I}} = \frac{1}{\mathfrak{F}} \mathfrak{G}^{\bar{I}I} X_I = \frac{1}{\mathfrak{F}} \mathfrak{G}^{\bar{I}I} g_{IK} X^K. \end{aligned}$$

Im folgenden untersuchen wir die invarianten Ableitungen von Feldern dieser Objekte. Auch die anderen, ohne metrischen Tensor gewonnenen Objekte sollen mit einbezogen werden,

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{\bar{I}} &= e_{\bar{I}\bar{I}} X^{\bar{I}}, \\ Y_{\bar{I}} &= \mathfrak{Y} \mathfrak{X}_{\bar{I}} = \mathfrak{Y} e_{\bar{I}\bar{I}} X^{\bar{I}}. \end{aligned}$$

Unter der Bijektion (1) induziert das p -Areal f durch

$$\bar{f}(x, Y) := f(x, X)$$

ein $\bar{p}$ -Areal $\bar{f}$ für kontravariante einfache $\bar{p}$ -Vektoren, genannt $\bar{p}$ -Dualareal.

Auf M wird die weitere Struktur eines *nichtlinearen Zusammenhanges* für einfache p -Vektoren durch Koeffizientenfunktionen

$$\gamma_h^I: p^-(U) \in TGK^p \rightarrow R$$

bezüglich jedes lokalen Koordinatensystems gegeben. Sie sollen folgende Eigenschaften haben:

1. Transformationsregel

$$\gamma_{h'}^{I'} = x_I^{I'} x_h^I \gamma_h^I - X^I \partial_{h'} x_I^{I'}$$

mit $x_i^{i'} = \partial_i x^{i'}$, $x_i^i x_i^{k'} = \delta_i^{k'}$ und $x_I^{I'} = p! x_{[i_1}^{i'_1} \dots x_{i_p]}^{i'_p}$ für eine Koordinatentransformation $x^i \rightarrow x^{i'}(x^i)$;

2. Homogenität

$$\gamma_h^I(x, \lambda X) = \lambda \gamma_h^I(x, X) \text{ für } \lambda > 0;$$

3. Differenzierbarkeit

$$\gamma_h^I \text{ ist von der Klasse } C^1;$$

4. Einfachheitsbedingung

Für eine Zerlegung $X^I = p! X_{[1}^{i_1} \dots X_{p]}^{i_p}$ existieren $n^2 \cdot p$ Koeffizientenfelder- $k_{eh}^i(x, X_\sigma^j)$ mit

$$\gamma_h^{I'}(x, X) X_e^{I'} = X^{[I} k_{eh}^{I']} (x, X_\alpha).$$

Das *invariante Differential* eines Feldes von einfachen p -Vektoren

$$t \in [a, b] \rightarrow (x(t), X(t)) \in TGK^p$$

wird dann durch

$$(4) \quad DX^I = dX^I + \gamma_h^I(x, X) dx^h$$

gegeben.

Aus dem invarianten Differential eines Feldes von einfachen p -Vektoren sollen sich die invarianten Differentiale von Feldern von Objekten (2) und (3) in gleicher Weise herleiten, wie die jeweiligen Felder selbst aus X . Vermöge dieser Forderung induziert das invariante Differential DX^I die folgenden invarianten Differentiale.

DEFINITION

$$\begin{aligned} DX_I &:= g_{IK} DX^K \\ \mathfrak{D}X^{\bar{I}} &:= \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} g_{IK} DX^K \\ \bar{D}Y^{\bar{I}} &:= \frac{1}{\mathfrak{F}} \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} g_{IK} DX^K \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\mathfrak{X}_{\bar{I}} &:= e_{\bar{I}\bar{I}} DX^I \\ \bar{D}Y_{\bar{I}} &:= \mathfrak{F} e_{\bar{I}\bar{I}} DX^I. \end{aligned}$$

Diese Definition bestimmt dann für die Objekte (2) bzw. (3) ebenfalls Zusammenhangskoeffizienten. Zu deren Herleitung setzt man, in Analogie zu (4), an:

$$\begin{aligned} DX_I &= dX_I - \gamma_{Ih}^* dx^h \\ \mathfrak{D}\mathfrak{X}^I &= d\mathfrak{X}^I + \Gamma_{*h}^I dx^h \\ \bar{D}Y^{\bar{I}} &= dY^{\bar{I}} + \bar{\gamma}_{*h}^{\bar{I}} dx^h \\ \mathfrak{D}\mathfrak{X}_{\bar{I}} &= d\mathfrak{X}_{\bar{I}} - \Gamma_{\bar{I}h} dx^h \\ \bar{D}Y_{\bar{I}} &= dY_{\bar{I}} - \bar{\gamma}_{\bar{I}h} dx^h. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \gamma_{Ih}^* &= -g_{IK} \gamma_K^h + \partial_h X_I(x, X) \\ \Gamma_{*h}^{\bar{I}} &= \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} g_{IK} \gamma_K^h - \partial_h \mathfrak{X}^{\bar{I}}(x, X) \\ \bar{\gamma}_{*h}^{\bar{I}} &= \frac{1}{\mathfrak{F}} \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} g_{IK} \gamma_K^h - \partial_h Y^{\bar{I}}(x, X); \end{aligned} \tag{5}$$

aber:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{I}h} &= -e_{\bar{I}\bar{I}} \gamma_h^I \\ \bar{\gamma}_{\bar{I}h} &= -\mathfrak{F} e_{\bar{I}\bar{I}} \gamma_h^I + Y_{\bar{I}} \partial_h \log |\mathfrak{F}|. \end{aligned}$$

BEWEIS. Wie in [3], S. 19 berechnet man

$$dX_I = \partial_h X_I dx^h + g_{IK} DX^K;$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} d\mathfrak{X}^{\bar{I}} &= \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} dX_I = \partial_h \mathfrak{X}^{\bar{I}} dx^h + \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} g_{IK} dX^K \\ dY^{\bar{I}} &= \frac{1}{\mathfrak{F}} \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} dX_I + d\left(\frac{1}{\mathfrak{F}}\right) \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} dX_I = \partial_h Y^{\bar{I}} dx^h + \frac{1}{\mathfrak{F}} \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} g_{IK} dX^K. \end{aligned}$$

Für die letzten beiden Differentiale ergibt sich direkt

$$\begin{aligned} d\mathfrak{X}_{\bar{I}} &= e_{\bar{I}\bar{I}} dX^{\bar{I}} \\ dY_{\bar{I}} &= e_{\bar{I}\bar{I}} \mathfrak{F} dX^{\bar{I}} + Y_{\bar{I}} \partial_h \log |\mathfrak{F}| dx^h. \end{aligned}$$

Setzt man also die Koeffizientenfunktionen in die Definition ein, dann heben sich die Summanden mit dX^K gerade heraus und ein Koeffizientenvergleich in dx^h zeigt die behaupteten Relationen.

Die Eigenschaften der Zusammenhangskoeffizienten für einfache kontravariante p -Vektoren übertragen sich auf die Koeffizienten (5) der induzierten Objekte. Insbesondere gelten die

TRANSFORMATIONSREGELN: Mit $\Delta = \det(x_i^{i'})$ gilt bei einer Koordinatentransformation $x^{i'} \rightarrow x^i(x^{i'})$

$$\begin{aligned} \gamma'^h_{h'} &= x'^I_{h'} x^h_{I'} \gamma^I_{I'} - X^I \partial_{h'} x'^I_{I'} \\ \gamma'^*_{h'} &= x'^I_{h'} x^h_{I'} \gamma^*_{I'} + X_I \partial_{h'} x'^I_{I'} \\ \Gamma^{\bar{I}'}_{*h'} &= \frac{1}{\Delta} x'^I_{h'} x^h_{I'} \Gamma^{\bar{I}}_{*h} - \mathfrak{X}^{\bar{I}} \partial_{h'} \left(\frac{1}{\Delta} x'^I_{I'} \right) \\ \tilde{\gamma}^{\bar{I}'}_{*h'} &= x'^I_{h'} x^h_{I'} \tilde{\gamma}^{\bar{I}}_{*h} - Y^{\bar{I}} \partial_{h'} x'^I_{I'} \\ \Gamma^{\bar{I}'}_{I'h'} &= \Delta x'^I_{h'} x^h_{I'} \Gamma^{\bar{I}}_{I'h} + \mathfrak{X}_{\bar{I}} \partial_{h'} (\Delta x'^I_{I'}) \\ \tilde{\gamma}^{\bar{I}'}_{I'h'} &= x'^I_{h'} x^h_{I'} \tilde{\gamma}^{\bar{I}}_{I'h} + Y_{\bar{I}} \partial_{h'} x'^I_{I'}. \end{aligned} \tag{6}$$

Bei den Zusammenhangskoeffizienten für die $\bar{p}$ -Vektordichten tritt somit noch ein Korrekturterm auf, der die Ableitung der Transformationsdeterminante enthält.

BEWEIS. Die erste und die zweite Regel sind bereits in [3] hergeleitet worden. Zum Nachweis der dritten geht man am besten von

$$\Gamma^{\bar{I}'}_{*h} = - \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} \gamma^*_{Ih}$$

aus. Dann ergibt sich für $\Gamma^{\bar{I}'}_{*h'}$ außer dem tensoriellen Anteil das Restglied

$$\begin{aligned} - \mathfrak{G}^{\bar{I}'\bar{I}'} X_I \partial_{h'} x'^I_{I'} &= - \frac{1}{\Delta} x'^I_{h'} x^h_{I'} \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} X_I \partial_{h'} x'^I_{I'} \\ &= - \mathfrak{G}^{\bar{I}\bar{I}} X_I \partial_{h'} \left(\frac{1}{\Delta} x'^I_{h'} x^h_{I'} x'^I_{I'} \right). \end{aligned}$$

Dies benutzt man nun zur Berechnung der vierten Transformationsregel. Es ist

$$\bar{\gamma}_{*h}^I = \frac{1}{\mathfrak{F}} I_{*h}^I - \mathfrak{X}^I \partial_h \left(\frac{1}{\mathfrak{F}} \right);$$

als nicht-tensorielles Zusatzglied für $\bar{\gamma}_{*h'}^{I'}$ erscheint also

$$\Delta \frac{1}{\mathfrak{F}} \left(-\mathfrak{X}^I \partial_{h'} \left(\frac{1}{\Delta} x_{I'}^I \right) \right) - \frac{1}{\Delta} \mathfrak{X}^I x_{I'}^I \frac{1}{\mathfrak{F}} \partial_{h'} (\Delta),$$

differenziert man im ersten Term aus, dann sieht man, daß genau das angegebene Restglied stehen bleibt.

Die beiden letzten Formeln errechnen sich direkt aus (5): Für $I_{*h'}^I$ ergibt dies das Zusatzglied

$$\Delta x_{I'}^I x_{I'}^I e_{I'}^I X^J \partial_{h'} x_{I'}^I,$$

und für $\bar{\gamma}_{I'h'}$ schließlich bleibt außer dem Tensor-Anteil noch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta} \mathfrak{F} \cdot \Delta x_{I'}^I x_{I'}^I e_{I'}^I X^J \partial_{h'} x_{I'}^I + Y_{I'} \partial_{h'} \log \left| \frac{1}{\Delta} \right| \\ &= \frac{1}{\Delta} \mathfrak{F} e_{I'}^I X^J \partial_{h'} (x_{I'}^I \cdot \Delta x_{I'}^I x_{I'}^I) - \frac{1}{\Delta} x_{I'}^I Y_{I'} \partial_{h'} \Delta = \frac{1}{\Delta} Y_{I'} (\partial_{h'} (\Delta x_{I'}^I) - \partial_{h'} (\Delta) \cdot x_{I'}^I). \end{aligned}$$

SATZ. Die Zuordnung durch Transversalität,

$$X^I \rightarrow \mathfrak{X}^I = \mathfrak{G}^{I\bar{I}} g_{IK} X^K$$

bleibt bei Parallelverschiebung erhalten.

BEWEIS. Für ein Parallelfeld $X^I(t)$ durch X_0^I ist das transversale Feld ebenfalls ein Parallelfeld:

$$DX^I(t) = 0 \Rightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{X}^I(t) = \mathfrak{G}^{I\bar{I}} g_{IK}(t) DX^K(t) = 0.$$

Außerdem geht dieses Feld durch $\mathfrak{X}^I(0)$. Aus der Eindeutigkeit der Parallelverschiebung folgt die Behauptung: Wenn $\mathfrak{X}^I(0)$ transversal zu $X^I(0)$ ist, bleibt das Parallelfeld $\mathfrak{X}^I(t)$ durch $\mathfrak{X}^I(0)$ für alle t transversal zum Felde $X^I(t)$ durch $X^I(0)$.

2. – Aufbau der Zusammenhangskoeffizienten.

In [4] konnte der Aufbau der Zusammenhangskoeffizienten $\gamma_{*h}^I(x, X)$ aus gewissen Koeffizienten $\gamma_{\varrho h}^i$ und aus Vektoren X_{ϱ}^i angegeben werden. Sowohl eine Einfachheitsbedingung als auch eine derartige Aufspaltung lassen sich für die induzierten Zusammenhangskoeffizienten gewinnen.

Zu einem Feld X^I einfacher p -Vektoren mit einer Aufspaltung (X_ϱ^i) hat man das kovariante Vektorfeld $X_i^\varrho := (1/f) \partial_i^\varrho F$ und die $\bar{p}$ linear unabhängigen Lösungsvektoren Y_ϱ^i und Y_i^ϱ der beiden Gleichungssysteme

$$(7) \quad Y^i X_i^\varrho = 0 \quad \text{und} \quad Y_i X_\varrho^i = 0 .$$

Dabei läßt sich, entsprechend zu $X_\varrho^i X_i^\sigma = \delta_\varrho^\sigma$, auch

$$Y_\varrho^i Y_i^\sigma = \delta_\varrho^\sigma$$

für diese Lösungsvektoren erreichen. Die Vektoren Y_ϱ^i sind eine innerhalb des Transversalraumes frei wählbare Basis, die die Y_i^ϱ dann eindeutig festlegt.

Die DEFINITION

$$(8) \quad \mathfrak{X}^{-1} := \det(X_\varrho^i, Y_\varrho^i) = n! X_1^{[1} \dots X_p^p Y_{p+1}^{p+1} \dots Y_n^{n]} ,$$

also:

$$\mathfrak{X} = \det(X_i^\varrho, Y_i^\varrho) = n! X_{[1}^1 \dots X_p^p Y_{p+1}^{p+1} \dots Y_n^n ,$$

liefert eine Skaldichte $\mathfrak{X}$ vom Gewicht $(+1)$. Damit läßt sich für die $\bar{p}$ -Vektordichten $\mathfrak{X}^{\bar{I}}$ bzw. $\mathfrak{X}_{\bar{I}}$ eine Aufspaltung angeben:

Nach [3], S. 18 erfüllt der p -Vektor $\mathfrak{X} e_{K k_{p+1} \dots k_n} Y_{[p+1}^{k_{p+1}} \dots Y_n^{k_n}]$ die Gleichung

$$\mathfrak{X} e_{[K | k_{p+1} \dots k_n} Y_{[p+1}^{k_{p+1}} \dots Y_n^{k_n}] X_{\beta]}^\varrho = 0 ,$$

hat also die p Faktor-Vektoren X_k^ϱ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} e_{K k_{p+1} \dots k_n} Y_{[p+1}^{k_{p+1}} \dots Y_n^{k_n}] &= \text{Faktor} \cdot p! X_{k_1}^{[1} \dots X_{k_p}^{p]} \\ &= \frac{1}{f^2} \text{Faktor} X_K . \end{aligned}$$

Überschiebung mit X^K liefert als Faktor 1, also

$$\mathfrak{X}^{i_{p+1} \dots i_n} = \bar{p}! \mathfrak{X} f^2 Y_{[p+1}^{i_{p+1}} \dots Y_n^{i_n]} .$$

Ebenso folgert man

$$\frac{1}{\mathfrak{X}} \mathfrak{G}^{K k_{p+1} \dots k_n} Y_{k_{p+1}}^{[p+1} \dots Y_n^{n]} = \text{Faktor} \cdot p! X_{[1}^{k_1} \dots X_p^{k_p]}$$

und erhält durch Überschiebung mit X_K als Faktor 1:

$$\mathfrak{X}_{i_{p+1} \dots i_n} = \bar{p}! \frac{1}{\mathfrak{X}} Y_{i_{p+1}}^{[p+1} \dots Y_n^{i_n]} .$$

Die Vektoren

$$Y_\varrho^i \quad \text{und} \quad Y_i^\varrho$$

sind Zerlegungen von $Y^{\bar{I}}$ bzw. $Y_{\bar{I}}$,

$$Y^{\bar{I}} = \frac{1}{\mathfrak{F}} \bar{p}! \mathfrak{X} f^2 Y_{[p+1]}^{i_{p+1}} \dots Y_n^{i_n}$$

$$Y_{\bar{I}} = \bar{p}! \mathfrak{F} \frac{1}{\mathfrak{X}} Y_{[p+1]}^{[p+1]} \dots Y_n^{[n]}.$$

Es gilt:

$$(9) \quad d \log |\mathfrak{X}| = X_\varrho^i dX_i^\varrho + Y_\varrho^i dY_i^{\bar{\varrho}},$$

$$X_\varrho^i X_k^\varrho + Y_\varrho^i Y_k^{\bar{\varrho}} = \delta_k^i.$$

Für jede Aufspaltung (X_ϱ^i) von X^I erfüllen diese Aufspaltungen (X_ϱ^i) von $Y^{\bar{I}} = (1/\mathfrak{F}) \mathfrak{E}^{\bar{I}} f \partial_I f$ für die von $\bar{f}(x, Y)$ induzierte Funktion $\bar{F}(x, Y_{\bar{z}})$ die Beziehung

$$\frac{1}{\bar{F}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y_\varrho^i} = Y_i^{\bar{\varrho}}.$$

BEWEIS. a) $\bar{F}$ ist homogen: $\partial_{\bar{\varrho}}^{\bar{F}} \bar{F} \cdot Y_\sigma^i = \bar{F} \delta_\sigma^{\bar{\varrho}}$. Mit [3], Satz 12 ist

$$b) \quad \partial_{\bar{\varrho}}^{\bar{F}} \bar{F} X_\varrho^{i_{\bar{\varrho}}} = \bar{p}! \delta_{p+1}^{[p+1]} \dots \partial_{[i_{\bar{\varrho}}]}^{\bar{\varrho}} \bar{F} X_\varrho^{i_{\bar{\varrho}}} \dots \delta_n^{[n]}$$

$$= p! \frac{1}{\bar{F}^{p-1}} Y_{p+1}^{i_{p+1}} \dots X_\varrho^{i_{\bar{\varrho}}} \dots Y_n^{i_n} \partial_{i_{p+1}}^{[p+1]} \bar{F} \dots \partial_{i_{\bar{\varrho}}}^{\bar{\varrho}} \bar{F} \dots \partial_{i_n}^{[n]} \bar{F}$$

$$= p! \frac{1}{f} Y_{p+1}^{i_{p+1}} \dots X_\varrho^{i_{\bar{\varrho}}} \dots Y_n^{i_n} \mathfrak{F} e_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_p^{i_p}$$

$$= n! \frac{1}{f} \mathfrak{F} X_1^{[1]} \dots X_p^{[p]} Y_{p+1}^{p+1} \dots X_\varrho^{\bar{\varrho}} \dots X_n^{[n]} = 0.$$

Der Beweis folgt aus dem induzierten

ZERLEGUNGSSATZ. $X^I = p! X_1^{i_1} \dots X_p^{i_p}$ sei eine Zerlegung eines einfachen p -Vektors. Dann gibt es je einen Satz von $n^2 \cdot p$ bzw. $n^2 \cdot \bar{p}$ Zusammenhangskomponenten

$$(10) \quad \gamma_{\varrho h}^i(x, X_\sigma^i)$$

$$\gamma_{i h}^{* \varrho} := \left(-\frac{1}{f^2} \Phi_{ij}^{\varrho \sigma} - \frac{1}{p} X_i^\varrho X_j^\sigma \right) \gamma_{\sigma h}^j + \partial_h X_i^\varrho + \frac{1}{p f^2} X_i^\varrho \partial_h f^2$$

$$\Gamma_{\varrho h}^{* i} := \left(-\frac{1}{f^2} \Phi_{kj}^{\varrho \sigma} Y_\varrho^k X_j^i + \frac{1}{\bar{p}} Y_\varrho^i X_j^\sigma \right) \gamma_{\sigma h}^j + X_\sigma^i Y_\varrho^j \partial_h X_j^\sigma - \frac{1}{\bar{p} f^2} Y_\varrho^i \partial_h f^2$$

$$\bar{\gamma}_{\varrho h}^{* i} := \left(-\frac{1}{f^2} \Phi_{kj}^{\varrho \sigma} Y_\varrho^k X_j^i + \frac{1}{\bar{p}} Y_\varrho^i X_j^\sigma \right) \gamma_{\sigma h}^j + X_\sigma^i Y_\varrho^j \partial_h X_j^\sigma - \frac{1}{\bar{p} f^2} Y_\varrho^i \partial_h f^2 - \frac{1}{\bar{p}} Y_\varrho^i \partial_h \log |\mathfrak{F}|$$

$$\Gamma_{i h}^{\bar{\varrho}} := \left(X_i^\varrho Y_j^{\bar{\varrho}} - \frac{1}{\bar{p}} X_j^\varrho Y_i^{\bar{\varrho}} \right) \gamma_{\varrho h}^j$$

$$\bar{\gamma}_{i h}^{\bar{\varrho}} := \left(X_i^\varrho Y_j^{\bar{\varrho}} - \frac{1}{\bar{p}} X_j^\varrho Y_i^{\bar{\varrho}} \right) \gamma_{\varrho h}^j + \frac{1}{\bar{p}} Y_i^{\bar{\varrho}} \partial_h \log |\mathfrak{F}|,$$

mit denen folgende Aufspaltungen bestehen:

$$\begin{aligned}
 \gamma^I_h &= pp! \quad \gamma^{[i_1]_h} X^{i_2}_2 \dots X^{i_p]_p}, \\
 \gamma^*_{Ih} &= pp! f^2 \quad \gamma^{*[i_1]_h} X^{i_2}_2 \dots X^{i_p]_p} \\
 \Gamma^{\bar{I}}_{*h} &= \bar{p}\bar{p}! f^2 \mathfrak{X} \Gamma^{[i_{p+1}]_h} Y^{i_{p+2}}_{p+2} \dots Y^{i_n]_n} \\
 \bar{\gamma}^{\bar{I}}_{*h} &= \bar{p}\bar{p}! f^2 \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}} \gamma^{*[i_{p+1}]_h} Y^{i_{p+2}}_{p+2} \dots Y^{i_n]_n} \\
 \Gamma_{Ih} &= \bar{p}\bar{p}! \frac{1}{\mathfrak{X}} \Gamma^{[p+1]_h} Y^{p+2}_{p+2} \dots Y^{i_n]_n} \\
 \bar{\gamma}_{Ih} &= \bar{p}\bar{p}! \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}} \bar{\gamma}^{[p+1]_h} Y^{p+2}_{p+2} \dots Y^{i_n]_n}.
 \end{aligned}$$

Die Definitionen (10) sind unabhängig von der speziellen Wahl des Schar-Elementes γ^i_{eh} , jedoch sind sie ihrerseits durch Wahl von Summanden, die bei der entsprechenden Doppel-Alternation verschwinden, willkürlich festgesetzt.

EINFACHHEITSBEDINGUNG. Zu jeder stetigen Aufspaltung (X^i_σ) eines Feldes einfacher p -Vektoren existieren je $n^2 \cdot p$ bzw. $n^2 \cdot \bar{p}$ Koeffizienten

$$k^i_{eh}(x, X^j_\sigma)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \gamma^{[U]_h} X^{[i]}_e &= X^{[U]_h} k^{[i]}_{eh}, \\
 k^{*\sigma}_{ih}(x, X^j_\sigma) &:= -\frac{1}{f^2} \Phi^{e\sigma}_{ij} k^{j\sigma}_{eh} - \partial_h X^e_i + c^e_{eh} X^j_i
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \gamma^{*[I]_h} X^{[e]}_i &= X^{[I]_h} k^{*[e]}_{ih}, \\
 K^{*i}_{eh}(x, X^j_\sigma) &:= -\frac{1}{f^2} \Phi^{e\sigma}_{ki} k^{j\sigma}_{eh} Y^k_{\bar{e}} X^i_e + \partial_h Y^i_{\bar{e}} + \bar{c}^{\bar{\sigma}}_{eh} Y^i_{\bar{\sigma}}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{[U]_h} Y^{[i]}_{\bar{e}} &= \mathfrak{X}^{[U]_h} K^{[i]}_{eh}, \\
 \bar{k}^{*i}_{eh}(x, Y^j_{\bar{e}}) &:= -\frac{1}{f^2} \Phi^{e\sigma}_{ki} k^{j\sigma}_{eh} Y^k_{\bar{e}} X^i_e + \partial_h Y^i_{\bar{e}} + \bar{c}^{\bar{\sigma}}_{eh} Y^i_{\bar{\sigma}}
 \end{aligned} \tag{11}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}^{[\bar{I}]_h} Y^{[\bar{i}]}_{\bar{e}} &= Y^{[\bar{I}]_h} \bar{k}^{*[\bar{i}]}_{eh}; \\
 K^{\bar{e}}_{ih}(x, X^j_\sigma) &:= k^j_{eh} X^e_i Y^j_{\bar{e}} + \bar{c}^{\bar{e}}_{eh} Y^j_{\bar{e}}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \Gamma'_{[\bar{I}|h]} Y_{i1}^{\bar{e}} &= K_{[i|h]}^{\bar{e}} \mathfrak{X}_{\bar{I}} , \\ \bar{k}_{ih}^{\bar{e}}(x, Y_{\sigma}^i) &:= k_{eh}^i X_i^e Y_j^{\bar{e}} + \bar{c}_{eh}^{\bar{e}} Y_i^{\bar{e}} \end{aligned}$$

mit

$$\bar{\gamma}_{[\bar{I}|h]} Y_{i1}^{\bar{e}} = \bar{k}_{[i|h]}^{\bar{e}} Y_{\bar{I}} .$$

Dabei sind die Größen c_{eh}^e usw. Koeffizienten einer beliebigen Linearkombination. Sie spiegeln die Unbestimmtheit der Aufspaltung, da die k_{eh}^i nur bis auf Linearkombinationen von X_{σ}^i eindeutig festliegen.

Im folgenden kommen nun auch Größen vor, wie z.B. γ_{eh}^i , die — präziser — bis auf solche Linearkombinationen $c_{\sigma}^{\sigma} X_{\sigma}^i$ festliegen, die noch bei Doppel-Alternation über je p Indizes i und e wegfallen. Dies ist gleichbedeutend mit $c_{\sigma}^e = 0$: für $e = 1$ etwa ist

$$p c_{[1}^{\sigma} X_{|\sigma]}^{[i_1} X_2^{i_2} \dots X_{p]}^{i_p]} = \sum_{\nu} X_{[1}^{i_1} \dots c_{\nu}^{\sigma} X_{|\sigma]}^{i_{\nu}} \dots X_{p]}^{i_p} ,$$

dabei ist nur der Summand mit $\nu = \sigma$ von Null verschieden, und es bleibt

$$X_{[1}^{i_1} \dots X_{p]}^{i_p} c_{\sigma}^{\sigma} .$$

Das gilt auch schon ohne Summation über σ .

Der BEWEIS des Zerlegungssatzes erfolgt rekursiv, d.h. statt der Relationen in (10) werden wir zunächst aus (5) nur die angegebene Formel für $\gamma_{ih}^{*\sigma}$ und daraus

$$\begin{aligned} (12) \quad \Gamma_{*eh}^i &= \left(X_{\sigma}^i Y_e^j - \frac{1}{p} X_{\sigma}^j Y_e^i \right) \gamma_{ih}^{*\sigma} , \\ \tilde{\gamma}_{eh}^i &= \Gamma_{*eh}^i + \frac{1}{p} Y_e^i \partial_h \log |\mathfrak{F}| \quad \text{berechnen ;} \end{aligned}$$

wieder direkt mit γ_{eh}^i gewinnt man

$$\Gamma_{ih}^{\bar{e}} = \left(X_i^e Y_j^{\bar{e}} - \frac{1}{p} X_j^e Y_i^{\bar{e}} \right) \gamma_{eh}^j ,$$

und daraus

$$\tilde{\gamma}_{ih}^{\bar{e}} = \Gamma_{ih}^{\bar{e}} + \frac{1}{p} Y_i^{\bar{e}} \partial_h \log |\mathfrak{F}| .$$

Dann setzt man γ_{eh}^i ein.

Nach (5) ist

$$\begin{aligned}
\gamma_{ih}^* &= -p \frac{p!^2}{f^{2p-2}} (F_{i_1}^{[1]} \dots F_{i_p}^{p1} F_{k_1}^{[1]} \dots F_{k_p}^{p1} + p^2 \Phi_{[i_1][k_1]}^{[1][1]} F_{i_2}^2 F_{k_2}^2 \dots F_{i_p}^{p1} F_{k_p}^{p1} + \dots) \cdot \\
&\quad \cdot \gamma_{[1]h}^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_{p1}^{k_p} + p! \partial_h (f^2 X_{[i_1}^{[1]} \dots X_{ip1}^{p1]) \\
&= -pp!^2 f^2 X_{i_1}^{[1]} \dots X_{ip1}^{p1} \cdot \gamma_{[1]h}^{k_1} X_{[k_1]}^{[1]} \delta_2^2 \dots \delta_{p1}^{p1} \\
&\quad - p^2 p!^2 \Phi_{[i_1][k_1]}^{[1][1]} \gamma_{[1]h}^{k_1} X_{i_2}^2 \delta_2^2 \dots X_{ip1}^{p1} \delta_{p1}^{p1} \\
&\quad + pp! f^2 (\partial_h X_{[i_1}^{[1]} X_{i_2}^2 \dots X_{ip1}^{p1}) + p! X_{i_1}^{[1]} \dots X_{ip1}^{p1} \partial_h f^2 \\
&= pp! f^2 \left(-\frac{1}{p} \gamma_{\sigma h}^{k_1} X_{k_1}^\sigma X_{[i_1}^{[1]} - \frac{1}{f^2} \Phi_{[i_1 k_1]}^{[1 \sigma]} \gamma_{\sigma h}^{k_1} + \partial_h X_{[i_1}^{[1]} + \frac{1}{p} \frac{1}{f} \partial_h f^2 X_{[i_1}^{[1]} \right) X_{i_2}^2 \dots X_{ip1}^{p1}.
\end{aligned}$$

Aus $\Gamma_{*h}^{\bar{I}} = -\mathfrak{E}^{\bar{I}} \gamma_{ih}^*$ berechnet man

$$\Gamma_{*h}^{\bar{I}} = -n! \delta_{[1}^{i_1} \dots \delta_{n]}^{i_n} \cdot f^2 \sum_{\nu} X_{i_1}^1 \dots \gamma_{i_\nu h}^{*\nu} \dots X_{i_p}^p.$$

Zur besseren Übersicht ersetzt man $\delta_{[1}^{i_1} \dots \delta_{n]}^{i_n}$ durch $\delta_{[1}^{k_1} \dots \delta_{n]}^{k_n} \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_n}^{i_n}$ und erhält mit

$$\gamma_{ih}^{*\nu} = \delta_{i_\nu}^j \gamma_{jh}^{*\nu} = (X_\sigma^j X_{i_\nu}^\sigma + Y_\sigma^j Y_{i_\nu}^\sigma) \gamma_{jh}^{*\nu}:$$

$$\Gamma_{*h}^{\bar{I}} = -n! f^2 \delta_{[1}^{k_1} \dots \delta_{n]}^{k_n} \gamma_{jh}^{*\nu} \sum_{\nu} (X_{k_1}^1 \dots X_{k_p}^\sigma \dots X_{k_p}^p \delta_{k_{p+1}}^{i_{p+1}} \dots \delta_{k_n}^{i_n} X_\sigma^j + X_{k_1}^1 \dots Y_{k_p}^{\bar{\sigma}} \dots X_{k_p}^p \delta_{k_{p+1}}^{i_{p+1}} \dots \delta_{k_n}^{i_n} Y_\sigma^j).$$

Wieder mit (9) reduziert sich dies zu

$$\begin{aligned}
&-n! f^2 \delta_{[1}^{k_1} \dots \delta_{n]}^{k_n} \left(\sum_{\nu} X_{k_1}^1 \dots X_{k_p}^\sigma \dots X_{k_p}^p Y_{k_{p+1}}^{\bar{\sigma}} \dots Y_{k_n}^{\bar{\sigma}} \cdot X_\sigma^j \cdot Y_{\bar{\sigma} p+1}^{i_{p+1}} \dots Y_{\bar{\sigma} n}^{i_n} \gamma_{jh}^{*\nu} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\nu, \bar{\nu}} X_{k_1}^1 \dots Y_{k_p}^{\bar{\sigma}} \dots X_{k_p}^p Y_{k_{p+1}}^{\bar{\sigma}} \dots X_{k_p}^{\sigma_{\bar{\nu}}} \dots Y_{k_n}^{\bar{\sigma}} \cdot Y_{\bar{\sigma}}^j \cdot Y_{\bar{\sigma} p+1}^{i_{p+1}} \dots X_{\sigma_{\bar{\nu}}}^{i_{\bar{\nu}}} \dots Y_{\bar{\sigma} n}^{i_n} \gamma_{jh}^{*\nu} \right),
\end{aligned}$$

hierin sind nur die Summanden mit $\sigma = \nu$ bzw. $\sigma_{\bar{\nu}} = \nu$ von Null verschieden. Im zweiten Teil des Ausdrucks setzen wir noch $\bar{\sigma}_{\bar{\nu}} := \bar{\sigma}$ und vertauschen die Indizes so, daß sich $X_{k_1}^1 \dots Y_{k_n}^n$ herausziehen läßt. Mit (8) bleibt genau

$$-f^2 \mathfrak{X} \bar{p}! (X_\sigma^j \gamma_{jh}^{*\sigma} Y_{[p+1}^{i_{p+1}} \dots Y_{n]}^{i_n} - \sum_{\nu} X_{\bar{\sigma}}^{i_{\bar{\nu}}} \gamma_{jh}^{*\sigma} Y_{[p+1}^{i_{p+1}} \dots Y_{\bar{\nu}}^{i_{\bar{\nu}}} \dots Y_{n]}^{i_n}).$$

Bei der Berechnung von $\bar{\gamma}_{*h}^{i_{\bar{q}}}$ kommt zu $\Gamma_{*h}^{\bar{I}}$ nur der Summand

$$\begin{aligned}
&-\mathfrak{X}^{\bar{I}} \partial_h \left(\frac{1}{\bar{\mathfrak{S}}} \right) = -\bar{p}! \mathfrak{X} f^2 Y_{[p+1}^{i_{p+1}} \dots Y_n^{i_n} \cdot -\frac{1}{\bar{\mathfrak{S}}^2} \partial_h \bar{\mathfrak{S}} \\
&= \bar{p} \bar{p}! f^2 \frac{\mathfrak{X}}{\bar{\mathfrak{S}}} \frac{1}{\bar{p}} Y_{[p+1}^{i_{p+1}} \partial_{[h]} \log |\bar{\mathfrak{S}}| \cdot Y_{p+2}^{i_{p+2}} \dots Y_n^{i_n}
\end{aligned}$$

hinzu. Nach dem gleichen Muster wie $\Gamma_{*h}^{i_{\bar{q}}}$ ergibt sich $\Gamma_{ih}^{\bar{q}}$, und $\bar{\gamma}_{ih}^{\bar{q}}$ berechnet sich analog wie $\bar{\gamma}_{*h}^{i_{\bar{q}}}$.

Setzt man nun in (6) auf den linken Seiten die Koeffizienten in der aufgespaltenen Form ein, dann sieht man, daß die negativ genommenen Zusammenhangskomponenten die Forderung erfüllen, etwa

$$k_{ih}^{*e} = -\gamma_{ih}^{*e} + c_{oh}^e X_i^\sigma \quad \text{mit beliebigen } c_{oh}^e.$$

In diesen Koeffizienten läßt man noch die Summanden mit X_i^σ weg.

Für die Zusammenhangselemente (10) hat man Eindeutigkeit, Transformationsregeln, Homogenität und Differenzierbarkeit wie in Satz 9 aus [4], S. 152.

0) Die Zusammenhangskomponenten (10) sind modulo der Doppel-Alternation eindeutig bestimmt, d.h. bis auf Linearkombinationen der Faktor-Vektoren mit Koeffizienten, die bei dieser verschwinden.

1) Für eine Koordinatentransformation $x^i \rightarrow x^{i'}(x^i)$ ist zu jedem Element der jeweiligen Schar von Zusammenhangselementen (10) bezüglich der Basis (e_i) das Element

$$\begin{aligned} \gamma_{eh'}^{i'} &= x_{i'}^{i'} x_h^h \gamma_{eh}^i - X_e^i x_h^h \partial_h x_{i'}^{i'} \\ \gamma_{i'h'}^{*e} &= x_{i'}^{i'} x_h^h \gamma_{ih}^{*e} + X_i^e \partial_h x_{i'}^{i'} + x_{i'}^{i'} x_h^h c_{oh}^e X_i^\sigma \\ \Gamma_{*eh'}^{i'} &= x_{i'}^{i'} x_h^h \Gamma_{*eh}^i - Y_e^i x_h^h \partial_h x_{i'}^{i'} + x_{i'}^{i'} x_h^h \bar{c}_{eh}^i Y_i^e + \frac{1}{p} x_{i'}^{i'} x_h^h \partial_h \log |\Delta| Y_e^i \\ \bar{\gamma}_{*eh'}^{i'} &= x_{i'}^{i'} x_h^h \bar{\gamma}_{*eh}^i - Y_e^i x_h^h \partial_h x_{i'}^{i'} + x_{i'}^{i'} x_h^h \bar{c}_{eh}^i Y_i^e \\ \Gamma_{i'h'}^{\bar{e}} &= x_{i'}^{i'} x_h^h \Gamma_{ih}^{\bar{e}} + Y_i^{\bar{e}} \partial_h x_{i'}^{i'} + x_{i'}^{i'} x_h^h \bar{c}_{eh}^{\bar{e}} Y_i^{\bar{e}} + \frac{1}{p} x_{i'}^{i'} x_h^h \partial_h \log |\Delta| Y_i^{\bar{e}} \\ \bar{\gamma}_{i'h'}^{\bar{e}} &= x_{i'}^{i'} x_h^h \bar{\gamma}_{ih}^{\bar{e}} + Y_i^{\bar{e}} \partial_h x_{i'}^{i'} + x_{i'}^{i'} x_h^h \bar{c}_{eh}^{\bar{e}} Y_i^{\bar{e}} \end{aligned} \quad (13)$$

ein Element der entsprechenden Schar bezüglich der Basis $(e_{i'})$. Dabei sind c_{oh}^e und $\bar{c}_{eh}^{\bar{e}}$ die in (14) definierten Koeffizienten, die bei Doppel-Alternation verschwinden.

2) Für jedes Element der Schar (10) bezüglich einer festen Aufspaltung führt jede Linearkombination mit positiver Matrix auf ein Element derjenigen Schar, die zur entsprechenden Linearkombination der Aufspaltung gehört.

3) Das Feld $X \rightarrow \gamma_{eh}^i(x, X_\sigma^j)$ kann für eine C^1 -Aufspaltung X_e^i von X^I als C^1 -Feld auf einer offenen Menge von $i(p_{GK^p}(U))$ gewählt werden. Die induzierten Zusammenhangskomponenten-Felder (10) sind damit ebenfalls von der Klasse C^1 .

BEWEIS der Transformationseigenschaften. Aus Satz 9 von [4] wissen wir

$$\gamma_{eh'}^{i'} = x_{i'}^{i'} x_h^h \gamma_{eh}^i - X_e^i x_h^h \partial_h x_{i'}^{i'}.$$

Daraus ergibt sich für die kovarianten Zusammenhangskomponenten

$$\begin{aligned} \gamma_{i'h}^{*e} = & x_i^i x_h^h \gamma_{ih}^{*e} - x_i^i x_j^j x_h^h \partial_h x_i^{j'} X_\sigma^i \left(-\frac{1}{f^2} \Phi_{ij}^{e\sigma} - \frac{1}{p} X_i^e X_j^\sigma \right) + X_i^e \partial_h x_i^{i'} \\ & - x_i^i x_j^j x_h^h \partial_h x_i^{j'} \cdot X_\sigma^i \left(\frac{1}{f^2} \Phi_{ij}^{e\sigma} - X_i^\sigma X_j^e \right) - \frac{2}{p} x_i^i x_j^j x_h^h \partial_h x_i^{j'} \cdot X_\sigma^i X_j^\sigma X_i^e. \end{aligned}$$

An dieser Stelle führen wir zwei abkürzende Koeffizienten ein, die die weiteren Rechnungen durchsichtiger machen:

$$\begin{aligned} (14) \quad c_{eh}^e &:= x_j^j \partial_h x_i^{j'} \left(X_i^i X_j^e - \frac{1}{p} \delta_i^e X_\sigma^i X_j^\sigma \right) \quad \text{mit } c_{eh}^e = 0, \\ \bar{c}_{eh}^{\bar{e}} &:= x_j^j \partial_h x_i^{j'} \left(Y_j^{\bar{e}} Y_i^{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{p}} \delta_{\bar{e}}^{\bar{e}} Y_\sigma^{\bar{e}} Y_j^{\bar{e}} \right) \quad \text{mit } \bar{c}_{eh}^{\bar{e}} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man dies in der obigen Formel ein und faßt zusammen, dann ergibt sich die Behauptung.

Bei den dualen Zusammenhangskomponenten ergibt sich

$$\Gamma_{eh}^{i'} = x_i^{i'} x_h^h \Gamma_{eh}^{i'} + x_i^{i'} x_j^{j'} \partial_h x_i^{j'} X_i^i \left(X_j^i Y_e^j - \frac{1}{p} X_j^j Y_e^i \right) + 0;$$

der dritte Term ist Null, weil $X_j^i Y_e^j = 0$ und $c_{eh}^e X_j^i X_i^j = c_{eh}^e = 0$ wird. Mit (14) bringt man die Formel auf die Gestalt

$$\Gamma_{eh}^{i'} = x_i^{i'} x_h^h \Gamma_{eh}^{i'} - x_h^h \partial_h x_i^{i'} Y_e^i + \frac{1}{p} x_i^{i'} x_h^h \partial_h \log |\Delta| \cdot Y_e^i + x_i^{i'} x_h^h \bar{c}_{eh}^{\bar{e}} Y_e^i.$$

Ganz analog berechnet man

$$\Gamma_{eh}^{\bar{e}} = x_i^i x_h^h \Gamma_{eh}^{\bar{e}} + x_h^h \partial_h x_i^i Y_i^{\bar{e}} + \frac{1}{\bar{p}} x_i^i x_h^h \partial_h \log |\Delta| \cdot Y_i^{\bar{e}} + x_i^i x_h^h \bar{c}_{eh}^{\bar{e}} Y_i^{\bar{e}}.$$

Die beiden Komponenten für duale Vektoren unterscheiden sich von diesen nur durch einen Summanden mit

$$\frac{1}{p} \partial_h \log |\mathfrak{F}'| = \frac{1}{p} x_h^h \partial_h \log |\mathfrak{F}| - \frac{1}{p} x_h^h \partial_h \log |\Delta|$$

und gehorchen demnach der angegebenen einfacheren Transformationsregel.

Zur Zerlegung der Zusammenhangskoeffizienten korrespondiert eine analoge Zer-

legung der invarianten Differentiale. Man definiert

$$\begin{aligned}
 \nabla X_e^i &:= dX_e^i + \gamma_{eh}^i dx^h \\
 \nabla_* X_i^e &:= dX_i^e - \gamma_{ih}^{*e} dx^h + \frac{1}{p} X_i^e d \log f^2 \\
 \tilde{\nabla}_* Y_e^i &:= dY_e^i + \Gamma_{eh}^i dx^h + \frac{1}{p} Y_e^i (d \log f^2 + d \log |\mathfrak{X}|) \\
 \bar{\nabla}_* Y_e^i &:= dY_e^i + \bar{\gamma}_{eh}^i dx^h + \frac{1}{p} Y_e^i \left(d \log f^2 + d \log \left| \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{F}} \right| \right) \\
 \tilde{\nabla} Y_i^{\bar{e}} &:= dY_i^{\bar{e}} - \Gamma_{ih}^{\bar{e}} dx^h + \frac{1}{p} Y_i^{\bar{e}} d \log \left| \frac{1}{\mathfrak{X}} \right| \\
 \bar{\nabla} Y_i^{\bar{e}} &:= dY_i^{\bar{e}} - \bar{\gamma}_{ih}^{\bar{e}} dx^h + \frac{1}{p} Y_i^{\bar{e}} d \log \left| \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{X}} \right|.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Damit zerlegen sich die invarianten Differentiale in der gleichen Form wie die betreffenden Vektoren bzw. Vektordichten:

$$\begin{aligned}
 DX^I &= pp! \quad (\nabla X_{[1]}^{i_1} X_{i_2}^{i_2} \dots X_{i_p}^{i_p}] \\
 DX_I &= pp! f^2 \quad (\nabla_* X_{[i_1]}^{i_1} X_{i_2}^{i_2} \dots X_{i_p}^{i_p}] \\
 \mathfrak{D}\mathfrak{X}^{\bar{I}} &= \overline{pp}! f^2 \mathfrak{X} (\tilde{\nabla}_* Y_{[p+1]}^{i_{p+1}} Y_{i_{p+2}}^{i_{p+2}} \dots Y_{i_n}^{i_n}] \\
 \bar{D}Y^{\bar{I}} &= \overline{pp}! f^2 \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{F}} (\bar{\nabla}_* Y_{[p+1]}^{i_{p+1}} Y_{i_{p+2}}^{i_{p+2}} \dots Y_{i_n}^{i_n}] \\
 \mathfrak{D}\mathfrak{X}_I &= \overline{pp}! f^2 \frac{1}{\mathfrak{X}} (\tilde{\nabla} Y_{[i_{p+1}}^{i_{p+1}} Y_{i_{p+2}}^{i_{p+2}} \dots Y_{i_n}^{i_n}] \\
 \bar{D}Y_{\bar{I}} &= \overline{pp}! f^2 \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{X}} (\bar{\nabla} Y_{[i_{p+1}}^{i_{p+1}} Y_{i_{p+2}}^{i_{p+2}} \dots Y_{i_n}^{i_n}].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Die Differential-Vektoren (15) zu jedem der Vektoren sind bis auf Null-äquivalente Linearkombinationen $c_\sigma^\sigma X_\sigma^i$ mit $c_\sigma^\sigma = 0$ usw. eindeutig bestimmt.

SATZ.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_* Y_e^i &= \bar{\nabla}_* Y_e^i = -\nabla_* X_j^e \left(Y_e^i X_j^i - \frac{1}{p} Y_e^i X_j^j \right) - c_e^{\bar{e}} Y_{\bar{e}}^i \\
 \tilde{\nabla} Y_i^{\bar{e}} &= \bar{\nabla} Y_i^{\bar{e}} = -\nabla X_e^j \left(X_i^e Y_j^{\bar{e}} - \frac{1}{p} X_i^e Y_j^j \right) + c_e^{\bar{e}} Y_i^{\bar{e}}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Dabei ist $c_e^{\bar{e}} := Y_e^j dY_j^{\bar{e}} - (1/p) \delta_e^{\bar{e}} Y_e^j dY_j^{\bar{e}}$, also $c_e^{\bar{e}} = 0$. Der zusätzliche Summand rührt von unserer speziellen Zuordnung der Schar-Repräsentanten her, während der erste Term von dieser Wahl unabhängig ist.

BEWEIS. Die Identität von $\tilde{\nabla}$ und $\bar{\nabla}$ folgt aus der Definition in (15) und aus (12).

Mit Hilfe von (9), (12) und (15) rechnet man

$$\begin{aligned} \nabla^* X_j^e & \left(Y_e^j X_e^i - \frac{1}{\bar{p}} Y_e^i X_e^j \right) \\ &= -dY_e^j (\delta_j^i - Y_{\bar{\sigma}}^i Y_j^{\bar{\sigma}}) - \frac{1}{\bar{p}} Y_e^i X_e^j dX_j^e - \Gamma_{*e^h}^i dx^h + \frac{1}{\bar{p}} d \log f^2 \cdot Y_e^i \frac{1}{\bar{p}} \delta_e^e \\ &= -dY_e^i - \Gamma_{*e^h}^i dx^h - \frac{1}{\bar{p}} Y_e^i d \log f^2 - Y_{\bar{\sigma}}^i Y_e^j dY_j^{\bar{\sigma}} - \frac{1}{\bar{p}} Y_e^i (d \log |\mathcal{X}| - Y_e^j dY_j^{\bar{\sigma}}). \end{aligned}$$

3. – Invarianz des Areal und Dualareals bei Parallelverschiebung.

Für die Strukturen eines p -Areal und eines nichtlinearen Zusammenhangs einfacher p -Vektoren auf M gilt zunächst der

SATZ. Für jedes Parallelfeld einfacher p -Vektoren

$$t \in [a, b] \rightarrow (x(t), X(t)) \in T G K^p$$

ist das p -Areal $t \in [a, b] \rightarrow f(x(t), X(t)) \in \mathbb{R}$ genau dann konstant, wenn

$$(m) \quad \partial_h f(x, X) = \gamma_h^I(x, X) \partial_I f(x, X)$$

ist. [3], S. 10.

Ein nichtlinearer Zusammenhang für einfache p -Vektoren, der an ein p -Areal durch die Bedingung (m) gekoppelt ist, heiße *metrisch* bezüglich dieses p -Areal.

Für das $\bar{p}$ -Dualareal $\bar{f}(x, Y)$ und den dualen Zusammenhang $\bar{\gamma}_{*h}^{\bar{I}}(x, Y)$ gilt ein entsprechender

SATZ. Für jedes Parallelfeld einfacher $\bar{p}$ -Vektoren $t \in [a, b] \rightarrow (x(t), Y(t)) \in T G K^{\bar{p}}$ ist das $\bar{p}$ -Areal $t \in [a, b] \rightarrow \bar{f}(x(t), Y(t))$ genau dann konstant, wenn

$$(\bar{m}) \quad \bar{\gamma}_{*h}^{\bar{I}}(x, Y) \partial_{\bar{I}} \bar{f}(x, Y) = \partial_h \bar{f}(x, Y)$$

gilt.

Der duale Zusammenhang $\bar{\gamma}_{*h}^{\bar{I}}(x, Y)$ für einfache $\bar{p}$ -Vektoren, der an das $\bar{p}$ -Dualareal $\bar{f}(x, Y)$ durch die Bedingung $(\bar{m})$ gekoppelt ist, heiße *metrisch* bezüglich dieses Dualareals.

SATZ. Der nichtlineare Zusammenhang $\gamma_h^I(x, X)$ ist genau dann metrisch bezüglich des p -Areal $f(x, X)$, wenn der duale Zusammenhang $\bar{\gamma}_{*h}^{\bar{I}}(x, Y)$ metrisch bezüglich des $\bar{p}$ -Dualareals $\bar{f}(x, Y)$ ist. Die Bedingungen (m) und $(\bar{m})$ sind also äquivalent.

BEWEIS. Aus [3], S. 22 entnimmt man

$$\gamma_{in}^* \frac{X^i}{f} = 2 \partial_n f - \gamma^{\kappa}{}_{\kappa} \partial_n f.$$

Aus (5) berechnet man $\gamma_{in}^* = -\mathfrak{F} e_{i\bar{i}} \bar{\gamma}_n^{\bar{i}} + X_i \partial_n \log |\mathfrak{F}|$ und setzt ein

$$-\bar{\gamma}_n^{\bar{i}} \frac{Y_{\bar{i}}}{f} + f \partial_n \log |\mathfrak{F}| = 2 \partial_n f - \gamma^i{}_{\bar{i}} \frac{1}{f} X_i.$$

Den zweiten Term kann man nach [3], S. 32, Formel (31) durch $\partial_n f + \partial_n \bar{f}$ ersetzen. Dann entnimmt man aus der symmetrischen Beziehung

$$\bar{\gamma}_n^{\bar{i}} \frac{1}{f} Y_{\bar{i}} - \partial_n \bar{f} = \gamma^i{}_{\bar{i}} \frac{1}{f} X_i - \partial_n f$$

die Äquivalenz von (m) und ($\bar{m}$).

Bei der Aufspaltung metrischer Zusammenhänge überträgt sich diese Eigenschaft in folgender Form auf die Zusammenhangselemente:

SATZ. Für einen metrischen Zusammenhang $\gamma^i{}_{\bar{h}}(x, X)$ einfacher p -Vektoren X bezüglich des p -Areal $f(x, X)$ gilt für alle zugehörigen Zusammenhangskomponenten der zugeordneten Scharen:

$$\begin{aligned} \gamma^i{}_{\bar{h}} X_{\bar{i}}^{\bar{e}} &= \partial_h \log f \\ \gamma_{\bar{i}h}^* X_{\bar{e}}^{\bar{i}} &= \partial_h \log f \\ \Gamma_{\bar{e}h}^i Y_{\bar{i}}^{\bar{e}} &= -\partial_h \log f \\ \bar{\gamma}_{\bar{e}h}^i Y_{\bar{i}}^{\bar{e}} &= \partial_h \log \bar{f} \\ \Gamma_{\bar{i}h}^{\bar{e}} Y_{\bar{e}}^{\bar{i}} &= -\partial_h \log f \\ \bar{\gamma}_{\bar{i}h}^{\bar{e}} Y_{\bar{e}}^{\bar{i}} &= \partial_h \log \bar{f}. \end{aligned}$$

BEWEIS der ersten Relation:

$$\gamma^i{}_{\bar{h}} \frac{1}{f} X = p p! f \gamma_{[1\bar{1}]h}^i X_{\bar{i}_1}^{[1]} \delta_2^2 \dots \delta_{p-1}^{p-1} = f \gamma_{\bar{e}h}^i X_{\bar{i}}^{\bar{e}}.$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in (10) folgt zunächst das

COROLLAR. Die Zusammenhangselemente eines metrischen Zusammenhanges haben — bis auf Linearkombinationen, die bei Doppel-Alternation verschwinden —

folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ih}^{*o} &= -\frac{1}{f^2} \Phi_{ik}^{\sigma\sigma} \gamma_{\sigma h}^k + \partial_h X_i^o + \frac{1}{p} X_i^o \partial_h \log f \\
 \Gamma_{\bar{o}h}^i &= -\frac{1}{f^2} \Phi_{kj}^{\sigma\sigma} \gamma_{\sigma h}^j Y_{\bar{o}}^k X_o^i + X_\sigma^i Y_{\bar{o}}^j \partial_h X_j^\sigma - \frac{1}{\bar{p}} Y_{\bar{o}}^i \partial_h \log \bar{f} \\
 \bar{\gamma}_{\bar{o}h}^i &= -\frac{1}{f^2} \Phi_{kj}^{\sigma\sigma} \gamma_{\sigma h}^j Y_{\bar{o}}^k X_o^i + X_\sigma^i Y_{\bar{o}}^j \partial_h X_j^\sigma + \frac{1}{\bar{p}} Y_{\bar{o}}^i \partial_h \log \bar{f} \\
 \Gamma_{ih}^{\bar{o}} &= \gamma_{oh}^j X_i^o Y_j^{\bar{o}} - \frac{1}{\bar{p}} Y_i^{\bar{o}} \partial_h \log f \\
 \bar{\gamma}_{ih}^{\bar{o}} &= \gamma_{oh}^j X_i^o Y_j^{\bar{o}} + \frac{1}{\bar{p}} Y_i^{\bar{o}} \partial_h \log \bar{f}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Die Überschiebung mit den zugehörigen Vektoren ergibt die übrigen Formeln des Satzes.

4. – Ableitungsgleichungen von p - und $\bar{p}$ -Flächen.

Auf M habe man als Strukturen des Raumes ein p -Areal $f(x, X)$, einen metrischen nichtlinearen Zusammenhang $\gamma_{ih}^I(x, X)$ und ein Volumen $\mathfrak{F}$.

In M betrachten wir nun ein p -dimensionales orientiertes O^2 -Flächenstück $x(u^z)$. Es hat die p linear unabhängigen kontravarianten Tangentenvektoren

$$x_\alpha^i := \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha},$$

die durch $\bar{p}$ linear unabhängige Lösungsvektoren

$$y_{\bar{o}}^i \quad \text{von} \quad \partial_i^o f(x, x_\alpha) \cdot y^i = 0$$

zu einer kontravarianten Begleitbasis der p -Fläche ergänzt werden.

Zu der kontravarianten Begleitbasis $x_\alpha^i, y_{\bar{o}}^i$ der p -Fläche bestimmen wir eine kovariante, bestehend aus den p Vektoren

$$X_i^\sigma := \frac{1}{F} \partial_i^\sigma F(x, x_\alpha)$$

und $\bar{p}$ linear unabhängigen Lösungsvektoren

$$Y_i^{\bar{o}} \quad \text{von} \quad x_\alpha^i Y_i = 0 \quad \text{mit} \quad y_{\bar{o}}^i Y_i^{\bar{o}} = \delta_{\bar{o}}^{\bar{o}}.$$

Wie in § 2 ist also

$$Y_i^{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{F}} \partial_i^{\bar{\sigma}} \bar{F}(x, y_{\bar{\sigma}}) .$$

SATZ. Die Ableitungsgleichungen der kontravarianten Begleitbasis lauten

$$\begin{aligned} \nabla_{\tau} x_{\bar{e}}^i &= a_{\bar{e}\tau}^i + b_{\bar{e}\tau}^i + \frac{1}{p} x_{\bar{e}}^i \partial_{\tau} \log f \\ \bar{\nabla}_{*\tau} y_{\bar{e}}^i &= -B_{i\tau}^{\bar{e}} y_{\bar{e}}^j x_{\bar{e}}^i + a_{\bar{e}\tau}^i + \frac{1}{\bar{p}} y_{\bar{e}}^i \partial_{\tau} \log f . \end{aligned}$$

Dabei ist $b_{\bar{e}\tau}^i$ das aus [3], Satz 8 bekannte kontravariante Vektorfeld, das zur p -Fläche transversal ist,

$$b_{\bar{e}\tau}^i X_i^{\sigma} = 0 .$$

Die Hyperebenenrichtungen der kovarianten Vektoren $B_{i\tau}^{\sigma} := (1/f^2) \Phi_{ij}^{\sigma\bar{e}} b_{\bar{e}\tau}^j$, die in Satz 9 von [3] definiert sind, sind parallel zur p -Fläche,

$$B_{i\tau}^{\sigma} x_{\bar{e}}^i = 0 .$$

Das Vektorfeld $a_{\bar{e}\tau}^i$ ist bezüglich Doppel-Alternation zu 0 äquivalent und zur p -Fläche parallel,

$$a_{\bar{e}\tau}^i X_i^{\bar{e}} = 0 \quad \text{und} \quad a_{\bar{e}\tau}^i Y_i^{\bar{e}} = 0 .$$

Das duale kontravariante Feld $a_{\bar{e}\tau}^i$ hat unter unserer Zuordnung (10) der Zusammenhangselemente die Form

$$a_{\bar{e}\tau}^i := y_{\bar{e}}^i Y_i^{\bar{\sigma}} \partial_{\tau} y_{\bar{e}}^j - \frac{1}{\bar{p}} y_{\bar{e}}^i Y_i^{\bar{\sigma}} \partial_{\tau} y_{\bar{e}}^j ;$$

es ist Null-äquivalent und transversal zur p -Fläche,

$$a_{\bar{e}\tau}^i Y_i^{\bar{e}} = 0 \quad \text{und} \quad a_{\bar{e}\tau}^i X_i^{\bar{e}} = 0 .$$

Der Summand mit $\partial_{\tau} \log f$ ergibt sich aus der Art der Normierung der Vektoren $x_{\bar{e}}^i$ usw. Wenn man mit $n_{\bar{e}}^i := (1/\sqrt[p]{f}) x_{\bar{e}}^i$ rechnet, dann ergibt sich nach der Leibnizschen Regel ([4], S. 154) auf der linken Seite

$$\nabla x_{\bar{e}}^i = \sqrt[p]{f} \nabla n_{\bar{e}}^i + \sqrt[p]{f} d \log f \cdot \frac{1}{p} n_{\bar{e}}^i .$$

BEWEIS. Nach [3], Satz 8 gilt für $N^I := (1/f) X^I$:

$$D_{\tau} N^I = p! \frac{1}{f} \sum_{\nu} x_{[\nu}^i \dots b_{\nu|\tau|}^{i_1} \dots x_{\nu]}^{i_p} .$$

Nach (16) ist andererseits

$$D_\tau X^I = p! \sum_{\nu} x_{[1}^{i_1} \dots \nabla_{|\tau|} x_{\nu}^{i_\nu} \dots x_{p]}^{i_p}.$$

Wegen $D_\tau X^I = f D_\tau N^I + N^I d_\tau f$ besteht also die Beziehung

$$p! \sum_{\nu} x_{[1}^{i_1} \dots \left(\nabla_{|\tau|} x_{\nu}^{i_\nu} - b_{\nu|\tau|}^{i_\nu} - \frac{1}{p} x_{\nu}^{i_\nu} \cdot d_{|\tau|} \log f \right) \dots x_{p]}^{i_p} = 0,$$

d.h. bis auf Linearkombinationen $c_{\sigma\tau}^e x_\sigma^i$ mit $c_{e\tau}^e = 0$ ist

$$\nabla_\tau x_\sigma^i = b_{\sigma\tau}^i + \frac{1}{p} x_\sigma^i d_\tau \log f.$$

Mit $a_{e\tau}^i := c_{e\tau}^\sigma x_\sigma^i$, also $a_{e\tau}^i X_i^e = 0$ und $a_{e\tau}^i Y_i^e = 0$ erhält man die angegebene Ableitungsgleichung.

Für die entsprechende kontravariante Ableitungsgleichung setzen wir $\gamma_{eh}^i x_\tau^h = \nabla_\tau x_\sigma^i - \partial_\tau x_\sigma^i$ in (18) und dies in die Definition (15) ein,

$$\begin{aligned} \gamma_{ih}^* x_\tau^h &= -\frac{1}{f^2} \Phi_{ik}^{e\sigma} (\nabla_\tau x_\sigma^k - \partial_\tau x_\sigma^k) + \partial_h X_i^e \cdot x_\tau^h + \frac{1}{p} X_i^e \partial_h \log f \cdot x_\tau^h \\ \nabla_\tau^* X_i^e &= \partial_\tau X_i^e + \frac{1}{f^2} \Phi_{ik}^{e\sigma} \left(b_{\sigma\tau}^k + a_{\sigma\tau}^k + \frac{1}{p} x_\sigma^k d_\tau \log f - \partial_\tau x_\sigma^k \right) \\ &\quad - \partial_h X_i^e x_\tau^h - \frac{1}{p} X_i^e \partial_h \log f \cdot x_\tau^h + \frac{1}{p} X_i^e \partial_\tau \log f^2 \\ &= \frac{1}{f^2} \Phi_{ik}^{e\sigma} b_{\sigma\tau}^k + \frac{1}{p} X_i^e \partial_\tau \log f + \partial_k^\sigma X_i^e \partial_\tau x_\sigma^k - \frac{1}{f^2} \Phi_{ik}^{e\sigma} \partial_\tau x_\sigma^k + \frac{1}{p \cdot f} X_i^e F_k^\sigma \partial_\tau x_\sigma^k \\ &= B_{i\tau}^e - X_i^\nu \left(X_k^e \partial_\tau x_\nu^k - \frac{1}{p} \delta_\nu^e X_k^\sigma \partial_\tau x_\sigma^k \right) + \frac{1}{p} X_i^e \partial_\tau \log f; \end{aligned}$$

wenn man

$$A_{i\tau}^e := -X_i^\nu \left(X_k^e \partial_\tau x_\nu^k - \frac{1}{p} \delta_\nu^e X_k^\sigma \partial_\tau x_\sigma^k \right)$$

setzt, erhält man mit der Definition aus Satz 9, [3] die kovariante Ableitungsgleichung. Daraus wird mit (17) für die duale kontravariante:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{*\tau} y_\sigma^i &= \left(-B_{j\tau}^e - A_{j\tau}^e - \frac{1}{p} X_j^e \partial_\tau \log f \right) \left(y_\sigma^j x_\sigma^i - \frac{1}{p} y_\sigma^i x_\sigma^j \right) - \bar{c}_{e\tau}^\sigma y_\sigma^i \\ &= -B_{j\tau}^e x_\sigma^i y_\sigma^j + \frac{1}{p} y_\sigma^i \partial_\tau \log f - y_\sigma^j \left(y_\sigma^i \partial_\tau Y_j^\sigma - \frac{1}{p} \delta_\sigma^i y_\sigma^j \partial_\tau Y_j^\sigma \right). \end{aligned}$$

Analog kann man für die zweite Gleichung in (17) rechnen:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\tau Y_i^{\bar{e}} &= - \left(b_{e\tau}^j + a_{e\tau}^j + \frac{1}{p} x_e^j \partial_\tau \log f \right) \left(X_i^e Y_j^{\bar{e}} - \frac{1}{p} X_i^e Y_j^{\bar{e}} \right) + c_{\sigma\tau}^e Y_i^{\bar{e}} \\ &= - b_{e\tau}^j Y_j^{\bar{e}} X_i^e + \frac{1}{p} Y_i^{\bar{e}} \partial_\tau \log f + Y_i^{\bar{e}} \left(y_\sigma^j \partial_\tau Y_j^{\bar{e}} - \frac{1}{p} \delta_\sigma^e y_\tau^j \partial_\tau Y_j^{\bar{e}} \right).\end{aligned}$$

Damit sind auch die Ableitungsgleichungen der kovarianten Begleitbasis hergeleitet:

SATZ.

$$\begin{aligned}(19) \quad \nabla_\tau^* X_i^e &= B_{i\tau}^e + A_{i\tau}^e + \frac{1}{p} X_i^e \partial_\tau \log f, \\ \bar{\nabla}_\tau Y_i^{\bar{e}} &= - b_{e\tau}^j Y_j^{\bar{e}} X_i^e - a_{\sigma\tau}^j Y_j^{\bar{e}} Y_i^{\bar{e}} + \frac{1}{p} Y_i^{\bar{e}} \partial_\tau \log f.\end{aligned}$$

Die Hyperebenenrichtungen des kovarianten Vektors

$$A_{i\tau}^e := - X_i^\sigma \left(X_k^e \partial_\tau x_\sigma^k - \frac{1}{p} \delta_\sigma^e X_k^\tau \partial_\tau x_\sigma^k \right)$$

sind transversal zur p -Fläche und Null-äquivalent,

$$A_{i\tau}^e y_\tau^i = 0 \quad \text{und} \quad A_{i\tau}^e x_\tau^i = 0.$$

Betrachten wir andererseits in M ein $\bar{p}$ -dimensionales orientiertes C^2 -Flächenstück $y(v^{\bar{p}})$, so haben wir die je $\bar{p}$ linear unabhängigen Vektoren

$$y_\tau^i := \frac{\partial y^i}{\partial v^{\bar{e}}} \quad \text{und} \quad Y_i^{\bar{e}} := \frac{1}{\bar{f}^2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_\tau^i}$$

und gewinnen dazu aus

$$y_\tau^i X_i = 0 \quad \text{und} \quad Y_i^{\bar{e}} x^i = 0$$

je p linear unabhängige Lösungsvektoren x_e^i und X_j^σ mit $x_e^i X_i^\sigma = \delta_e^\sigma$, also $X_i^\sigma = (1/F) \partial_i^\sigma F$ (s. 2), für die sich die folgenden Ableitungsgleichungen angeben lassen:

SATZ.

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{*\bar{\tau}} y_\tau^i &= b_{e\tau}^i + a_{e\tau}^i + \frac{1}{p} y_\tau^i \partial_{\bar{\tau}} \log \bar{f} \\ \nabla_{\bar{\tau}} x^i &= - B_{k\tau}^{\bar{\sigma}} y_\tau^i x_e^k + a_{e\tau}^i + \frac{1}{p} x_e^i \partial_{\bar{\tau}} \log \bar{f} \\ \bar{\nabla}_{\bar{\tau}} Y_i^{\bar{e}} &= B_{i\tau}^{\bar{e}} - a_{\sigma\tau}^j Y_i^{\bar{e}} Y_j^{\bar{e}} + \frac{1}{p} Y_i^{\bar{e}} \partial_{\bar{\tau}} \log \bar{f} \\ \nabla_{\bar{\tau}}^* X_i^e &= - b_{\sigma\tau}^j X_j^e Y_i^{\bar{\sigma}} + A_{i\tau}^e + \frac{1}{p} X_i^e \partial_{\bar{\tau}} \log \bar{f}.\end{aligned}$$

Dabei sind die Hyperebenenrichtungen der aus [3], Satz 15 bekannten kovarianten Vektoren $B_{i\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}}$ parallel zur $\bar{p}$ -Fläche,

$$B_{i\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} y_{\bar{\sigma}}^i = 0 ,$$

und die Vektoren

$$b_{e\bar{\tau}}^i := \frac{1}{f^2} \Phi_{jk}^{\rho\sigma} B_{i\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} y_{\bar{\sigma}}^j y_{\bar{\sigma}}^k x_{\bar{\sigma}}^l x_{\bar{\sigma}}^i$$

sind transversal zur $\bar{p}$ -Fläche,

$$b_{e\bar{\tau}}^i Y_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} = 0 .$$

Die Vektoren $a_{e\bar{\tau}}^i$ und

$$\begin{aligned} A_{i\bar{\tau}}^e &:= -X_i^{\sigma} \left(X_j^e \partial_{\bar{\tau}} x_{\sigma}^j - \frac{1}{p} \delta_{\sigma}^e X_j^{\sigma} \partial_{\bar{\tau}} x_{\sigma}^j \right) \\ a_{e\bar{\tau}}^i &:= y_{\bar{\sigma}}^i \left(Y_j^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\tau}} y_{\bar{\sigma}}^j - \frac{1}{\bar{p}} \delta_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} Y_j^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\tau}} y_{\bar{\sigma}}^j \right) \end{aligned}$$

sind Null-äquivalent und erfüllen die Parallelitäts- bzw. Transversalitätseigenschaften

$$\begin{aligned} a_{e\bar{\tau}}^i Y_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} &= 0 \quad \text{und} \quad a_{e\bar{\tau}}^i X_i^e = 0 , \\ A_{i\bar{\tau}}^e y_{\bar{\sigma}}^i &= 0 \quad \text{und} \quad A_{i\bar{\tau}}^e x_{\bar{\sigma}}^i = 0 , \\ a_{e\bar{\tau}}^i X_i^e &= 0 \quad \text{und} \quad a_{e\bar{\tau}}^i Y_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} = 0 . \end{aligned}$$

Sie sind natürlich nur bis auf beliebige Summanden mit den entsprechenden Äquivalenzeigenschaften eindeutig bestimmt und haben die obige Gestalt nur unter unserer Zuordnung (10) bzw. (15).

BEWEIS. Satz 15 in [3] besagt für $N^I = (1/\bar{f})X^I$:

$$D_{\bar{\tau}} N^I = -p! \frac{1}{\bar{f}} B_{k\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} \sum_{\sigma} x_{[1}^{i_1} \dots x_{\sigma}^k \dots x_{p]}^{i_p} y_{\bar{\sigma}}^{i_{\sigma}} \quad \text{mit} \quad B_{i\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} y_{\bar{\sigma}}^i = 0 .$$

Die Aufspaltung (15)

$$D_{\bar{\tau}} X^I = p! \sum_{\sigma} x_{[1}^{i_1} \dots \nabla_{|\bar{\tau}|} x_{\sigma}^{i_{\sigma}} \dots x_{p]}^{i_p} = \bar{f} D_{\bar{\tau}} N^I + X^I \partial_{\bar{\tau}} \bar{f}$$

liefert bis auf Summanden, die bei Doppel-Alternation 0 ergeben, die Ableitungsgleichung

$$\nabla_{\bar{\tau}} x_{\bar{\sigma}}^i = -B_{k\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} x_{\bar{\sigma}}^k y_{\bar{\sigma}}^i + \frac{1}{\bar{p}} x_{\bar{\sigma}}^i \partial_{\bar{\tau}} \log \bar{f} .$$

Nach (17) ist damit weiter

$$\bar{\nabla}_{\bar{\tau}} Y_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} = B_{k\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} x_{\bar{\sigma}}^k X_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} + \frac{1}{\bar{p}} Y_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\tau}} \log \bar{f} + c_{\bar{\sigma}\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} Y_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} .$$

Der Übergang zur kovarianten Gleichung in X erfolgt über die Definition der Zusammenhangselemente in (10), indem man für die Koeffizienten γ die Differential-Elemente aus (15) einsetzt:

$$\begin{aligned} -\nabla_{\bar{\tau}}^* X_i^e + \partial_{\bar{\tau}} X_i^e + \frac{1}{p} X_i^e \partial_{\bar{\tau}} \log f^a \\ = \left(-\frac{1}{f^2} \Phi_{ij}^{e\sigma} - \frac{1}{p} X_i^e X_j^\sigma \right) (\nabla_{\bar{\tau}} x_\sigma^j - \partial_{\bar{\tau}} x_\sigma^j) + \partial_h X_i^e y_\tau^h + \frac{1}{p \cdot f^2} X_i^e \partial_h f^2 y_\tau^h. \end{aligned}$$

Mit der bereits bekannten Ableitungsgleichung auf der rechten Seite ergibt sich, unabhängig von der speziellen Wahl des Repräsentanten ∇x_σ^i wegen $\partial_{\bar{\tau}} f = \partial_h f y_\tau^h + \partial_j^{\sigma} f \partial_{\bar{\tau}} x_\sigma^j$ für $\nabla_{\bar{\tau}}^* X_i^e$:

$$-\frac{1}{f^2} \Phi_{ij}^{e\sigma} B_{k\bar{\tau}}^{\sigma} y_{\bar{\sigma}}^j x_\sigma^k + \frac{1}{p} X_i^e \partial_{\bar{\tau}} \log \bar{f} + X_i^\sigma x_\sigma^j \left(\partial_{\bar{\tau}} X_j^e - \frac{1}{p} X_j^e x_\nu^k \partial_{\bar{\tau}} X_k^\nu \right),$$

also die behauptete Ableitungsgleichung, und mit (17) folgt weiter die für $\bar{\nabla}_{*\bar{\tau}} y_\tau^i$.

5. – Variation des Areal und des Dualareals.

Die erste Variation des Areal

$$(20) \quad A(\Phi) = \int_{\Phi} f(x(u^\alpha), X(u^\alpha)) du^1 \dots du^p$$

läßt sich nun in vereinfachter Form in Zusammenhangselementen darstellen.

SATZ. Das p -dimensionale orientierte C^2 -Flächenstück

$$(21) \quad \Phi: u^\alpha \rightarrow x(u^\alpha)$$

mit dem $(p-1)$ -dimensionalen C^1 -Rand

$$\partial\Phi: (w^1, \dots, w^{p-1}) \rightarrow u^\alpha(w^1, \dots, w^{p-1}) \rightarrow x(u^\alpha(w^1, \dots, w^{p-1}))$$

sei in eine in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ definierte C^1 -Schar von p -dimensionalen C^1 -Flächen

$$\Phi_\varepsilon: u^\alpha \rightarrow x(\varepsilon, u^\alpha)$$

mit $\Phi_0 = \Phi$ eingebettet. Setzt man noch

$$\eta^i(u^\alpha) := \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x^i(0, u^\alpha),$$

dann ist die erste Variation des Arels (20), ausgedrückt in Zusammenhangselementen:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\varepsilon} = & - \int_{\Phi} (B_{ke}^e + \gamma_{kh}^{*e} x_e^h - \partial_k \log f) (\delta_i^k - x_\sigma^k X_i^\sigma) \eta^i dA \\ & + \int_{\partial\Phi} N_{i_1 \dots i_p} \eta^{i_1} \frac{x^{i_2}}{w^1} \dots \frac{w^{i_p}}{w^{p-1}} dw^1 \dots dw^{p-1}. \end{aligned}$$

Im Flächenintegral wird nur die Transversalkomponente der Variation η^i der p -Fläche genommen, im Randintegral nur deren Tangentialkomponente.

BEWEIS. In [3], S. 29 wird die Variation des Arels auf die Gestalt

$$\frac{dA}{d\varepsilon}(\Phi) = \int_{\Phi} Eu_i \eta^i du^1 \dots du^p + \int_{\partial\Phi}$$

mit

$$Eu_i = \left(\partial_i F - F \frac{\partial X_k^\sigma}{\partial u^\sigma} \right) (\delta_i^k - x_\sigma^k X_i^\sigma)$$

umgeformt. Mit (15) und der Ableitungsgleichung (19) erhält man sofort

$$Eu_i = -F(B_{ke}^e + \gamma_{kh}^{*e} x_e^h - \partial_k \log f) (\delta_i^k - x_\sigma^k X_i^\sigma).$$

SATZ. Ein p -dimensionales orientiertes C^2 -Flächenstück (21) habe unter allen p -dimensionalen C^1 -Nachbarflächen mit gleichem Rand ein extremales Areal. Dann gilt für den mittleren Krümmungsvektor

$$(22) \quad B_{ie}^e = -(\gamma_{kh}^{*e} x_e^h - \partial_k \log f) (\delta_i^k - x_\sigma^k X_i^\sigma),$$

und zwar eindeutig, unabhängig von der Wahl der Zusammenhangselemente und von den Flächenparametern, also von der Aufspaltung von X^I . Der Summand $\partial_k \log f$ ist dabei wieder durch die Art der Normierung hervorgerufen.

Die p -Flächen mit (22) heißen *Minimal- p -Flächen*.

Bedingung (22), ausgedrückt in den ursprünglichen Zusammenhangselementen für kontravariante tangentielle Vektoren hat die Gestalt

$$\frac{1}{f^2} \Phi_{ij}^{e\sigma} b_{\sigma e}^j = \left(\frac{1}{f^2} \Phi_{kj}^{e\sigma} \gamma_{\sigma h}^j x_e^h - \partial_h X_k^e x_e^h + \partial_k \log f \right) (\delta_i^k - x_\sigma^k X_i^\sigma).$$

Nimmt man explizit die transversalen Größen hinzu, dann ergibt sich die Version

$$B_{ie}^e = -\Gamma_{*_{\partial h}}^k Y_i^e (\delta_k^h - y_{\sigma}^h Y_k^{\sigma}) + \partial_k \log f \cdot y_{\sigma}^k Y_i^{\sigma}.$$

Verfügt man auch noch über eine Volumenfunktion $\mathfrak{F}(x)$, dann lautet mit [3], S. 32, Formel (31) die Bedingung für Minimal- p -Flächen, ausgedrückt in den dualen Größen:

$$B_{i\bar{q}}^e = -\tilde{\gamma}_{*_{\bar{q}h}}^k Y_i^{\bar{e}} (\delta_k^h - y_{\bar{\sigma}}^h Y_k^{\bar{\sigma}}) + \partial_k \log f \cdot y_{\bar{\sigma}}^h Y_i^{\bar{\sigma}}.$$

Der Vollständigkeit halber geben wir auch noch die dualen kovarianten Formeln an,

$$\frac{1}{f^2} \Phi_{ij}^{e\sigma} b_{\sigma\bar{e}}^j = \left(\frac{1}{f^2} \Phi_{kj}^{e\sigma} I_{\bar{h}}^{\bar{e}} x_{\sigma}^l x_{\bar{e}}^h y_{\bar{e}}^j - \partial_h X_k^e x_{\bar{e}}^h + \partial_k \log f \right) (\delta_i^k - x_v^k X_i^v).$$

Die Formel bleibt gültig, wenn man $I_{\bar{h}}^{\bar{e}}$ durch $\tilde{\gamma}_{\bar{h}}^{\bar{e}}$ ersetzt.

Alle diese Bedingungen sind eindeutig, also frei von der Unbestimmtheit der Scharparameter in den Zusammenhangselementen. Unsere Willkür bei der Zuordnung (10) ist hier behoben.

Ebenso läßt sich die differentialgeometrische Untersuchung des *Dual-Areals*

$$(23) \quad \bar{A}(\Psi) := \int_{\bar{\Psi}} \bar{f}(y(v^{\bar{\beta}}), Y(v^{\bar{\beta}})) dv^{\bar{p}+1} \dots dv^{\bar{n}}$$

einer $\bar{p}$ -Fläche

$$(24) \quad \Psi: v^{\bar{\beta}} \rightarrow y(v^{\bar{\beta}})$$

in Zusammenhangselementen durchführen.

SATZ. Das $\bar{p}$ -dimensionale orientierte C^2 -Flächenstück (24) mit dem $(\bar{p}-1)$ -dimensionalen C^1 -Rand

$$\partial\Psi: (w^{p+2} \dots w^{\bar{n}}) \rightarrow v^{\bar{\beta}}(w^{p+2} \dots w^{\bar{n}}) \rightarrow y(v^{\bar{\beta}}(w^{p+2} \dots w^{\bar{n}}))$$

sei in eine C^1 -Schar von $\bar{p}$ -dimensionalen C^1 -Flächen

$$\Psi_{\varepsilon}: v^{\bar{\beta}} \rightarrow y(\varepsilon, v^{\bar{\beta}})$$

eingebettet, mit $\Psi_0 = \Psi$, die in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ definiert ist. Setzt man noch

$$\eta^i(v^{\bar{\beta}}) := \frac{\partial y^i}{\partial \varepsilon}(0, v^{\bar{\beta}}),$$

dann ist die erste Variation des Dual-Areals (23)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{d\varepsilon} &= - \int_{\bar{\Psi}} (B_{i\bar{q}}^{\bar{e}} + \tilde{\gamma}_{j\bar{h}}^{\bar{e}} Y_{\bar{e}}^h - \partial_j \log \bar{f}) (\delta_i^j - y_{\bar{\sigma}}^j Y_i^{\bar{\sigma}}) \eta^i d\bar{A} \\ &\quad + \int_{\partial\bar{\Psi}} Y_{i_{p+1} \dots i_{\bar{n}}} \eta^{i_{p+1}} \frac{y^{i_{p+2}}}{w^{p+2}} \dots \frac{y^{i_{\bar{n}}}}{w^{\bar{n}}} dw^{p+2} \dots dw^{\bar{n}}. \end{aligned}$$

Im Flächenintegral wird nur die Normalkomponente der Variation η^i der $\bar{p}$ -Fläche genommen und im Randintegral die Tangentialkomponente.

SATZ. Ein $\bar{p}$ -dimensionales orientiertes C^2 -Flächenstück (24) habe unter allen $\bar{p}$ -dimensionalen C^1 -Nachbarflächen mit gleichem Rand ein extremales Dual-Areal. Dann gilt für den mittleren Krümmungsvektor

$$(25) \quad \begin{aligned} B_{i\bar{q}}^{\bar{e}} &= -(\bar{\gamma}_{i\bar{h}}^{\bar{e}} y_{\bar{q}}^{\bar{h}} - \partial_j \log \bar{f})(\delta_i^j - y_{\bar{\sigma}}^j Y_i^{\bar{\sigma}}), \\ B_{i\bar{q}}^{\bar{e}} &= -(I_{i\bar{h}}^{\bar{e}} y_{\bar{q}}^{\bar{h}} - \partial_j \log \bar{f})(\delta_i^j - y_{\bar{\sigma}}^j Y_i^{\bar{\sigma}}). \end{aligned}$$

Die $\bar{p}$ -Flächen mit (25) heißen *Minimal- $\bar{p}$ -Flächen*.

Die Bedingung (25) läßt sich auch in den Zusammenhangselementen der zu $\mathcal{V}$ transversalen Vektoren $x_{\bar{q}}^i$ ausdrücken. Für jede Aufspaltung $(x_{\bar{q}}^i)$ von $X^I = (1/\mathfrak{F}) \otimes \bar{f} \partial_{\bar{I}} \bar{f}$ ist eine Minimal- $\bar{p}$ -Fläche, unabhängig von der speziellen Wahl der Zusammenhangselemente $\gamma_{\bar{q}h}^i(x, X_{\bar{\sigma}}^j)$, charakterisiert durch

$$B_{i\bar{q}}^{\bar{e}} = -\gamma_{\bar{\sigma}h}^k X_i^{\bar{\sigma}} (\delta_k^h - x_{\bar{q}}^h X_k^{\bar{e}}) + (\partial_j \log |\mathfrak{F}| - \partial_j \log f) x_{\bar{q}}^j X_i^{\bar{e}}.$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. BARTHEL, *Über homogene Funktionen auf dem Graßmann-Kegel*, Arch. Math., **9** (1958), pp. 262-274.
- [2] W. BARTHEL - U. BRECHTKEN-MANDERSCHIED, *Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale*, Tensor, N. S., **24** (1972), pp. 1-15.
- [3] W. BARTHEL - I. HAUBITZ, *Zur metrischen Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten mit p -Areal und nichtlinearem Zusammenhang für einfache p -Vektoren*, Jber. Deutsch. Math.-Verein., **75** (1973), pp. 9-41.
- [4] I. HAUBITZ, *Nichtlineare Zusammenhänge in Bündeln von Graßmann-Kegeln*, Tensor, N. S., **24** (1972), pp. 123-160.
- [5] H. IWAMOTO, *On geometries associated with multiple integrals*, Math. jap., **1** (1948), pp. 74-91.