Su un problema misto per un sistema di equazioni a derivate parziali.

di MARIA GRAZIA CAZZANI NIERI (*)

Sunto. - Sotto ampie ipotesi sono dimostrate la dipendenza continua dai dati, l'unicità e l'esistenza della soluzione in senso generalizzato di un problema misto per il sistema di equazioni quasi lineari a derivate parziali in due variabili indipendenti

$$(I) \quad \frac{\partial z_i}{\partial x} + \rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m) \frac{\partial z_i}{\partial y} = f_i(x, y, z_1, \dots, z_m), \quad (i = 1, \dots, m).$$

La soluzione è ricercata nel campo funzionale costituito dalle m -ple di funzioni $z_i(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), le quali nel proprio campo di definizione sono assolutamente continue in x e lipschitziane in y , e soddisfano il sistema (I) quasi ovunque.

Nel presente lavoro si considera il sistema di equazioni a derivate parziali quasi lineari iperbolico in due variabili indipendenti

$$(I) \quad \frac{\partial z_i}{\partial x} + \rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m) \frac{\partial z_i}{\partial y} = f_i(x, y, z_1, \dots, z_m), \quad (i = 1, \dots, m).$$

Nell'ipotesi che sia

$$\rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m) > 0$$

per $i = 1, \dots, r$, con $1 \leq r < m$, e

$$\rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m) < 0$$

per $i = r + 1, \dots, m$, si considera il problema misto: ricercare una m -pla di funzioni

$$z_1(x, y), \dots, z_m(x, y),$$

soluzione quasi ovunque del sistema (I), soddisfacente le condizioni

$$(II) \quad \begin{aligned} z_i(0, y) &= \Phi_i(y), & (0 \leq y \leq b_0), & & (i = 1, \dots, m), \\ z_i(x, 0) &= \Psi_i(x), & (0 \leq x \leq a), & & (i = 1, \dots, r), \end{aligned}$$

dove le $\Phi_i(y)$, ($i = 1, \dots, m$), $\Psi_i(x)$, ($i = 1, \dots, r$), sono funzioni assegnate.

Tale problema misto è stato enunciato per i sistemi quasi lineari di tipo

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 19 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1966-67.

iperbolico da R. COURANT - P. LAX ⁽¹⁾; successivamente G. PROUSE ⁽²⁾ ha dimostrato esistenza e unicità della soluzione dello stesso problema misto relativo ai sistemi quasi lineari di tipo iperbolico in due variabili indipendenti utilizzando il metodo alle differenze finite.

Gli autori citati considerano soluzioni con derivate prime continue e impongono svariate condizioni di derivabilità ai coefficienti del sistema e ai dati.

Nel presente lavoro le funzioni $\rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, ($i = 1, \dots, m$), sono supposte quasi continue in x e soddisfacenti nel complesso delle rimanenti variabili condizioni del tipo di CARATHÉODORY; come soluzione in senso generalizzato del sistema (I) è intesa ogni m -pla di funzioni $z_i(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$) assolutamente continue in x e lipschitziane in y , le quali soddisfano le (I) quasi ovunque nel proprio campo di definizione; le funzioni $\Phi_i(y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono lipschitziane e le funzioni $\Psi_i(x)$, ($i = 1, \dots, r$), assolutamente continue. Si dimostrano teoremi di dipendenza continua dai dati e di unicità ed un teorema di esistenza della soluzione in senso generalizzato del problema misto precisato.

Le dimostrazioni di tali teoremi vengono date nell'indirizzo sviluppato da M. CINQUINI CIBRARIO ⁽³⁾ per il problema di CAUCHY relativo allo stesso sistema (I); la diversa natura del problema ha presentato nuove difficoltà e richiesto nuovi accorgimenti e considerazioni delicate.

Nel § 1 sono dimostrati i teoremi di dipendenza continua dai dati e di unicità, nel § 2 il teorema di esistenza.

§ 1. - 1. Richiamiamo alcune definizioni ⁽⁴⁾.

Una funzione $z(x, y)$, definita in un campo T , si dice di classe G nel campo T se su ogni segmento di T parallelo all'asse x è funzione assolutamente continua della sola x e se esiste una costante L tale che sia

$$|z(x, y) - z(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}|$$

per tutte le coppie (x, y) , $(x, \bar{y})$ appartenenti al campo T .

⁽¹⁾ R. COURANT - P. LAX, *On nonlinear partial differential equations in two independent variables*, «Comm. Pure and Appl. Math.», 2 (1949).

⁽²⁾ G. PROUSE, *Sulla risoluzione del problema misto per le equazioni iperboliche non lineari mediante le differenze finite* (IV) XLVI (1958), pp. 313-341.

⁽³⁾ M. CINQUINI CIBRARIO, *Nuovi teoremi di esistenza e di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali*, «Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa» (3) IX (1955), pp. 65-113.

⁽⁴⁾ Per tali definizioni cfr. M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, «Monografie Matematiche del C.N.R.», 12, Ediz. Cremonese, Roma (1964), Cap. IV, § 2, n. 8 b), p. 336.

Una funzione $g(X; x, y)$, definita nel campo

$$0 \leq X \leq \alpha, \quad 0 \leq x \leq \alpha, \quad -\infty < y < +\infty,$$

si dice di classe $G^{[1]}$ nel suo campo di definizione se in corrispondenza ad ogni coppia di valori x, y , con $0 \leq x \leq \alpha$, y reale qualunque, è assolutamente continua rispetto a X in $(0, \alpha)$ ed in corrispondenza ad ogni X di $(0, \alpha)$ è di classe G nel campo $0 \leq x \leq \alpha$, $-\infty < y < +\infty$.

2. TEOREMA I (TEOREMA DI DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI). - Siano $\rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, ($i = 1, \dots, m$), funzioni definite nel campo

$$C: \quad 0 \leq x \leq a_0, \quad 0 \leq y \leq b_0, \quad -\gamma_i \leq z_i \leq \gamma_i, \quad (i = 1, \dots, m),$$

le quali in corrispondenza ad ogni x fissato di $(0, a_0)$ siano continue nel complesso delle variabili $y, z_1, \dots, z_m$ nel campo

$$\Delta: \quad 0 \leq y \leq b_0, \quad -\gamma_i \leq z_i \leq \gamma_i, \quad (i = 1, \dots, m),$$

e in corrispondenza ad ogni $(m+1)$ -pla $(y, z_1, \dots, z_m)$ del campo Δ siano quasi continue rispetto a x in $(0, a_0)$; esistano due funzioni $M(x), L(x)$, definite in $(0, a_0)$, ivi non negative, quasi continue e integrabili ⁽⁵⁾, tali che per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ valgano le

$$(1_i) \quad |\rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m)| \leq M(x) \quad (i = 1, \dots, m)$$

per tutte le $(m+1)$ -ple $(y, z_1, \dots, z_m)$ del campo Δ e le

$$(2_i) \quad |\rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m) - \rho_i(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq \\ \leq L(x) \left\{ (y - \bar{y}) + \sum_{j=1}^m |z_j - \bar{z}_j| \right\} \quad (i = 1, \dots, m)$$

per tutte le coppie di $(m+1)$ -ple $(y, z_1, \dots, z_m), (\bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ del campo Δ .

Siano $f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, ($i = 1, \dots, m$), funzioni definite nel campo C , ivi quasi continue, le quali in corrispondenza ad ogni (x, y) fissato nel rettangolo

$$R: \quad 0 \leq x \leq a_0, \quad 0 \leq y \leq b_0$$

siano continue nel complesso delle variabili $z_1, \dots, z_m$; esista una funzione

⁽⁵⁾ In tutto il presente lavoro l'integrabilità è intesa nel senso di LEBESGUE.

$N(x)$, definita in $(0, a_0)$, ivi non negativa, quasi continua e integrabile, tale che in quasi tutti i punti di R valgono le

$$(1_2) \quad |f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)| \leq N(x) \quad (i = 1, \dots, m)$$

per tutte le m -ple reali $(z_1, \dots, z_m)$, con $|z_j| \leq \gamma_j$, $(j = 1, \dots, m)$, e anche

$$(2_2) \quad |f_i(x, y, z_1, \dots, z_m) - f_i(x, y, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq L(x) \sum_{j=1}^m |z_j - \bar{z}_j|$$

per tutte le coppie di m -ple $(z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ tale che $|z_j| \leq \gamma_j$, $|\bar{z}_j| \leq \gamma_j$, $(j = 1, \dots, m)$.

Inoltre per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ valgono le

$$(3_1) \quad \rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m) > 0 \quad (i = 1, \dots, r, \text{ con } 1 \leq r < m)$$

$$(3_2) \quad \rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m) < 0 \quad (i = r + 1, \dots, m),$$

per tutte le $(m + 1)$ -ple $(y, z_1, \dots, z_m)$ del campo Δ .

Sia a un numero reale positivo, con $a \leq a_0$, tale che per $0 \leq x < a$ sia

$$\int_0^x M(t) dt < b_0$$

mentre per $x = a$ può anche valere l'uguaglianza.

Nel campo

$$D: \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt$$

siano definiti due sistemi di funzioni

$$(4) \quad z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)$$

$$(4^*) \quad z_1^*(x, y), \dots, z_m^*(x, y),$$

di classe G nel campo D , soddisfacenti in tutto il campo D le

$$|z_i(x, y)| \leq \gamma_i, \quad |z_i^*(x, y)| \leq \gamma_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

e, in quasi tutti i punti del campo D , le

$$(I) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial x} + \rho_i(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)) \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial y} = \\ = f_i(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)) \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(I^*) \quad \frac{\partial z_i^*(x, y)}{\partial x} + \rho_i(x, y, z_1^*(x, y), \dots, z_m^*(x, y)) \frac{\partial z_i^*(x, y)}{\partial y} = f_i(x, y, z_1^*(x, y), \dots, z_m^*(x, y)) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Le funzioni (4), (4*) soddisfanno inoltre identicamente nell'intervallo $(0, b_0)$ per $i = 1, \dots, m$ le

$$(5) \quad z_i(0, y) = \Phi_i(y)$$

$$(5^*) \quad z_i^*(0, y) = \Phi_i^*(y)$$

e nell'intervallo $(0, a)$ per $i = 1, \dots, r$ le

$$(6) \quad z_i(x, 0) = \Psi_i(x)$$

$$(6^*) \quad z_i^*(x, 0) = \Psi_i^*(x),$$

dove le funzioni $\Phi_i(y)$, $\Phi_i^*(y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono funzioni lipschitziane assegnate nell'intervallo $(0, b_0)$, e le funzioni $\Psi_i(x)$, $\Psi_i^*(x)$, ($i = 1, \dots, r$), sono funzioni assegnate nell'intervallo $(0, a)$, ivi assolutamente continue e tali che per $i = 1, \dots, r$ sia

$$(6_1) \quad \Phi_i(0) = \Psi_i(0)$$

$$(6_1^*) \quad \Phi_i^*(0) = \Psi_i^*(0).$$

Allora, preso un numero ε positivo arbitrario, si può determinare un numero η positivo in modo che, se

$$(7) \quad \begin{cases} |\Phi_i(y) - \Phi_i^*(y)| < \eta & (0 \leq y \leq b_0), (i = 1, \dots, m) \\ |\Psi_i(x) - \Psi_i^*(x)| < \eta & (0 \leq x \leq a), (i = 1, \dots, r), \end{cases}$$

sia

$$(8) \quad |z_i(x, y) - z_i^*(x, y)| < \varepsilon$$

in tutto il campo D , vale a dire la soluzione, intesa in senso generalizzato, del problema misto considerato per il sistema (I) dipende con continuità dai dati.

3. - a) Per le ipotesi fatte sulle funzioni $z_i(x, y)$, $z_i^*(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), esiste una costante non negativa h tale che

$$(9) \quad |z_i(x, y) - z_i(x, \bar{y})| \leq h |y - \bar{y}|$$

$$(9^*) \quad |z_i^*(x, y) - z_i^*(x, \bar{y})| \leq h |y - \bar{y}|$$

per ogni coppia di punti (x, y) , $(x, \bar{y})$ del campo D .

b) Definiamo le funzioni $\sigma_i(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), nel campo

$$0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y < +\infty$$

mediante le

$$(10_1) \quad \sigma_i(x, y) = \rho_i(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(x, y))$$

nel campo D ,

$$(10_2) \quad \sigma_i(x, y) = \rho_i(x, 0, z_1(x, 0), \dots, z_m(x, 0))$$

nel campo

$$(10_3) \quad \begin{aligned} &0 \leq x \leq a, \quad y < 0 \\ &\sigma_i(x, y) = \rho_i(x, \Gamma(x), z_1(x, \Gamma(x)), \dots, z_m(x, \Gamma(x))) \end{aligned}$$

nel campo

$$0 \leq x \leq a, \quad y > \Gamma(x),$$

avendo posto

$$(11) \quad \Gamma(x) = b_0 - \int_0^x M(t) dt.$$

Tenuto conto delle (1₁), (2₂), (9), per quasi tutti gli x di $(0, a)$ è

$$(12) \quad |\sigma_i(x, y)| \leq M(x) \quad (i = 1, \dots, m)$$

per ogni valore reale y , e

$$(13) \quad |\sigma_i(x, y) - \sigma_i(x, \bar{y})| \leq L(x)(1 + mh)|y - \bar{y}| \quad (i = 1, \dots, m)$$

per ogni coppia di valori reali $y, \bar{y}$.

In virtù delle (12), (13) valgono i teoremi di esistenza e unicità di CARATHÉODORY ⁽⁶⁾ per l'equazione

$$Y = y - \int_x^x \sigma_i(t, Y) dt,$$

dove i è uno, fissato, tra i numeri $1, 2, \dots, m$, (x, y) è un punto fissato nel

⁽⁶⁾ Cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig (1918), Kap. XI, pp. 665-688.

campo $0 \leq x \leq a$, $-\infty < y < +\infty$, X la variabile indipendente, Y la funzione incognita; vale a dire, fissato un punto (x, y) del campo ora indicato, esiste una ed una sola soluzione, che indichiamo con $g_i(X; x, y)$, ($0 \leq X \leq a$), dell'equazione integrale considerata. Si ha dunque

$$(14) \quad g_i(X; x, y) = y - \int_X^x \sigma_i(t, g_i(t; x, y)) dt, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Le funzioni $g_i(X; x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), in corrispondenza ad ogni x e y fissati sono assolutamente continue rispetto ad X , in corrispondenza ad ogni X e y fissati assolutamente continue rispetto a x ed in corrispondenza ad ogni X e x fissati lipschitziane rispetto a y , con costante di LIPSCHITZ indipendente da X, x ⁽⁷⁾, cioè sono di classe $G^{[1]}$ nel campo

$$D_\infty: \quad 0 \leq X \leq a, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y < +\infty.$$

In virtù delle (3), le funzioni $g_i(X; x, y)$ per $i = 1, \dots, r$ sono crescenti in X , per $i = r + 1, \dots, m$ decrescenti in X , e, per il citato teorema di unicità di CARATHÉODORY, sono tutte crescenti in y , e inoltre sono decrescenti in x per $i = 1, \dots, r$, crescenti in x per $i = r + 1, \dots, m$.

Per $i = r + 1, \dots, m$ osserviamo che, se (x, y) appartiene al campo D , per $0 \leq X \leq x$ è ⁽⁸⁾

$$(15) \quad 0 \leq g_i(X; x, y) \leq \Gamma(X),$$

vale a dire il punto $(X, g_i(X; x, y))$ appartiene al campo D .

È allora per $0 \leq X \leq x$

$$(16) \quad \sigma_i(X, g_i(X; x, y)) = \rho_i(X, g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y)))$$

⁽⁷⁾ Cfr. M. CINQUINI CIBRARIO, *Sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, « Annali di Matematica » (IV) XLIV (1957), pp. 357-418, cfr. § 1, n. 1.

⁽⁸⁾ Infatti essendo $0 \leq y \leq \Gamma(x)$, tenuto conto delle (1), per $0 \leq X \leq x$ è

$$\begin{aligned} g_i(X; x, y) &= y - \int_X^x \rho_i(t, g_i(t; x, y), z_1(t, g_i(t; x, y)), \dots, z_m(\dots)) dt \leq \\ &\leq y + \int_X^x M(t) dt \leq b_0 - \int_0^X M(t) dt. \end{aligned}$$

È evidente inoltre che, essendo per $i = r + 1, \dots, m$ la funzione $g_i(X; x, y)$ decrescente rispetto a X , per $0 \leq X \leq x$ è $g_i(X; x, y) \geq y \geq 0$.

e quindi vale la ⁽⁹⁾

$$(17) \quad g_i(X; x, y) = y - \int_x^x \rho_i(t, g_i(t; x, y), z_j(t, g_i(t; x, y))) dt, \quad (i = r+1, \dots, m),$$

avendo posto per brevità

$$(18_1) \quad \rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m) = \rho_i(x, y, z_j) \quad (i = 1, \dots, m).$$

In corrispondenza ad ogni intero i , con $i = 1, \dots, r$, consideriamo i due campi D_{i1} , D_{i2} in cui il campo D è diviso dalla curva

$$\Omega_i: \quad y = g_i(x; 0, 0) \quad (0 \leq x \leq a).$$

La curva Ω_i , uscente, dall'origine, incontra il contorno di D in un ulteriore punto di ascissa $\bar{a}_i$ (con $0 < \bar{a}_i \leq a$); tale punto o appartiene alla curva $\Gamma: y = \Gamma(x)$ oppure (e ciò è possibile soltanto se $\Gamma(a) > 0$) al segmento $x = a$, $0 < y \leq \Gamma(a)$.

Sia allora D_{i1} il campo

$$D_{i1}: \quad 0 \leq x \leq \bar{a}_i, \quad g_i(x; 0, 0) \leq y \leq \Gamma(x),$$

e indicata con

$$y = h(x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

l'equazione della curva costituita da Ω_i per $0 \leq x \leq \bar{a}_i$, e, se $\bar{a}_i < a$, da Γ per $\bar{a}_i < x \leq a$, sia D_{i2} il campo

$$D_{i2}: \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq h(x).$$

Se (x, y) è un punto del campo D_{i1} , per $0 \leq X \leq x$ vale ⁽¹⁰⁾ la (15) e quindi valgono anche le (16) e (17).

⁽⁹⁾ Fissato (x, y) in D , la (17) vale per tutti gli X tale che sia

$$0 \leq g_i(X; x, y) \leq \Gamma(X).$$

⁽¹⁰⁾ Essendo $g_i(X; x, y)$ crescente rispetto a y è

$$g_i(X; x, y) > g_i(X; x, g_i(x; 0, 0)) = g_i(X; 0, 0) \geq 0;$$

inoltre essendo $g_i(X; x, y)$ crescente rispetto a X e $\Gamma(X)$ decrescente, per $0 \leq X \leq x$ è

$$g_i(X; x, y) \leq g_i(x; x, y) = y < \Gamma(x) \leq \Gamma(X).$$

Se (x, y) è un punto del campo D_{i2} (non coincidente con il punto $(a, 0)$), la curva

$$Y = g_i(X; x, y) \quad (0 \leq X \leq a)$$

interseca l'asse X in un punto (unico) di ascissa

$$\xi_i = \xi_i(x, y),$$

con $0 \leq \xi_i < a$. Per $\xi_i \leq X \leq x$ vale ⁽¹¹⁾ la (15) e quindi valgono anche la (16) e (17).

4. Fissato un valore x nell'intervallo $(0, a)$ le funzioni

$$(19) \quad X = X \quad Y = g_i(X; x, y),$$

dove i è un intero fissato tra 1 e m , stabiliscono una corrispondenza tra il campo

$$0 \leq X \leq a, \quad -\infty < y < +\infty$$

e il campo

$$0 \leq X \leq a, \quad -\infty < Y < +\infty$$

In virtù del teorema di unicità relativo all'equazione (14), tale corrispondenza è biunivoca ed è

$$y = g_i(x; X, Y).$$

Inoltre, fissato x , ad ogni insieme di misura (superficiale) nulla di uno dei campi indicati corrisponde un insieme di misura superficiale nulla dell'altro ⁽¹²⁾.

5. Poichè in quasi tutto il campo D valgono le (I) per $i = 1, \dots, m$, in corrispondenza ad ogni y di $(0, b_0)$ con eccezione di un insieme di valori y di misura (lineare) nulla, tenuto conto delle (5), posto

$$(18_2) \quad f_i(x, y, z_1, \dots, z_m) = f_i(x, y, z_i) \quad (i = 1, \dots, m),$$

⁽¹¹⁾ Infatti è

$$0 \leq g_i(X; x, y) \leq y \leq h(x) \leq \Gamma(x) \leq \Gamma(X).$$

⁽¹²⁾ Cfr. l.c. in ⁽³⁾, § 1, n. 2, note ⁽¹⁵⁾ e ⁽¹⁶⁾. Cfr. anche l.c. in ⁽⁷⁾, § 1, n. 2, Lemma III.

è

$$(20) \quad z_i(x, y) = \Phi_i(y) + \int_0^x [-\rho_i(X, y, z_f(X, y)) \frac{\partial z_i(X, y)}{\partial y} + \\ + f_i(X, y, z_f(X, y))] dX \quad (i = 1, \dots, m)$$

in tutto l'intervallo d_y dei valori x tali che i punti (x, y) appartengano al campo D ; tenuto conto delle (1), (9) è quindi

$$(21) \quad |z_i(x, y) - z_i(\bar{x}, y)| \leq \left| \int_x^{\bar{x}} [hM(X) + N(X)] dX \right| \quad (i = 1, \dots, m)$$

per ogni coppia di valori $x, \bar{x}$ appartenenti a d_y .

La (21) vale per quasi tutti gli y di $(0, b_0)$ e quindi, essendo il primo membro una funzione continua di y ed il secondo membro indipendente da y , vale per tutti gli y di $(0, b_0)$.

6. Sia i un intero fissato tra $r + 1$ e m e sia (x, y) un punto del campo D . Indicando con X, Y le coordinate correnti, consideriamo i valori della funzione $z_i(X, Y)$ nei punti della curva

$$Y = g_i(X; x, y)$$

nell'intervallo dei valori X per cui il punto $(X, g_i(X; x, y))$ appartiene al campo D ; indicata con $\mu_i(x, y)$ l'ascissa del punto comune alla curva $Y = g_i(X; x, y)$ e alla curva Γ , tale intervallo è $(0, \mu_i(x, y))$. Poniamo ivi

$$Z_i(X) = z_i(X, g_i(X; x, y)).$$

La funzione $Z_i(X)$ è assolutamente continua in $(0, \mu_i(x, y))$.

Infatti, in virtù delle (9), (17), (21), se $X < \bar{X}$, è ⁽¹³⁾

$$\begin{aligned} |Z_i(X) - Z_i(\bar{X})| &\leq |Z_i(X, g_i(X; x, y)) - Z_i(X, g_i(\bar{X}; x, y))| + \\ &+ |Z_i(X, g_i(\bar{X}; x, y)) - Z_i(\bar{X}, g_i(\bar{X}; x, y))| \leq \\ &\leq h |g_i(X; x, y) - g_i(\bar{X}; x, y)| + \int_X^{\bar{X}} [hM(t) + N(t)] dt \leq \\ &\leq \int_X^{\bar{X}} [2hM(t) + N(t)] dt, \end{aligned}$$

⁽¹³⁾ Il punto $(X, g_i(\bar{X}; x, y))$ appartiene al campo D .

da cui segue l'assoluta continuità di $Z_i(X)$; fissato il punto (x, y) nel campo D , la derivata $Z'_i(X)$ esiste allora per quasi tutti gli X di $(0, \mu_i(x, y))$.

Se i è un intero fissato tra 1 e r , con considerazioni analoghe si prova che $Z_i(X)$ è una funzione assolutamente continua nell'intervallo dei valori X per cui il punto $(X, g_i(X; x, y))$ appartiene al campo D : indicata ancora con $\mu_i(x, y)$ l'ascissa del punto comune alla curva $Y = g_i(X; x, y)$ e alla curva Γ , tale intervallo è $(0, \mu_i(x, y))$ se (x, y) appartiene al campo D_{i1} , $(\xi_i(x, y), \mu_i(x, y))$ (cfr. n. 3) se (x, y) appartiene al campo D_{i2} .

7. Sia i un intero compreso tra $r+1$ e m e sia x un valore fissato di $(0, a)$; le funzioni (19) stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra il campo

$$R_i(x): 0 \leq X \leq x, \quad 0 \leq y \leq \Gamma(x)$$

e il campo

$$A_i(x): 0 \leq X \leq x, \quad g_i(X; x, 0) \leq Y \leq g_i(X; x, \Gamma(x)),$$

in cui (cfr. n. 5) ad un insieme di misura nulla dell'uno corrisponde un insieme di misura nulla dell'altro.

Pertanto le derivate parziali $\frac{\partial z_i(X, Y)}{\partial X}$, $\frac{\partial z_i(X, Y)}{\partial Y}$, le quali esistono e soddisfano la i -esima delle (I), nella quale si assumano X, Y come variabili indipendenti, in quasi tutto $A_i(x)$, esistono e soddisfano la stessa equazione, nella quale a x, y si sostituiscano rispettivamente $X, g_i(X; x, y)$, in quasi tutto $R_i(x)$, e quindi per quasi tutti gli y di $(0, \Gamma(x))$ esistono e soddisfano la i -esima delle (I) in quasi tutti i punti della curva $Y = g_i(X; x, y)$; inoltre in quasi tutti i punti di tale curva è

$$\frac{dg_i(X; x, y)}{dX} = \rho_i(X, g_i(X; x, y), z_i(X, g_i(X; x, y))).$$

Nella i -esima delle (I) (scritta nelle variabili X, Y) si ponga

$$Y = g_i(X; x, y);$$

applicando un teorema di derivazione di funzione composta ⁽¹⁴⁾ e tenendo conto della (17), si prova che la i -esima delle (I) si può scrivere nella forma

$$(22) \quad Z'_i(X) = f_i(X, g_i(X; x, y), z_i(X, g_i(X; x, y))),$$

⁽¹⁴⁾ Cfr. G. SCORZA DRAGONI, *Un'osservazione sulla derivata di una funzione composta*, «Rendiconti Sem. Mat. di Padova», XX (1951), pp. 462-67, cfr. n. 1.

la quale, in corrispondenza ad ogni x fissato di $(0, a)$, per quasi tutti gli y dell'intervallo $(0, \Gamma(x))$ vale per quasi tutti gli X di $(0, x)$; dalla (22) integrando e tenendo conto delle (II), segue la ⁽¹⁵⁾

$$(23) \quad z_i(x, y) = \Phi_i(g_i(0; x, y)) + \int_0^x f_i(X, g_i(X; x, y), z_i(X; g_i(X; x, y))) dX,$$

la quale in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ vale per quasi tutti gli y di $(0, \Gamma(x))$, per ogni intero i con $i = r + 1, \dots, m$.

8. Sia i un intero fissato tra 1 e r .

Nel campo D_{i1} valgono le stesse considerazioni del numero precedente, in particolare le funzioni (19) stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra il campo

$$0 \leq X \leq x, \quad g_i(x; 0, 0) \leq y \leq \Gamma(x)$$

e il campo

$$0 \leq X \leq x, \quad g_i(X; 0, 0) \leq Y \leq g_i(X; x, \Gamma(x)),$$

per ogni valore x fissato nell'intervallo $(0, \bar{a}_i)$.

Con lo stesso procedimento seguito nel numero precedente si dimostra che in corrispondenza ad ogni x di $(0, \bar{a}_i)$ per quasi tutti gli y di $(g_i(x; 0, 0), \Gamma(x))$ vale la (23).

Consideriamo il campo D_{i2} : per ogni x fissato nell'intervallo $(0, a)$ le funzioni (19) stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra il campo

$$\xi_i(x, y) \leq X \leq x, \quad 0 \leq y \leq h(x)$$

e il campo ⁽¹⁶⁾

$$\xi_i(x, h(x)) \leq X \leq x \quad 0 \leq Y \leq g_i(X; x, h(x)),$$

in cui ad un insieme di misura nulla dell'uno corrisponde un insieme di misura nulla dell'altro.

Con il procedimento del n. 7 si dimostra che ⁽¹⁷⁾ in corrispondenza ad ogni x fissato di $(0, a)$ per quasi tutti gli y di $(0, h(x))$ vale per quasi tutti gli X di $(\xi_i(x, y), x)$ la (22).

⁽¹⁵⁾ Cfr. l.c. in ⁽³⁾ § 1 n. 2, pp. 72-73 - Cfr. anche l.c. in ⁽⁷⁾ § 2, n. 2, I, e), pp. 375-376.

⁽¹⁶⁾ Se $0 \leq x \leq \bar{a}_i$, $h(x) \equiv g_i(x; 0, 0)$ e $\xi_i(x, h(x)) = 0$, $g_i(X; x, h(x)) = g_i(X; 0, 0)$.

⁽¹⁷⁾ Si tiene conto che per $\xi_i \leq X \leq x$ vale la (17).

Da questa, integrando e tenendo conto delle (II), si ottiene la ⁽¹⁸⁾

$$(24) \quad z_i(x, y) = \Psi_i(\xi_i) + \int_{\xi_i}^x f_i(X, g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y))) dX,$$

la quale in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ vale per quasi tutti gli y di $(0, h(x))$.

9. Consideriamo ⁽¹⁹⁾ le equazioni (I*). Aggiungendo e togliendo un termine opportuno, le equazioni (I*) vengono trasformate nelle

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z_i^*(x, y)}{\partial x} + \rho_i(x, y, z_j(x, y)) \frac{\partial z_i^*(x, y)}{\partial y} = \\ & = f_i(x, y, z_j^*(x, y)) + [\rho_i(x, y, z_j(x, y)) - \rho_i(x, y, z_j^*(x, y))] \frac{\partial z_i^*(x, y)}{\partial y}, \quad (i=1, \dots, m), \end{aligned}$$

le quali valgono in quasi tutto il campo D .

Integrando tali equazioni lungo le curve caratteristiche $Y = g_i(X; x, y)$, in virtù delle stesse considerazioni dei n. 5, 6, 7 si dimostrano le

$$\begin{aligned} (23^*) \quad z_i^*(x, y) = & \Phi_i^*(g_i(0; x, y)) + \int_0^x \{ f_i(X, g_i(X; x, y), z_j^*(X, g_i(X; x, y))) + \\ & + [\rho_i(X, g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y))) - \\ & - \rho_i(X, g_i(X; x, y), z_j^*(X, g_i(X; x, y)))] \frac{\partial z_i^*(X, g_i(X; x, y))}{\partial Y}, \end{aligned}$$

le quali valgono per $i = r+1, \dots, m$ in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ per quasi tutti gli y di $(0, \Gamma(x))$ e per $i = 1, \dots, r$ in corrispondenza ad ogni x di $(0, a_i)$ per quasi tutti gli y di $(g_i(x; 0, 0), \Gamma(x))$; inoltre (cfr. n. 8) si dimostra che per $i = 1, \dots, r$ in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ per quasi tutti gli y di $(0, h(x))$ valgono le

$$\begin{aligned} (24^*) \quad z_i^*(x, y) = & \Psi_i^*(\xi_i) + \int_{\xi_i}^x \{ f_i(X, g_i(X; x, y), z_j^*(X, g_i(X; x, y))) + \\ & + [\rho_i(X, g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y))) - \\ & - \rho_i(X, g_i(X; x, y), z_j^*(X, g_i(X; x, y)))] \frac{\partial z_i^*(X, g_i(X; x, y))}{\partial Y} \} dX. \end{aligned}$$

⁽¹⁸⁾ Per brevità scriviamo ξ_i in luogo di $\xi_i(x, y)$.

⁽¹⁹⁾ Circa l'ordine di idee sviluppato in questo numero e nel successivo cfr. M. CINQUINI CIBRARIO, *Teoremi di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, « Annali di Matematica » (IV), XLVIII (1959), pp. 103-134; cfr. § 1, n. 2, d), e).

10. Per $i = r + 1, \dots, m$, in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ per quasi tutti gli y di $(0, \Gamma(x))$, tenuto conto delle (23) e (23*), è

$$\begin{aligned} z_i(x, y) - z_i^*(x, y) &= \Phi_i(g_i(0; x, y)) - \Phi_i^*(g_i(0; x, y)) + \\ &+ \int_0^x \{ f_i(X, g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y))) - \\ &- f_i(X, g_i(X; x, y), z_j^*(X, g_i(X; x, y))) + \\ &+ [\rho_i(X, g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y))) - \\ &- \rho_i(X, g_i(X; x, y), z_j^*(X, g_i(X; x, y)))] \frac{\partial z_i^*(X, g_i(X; x, y))}{\partial Y} \} dX. \end{aligned}$$

Tenuto conto delle (9*) e poichè in quasi tutti i punti (X, Y) del campo D valgono le (2), in corrispondenza a quasi tutti gli y di $(0, \Gamma(x))$ per quasi tutti gli X di $(0, x)$ (cfr. n. 4) è

$$\begin{aligned} &|f_i(X, g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y))) - f_i(X, g_i(X; x, y), z_j^*(X, g_i(X; x, y)))| \leq \\ &\leq L(X) \sum_{j=1}^m |z_j(X, g_i(X; x, y)) - z_j^*(X, g_i(X; x, y))|, \\ &|[\rho_i(X, g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y))) - \\ &- \rho_i(X, g_i(X; x, y), z_j^*(X, g_i(X; x, y)))] \frac{\partial z_i^*(X, g_i(X; x, y))}{\partial Y}| \leq \\ &\leq hL(X) \sum_{j=1}^m |z_j(X, g_i(X; x, y)) - z_j^*(X, g_i(X; x, y))|, \end{aligned}$$

e quindi, tenuto conto anche delle (7), segue

$$(25) \quad |z_i(x, y) - z_i^*(x, y)| \leq \eta + (1 + h) \int_0^x L(X) \sum_{j=1}^m |z_j(X, g_i(X; x, y)) - z_j^*(X, g_i(X; x, y))| dX, \quad (i = r + 1, \dots, m)$$

la quale in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ vale per quasi tutti gli y di $(0, \Gamma(x))$.

Per $i = 1, \dots, r$ le (25) valgono nei rispettivi campi D_{i1} quasi ovunque, in corrispondenza ad ogni x di $(0, a_i)$ per quasi tutti gli y di $(g_i(x; 0, 0), \Gamma(x))$.

Nei campi D_{i2} , tenuto conto delle (24), (24*), è

$$\begin{aligned} &|z_i(x, y) - z_i^*(x, y)| \leq |\Psi_i(\xi_i) - \Psi_i^*(\xi_i)| + \\ &+ (1 + h) \int_{\xi_i}^x L(X) \sum_{j=1}^m |z_j(X, g_i(X; x, y)) - z_j^*(X, g_i(X; x, y))| dX \end{aligned}$$

in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ per quasi tutti gli y di $(0, h(x))$ e quindi, tenuto conto delle (7),

$$(26) \quad |z_i(x, y) - z_i^*(x, y)| \leq \eta + (1+h) \int_{\xi_i}^x L(X) \sum_{j=1}^m |z_j(X, g_i(X; x, y)) - z_j^*(X, g_i(X; x, y))| dX, \quad (i=1, \dots, r).$$

Indichiamo con $S(x)$ il massimo di

$$\sum_{i=1}^m |z_i(x, y) - z_i^*(x, y)|$$

per $0 \leq y \leq \Gamma(x)$, ($0 \leq x \leq a$).

Dalle (25), (26) segue in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ per quasi tutti gli y di $(0, \Gamma(x))$

$$(27) \quad |z_i(x, y) - z_i^*(x, y)| \leq \eta + (1+h) \int_0^x L(X) S(X) dX, \quad (i=1, \dots, m).$$

Essendo il primo membro una funzione continua rispetto a y e il secondo membro indipendente da y , la (27) vale in corrispondenza ad ogni x per tutti gli y di $(0, \Gamma(x))$, cioè in tutto il campo D , per $i=1, \dots, m$.

Sommando le m relazioni (27) si ottiene

$$\sum_{i=1}^m |z_i(x, y) - z_i^*(x, y)| \leq m\eta + m(1+h) \int_0^x L(X) S(X) dX$$

e quindi anche

$$(28) \quad S(x) \leq m\eta + m(1+h) \int_0^x L(X) S(X) dX.$$

Dalla (28) in virtù del lemma di GRONWALL (generalizzato) ⁽²⁰⁾ segue la

$$(29) \quad S(x) \leq m\eta e^{\int_0^x (1+h)L(X) dX} \leq m\eta e^{\int_0^a (1+h)L(X) dX}$$

e dalla (27) con un calcolo immediato

$$(30) \quad |z_i(x, y) - z_i^*(x, y)| \leq \eta e^{\int_0^x (1+h)L(X) dX} \quad (i=1, \dots, m).$$

⁽²⁰⁾ Cfr. G. SANSONE - R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, «Monografie Matematiche del C.N.R.», Ediz. Cremonese, Roma (1956), Cap. I, § 2, n. 1, pp. 15-16.

Pertanto, se $\eta < \frac{\varepsilon}{e^{m(1+h) \int_0^a L(X) dX}}$, valgono le (8) ed il teorema è dimostrato.

11. TEOREMA II (TEOREMA DI UNICITÀ). – *Valgano le ipotesi del Teorema I, relative alle funzioni $\rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, ($i = 1, \dots, m$).*

Allora nel campo

$$D: \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt.$$

(dove a , minore o uguale ad a_0 , è tale che per $0 \leq x < a$ è $\int_0^x M(t) dt < b_0$, mentre per $x = a$ può anche valere l'uguaglianza) non può esistere più di un sistema di funzioni di classe G

$$z_1(x, y), \dots, z_m(x, y),$$

le quali soddisfano il sistema (I) in quasi tutto D , in tutto l'intervallo $(0, b_0)$ le

$$(II_1) \quad z_i(0, y) = \Phi_i(y) \quad (i = 1, \dots, m)$$

e in tutto l'intervallo $(0, a)$ le

$$(II_2) \quad z_i(x, 0) = \Psi_i(x) \quad (i = 1, \dots, r),$$

essendo $\Phi_i(y)$, ($i = 1, \dots, m$), funzioni lipschitziane assegnate in $(0, b_0)$ e $\Psi_i(x)$, ($i = 1, \dots, r$), funzioni assolutamente continue assegnate in $(0, a)$ con

$$\Phi_i(0) = \Psi_i(0) \quad (i = 1, \dots, r),$$

cioè la soluzione, intesa in senso generalizzato, del problema misto considerato per il sistema (I) è unica.

Il Teorema II segue immediatamente dal Teorema I, ove sia

$$\Phi_i(y) = \Phi_i^*(y)$$

$$\Psi_i(x) = \Psi_i^*(x),$$

da cui $\eta = 0$. Dalla disuguaglianza (30) risulta allora

$$z_i(x, y) = z_i^*(x, y)$$

in tutto il campo D .

§ 2. - 1. TEOREMA III (TEOREMA DI ESISTENZA). - *Valgano tutte le ipotesi del Teorema I relative alle funzioni $\rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, ($i = 1, \dots, m$), definite nel campo C , inoltre le funzioni $f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, ($i = 1, \dots, m$), in corrispondenza ad ogni x di $(0, a_0)$ siano continue nel complesso delle variabili $y, z_1, \dots, z_m$ nel campo Δ , per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ soddisfino le (1₂) per ogni $(m+1)$ -pla $(y, z_1, \dots, z_m)$ del campo Δ ; per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ sia*

$$(31) \quad |f_i(x, y, z_1, \dots, z_m) - f_i(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq \\ \leq L(x) \{ |y - \bar{y}| + \sum_{j=1}^m |z_j - \bar{z}_j| \}, \quad (i = 1, \dots, m),$$

per ogni coppia di $(m+1)$ -ple $(y, z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ del campo Δ .

Siano date m funzioni

$$\Phi_1(y), \Phi_2(y), \dots, \Phi_m(y)$$

definite in $(0, b_0)$ e lipschitziane, tali che

$$(32) \quad |\Phi_i(y)| \leq \mu_i < \gamma_i$$

$$(33) \quad |\Phi_i(y) - \Phi_i(\bar{y})| \leq \lambda |y - \bar{y}|, \quad (i = 1, \dots, m)$$

dove λ e μ_i sono costanti non negative, e r funzioni

$$\Psi_1(x), \Psi(x), \dots, \Psi_r(x)$$

definite in $(0, a_0)$ e assolutamente continue, soddisfacenti le

$$(6_1) \quad \Phi_i(0) = \Psi_i(0) \quad (i = 1, \dots, r)$$

e le

$$(34) \quad |\Psi_i(x)| \leq \mu_i \quad (0 \leq x \leq a_0), \quad (i = 1, \dots, r).$$

Inoltre per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ sia

$$(35) \quad |\Psi'_i(x) - f_i(x, 0, z_1, \dots, z_m)| \leq H \rho_i(x, 0, z_1, \dots, z_m), \quad (i = 1, \dots, r),$$

per ogni m -pla $(z_1, \dots, z_m)$ tale che $|z_j| \leq \gamma_j$, ($j = 1, \dots, m$), essendo H una costante non negativa.

Sia a_1 il massimo numero reale positivo, con $a_1 \leq a_0$, tale che

$$\int_0^{a_1} M(t) dt < b_0$$

per $0 \leq x < a_1$, mentre per $x = a_1$ può anche valere l'uguaglianza; si dimostra che si può determinare un numero reale positivo $a \leq a_1$, soddisfacente condizioni opportune (cfr. disuguaglianze (36), (68)), e che esiste un sistema di funzioni

$$z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$$

definite nel campo

$$D: \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt,$$

ivi di classe G , le quali in quasi tutto il campo D soddisfano le

$$(I) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial x} + \rho_i(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)) \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial y} = \\ = f_i(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)) \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, m)$$

e inoltre le

$$(II) \quad \begin{aligned} z_i(0, y) &= \Phi_i(y) & (0 \leq y \leq b_0), \quad (i = 1, \dots, m), \\ z_i(x, 0) &= \Psi_i(x) & (0 \leq x \leq a), \quad (i = 1, \dots, r); \end{aligned}$$

vale a dire il problema misto considerato per il sistema (I) ammette almeno una soluzione in senso generalizzato.

2. Sia a_2 un numero reale positivo, con $a_2 \leq a_1$, soddisfacente le

$$(36) \quad \int_0^{a_2} N(t) dt \leq \gamma_i - \mu_i, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Diamo alcune definizioni che giustificheremo nel successivo numero.

In corrispondenza ad ogni intero positivo $n \geq 2$, posto $\varepsilon_n = \frac{a_2}{n}$, definiamo due successioni di funzioni

$$\begin{aligned} g_i^{(n)}(X; x, y) & & (n = 2, 3, \dots) \\ z_i^{(n)}(x, y) & & (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

nel modo che segue (rimandando al numero successivo la giustificazione delle definizioni stesse):

$$(37) \quad z_i^{(n)}(x, y) = \Phi_i(y) \quad (i = 1, \dots, m)$$

nel rettangolo

$$-\frac{a_2}{2} \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq b_0;$$

le funzioni

$$(38) \quad g_i^{(n)}(X; x, y) = y - \int_x^x \sigma_i^{(n)}(t, g_i^{(n)}(t; x, y)) dt$$

nel campo

$$D_\infty^{(2)} : 0 \leq X \leq a_2, \quad 0 \leq x \leq a_2, \quad -\infty < y < +\infty,$$

avendo posto (cfr. notazioni (18₁))

$$(39_1) \quad \sigma_i^{(n)}(X, Y) = \rho_i(X, Y, z_i^{(n)}(X - \delta_n, Y))$$

se il punto (X, Y) appartiene al campo

$$D_2 : 0 \leq X \leq a_2, \quad 0 \leq Y \leq \Gamma(X)$$

dove

$$(11) \quad \Gamma(X) = b_0 - \int_0^x M(t) dt,$$

$$(39_2) \quad \sigma_i^{(n)}(X, Y) = \rho_i(X, 0, z_j^{(n)}(X - \delta_n, 0))$$

se $0 \leq X \leq a_2, Y < 0$,

$$(39_3) \quad \sigma_i^{(n)}(X, Y) = \rho_i(X, \Gamma(X), z_j^{(n)}(X - \delta_n, \Gamma(X)))$$

se $0 \leq X \leq a_2, Y > \Gamma(X)$.

Per $i = r + 1, \dots, m$ nel campo D definiamo (cfr. notazioni (18₂))

$$(40) \quad \begin{aligned} z_i^{(n)}(x, y) &= \Phi_i(g_i^{(n)}(0; x, y)) + \\ &+ \int_0^x f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, y))) dX. \end{aligned}$$

In corrispondenza ad ogni intero i , con $i = 1, \dots, r$, consideriamo la curva

$$y = g_i^{(n)}(x; 0, 0) \quad (0 \leq x \leq a_2);$$

tale curva, uscente dall'origine, incontra il contorno del campo D in un

ulteriore punto, di ascissa $\alpha_i^{(n)}$ (con $0 < \alpha_i^{(n)} \leq a_2$) appartenente o alla curva Γ oppure (e ciò è possibile soltanto se $\Gamma(a_2) > 0$) al segmento $x = a_2$, $0 < y \leq \Gamma(a_2)$.

Indichiamo con $D_{i1}^{(n)}$ il campo

$$D_{i1}^{(n)}: 0 \leq x \leq \alpha_i^{(n)}, \quad g_i^{(n)}(x; 0, 0) \leq y \leq \Gamma(x)$$

e con $D_{i2}^{(n)}$ il campo costituito dai punti

$$0 \leq x \leq \alpha_i^{(n)}, \quad 0 \leq y \leq g_i^{(n)}(x; 0, 0)$$

e inoltre, se $\alpha_i^{(n)} < a_2$, anche dai punti

$$\alpha_i^{(n)} < x \leq a_2, \quad 0 \leq y \leq \Gamma(x).$$

Nel campo $D_{i1}^{(n)}$ definiamo la funzione $z_i^{(n)}(x, y)$ mediante la (40), ($i = 1, \dots, r$).

Sia (x, y) un punto del campo $D_{i2}^{(n)}$: detto $\xi_i^{(n)}$ il valore (unico), compreso tra 0 e α , per cui

$$(41) \quad g_i^{(n)}(\xi_i^{(n)}; x, y) = 0,$$

definiamo

$$(42) \quad z_i^{(n)}(x, y) = \Psi_i(\xi_i^{(n)}) + \int_{\xi_i^{(n)}}^x f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; \xi_i^{(n)}, y))) dX.$$

3. a) Mostriamo che le (38), (40), (42) definiscono le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$, $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), nei campi indicati: ciò è provato successivamente nelle porzioni di tali campi corrispondenti a valori x degli intervalli $(0, \delta_n)$, $(0, 2\delta_n), \dots, (0, (n-1)\delta_n)$, $(0, a_2)$.

Sia $0 \leq X \leq \delta_n$; tenuto conto delle (37) e (39) è

$$\sigma_i^{(n)}(X, Y) = \rho_i(X, Y, \Phi(Y))$$

$$\sigma_i^{(n)}(X, Y) = \rho_i(X, 0, \Phi(0))$$

$$\sigma_i^{(n)}(X, Y) = \rho_i(X, \Gamma(X), \Phi(\Gamma(X)))$$

a seconda che $0 \leq Y \leq \Gamma(X)$, $Y < 0$, $\Gamma(X) < Y$ rispettivamente.

Tenuto conto delle (1₁), (2₁) e (33), per quasi tutti gli X di $(0, \delta_n)$ è allora

$$(43') \quad |\sigma_i^{(n)}(X, Y)| \leq M(X)$$

per qualunque Y reale, e

$$(43'') \quad |\sigma_i^{(n)}(X, Y) - \sigma_i^{(n)}(X, \bar{Y})| \leq (1 + m\lambda)L(X)|Y - \bar{Y}|$$

per ogni coppia di valori reali $Y, \bar{Y}$.

Allora all'equazione integrale (38) sono applicabili i teoremi di esistenza e unicità di CARATHÉODORY ⁽²¹⁾ ed in corrispondenza ad ogni coppia di valori x, y , con $0 \leq x \leq \delta_n$, y reale qualunque, esiste un'unica funzione $g_i^{(n)}(X; x, y)$, ($0 \leq X \leq \delta_n$), soddisfacente l'equazione (38).

Le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$, le quali risultano definite nel campo

$$0 \leq X \leq \delta_n, \quad 0 \leq x \leq \delta_n, \quad -\infty < y < +\infty,$$

sono ivi di classe $G^{[1]}$.

Infatti, essendo in virtù delle (1₁)

$$(44) \quad |g_i^{(n)}(X'; x, y) - g_i^{(n)}(X''; x, y)| \leq \left| \int_{X'}^{X''} M(t) dt \right|, \quad (i = 1, \dots, m),$$

l'assoluta continuità in X segue dall'assoluta continuità della funzione $\int_0^X M(t) dt$.

Inoltre, tenuto conto delle (43), è ⁽²²⁾

$$(45) \quad |g_i^{(n)}(X; x', y) - g_i^{(n)}(X; x'', y)| \leq e^{(1+m\lambda) \int_0^{\delta_n} L(t) dt} \left| \int_{x'}^{x''} M(t) dt \right|, \quad (i = 1, \dots, m),$$

da cui segue l'assoluta continuità in x , e

$$(46) \quad |g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})| \leq e^{(1+\lambda m) \int_0^{\delta_n} L(t) dt} |y - \bar{y}|, \quad (i = 1, \dots, m),$$

cioè le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono lipschitziane rispetto a y con costante di LIPSCHITZ indipendente da X, x .

In virtù delle (3), le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$ per $i = 1, \dots, r$ sono crescenti in X , per $i = r + 1, \dots, m$ decrescenti in X , e, per il citato teorema di unicità di CARATHÉODORY, sono tutte crescenti in y e inoltre sono decrescenti in x per $i = 1, \dots, r$, crescenti in x per $i = r + 1, \dots, m$.

Osserviamo inoltre che, se i è un intero compreso tra $r + 1$ e m e (x, y) è un punto del campo D con $0 \leq x \leq \delta_n$, per ogni X appartenente all'intervallo $(0, x)$ è ⁽²³⁾

$$(47) \quad 0 \leq g_i^{(n)}(X; x, y) \leq \Gamma(X),$$

vale a dire il punto $(X, g_i^{(n)}(X; x, y))$ appartiene al campo D ; pertanto, tenuto conto delle (37), (39) è

$$\sigma_i^{(n)}(X, g_i^{(n)}(X; x, y)) = \rho_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, y)))$$

⁽²⁴⁾ Cfr. l.c. in ⁽⁶⁾.

⁽²²⁾ Cfr. l.c. in ⁽³⁾ § 1, n. 2, p. 74, n. 3 p. 76, e l.c. in ⁽⁷⁾ § 1, n. 1, pp. 360-63.

⁽²³⁾ Cfr. nota ⁽⁸⁾.

e la (38) diviene in questo caso

$$(48) \quad g_i^{(n)}(X; x, y) = y - \int_X^x \varphi_i(t, g_i^{(n)}(t; x, y), \Phi_j(g_i^{(n)}(t; x, y))) dt.$$

Per $i = 1, \dots, r$, se (x, y) è un punto del campo D_2 , con $0 \leq x \leq \delta_n$, tale che $y \geq g_i^{(n)}(x; 0, 0)$, essendo, per $0 \leq X \leq x$,

$$0 \leq g_i^{(n)}(X; 0, 0) \leq g_i^{(n)}(X; x, y) \leq y,$$

per ogni X di $(0, x)$ il punto $(X, g_i^{(n)}(X; x, y))$ appartiene al campo D_2 e vale quindi la (48).

Se (x, y) è un punto del campo D_2 , con $0 \leq x \leq \delta_n$, tale che $y < g_i^{(n)}(x; 0, 0)$, essendo

$$g_i^{(n)}(X; x, y) < g_i^{(n)}(X; 0, 0) \quad (0 \leq X \leq \delta_n)$$

ed in particolare

$$g_i^{(n)}(0; x, y) < 0,$$

esiste uno ed un sol valore $\xi_i^{(n)}$, con $0 < \xi_i^{(n)} \leq x \leq \delta_n$, tale che $g_i^{(n)}(\xi_i^{(n)}; x, y) = 0$. Essendo la funzione $g_i^{(n)}(X; x, y)$ crescente rispetto a X , per $\xi_i^{(n)} \leq X \leq x$ il punto $(X, g_i^{(n)}(X; x, y))$ appartiene al campo D_2 e quindi vale la (48).

b) Tenuto conto delle (37) e (47), le (40) definiscono quindi le funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$ per $i = r + 1, \dots, m$ nel campo

$$0 \leq x \leq \delta_n, \quad 0 \leq y \leq \Gamma(x);$$

precisamente per $0 \leq x \leq \delta_n$ le (40) divengono

$$z_i^{(n)}(x, y) = \Phi_i(g_i^{(n)}(0; x, y)) + \int_0^x f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_j(g_i^{(n)}(X; x, y))) dX.$$

Dalle (12), (32), (36) seguono le

$$(49) \quad |z_i^{(n)}(x, y)| \leq \gamma_i \quad (i = r + 1, \dots, m).$$

Inoltre è

$$(50_1) \quad z_i^{(n)}(0, y) = \Phi_i(y), \quad (0 \leq y \leq b_0), \quad (i = r + 1, \dots, m).$$

Le funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i = r + 1, \dots, m$), risultano di classe G nel campo indicato.

Infatti, se (x, y) , $(x, \bar{y})$ sono due punti di tale campo, è

$$\begin{aligned} |z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})| &= |\Phi_i(g_i^{(n)}(0; x, y)) - \Phi_i(g_i^{(n)}(0; x, \bar{y})) + \\ &+ \int_0^x [f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, y))) - f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, \bar{y}), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})))] dX| \leq \\ &\leq \lambda |g_i^{(n)}(0; x, y) - g_i^{(n)}(0; x, \bar{y})| + (1 + m\lambda) \int_0^x L(X) |g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})| dX, \end{aligned}$$

e, tenuto conto della (46),

$$|z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})| \leq e^{(1+m\lambda) \int_0^{\delta_n} L(t) dt} [\lambda + (1 + m\lambda) \int_0^{\delta_n} L(t) dt] |y - \bar{y}|, \quad (i = r + 1, \dots, m).$$

Inoltre, supposto per esempio $x' < x''$, è ⁽²⁴⁾

$$\begin{aligned} |z_i^{(n)}(x'', y) - z_i^{(n)}(x', y)| &= |\Phi_i(g_i^{(n)}(0; x'', y)) - \Phi_i(g_i^{(n)}(0; x', y)) + \\ &+ \int_0^{x'} [f_i(X, g_i^{(n)}(X; x'', y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x'', y))) - \\ &- f_i(X, g_i^{(n)}(X; x', y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x', y)))] dX + \\ &+ \int_{x'}^{x''} f_i(X, g_i^{(n)}(X; x'', y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x'', y))) dX| \leq \\ &\leq \lambda [g_i^{(n)}(0; x'', y) - g_i^{(n)}(0; x', y)] + \\ &+ (1 + m\lambda) \int_0^{x'} L(X) [g_i^{(n)}(X; x'', y) - g_i^{(n)}(X; x', y)] dX + \int_{x'}^{x''} N(X) dX, \end{aligned}$$

e, tenuto conto delle (45),

$$\begin{aligned} (52) \quad &|z_i^{(n)}(x'', y) - z_i^{(n)}(x', y)| \leq \\ &\leq e^{(1+m\lambda) \int_0^{\delta_n} L(t) dt} \left[\lambda + (1 + m\lambda) \int_0^{\delta_n} L(t) dt \right] \int_{x'}^{x''} M(t) dt + \int_{x'}^{x''} N(t) dt, \quad (i = r + 1, \dots, m). \end{aligned}$$

⁽²⁴⁾ Per $i = r + 1, \dots, m$, se $x' < x''$, è

$$g_i^{(n)}(X; x'', y) - g_i^{(n)}(X; x', y) > 0 \quad (0 \leq X \leq \delta_n).$$

c) Sia r un intero fissato tra 1 e r .

Consideriamo la curva

$$y = g_i^{(n)}(x; 0, 0)$$

la quale è definita nell'intervallo $(0, \delta_n)$.

Sia $\beta_i^{(n)}$ la massima ascissa dei punti di tale curva appartenenti al campo D_2 . È $\beta_i^{(n)} \leq \delta_n$.

Sia

$$y = h_i^{(n)}(x)$$

la funzione così definita: per $0 \leq x \leq \beta_i^{(n)}$, $h_i^{(n)}(x) \equiv g_i^{(n)}(x; 0, 0)$, e, se $\beta_i^{(n)} < \delta_n$, per $\beta_i^{(n)} < x \leq \delta_n$, $h_i^{(n)}(x) \equiv \Gamma(x)$.

Indichiamo con $D_{i,1}^{(n)}$ il campo

$$D_{i,1}^{(n)} : 0 \leq x \leq \beta_i^{(n)}, \quad g_i^{(n)}(x; 0, 0) \leq y \leq \Gamma(x)$$

e con $D_{i2,1}^{(n)}$ il campo

$$D_{i2,1}^{(n)} : 0 \leq x \leq \delta_n, \quad 0 \leq y \leq h_i^{(n)}(x).$$

Sia (x, y) un punto del campo $D_{i,1}^{(n)}$: per ogni X di $(0, x)$ per quanto abbiamo precedentemente osservato, vale la (47); la (40) definisce allora la funzione $z_i^{(n)}(x, y)$ in tale campo. Valgono le (49) e (50), e inoltre le (51) e (52), cioè la funzione $z_i^{(n)}(x, y)$ è di classe G nel campo $D_{i,1}^{(n)}$.

Sia (x, y) un punto del campo $D_{i2,1}^{(n)}$: per ogni X dell'intervallo $(\xi_i^{(n)}, x)$ vale la (47). Pertanto la (42), la quale diviene

$$z_i^{(n)}(x, y) = \Psi_i(\xi_i^{(n)}) + \int_{\xi_i^{(n)}}^x f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, y))) dX,$$

definisce la funzione $z_i^{(n)}(x, y)$ nel campo $D_{i2,1}^{(n)}$.

Tenuto conto delle (12), (34) e (36) dalla (42) segue la (49).

Inoltre è

$$(50_2) \quad z_i^{(n)}(x, 0) = \Psi_i(x), \quad (0 \leq x \leq \delta_n), \quad (i = 1, \dots, r).$$

Dimostriamo che anche nel campo $D_{i2,1}^{(n)}$ la funzione $z_i^{(n)}(x, y)$ è di classe G .

Siano (x, y) , $(x, \bar{y})$ due punti del campo e sia per esempie $\bar{y} < y$; siano $\xi_i^{(n)}$, $\bar{\xi}_i^{(n)}$ i valori, compresi tra 0 e δ_n , per cui

$$(53) \quad g_i^{(n)}(\xi_i^{(n)}; x, y) = g_i^{(n)}(\bar{\xi}_i^{(n)}; x, \bar{y}) = 0,$$

da cui, tenuto conto delle (37) e (48),

$$\begin{aligned} y - \int_{\xi_i^{(n)}}^x \rho_i(t, g_i^{(n)}(t; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(t; x, y))) dt = \\ = \bar{y} - \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x \rho_i(t, g_i^{(n)}(t; x, \bar{y}), \Phi_i(g_i^{(n)}(t; x, \bar{y}))) dt. \end{aligned}$$

Ne segue, essendo $\xi_i^{(n)} < \bar{\xi}_i^{(n)}$ e $g_i^{(n)}(t; x, \bar{y}) < g_i^{(n)}(t; x, y)$, ($0 \leq t \leq \delta_n$),

$$\begin{aligned} \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} \rho_i(t, g_i^{(n)}(t; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(t; x, y))) dt = y - \bar{y} + \\ + \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x [\rho_i(t, g_i^{(n)}(t; x, \bar{y}), \Phi_i(g_i^{(n)}(t; x, \bar{y}))) - \rho_i(t, g_i^{(n)}(t; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(t; x, y)))] dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (54) \quad \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} \rho_i(t, g_i^{(n)}(t; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(t; x, y))) dt \leq y - \bar{y} + \\ + (1 + m\lambda) \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x L(t)[g_i^{(n)}(t; x, y) - g_i^{(n)}(t; x, \bar{y})] dt. \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}) = \Psi_i(\xi_i^{(n)}) + \int_{\xi_i^{(n)}}^x f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, y))) dX - \\ - [\Psi_i(\bar{\xi}_i^{(n)}) + \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, \bar{y}), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, \bar{y}))) dX] = \\ = \Psi_i(\xi_i^{(n)}) - \Psi_i(\bar{\xi}_i^{(n)}) + \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, y))) dX + \\ + \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x [f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, y))) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, \bar{y}), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})))dX = \\
& = \Psi_i(\xi_i^{(n)}) - \Psi_i(\bar{\xi}_i^{(n)}) - \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^{\xi_i^{(n)}} f_i(X, 0, \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, y)))dX - \\
& - \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^{\xi_i^{(n)}} [f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, y))) - \\
& - f_i(X, 0, \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, y)))]dX + \\
& + \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x [f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, y))) - \\
& - f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, \bar{y}), \Phi_i(g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})))dX.
\end{aligned}$$

Osserviamo che dalla (35) segue ⁽²⁵⁾ per ogni coppia di valori x', x'' di $(0, \alpha_0)$, con $x' < x''$, e per qualunque m -pla di funzioni $Z_j(X)$, con $|Z_j(X)| \leq \gamma_j$, ($j = 1, \dots, m$).

$$\begin{aligned}
(35') \quad & \left| \Psi_i(x'') - \Psi_i(x') - \int_{x'}^{x''} f_i(X, 0, Z_1(X), \dots, Z_m(X))dX \right| \leq \\
& \leq H \int_{x'}^{x''} \rho_i(X, 0, Z_1(X), \dots, Z_m(X))dX \quad (i = 1, \dots, r).
\end{aligned}$$

In virtù delle (35'), (2₁) e (54) ed essendo per $\xi_i^{(n)} \leq X \leq \bar{\xi}_i^{(n)}$

$$g_i^{(n)}(X; x, y) \leq g_i^{(n)}(\bar{\xi}_i^{(n)}; x, y) = g_i^{(n)}(\bar{\xi}_i^{(n)}; x, y) - g_i^{(n)}(\bar{\xi}_i^{(n)}; x, \bar{y}),$$

⁽²⁵⁾ Infatti è

$$\begin{aligned}
& \left| \Psi_i(x'') - \Psi_i(x') - \int_{x'}^{x''} f_i(X, 0, Z_1(X), \dots, Z_m(X))dX \right| = \\
& = \left| \int_{x'}^{x''} [\Psi_i'(X) - f_i(X, 0, Z_1(X), \dots, Z_m(X))]dX \right| \leq \\
& \leq \int_{x'}^{x''} |\Psi_i'(X) - f_i(X, 0, Z_1(X), \dots, Z_m(X))|dX \leq \\
& \leq H \int_{x'}^{x''} \rho_i(X, 0, Z_1(X), \dots, Z_m(X))dX \quad (i = 1, \dots, r).
\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto delle (53), è

$$\begin{aligned}
|z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})| &\leq H \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} \rho_i(X, 0, \Phi_j(g_i^{(n)}(X; x, y))) dX + \\
&+ \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} L(X) g_i^{(n)}(X; x, y) dX + (1 + m\lambda) \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x L(X) [g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})] dX \leq \\
&\leq H \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} \rho_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_j(g_i^{(n)}(X; x, y))) dX + \\
&+ H \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} |\rho_i(X, 0, \Phi_j(g_i^{(n)}(X; x, y))) - \rho_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), \Phi_j(g_i^{(n)}(X; x, y)))| dX + \\
&+ \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} L(X) g_i^{(n)}(X; x, y) dX + (1 + m\lambda) \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x L(X) [g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})] dX \leq \\
&\leq H(y - \bar{y}) + (H + 1) [g_i^{(n)}(\bar{\xi}_i^{(n)}; x, y) - g_i^{(n)}(\bar{\xi}_i^{(n)}; x, \bar{y})] \int_0^{\delta_n} L(X) dX + \\
&+ (H + 1)(1 + m\lambda) \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x L(X) [g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})] dX
\end{aligned}$$

e, in virtù delle (46),

$$(55) \quad |z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})| \leq \left[H + e^{(1+m\lambda) \int_0^{\delta_n} L(t) dt} (H + 1)(2 + m\lambda) \int_0^{\delta_n} L(t) dt \right] (y - \bar{y}).$$

Dimostriamo ora che la funzione $z_i^{(n)}(x, y)$ è assolutamente continua rispetto a x nel campo $D_{i2,1}^{(n)}$.

Siano $(x', y), (x'', y)$ due punti di tale campo, con $x' < x'', y > 0$ ⁽²⁶⁾ e supponiamo per esempio che il punto $P''(x'', g_i^{(n)}(x''; x', y))$ appartenga al campo stesso.

⁽²⁶⁾ Se $y = 0$, è $z_i^{(n)}(x, 0) = \Psi_i(x)$, ($i = 1, \dots, r$), e l'assoluta continuità è nei dati.

Tenuto conto delle (1₂), (42), (55) è ⁽²⁷⁾

$$\begin{aligned} |z_i^{(n)}(x', y) - z_i^{(n)}(x'', y)| &= |z_i^{(n)}(x', y) - z_i^{(n)}(x'', g_i^{(n)}(x''; x', y)) + \\ &+ z_i^{(n)}(x'', g_i^{(n)}(x''; x', y)) - z_i^{(n)}(x'', y)| \leq \\ &\leq \int_{x'}^{x''} N(t)dt + \bar{\lambda}[g_i^{(n)}(x''; x', y) - y], \end{aligned}$$

avendo posto

$$\bar{\lambda} = H + e^{(1+m\lambda)\int_0^{\delta_n} L(t)dt} (H+1)(2+m\lambda) \int_0^{\delta_n} L(t)dt.$$

Tenuto conto delle (1₁) e (38) ne segue

$$(56) \quad |z_i^{(n)}(x', y) - z_i^{(n)}(x'', y)| \leq \int_{x'}^{x''} N(t)dt + \bar{\lambda} \int_{x'}^{x''} M(t)dt.$$

È evidente che, se appartiene al campo $D_{i2,1}^{(n)}$ il punto $P'(x', g_i^{(n)}(x'; x'', y))$, vale ancora la (56).

Se nessuno dei punti P', P appartiene al campo $D_{i2,1}^{(n)}$ consideriamo la curva

$$Y = g_i^{(n)}(X; x', y) \quad (0 \leq X \leq \delta_n)$$

e sia $\bar{P}(\bar{x}, \Gamma(\bar{x}))$ il punto comune a tale curva e alla curva Γ , con $x' < \bar{x} < x''$ ⁽²⁸⁾. Consideriamo quindi la curva

$$Y = g_i^{(n)}(X; \bar{x}, y) \quad (0 \leq X \leq \delta_n)$$

e supponiamo che uno dei due punti $\bar{P}''(x'', g_i^{(n)}(x''; \bar{x}, y))$, $\bar{P}'(\bar{x}, g_i^{(n)}(\bar{x}; x'', y))$ appartenga al campo $D_{i2,1}^{(n)}$. Tenendo conto della (56) è allora

$$\begin{aligned} |z_i^{(n)}(x', y) - z_i^{(n)}(x'', y)| &\leq |z_i^{(n)}(x', y) - z_i^{(n)}(\bar{x}, y)| + \\ &+ |z_i^{(n)}(\bar{x}, y) - z_i^{(n)}(x'', y)| \leq \\ &\leq \int_{x'}^{\bar{x}} N(t)dt + \bar{\lambda} \int_{x'}^{\bar{x}} M(t)dt + \int_{\bar{x}}^{x''} N(t)dt + \bar{\lambda} \int_{\bar{x}}^{x''} M(t)dt, \end{aligned}$$

cioè vale ancora la (56).

⁽²⁷⁾ È

$$g_i^{(n)}(X; x'', g_i^{(n)}(x''; x', y)) = g_i^{(n)}(X; x', y), \quad (0 \leq X \leq \delta_n).$$

⁽²⁸⁾ Se fosse $\bar{x} \geq x''$, il punto P'' apparterrebbe al campo $D_{i2,1}^{(n)}$.

Se nessuno dei punti $\bar{P}'$, $\bar{P}'$ appartiene al campo $D_{i2,1}^{(n)}$, ripetendo un numero finito ⁽²⁹⁾ di volte il procedimento indicato si dimostra che vale la (56) comunque siano i punti (x', y) , (x'', y) appartenenti al campo $D_{i2,1}^{(n)}$.

Pertanto ciascuna delle funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i = 1, \dots, r$), in ognuno dei campi $D_{i1,1}^{(n)}$, $D_{i2,1}^{(n)}$ in cui la curva

$$y = g_i^{(n)}(x; 0, 0) \quad (0 \leq x \leq \delta_n)$$

divide il campo

$$0 \leq x \leq \delta_n, \quad 0 \leq y \leq \Gamma(x),$$

e le funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i = r + 1, \dots, m$), nell'intero campo soddisfano le disegualianze

$$(57) \quad |z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})| \leq \lambda_1 |y - \bar{y}| \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(58) \quad |z_i^{(n)}(x', y) - z_i^{(n)}(x'', y)| \leq \lambda_1 \left| \int_{x'}^{x''} M(t) dt \right| + \left| \int_{x'}^{x''} N(t) dt \right|, \quad (i = 1, \dots, m),$$

avendo indicato con λ_1 la maggiore delle costanti

$$\bar{\lambda}, \quad \left[\lambda + (1 + m\lambda) \int_0^{\delta_n} L(t) dt \right] e^{(1+m\lambda) \int_0^{\delta_n} L(t) dt};$$

evidentemente è

$$\lambda < \lambda_1.$$

È immediato allora che le (57), (58) valgono nell'intero campo anche per $i = 1, \dots, r$, e le funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono ivi di classe G .

4. Successivamente le (38) definiscono, per $i = 1, \dots, m$, le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$ nel campo

$$0 \leq X \leq 2\delta_n, \quad 0 \leq x \leq 2\delta_n, \quad -\infty < y < +\infty$$

⁽²⁹⁾ Osserviamo che è

$$|g_i^{(n)}(X; x, y) - y| \leq \left| \int_X^x M(t) dt \right|, \quad \Gamma(X) = b_0 - \int_0^X M(t) dt,$$

da cui segue facilmente che

$$\Gamma(x') - y \geq 2[\Gamma(\bar{x}) - y]$$

e così successivamente.

Infatti, tenuto conto delle (1₁), (2₁), (57), si prova che valgono le (43') e le (43''), dove si sostituisca λ_1 a λ . In virtù dei teoremi di esistenza e unicità di CARATHÉODORY, in corrispondenza ad ogni coppia di valori x, y , con $0 \leq x \leq 2\delta_n$, y reale qualunque, esiste un'unica funzione $g_i^{(n)}(X; x, y)$, ($0 \leq X \leq 2\delta_n$), soddisfacente l'equazione (38).

Valgono le disequaglianze (44) e le (45), (46), in cui si sostituisca λ_1 a λ e $2\delta_n$ a δ_n , cioè le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$ sono di classe $G^{[1]}$ nel campo indicato.

Le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$ sono tutte crescenti in y , inoltre per $i=1, \dots, r$ sono crescenti in X e decrescenti in x , per $i=r+1, \dots, m$ decrescenti in X e crescenti in x .

Per $i=r+1, \dots, m$ se (x, y) è un punto del campo

$$0 \leq x \leq 2\delta_n, \quad 0 \leq y \leq \Gamma(x)$$

per $0 \leq X \leq x$ valgono le (47) e le

$$(48_1) \quad g_i^{(n)}(X; x, y) = y - \int_x^x \rho_i(t, g_i^{(n)}(t; x, y), z_i^{(n)}(t - \delta_n, g_i^{(n)}(t; x, y))) dt.$$

Per $i=1, \dots, r$ si considerino i due campi in cui il campo ora indicato è diviso dalla curva $y = g_i^{(n)}(x; 0, 0)$, ($0 \leq x \leq 2\delta_n$), che indichiamo, con notazioni analoghe a quelle usate nel n. 3, con $D_{i1,2}^{(n)}$, $D_{i2,2}^{(n)}$. Se (x, y) appartiene al campo $D_{i1,2}^{(n)}$ (in cui $y \geq g_i^{(n)}(x; 0, 0)$) le (47) e (48₁) valgono per $0 \leq X \leq x$, se appartiene al campo $D_{i2,2}^{(n)}$ valgono per $\xi_i^{(n)} \leq X \leq x$, essendo $\xi_i^{(n)}$ il valore (unico) per cui $g_i^{(n)}(\xi_i^{(n)}; x, y) = 0$.

Tenuto conto delle (47), le (40) definiscono quindi le funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i=r+1, \dots, m$), nel campo

$$0 \leq x \leq 2\delta_n, \quad 0 \leq y \leq \Gamma(x)$$

e le funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i=1, \dots, r$), nel campo $D_{i1,2}^{(n)}$, infine le (42) definiscono tali funzioni nel campo $D_{i2,2}^{(n)}$.

Valgono le (49).

Con calcoli analoghi a quelli del n. 3, tenuto conto delle (43) (dove a λ si sostituisca λ_1) e delle (57), (58), si prova che valgono le disequaglianze (57), (58), in cui alla costante λ_1 si sostituisca la maggiore delle costanti

$$H + e^{(1+m\lambda_1) \int_0^{2\delta_n} L(t) dt} (H + 1)(2 + m\lambda_1) \int_0^{2\delta_n} L(t) dt,$$

$$\left[\lambda + (1 + m\lambda_1) \int_0^{2\delta_n} L(t) dt \right] e^{(1+m\lambda_1) \int_0^{2\delta_n} L(t) dt},$$

che indichiamo con λ_2 (risulta $\lambda_1 < \lambda_2$); pertanto le funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono di classe G nei punti del campo D_2 per i quali è $0 \leq x \leq 2\delta_n$.

Inoltre per $i = 1, \dots, r$, $0 \leq x \leq 2\delta_n$ valgono le (50₂).

5. Così proseguendo si prova che le (38), (40), (42) definiscono le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$, $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), rispettivamente nei campi

$$\begin{aligned} D_{\infty}^{(2)}: \quad & 0 \leq X \leq a_2, \quad 0 \leq x \leq a_2, \quad -\infty < y < +\infty, \\ D_2: \quad & 0 \leq x \leq a_2, \quad 0 \leq y \leq \Gamma(x); \end{aligned}$$

le funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), soddisfano in D_2 le (49), inoltre le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$ soddisfano le (47) e (48₁), per $i = r+1, \dots, m$ se il punto (x, y) appartiene a D_2 per $0 \leq X \leq x$, per $i = 1, \dots, r$ se (x, y) appartiene al campo $D_{i1}^{(n)}$ (cfr. n. 2) per $0 \leq X \leq x$, se (x, y) appartiene al campo $D_{i2}^{(n)}$ per $\xi_i^{(n)} \leq X \leq x$.

Le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono di classe $G^{[1]}$ nel campo $D_{\infty}^{(2)}$, le funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), di classe G nel campo D_2 . Infatti si dimostra successivamente che valgono, oltre alle (44), le (45), (46) e (57), (58), in cui, al posto delle costanti λ e λ_1 , λ_1 e λ_2 (cfr. n. 3, 4), compaiono le costanti λ_2 e $\lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}$ e λ_n legate ciascuna alla precedente da una relazione del tipo di quella che lega λ_2 a λ_1 , con $\lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n$.

Inoltre, insieme alle (50₁), valgono le (50₂) per $i = 1, \dots, r$ in tutto l'intervallo $(0, a_2)$.

6. Vogliamo provare che si può determinare un numero reale positivo a , con $a \leq a_2$, tale che le funzioni delle $2m$ successioni

$$(59) \quad g_i^{(n)}(X; x, y) - y \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(60) \quad z_i^{(n)}(x, y) \quad (i = 1, \dots, m)$$

siano ugualmente limitate e ugualmente continue rispettivamente nel campo

$$D_{\infty}: \quad 0 \leq X \leq a, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y < +\infty$$

e nel campo

$$D: \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \Gamma(x).$$

Le funzioni (59), (60) sono equilimitate rispettivamente nei campi $D_{\infty}^{(2)}$, D_2 : infatti valgono le (49) ed è inoltre

$$|g_i^{(n)}(X; x, y) - y| \leq \int_0^{a_2} M(t) dt.$$

Proviamo ora che le (59), (60) sono equilipschitziane in y , con costante di LIPSCHITZ indipendente da X e x , rispettivamente nei campi D_∞ , D .

Tenuto conto che, se i punti (x, y) , $(x, \bar{y})$ appartengono al campo D_2 , per $i = r + 1, \dots, m$, $0 \leq X \leq x$ valgono le (48₁), è

$$\begin{aligned} |g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})| &\leq |y - \bar{y}| + \\ &+ \int_X^x L(t) |g_i^{(n)}(t; x, y) - g_i^{(n)}(t; x, \bar{y})| + \\ &+ \sum_{j=1}^m |z_j^{(n)}(t - \delta_n, g_i^{(n)}(t; x, y)) - z_j^{(n)}(t - \delta_n, g_i^{(n)}(t; x, \bar{y}))| dt. \end{aligned}$$

Posto per brevità

$$(61) \quad \sum_{j=1}^m \frac{|z_j^{(n)}(t - \delta_n, g_i^{(n)}(t; x, y)) - z_j^{(n)}(t - \delta_n, g_i^{(n)}(t; x, \bar{y}))|}{|g_i^{(n)}(t; x, y) - g_i^{(n)}(t; x, \bar{y})|} = A_i^{(n)}(t),$$

segue

$$\begin{aligned} |g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})| &\leq |y - \bar{y}| + \\ &+ \int_X^x L(t)(1 + A_i^{(n)}(t)) |g_i^{(n)}(t; x, y) - g_i^{(n)}(t; x, \bar{y})| dt, \end{aligned}$$

da cui, in virtù del lemma di GRONWALL (generalizzato) ⁽³⁰⁾, segue

$$(62) \quad |g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})| \leq e^{\int_X^x L(t)(1 + A_i^{(n)}(t)) dt} |y - \bar{y}|, \\ (0 \leq X \leq x), \quad (i = r + 1, \dots, m).$$

Sia i un intero fissato tra 1 e r : se (x, y) , $(x, \bar{y})$ sono due punti del campo $D_{11}^{(n)}$, in corrispondenza ad ognuno dei valori y , $\bar{y}$ la (48₁) vale in particolare per $0 \leq X \leq x$ e quindi anche la (62); se (x, y) , $(x, \bar{y})$ appartengono al campo $D_{12}^{(n)}$, con $y > \bar{y}$, da cui $\xi_i^{(n)} < \bar{\xi}_i^{(n)}$, per $\bar{\xi}_i^{(n)} \leq X \leq x$ vale la (48₁) sia per y che per $\bar{y}$, e quindi vale ivi anche la (62).

Sia $i = r + 1, \dots, m$. Per ogni coppia di punti (x, y) , $(x, \bar{y})$ del campo D_2 , tenuto conto delle (40), è

$$\begin{aligned} z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}) &= \Phi_i(g_i^{(n)}(0; x, y)) - \Phi_i(g_i^{(n)}(0; x, \bar{y})) + \\ &+ \int_0^x [f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, y))) - \\ &- f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, \bar{y}), z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})))] dX \end{aligned}$$

⁽³⁰⁾ Cfr. l.c. in ⁽²⁰⁾.

e quindi, in virtù delle (2₂), (33), tenuto conto della posizione (61),

$$|z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})| \leq \lambda |g_i^{(n)}(0; x, y) - g_i^{(n)}(0; x, \bar{y})| + \\ + \int_0^x L(X)(1 + A_i^{(n)}(X)) |g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})| dX \quad (i = r+1, \dots, m).$$

Tenuto conto della (62) è

$$(63) \quad \left| \frac{z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq (\lambda + 1) e^{\int_0^x L(t)(1 + A_i^{(n)}(t)) dt} - 1 \quad (i = r+1, \dots, m)$$

per ogni coppia di punti (x, y) , $(x, \bar{y})$ del campo D_2 .

Per $i = 1, \dots, r$, se (x, y) , $(x, \bar{y})$ sono punti del campo $D_{i1}^{(n)}$, poichè vale la (62) per $0 \leq X \leq x$, dalla (40) segue la (63).

Siano ora (x, y) , $(x, \bar{y})$ due punti del campo $D_{i2}^{(n)}$; indichiamo (cfr. § 2, n. 3 a)) con $\xi_i^{(n)}$, $\bar{\xi}_i^{(n)}$ i valori (unici), compresi tra 0 e a_2 , per cui è

$$(53) \quad g_i^{(n)}(\xi_i^{(n)}; x, y) = 0, \quad g_i^{(n)}(\bar{\xi}_i^{(n)}; x, \bar{y}) = 0,$$

cioè, tenuto conto delle (38) e (48₁),

$$y - \int_{\xi_i^{(n)}}^x \rho_i(t, g_i^{(n)}(t; x, y), z_j^{(n)}(t - \delta_n, g_i^{(n)}(t; x, y))) dt = 0 \\ \bar{y} - \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x \rho_i(t, g_i^{(n)}(t; x, \bar{y}), z_j^{(n)}(t - \delta_n, g_i^{(n)}(t; x, \bar{y}))) dt = 0.$$

Ne segue, se per esempio $y > \bar{y}$, da cui $\xi_i^{(n)} < \bar{\xi}_i^{(n)}$, tenuto conto delle (2₁) e della posizione (61),

$$(64) \quad \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} \rho_i(t, g_i^{(n)}(t; x, y), z_j^{(n)}(t - \delta_n, g_i^{(n)}(t; x, y))) dt \leq \\ \leq y - \bar{y} + \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^x L(t) |g_i^{(n)}(t; x, y) - g_i^{(n)}(t; x, \bar{y})| dt$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m |z_j^{(n)}(t - \delta_n, g_i^{(n)}(t; x, y)) - z_j^{(n)}(t - \delta_n, g_i^{(n)}(t; x, \bar{y}))| dt \leq \\
& \leq y - \bar{y} + \int_{\xi_i^{(n)}}^{\infty} L(t)(1 + A_i^{(n)}(t))[g_i^{(n)}(t; x, y) - g_i^{(n)}(t; x, \bar{y})]dt, \quad (i = 1, \dots, r).
\end{aligned}$$

È allora, tenuto conto delle (42),

$$\begin{aligned}
z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}) &= \Psi_i(\xi_i^{(n)}) + \int_{\xi_i^{(n)}}^{\infty} f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, y)))dX - \\
&- [\Psi_i(\bar{\xi}_i^{(n)}) + \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^{\infty} f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})))dX = \\
&= \Psi_i(\xi_i^{(n)}) - \Psi_i(\bar{\xi}_i^{(n)}) + \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^{\xi_i^{(n)}} f_i(X, 0, z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, y)))dX + \\
&+ \int_{\xi_i^{(n)}} [f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, y))) - \\
&- f_i(X, 0, z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, y)))]dX + \\
&+ \int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^{\infty} [f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, y))) - \\
&- f_i(X, g_i^{(n)}(X; x, \bar{y}), z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})))]dX.
\end{aligned}$$

Tenuto conto delle (2), (35') e della posizione (61) è

$$\begin{aligned}
|z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})| &\leq H \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} \rho_i(X, 0, z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, y)))dX + \\
&+ \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} L(X)g_i^{(n)}(X; x, y)dX + \\
&+ \int_{\xi_i^{(n)}}^{\infty} L(X)(1 + A_i^{(n)}(X))[g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})]dX
\end{aligned}$$

e aggiungendo e togliendo

$$H \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} \rho_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_i^{(n)}(X - \delta_n, g_i^{(n)}(X; x, y))) dX$$

e tenendo conto della (64), è

$$\begin{aligned} |z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})| &\leq H(y - \bar{y}) + (H + 1) \int_{\xi_i^{(n)}}^{\bar{\xi}_i^{(n)}} L(X) g_i^{(n)}(X; x, y) dX + \\ &+ (H + 1) \int_{\xi_i^{(n)}}^{\infty} L(X) (1 + A_i^{(n)}(X)) [g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})] dX \quad (i = 1, \dots, r). \end{aligned}$$

Essendo per $\xi_i^{(n)} \leq X \leq \bar{\xi}_i^{(n)}$, tenuto conto anche delle (53),

$$g_i^{(n)}(X; x, y) \leq g_i^{(n)}(\bar{\xi}_i^{(n)}; x, y) = g_i^{(n)}(\bar{\xi}_i^{(n)}; x, y) - g_i^{(n)}(\bar{\xi}_i^{(n)}; x, \bar{y}),$$

in virtù della (62) è

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| &\leq H + (H + 1) \int_0^{a_2} L(t) dt \cdot e^{\int_{\xi_i^{(n)}}^{\infty} L(t)(1 + A_i^{(n)}(t)) dt} + \\ &+ (H + 1) [e^{\int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^{\infty} L(t)(1 + A_i^{(n)}(t)) dt} - 1] \end{aligned}$$

e infine

$$(65) \quad \left| \frac{z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq (A + 1) e^{\int_{\bar{\xi}_i^{(n)}}^{\infty} L(t)(1 + A_i^{(n)}(t)) dt} - 1,$$

avendo posto

$$A = H + (H + 1) \int_0^{a_2} L(t) dt.$$

Si indichi con $U^{(n)}(x)$ il limite superiore dell'espressione

$$\sum_{j=1}^m \left| \frac{z_j^{(n)}(X, y) - z_j^{(n)}(X, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right|$$

per

$$0 \leq X \leq x, \quad 0 \leq y \leq \Gamma(X), \quad 0 \leq \bar{y} \leq \Gamma(X);$$

per quanto si è visto nel n. 5, la funzione $U^{(n)}(x)$, definita in $(0, a_2)$, è ivi limitata, inoltre è non negativa e non decrescente.

Tenuto conto della posizione (61) è

$$A_i^{(n)}(t) \leq U^{(n)}(t - \delta) \leq U^{(n)}(t).$$

Dalla (63) segue

$$(63') \quad \left| \frac{z_i^{(n)}(X, y) - z_i^{(n)}(X, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq (\lambda + 1) e^{\int_0^X L(t)(1+U^{(n)}(t))dt} - 1,$$

la quale vale, per $i = r + 1, \dots, m$, per ogni coppia di punti (X, y) , $(X, \bar{y})$ del campo D_2 , e per $i = 1, \dots, r$ per ogni coppia di punti (X, y) , $(X, \bar{y})$ del campo $D_{i1}^{(n)}$.

Dalla (65) segue

$$(65') \quad \left| \frac{z_i^{(n)}(X, y) - z_i^{(n)}(X, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq (A + 1) e^{\int_0^X L(t)(1+U^{(n)}(t))dt} - 1,$$

la quale vale per $i = 1, \dots, r$, per ogni coppia di punti (X, y) , $(X, \bar{y})$ del campo $D_{i2}^{(n)}$.

Per $i = 1, \dots, r$ sia per esempio (X, y) un punto del campo $D_{i1}^{(n)}$ e $(X, \bar{y})$ un punto del campo $D_{i2}^{(n)}$.

Dalle (63'), (65'), indicata con B la maggiore delle due costanti λ, A , segue ⁽³¹⁾

$$(66) \quad \left| \frac{z_i^{(n)}(X, y) - z_i^{(n)}(X, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq (B + 1) e^{\int_0^X L(t)(1+U^{(n)}(t))dt} - 1;$$

la (66) vale evidentemente per ogni valore $i = 1, \dots, m$ per ogni coppia di punti (X, y) , $(X, \bar{y})$ del campo D_2 .

⁽³¹⁾ Posto $y_0 = g_i^{(n)}(X; 0, 0)$, tenuto delle (63'), (65') ed essendo $\bar{y} < y_0 < y$, è

$$\begin{aligned} |z_i^{(n)}(X, y) - z_i^{(n)}(X, \bar{y})| &\leq |z_i^{(n)}(X, y) - z_i^{(n)}(X, y_0)| + |z_i^{(n)}(X, y_0) - z_i^{(n)}(X, \bar{y})| \leq \\ &\leq [(\lambda + 1) e^{\int_0^X L(t)(1+U^{(n)}(t))dt} - 1](y - y_0) + [(A + 1) e^{\int_0^X L(t)(1+U^{(n)}(t))dt} - 1](y_0 - \bar{y}) \leq \\ &\leq [(B + 1) e^{\int_0^X L(t)(1+U^{(n)}(t))dt} - 1](y - \bar{y}). \end{aligned}$$

Essendo

$$\sum_{j=1}^m \left| \frac{z_j^{(n)}(X, y) - z_j^{(n)}(X, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq (mB + m)e^{\int_0^X L(t)(1+U^{(n)}(t))dt} - m$$

e a maggior ragione, se x è un valore fissato di $(0, a_2)$, per $0 \leq X \leq x$

$$\sum_{j=1}^m \left| \frac{z_j^{(n)}(X, y) - z_j^{(n)}(X, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq (mB + m)e^{\int_0^x L(t)(1+U^{(n)}(t))dt} - m,$$

ne segue

$$(67) \quad U^{(n)}(x) \leq (mB + m)e^{\int_0^x L(t)(1+U^{(n)}(t))dt} - m, \quad (0 \leq x \leq a_2).$$

Da questa disuguaglianza segue ⁽³²⁾ che, se a è un numero positivo con $a \leq a_2$, soddisfacente la

$$(68) \quad \int_0^a L(t)dt < \frac{1}{m-1} \lg \left(1 + \frac{m-1}{mB+1} \right).$$

in tutto l'intervallo $(0, a)$ è

$$(69) \quad U^{(n)}(x) \leq W(x) \leq W(a),$$

dove la funzione $W(x)$ è data da

$$W(x) = \frac{m(mB+1)e^{(m-1)\int_0^x L(t)dt} - m(B+1)}{m(B+1) - (mB+1)e^{(m-1)\int_0^x L(t)dt}};$$

tale funzione è positiva, continua, non decrescente e soddisfa in tutto $(0, a)$ la ⁽³³⁾

$$(70) \quad W(x) = m(B+1)e^{\int_0^x L(t)(1+W(t))dt} - m.$$

⁽³²⁾ Cfr. l.e. in (7) § 1 n. 3 pp. 364-68, relazioni (III₁), (15), (16), (17₁): nel caso attuale $h = 1$, $K = mB$. Cfr. anche l.e. in (4), Cap. IV, § 3, n. 13, e), pp. 369-370.

⁽³³⁾ Cfr. l.e. in (7), relazione (32), p. 368.

Pertanto per ogni coppia di punti $(x, y), (x, \bar{y})$ del campo D è

$$(71) \quad \sum_{j=1}^m \left| \frac{z_j^{(n)}(x, y) - z_j^{(n)}(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq W(x) \leq W(a)$$

e anche, tenuto conto delle (66), (70),

$$(72) \quad \left| \frac{z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq \frac{W(x)}{m} \leq \frac{W(a)}{m}.$$

Per quasi tutti gli X di $(0, a)$ è

$$(73) \quad |\sigma_i^{(n)}(X, Y) - \sigma_i^{(n)}(X, \bar{Y})| \leq L(X)(1 + W(X)) |Y - \bar{Y}| \quad (i = 1, \dots, m)$$

per ogni coppia di valori reali $Y, \bar{Y}$; infatti se $(X, Y), (X, \bar{Y})$ appartengono al campo D dalle (39₁), (2₁), (71) segue

$$\begin{aligned} |\sigma_i^{(n)}(X, Y) - \sigma_i^{(n)}(X, \bar{Y})| &\leq L(X) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^m \left| \frac{z_j^{(n)}(X - \delta_n, Y) - z_j^{(n)}(X - \delta_n, \bar{Y})}{Y - \bar{Y}} \right| \right\} |Y - \bar{Y}| \leq \\ &\leq L(X) \{1 + W(X - \delta_n)\} |Y - \bar{Y}| \leq L(X) \{1 + W(X)\} |Y - \bar{Y}| \end{aligned}$$

e per il modo in cui sono state definite le $\sigma_i^{(n)}(X, Y)$, ($i = 1, \dots, m$), (cfr. le (39₂), (39₃)), la disuguaglianza vale per ogni coppia di valori reali $Y, \bar{Y}$.

È allora ⁽³⁴⁾

$$(74) \quad \begin{aligned} |g_i^{(n)}(X; x, y) - g_i^{(n)}(X; x, \bar{y})| &\leq \\ &\leq |y - \bar{y}| e^{\int_X^x L(t)(1+W(t))dt} \leq |y - \bar{y}| e^{\int_0^a L(t)(1+W(t))dt} \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

per ogni coppia di valori reali $y, \bar{y}$ e X e x in $(0, a)$.

Pertanto le funzioni $z_i^{(n)}(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono equilipschitziane rispetto a y nel campo D , con costante di LIPSCHITZ indipendente da x , e le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono equilipschitziane rispetto a y nel campo D_∞ , con costante di LIPSCHITZ indipendente da X, x .

Tenuto conto delle (1₁), essendo (cfr. anche n. 3)

$$(44) \quad |g_i^{(n)}(X'; x, y) - g_i^{(n)}(X''; x, y)| \leq \left| \int_{X'}^{X''} M(t) dt \right|$$

⁽³⁴⁾ Cfr. nota ⁽²²⁾.

per ogni coppia di punti $(X'; x, y)$, $(X''; x, y)$ del campo D_∞ , dall'assoluta continuità della funzione $\int_0^x M(t)dt$, ($0 \leq x \leq a$), segue l'equiassoluta continuità delle funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), ($n = 1, 2, \dots$) rispetto a X .

Dimostriamo che le funzioni (59), (60) sono equiassolutamente rispetto a x . Tenuto conto delle (1₁), (71) è ⁽³⁵⁾

$$(75) \quad |g_i^{(n)}(X; x', y) - g_i^{(n)}(X; x'', y)| \leq e^{\int_0^a L(t)(1+W(t))dt} \left| \int_{x'}^{x''} M(t)dt \right|, \quad (i = 1, \dots, m),$$

per ogni coppia di punti $(X; x', y)$, $(X; x'', y)$ del campo D_∞ .

Siano (x', y) , (x'', y) due punti del campo D , con $x' < x''$.

Per $i = r + 1, \dots, m$ tenuto conto delle (1₂), (2₂), (33), (69) ed essendo la funzione $W(x)$ crescente in $(0, a)$, si ottiene in modo evidente

$$|z_i^{(n)}(x'', y) - z_i^{(n)}(x', y)| \leq \lambda [g_i^{(n)}(0; x'', y) - g_i^{(n)}(0; x', y)] + \int_0^{x'} L(X)(1+W(X)) [g_i^{(n)}(X; x'', y) - g_i^{(n)}(X; x', y)] dX + \int_{x'}^{x''} N(X) dX,$$

da cui in virtù della (75) (cfr. anche la nota ⁽³⁵⁾)

$$|z_i^{(n)}(x'', y) - z_i^{(n)}(x', y)| \leq [(\lambda + 1)e^{\int_0^a L(t)(1+W(t))dt} - 1] \int_{x'}^{x''} M(X) dX + \int_{x'}^{x''} N(X) dX,$$

e anche, tenuto conto che vale la (70) e che $\lambda \leq B$,

$$(76) \quad |z_i^{(n)}(x'', y) - z_i^{(n)}(x', y)| \leq \frac{W(a)}{m} \int_{x'}^{x''} M(X) dX + \int_{x'}^{x''} N(X) dX, \quad (i = r + 1, \dots, m).$$

⁽³⁵⁾ Cfr. l.c. in (7), § 1, n. 1, in cui si ponga $h = 1$; se per esempio $x' < x''$ dalla formula (9) del l.c. segue

$$|g_i^{(n)}(X; x', y) - g_i^{(n)}(X; x'', y)| \leq e^{\int_0^X L(t)(1+W(t))dt} \left| \int_{x'}^{x''} M(t)dt \right|,$$

da cui la (75).

Per $i = 1, \dots, r$, utilizzando l'artificio del n. 3 ⁽³⁶⁾, si dimostra che vale ancora la (76) per ogni coppia di punti (x', y) , (x'', y) del campo D .

Pertanto le funzioni delle successioni (59), (60) sono equiassolutamente continue rispetto a x .

Dalle proprietà dimostrate segue che le funzioni (59), (60) sono ugualmente continue nel complesso delle variabili rispettivamente nei campi D_∞ , D .

7. Pertanto, in virtù del teorema di GIULIO ASCOLI, dalle $2m$ successioni (59), (60) si possono estrarre $2m$ successioni

$$g_i^{(n_s)}(X; x, y) - y \quad (s = 1, 2, \dots)$$

$$z_i^{(n_s)}(x, y) \quad (s = 1, 2, \dots)$$

convergenti uniformemente nei rispettivi campi indicati a $2m$ funzioni

$$(77) \quad g_i(X; x, y) - y$$

$$(78) \quad z_i(x, y),$$

le quali sono continue.

Dalle (44), (74), (75) seguono le

$$(74') \quad |g_i(X; x, y) - g_i(X; x, \bar{y})| \leq |y - \bar{y}| e^{\int_0^a L(t)(1+W(t))dt}$$

per ogni coppia di punti $(X; x, y)$, $(X; x, \bar{y})$ del campo D_∞ ,

$$(44') \quad |g_i(X'; x, y) - g_i(X''; x, y)| \leq \left| \int_{X'}^{X''} M(t)dt \right|$$

per ogni coppia di punti $(X'; x, y)$, $(X''; x, y)$ di D_∞ ,

$$|g_i(X; x', y) - g_i(X; x'', y)| \leq \left| \int_{x'}^{x''} M(t)dt \right| e^{\int_0^a L(t)(1+W(t))dt}$$

per ogni coppia di punti $(X; x', y)$, $(X; x'', y)$ di D_∞ , cioè le funzioni $g_i(X; x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono di classe $G^{[1]}$ nel campo D_∞ ; dalle (49), (71), (72), seguono le

$$(49') \quad |z_i(x, y)| \leq \gamma_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

⁽³⁶⁾ I calcoli rimangono inalterati, purchè si sostituisca $\frac{W(a)}{m}$ a $\bar{\lambda}$.

in tutto il campo D ,

$$(71') \quad \sum_{j=1}^m \left| \frac{z_j(x, y) - z_j(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq W(x) \leq W(a)$$

$$(72') \quad \left| \frac{z_i(x, y) - z_i(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq \frac{W(a)}{m} \quad (i = 1, \dots, m)$$

per ogni coppia di punti (x, y) , $(x, \bar{y})$ del campo D ,

$$(76') \quad |z_i(x', y) - z_i(x'', y)| \leq \frac{W(a)}{m} \int_{x'}^{x''} M(t) dt + \int_{x'}^{x''} N(t) dt$$

per ogni coppia di punti (x', y) , (x'', y) del campo D , e le funzioni $z_i(x, y)$, $(i = 1, \dots, m)$, sono di classe G in D .

Siano $\sigma_i(x, y)$, $(i = 1, \dots, m)$, le funzioni definite nel campo

$$0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y < +\infty$$

mediante le posizioni (10) (cfr. § 1 n. 3, b)), dove le $z_j(x, y)$, $(j = 1, \dots, m)$, sono le funzioni (78).

Allora in tutto il campo D_∞ è ⁽³⁷⁾

$$(48') \quad g_i(X; x, y) = y - \int_X \sigma_i(t, g_i(t; x, y)) dt \quad (i = 1, \dots, m).$$

È evidente che anche le funzioni $g_i(X; x, y)$, $(i = 1, \dots, m)$, sono crescenti in y , e per $i = 1, \dots, r$ crescenti in X e decrescenti in x , per $i = r + 1, \dots, m$ decrescenti in X , crescenti in x .

⁽³⁷⁾ Infatti, tenuto conto delle (2₁), (10), (39), (71), (76), si può verificare che, preso un numero $\varepsilon > 0$, se s' è un intero tale che per $s > s'$ sia

$$|g_i^{(n_s)}(t; x, y) - g_i(t; x, y)| < \varepsilon, \quad |z_i^{(n_s)}(t, Y) - z_i(t, Y)| < \varepsilon$$

rispettivamente nei campi D_∞ , D , e se s'' , con $s'' \geq s'$, è un intero tale che per $s > s''$ sia

$$|z_i^{(n_s)}(t - \delta_{n_s}, Y) - z_i^{(n_s)}(t, Y)| \leq \frac{W(a)}{m} \int_{t - \delta_{n_s}}^t M(t) dt + \int_{t - \delta_{n_s}}^t N(t) dt < \varepsilon$$

per ogni punto (t, Y) del campo D , per $s > s''$ risulta

$$\left| \int_X [\sigma_i^{(n_s)}(t, g_i^{(n_s)}(t; x, y)) - \sigma_i(t, g_i(t; x, y))] dt \right| < \varepsilon \int_0^a L(t)(1 + W(t) + 2m) dt$$

per ogni punto $(X; x, y)$ del campo D_∞ .

Fissato x, y nel campo D , per quei valori X per cui il punto $(X, g_i(X; x, y))$ appartiene a D è

$$(48'_1) \quad g_i(X; x, y) = y - \int_X^x \rho_i(t, g_i(t; x, y), z_j(t, g_i(t; x, y))) dt, \quad (i = 1, \dots, m).$$

La (48'_1) vale in particolare, per $i = r + 1, \dots, m$, per $0 \leq X \leq x$; per $i = 1, \dots, r$, considerati i due campi D_{i1}, D_{i2} in cui la curva $y = g_i(x; 0, 0)$ divide il campo D ⁽³⁸⁾, se (x, y) appartiene a D_{i1} la (48'_1) vale in particolare per $0 \leq X \leq x$, se appartiene a D_{i2} per $\xi_i(x, y) \leq X \leq x$, avendo indicato anche qui con $\xi_i = \xi_i(x, y)$ il valore unico per cui $g_i(\xi_i; x, y) = 0$.

In tutto il campo D per $i = r + 1, \dots, m$ è

$$(79) \quad z_i(x, y) = \Phi_i(g_i(0; x, y)) + \int_0^x f_i(X; g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y))) dX.$$

Per $i = 1, \dots, r$ si dimostra che se (x, y) appartiene al campo D_{i1} vale la (79), e se (x, y) appartiene a D_{i2} la

$$(80) \quad z_i(x, y) = \Psi_i(\xi_i) + \int_{\xi_i}^x f_i(X, g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y))) dX, \quad (i = 1, \dots, r).$$

Infatti, preso un numero $\delta > 0$ ad arbitrio, si può determinare un intero positivo $\bar{s}$ tale che per $s > \bar{s}$, posto $g_i(X; 0, 0) = g_i(X)$, sia

$$(81) \quad g_i(X) - \delta < g_i^{(n_s)}(X; 0, 0) < g_i(X) + \delta \quad (0 \leq X \leq a),$$

in virtù della convergenza uniforme delle funzioni $g_i^{(n_s)}(X; 0, 0)$ alle funzioni $g_i(X)$, $(0 \leq X \leq a)$.

Sia (x, y) un punto del campo D_{i1} , tale che $y \geq g_i(x) + \delta$. Per $s > \bar{s}$, essendo $y > g_i^{(n_s)}(x; 0, 0)$, per ogni X di $(0, a)$ è

$$g_i^{(n_s)}(X; x, y) > g_i^{(n_s)}(X; 0, 0),$$

in particolare, per $X = 0$, si ottiene

$$g_i^{(n_s)}(0; x, y) > 0.$$

⁽³⁸⁾ Cfr. § 1, n. 3 b).

Pertanto per $s > \bar{s}$ è

$$z_i^{(n_s)}(x, y) = \Phi_i(g_i^{(n_s)}(0; x, y)) + \int_0^x f_i(X, g_i^{(n_s)}(X; x, y), z_i^{(n_s)}(X - \delta_{n_s}, g_i^{(n_s)}(X; x, y))) dX \quad (i = 1, \dots, r)$$

e, passando al limite per $s \rightarrow \infty$, si ottiene in modo noto la (79) in ogni punto (x, y) del campo D_{i1} , con $y \geq g_i(x) + \delta$. Essendo δ piccolo ad arbitrio, la (79) vale in ogni punto (x, y) del campo D_{i1} con $y > g_i(x)$, e per la continuità rispetto a y del primo e secondo membro della (79) vale in tutto il campo D_{i1} (chiuso).

Sia (x, y) un punto del campo D_{i2} tale che $0 < y < g_i(x) - \delta$. Per $s > \bar{s}$ in tutto $(0, a)$ vale la (81). Allora, se $s > \bar{s}$, essendo $y < g_i^{(n_s)}(x; 0, 0)$, per ogni X di $(0, a)$ è

$$g_i^{(n_s)}(X; x, y) < g_i^{(n_s)}(X; 0, 0),$$

in particolare per $X = 0$ si ottiene

$$g_i^{(n_s)}(0; x, y) < 0.$$

Ne segue che per $s > \bar{s}$ è

$$(82) \quad z_i^{(n_s)}(x, y) = \Psi_i(\xi_i^{(n_s)}) + \int_{\xi_i^{(n_s)}}^x f_i(X, g_i^{(n_s)}(X; x, y), z_i^{(n_s)}(X - \delta_{n_s}, g_i^{(n_s)}(X; x, y))) dX, \quad (i = 1, \dots, r).$$

Vogliamo provare che è

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_i^{(n_s)} = \xi_i.$$

Osserviamo che $g_i(X; x, y) = g_i(X; \xi_i, 0)$.

Preso un numero $\varepsilon > 0$, con $0 \leq \xi_i - \varepsilon < \xi_i + \varepsilon \leq a$ (osserviamo che è $0 < \xi_i < a$), consideriamo le curve

$$Y = g_i(X; \xi_i - \varepsilon, 0), \quad Y = g_i(X; \xi_i + \varepsilon, 0), \quad (0 \leq X \leq a),$$

e sia η il minimo positivo, per $0 \leq X \leq x$, delle funzioni

$$g_i(X; \xi_i - \varepsilon, 0) - g_i(X; \xi_i, 0), \quad g_i(X; \xi_i, 0) - g_i(X; \xi_i + \varepsilon, 0).$$

Al numero η subordiniamo un intero positivo $\bar{s} \geq \bar{s}$ tale che per $s > \bar{s}$ sia

$$g_i(X; x, y) - \eta < g_i^{(n_s)}(X; x, y) < g_i(X; x, y) + \eta, \quad (0 \leq X \leq a);$$

per $s > \bar{s}$ le curve $Y = g_i^{(n_s)}(X; x, y)$, ($0 \leq X \leq a$), appartengono a maggior ragione al campo limitato delle curve

$$\begin{aligned} Y &= g_i(X; \xi_i + \varepsilon, 0) \\ Y &= g_i(X; \xi_i - \varepsilon, 0), \end{aligned} \quad (0 \leq X \leq a),$$

e quindi intersecano l'asse X in un punto $\xi_i^{(n_s)}$ compreso tra $\xi_i - \varepsilon$ e $\xi_i + \varepsilon$, cioè

$$\xi_i - \varepsilon < \xi_i^{(n_s)} < \xi_i + \varepsilon.$$

Allora, passando al limite per $s \rightarrow \infty$ nella relazione (82), si ottiene la (80), la quale, per l'arbitrarietà di δ , risulta provata in ogni punto (x, y) del campo D_{i2} , con $y < g_i(x)$.

Rileviamo inoltre che in virtù delle (50₁), (50₂) le funzioni (78) soddisfano le condizioni (II).

8. Dimostriamo ora, tenendo conto delle (48'), (79), (80), che in quasi tutto il campo D le funzioni $z_i(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), soddisfano il sistema (I).

In corrispondenza ad ogni i (con $1 \leq i \leq m$) consideriamo la funzione

$$Y = g_i(X; x, y) \quad (0 \leq X \leq a)$$

soluzione dell'equazione (48'), essendo (x, y) un punto fissato nel campo D_∞ e X, Y le coordinate correnti.

Dalla (73) per quasi tutti gli X di $(0, a)$ segue la

$$(73') \quad |\sigma_i(X, Y) - \sigma_i(X, \bar{Y})| \leq L(X)(1 + W(X)) |Y - \bar{Y}|$$

per tutte le coppie di valori reali $Y, \bar{Y}$.

Consideriamo in particolare la funzione

$$Y = g_i(X; 0, y),$$

ovvero, indicando diversamente le variabili,

$$y = g_i(x; 0, \eta).$$

In virtù della (73') le funzioni ⁽⁸⁹⁾

$$x = x, \quad y = g_i(x; 0, \eta)$$

⁽⁸⁹⁾ Cfr. nota ⁽¹²⁾.

stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra il campo

$$0 \leq x \leq a, \quad -\infty < \eta < +\infty$$

e il campo

$$0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y < +\infty,$$

in cui ad un insieme di misura nulla dell'uno corrisponde un insieme di misura nulla dell'altro.

In particolare consideriamo, per ogni i con $i = r + 1, \dots, m$, la corrispondenza biunivoca tra il campo

$$\Delta_i : 0 \leq x \leq \mu_i(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq b_0,$$

essendo $\mu_i(\eta)$ la massima ascissa dei punti della curva $y = g_i(x; 0, \eta)$ appartenenti al campo D , e il campo

$$D : 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \Gamma(x);$$

per ogni i con $i = 1, \dots, r$, indicati con $\xi_i(\eta)$ e $\mu_i(\eta)$ rispettivamente il minimo e il massimo delle ascisse dei punti della curva $y = g_i(x; 0, \eta)$ appartenenti al campo D , consideriamo tale corrispondenza biunivoca tra il campo

$$\Delta_{i1} : 0 \leq x \leq \mu_i(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq b_0$$

e il campo ⁽⁴⁰⁾

$$D_{i1} : 0 \leq x \leq a_i, \quad g_i(x; 0, 0) \leq y \leq \Gamma(x),$$

e fra il campo

$$\Delta_{i2} : \xi_i(\eta) \leq x \leq \mu_i(\eta), \quad g_i(0; a, 0) \leq \eta \leq 0$$

e il campo

$$D_{i2} : 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq h(x).$$

Sia i un intero fissato tra $r + 1$ e m .

In quasi tutti i punti della curva

$$y = g_i(x; 0, \eta) \quad (0 \leq x \leq \mu_i(\eta))$$

è

$$(83) \quad \frac{dg_i(x; 0, \eta)}{dx} = \rho_i(x, g_i(x; 0, \eta), z_i(x, g_i(x; 0, \eta))).$$

⁽⁴⁰⁾ Per le disequaglianze che definiscono il campo D_{i1} e successivamente il campo D_{i2} , cfr. § 1 n. 3 b).

Tenuto conto del teorema di unicità relativo all'equazione (48') per ogni x di $(0, \mu_i(\eta))$ è

$$g_i(0; x, g_i(x; 0, \eta)) = \eta$$

e anche, per ogni X di $(0, \mu_i(\eta))$,

$$g_i(X; x, g_i(x; 0, \eta)) = g_i(X; 0, \eta).$$

Dalla (79) segue

$$(84) \quad \begin{aligned} z_i(x, g_i(x; 0, \eta)) = \\ = \Phi_i(\eta) + \int_0^x f_i(X, g_i(X; 0, \eta), z_i(X; g_i(X; 0, \eta))) dX, \quad (0 \leq x \leq \mu_i(\eta)). \end{aligned}$$

La funzione $z_i(x, g_i(x; 0, \eta))$ è manifestamente assolutamente continua in x ⁽⁴¹⁾, e quindi in quasi tutto l'intervallo $(0, \mu_i(\eta))$ è

$$(85) \quad \frac{dz_i(x, g_i(x; 0, \eta))}{dx} = f_i(x, g_i(x; 0, \eta), z_i(x, g_i(x; 0, \eta))).$$

Le derivate parziali $\frac{\partial z_i(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z_i(x, y)}{\partial y}$, le quali esistono in quasi tutto il campo D , esistono in quasi tutto il campo Δ_i ; quindi per quasi tutti gli η di $(0, b_0)$ esistono in quasi tutti i punti della curva $y = g_i(x; 0, \eta)$.

Allora, per un teorema di derivazione di funzione composta ⁽⁴²⁾, è

$$(86) \quad \begin{aligned} \frac{dz_i(x, g_i(x; 0, \eta))}{dx} = \\ = \frac{\partial z_i(x, g_i(x; 0, \eta))}{\partial x} + \rho_i(x, g_i(x; 0, \eta), z_i(x, g_i(x; 0, \eta))) \frac{\partial z_i(x, g_i(x; 0, \eta))}{\partial y}, \end{aligned}$$

in corrispondenza ad ogni η di $(0, b_0)$, con eccezione al più di un insieme di valori η di misura lineare nulla, per quasi tutti gli x di $(0, \mu_i(\eta))$.

Dalle (85) e (86) segue la

$$(87) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z_i(x, g_i(x; 0, \eta))}{\partial x} + \rho_i(x, g_i(x; 0, \eta), z_i(x, g_i(x; 0, \eta))) \frac{\partial z_i(x, g_i(x; 0, \eta))}{\partial y} = \\ = f_i(x, g_i(x; 0, \eta), z_i(x, g_i(x; 0, \eta))), \end{aligned}$$

⁽⁴¹⁾ Infatti, posto $z_i(x, g_i(x; 0, \eta)) = Z_i(x)$, è

$$|Z_i(x') - Z_i(x'')| \leq \left| \int_{x'}^{x''} N(t) dt \right|.$$

⁽⁴²⁾ Cfr. l.e. in ⁽¹⁴⁾.

in quasi tutto il campo Δ_i e quindi la i -esima delle (I) in quasi tutto il campo D .

Sia i un intero fissato tra 1 e r : con le stesse considerazioni si prova che vale la i -esima delle (I) in quasi tutto il campo D_{i1} . Analogamente si prova che la i -esima delle (I) vale in quasi tutto il campo D_{i2} . Infatti, per ogni η con $g_i(0; a, 0) \leq \eta < 0$, vale la (83) in quasi tutto l'intervallo $(\xi_i(\eta), \mu_i(\eta))$, è

$$g_i(\xi_i(\eta); 0, \eta) = 0, \quad g_i(X; x, g_i(x; 0, \eta)) = g_i(X; 0, \eta),$$

e

$$z_i(x, g_i(x; 0, \eta)) = \Psi_i(\xi_i) + \int_{\xi_i(\eta)}^x f_i(X, g_i(X; 0, \eta), z_j(X, g_i(X; 0, \eta))) dX, \\ (\xi_i(\eta) \leq x \leq \mu_i(\eta));$$

la (85) vale per quasi tutti gli x di $(\xi_i(\eta), \mu_i(\eta))$.

In quasi tutto il campo Δ_{i2} vale inoltre la (86), da cui la (87); ne segue la i -esima delle (I) in quasi tutto il campo D_{i2} .

Pertanto anche per $i = 1, \dots, r$ valgono le (I) in quasi tutto il campo D . Il Teorema III è così completamente dimostrato.

9. OSSERVAZIONE. - Le (1_1) , (1_2) siano sostituite dalle

$$(88) \quad |\rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m)| \leq M, \quad |f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)| \leq N,$$

con M, N costanti non negative, le quali per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ valgano per tutte le $(m+1)$ -ple $(y, z_1, \dots, z_m)$ del campo Δ ; allora dalle (35) segue che le funzioni $\Psi_i(x)$, $(i = 1, \dots, r)$, sono lipschitziane nell'intervallo $(0, a_0)$ ⁽⁴³⁾.

In queste ipotesi la soluzione (78), costruita nel Teorema III, risulta lipschitziana nel complesso delle variabili nel campo D , e ciò perchè nelle ipotesi (88) le funzioni (78) risultano anche lipschitziane rispetto a x con costante di LIPSCHITZ indipendente da y : infatti, sostituendo nelle diseguglianze (76') le costanti M, N alle funzioni $M(t), N(t)$, si ha

$$|z_i(x', y) - z_i(x'', y)| \leq \left(\frac{W(a)}{m} M + N \right) |x' - x''| \quad (i = 1, \dots, m)$$

per ogni coppia di punti $(x', y), (x'', y)$ del campo D .

⁽⁴³⁾ Se valgono le (88) l'ipotesi (35) è senz'altro soddisfatta (come si verifica facilmente) se le $\Psi_i(x)$, $(i = 1, \dots, r)$, sono lipschitziane in $(0, a_0)$, e se esistono r costanti w_i positive per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ e per tutte le $(m+1)$ -ple $(y, z_1, \dots, z_m)$ del campo Δ sia

$$\rho_i(x, y, z_1, \dots, z_m) \geq w_i \quad (i = 1, \dots, r).$$