Proprietà globali degli spazi analitici reali.

Memoria di ALBERTO TOGNOLI (Pisa) (*)

Sunto. - *In questo lavoro si prova che ogni spazio analitico reale coerente X, (con eventuali elementi nilpotenti), ammette un complessificato $\tilde{X}$ ed inoltre X ha in $\tilde{X}$ un sistema fondamentale di intorni che sono spazi di Stein.*

Da questo risultato segue la validità dei teoremi A e B per gli spazi analitici reali coerenti.

Sia V^m una varietà complessa di dimensione m, $\sigma : V^m \to V^m$ un'antiinvoluzione, il il luogo dei punti fissi di σ è vuoto, oppure è una sottovarietà analitica reale di dimensione m. Da questo fatto e dal primo risultato si deducono dei teoremi di immersione degli spazi analitici reali in $\boldsymbol{R}^n$. Si prova infine che per ogni spazio analitico reale coerente (senza elementi nilpotenti) esiste una decomposizione in componenti irriducibili globali ed una normalizzazione.

Introduzione.

Sia S un insieme analitico reale di R^n ed $\mathfrak{J}_S$ il fascio dei germi di funzioni analitiche reali che si annullano su S. L'insieme analitico S è detto coerente se il fascio $\mathfrak{J}_S$ è coerente, come modulo su sè stesso.

H. CARTAN in un suo lavoro, ([6]), ha provato la validità dei teoremi A e B per gli insiemi analitici reali coerenti di R^n. Un risultato di H. GRAUERT, ([9]), permette di estendere i risultati di H. CARTAN agli insiemi analitici reali coerenti di una varietà analitica reale paracompatta.

La prima parte di questo lavoro, (paragrafi 1-5), è dedicata a generalizzare questi risultati e le loro conseguenze immediate.

Nella seconda parte si studiano le principali proprietà globali degli spazi analitici reali.

Più precisamente nei §§ 1 e 2 si definiscono gli spazi analitici reali (nel senso di SERRE) ed, estendendo i risultati di BRUHAT e WHITNEY, ([4]), si prova che ogni spazio analitico reale, coerente, paracompatto ammette un complessificato.

Nel § 3 si prova che ogni spazio analitico reale, coerente, paracompatto X, immerso in un suo complessificato $\tilde{X}$, ha in $\tilde{X}$, un sistema fondamentale di intorni che sono spazi di STEIN.

Nel § 4 si prova che, ogni spazio analitico paracompatto, coerente X, di dimensione n, è contenuto in un complessificato $\tilde{X}$, che è uno spazio di STEIN, e su cui è definita un'antiinvoluzione (1) σ che ha X come luogo

(*) Lavoro eseguito nel Gruppo di ricerca n. 35 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche per l'anno 1965-66.

(1) Dicesi antiinvoluzione su $\tilde{X}$ un omeomorfismo $\sigma : \tilde{X} \to \tilde{X}$, a quadrato identico, che sia espresso, localmente, da funzioni antiolomorfe.

dei punti fissi. Si dimostra poi che esiste un'immersione $\varphi : \tilde{X} \to \boldsymbol{C}^{4n+2}$, tale che: $\varphi \circ \sigma = \bar{\sigma} \circ \varphi$, ove $\bar{\sigma}$ è l'antiinvoluzione, indotta dal coniugio, su $\boldsymbol{C}^{4n+2}$.

Nel § 5 si richiama, brevemente, il concetto di R-spazio analitico, cioè di spazio analitico reale con elementi nilpotenti (nel senso di GROTHENDIECK).

Si prova poi che, per ogni R-spazio analitico (X, O_X), esiste un C-spazio $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$, detto O_X complessificato di (X, O_X), tale che: $\tilde{X} \supset X$ e su $\tilde{X}$ esiste un'antiinvoluzione che ha X come luogo dei punti fissi. Per mezzo di questo risultato si prova che, anche per gli R-spazi analitici, valgono i teoremi A e B.

Nel § 6 si prova che ogni morfismo fra R-spazi analitici si estende ad un morfismo fra due complessificati e si stabiliscono delle proprietà più precise nel caso in cui gli R-spazi siano coerenti.

In particolare si da una condizione, sufficiente, affinchè un morfismo biunivoco fra spazi analitici, reali, coerenti sia un isomorfismo.

Nel § 7 si prova che un'antiinvoluzione di una varietà complessa di dimensione n ha come luogo dei punti fissi una varietà analitica reale di dimensione n, oppure l'insieme vuoto.

Da questo risultato segue un teorema di immersione per gli R-spazi di dimensione n in R^{4n+2}.

Si provano poi delle proprietà degli insiemi dei punti singolari degli R-spazi.

Il paragrafo termina con la dimostraziome del fatto che, per gli spazi analitici reali, coerenti, paracompatti, esiste uua decomposizione in componenti irriducibili godente delle stesse caratteristiche di quella degli spazi complessi.

Nel § 8 si prova che ogni spazio analitico, reale, coerente ammette un normalizzato.

Si prova infine che la costruzione di un normalizzato è possibile, anche se non in modo unico, per gli R-spazi analitici.

Il presente lavoro è nato da alcuni seminari tenuti dall'autore.

Abbiamo cercato di dare una trattazione il più possibile autonoma, dimostrando, quando necessario, proposizioni già note e facendo rinvii bibliografici precisi.

In particolare il fatto che ogni R-spazio paracompatto ammetta una complessificazione era stato annunciato da HIRONAKA in [11].

A lavoro ultimato l'autore è venuto a conoscenza del fatto che W. FENSCH ha provato che ogni spazio analitico reale coerente paracompatto ammette un complessificato.

1. **Preliminari.**

Sia K un corpo topologico. Sia X uno spazio topologico $\mathcal{A}$ un sottofascio del fascio dei germi delle funzioni continue su X, a valori in K.

La coppia $(X, \mathcal{A})$ si dice spazio anulato; $\mathcal{A}$ è detto fascio strutturale. Quando non è possibile confusione scriveremo X invece di $(X, \mathcal{A})$.

Siano $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ due spazi anulati. Si dice che una applicazione $f: X \to Y$ è un morfismo o che f è un'applicazione morfa se:

1) f è continua

2) per ogni aperto $V \subset Y$ si ha:

$$f^*(\Gamma(V, \mathcal{B})) \subset \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{A})$$

ove $\Gamma(V, \mathcal{B})$ è l'insieme delle sezioni di $\mathcal{B}$ su V e $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{A})$ è l'insieme delle sezioni di $\mathcal{A}$ su $f^{-1}(V)$.

Si dice che f è bimorfa od isomorfismo se f è un omeomorfismo ed f e f^{-1} sono applicazioni morfe.

Due spazi anulati $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo $f: X \to Y$.

Un insieme chiuso M di uno spazio anulato $(X, \mathcal{A})$ si dice un $\mathcal{A}$ insieme se, per ogni punto $x \in M$, esiste un intorno $U \ni x$ ed un numero finito di funzioni: $f_1 \dots f_k \in \Gamma(U, \mathcal{A})$ tali che:

$$M \cap U = \{p \in U \mid f_1(p) = f_2(p) = \dots = f_k(p) = 0\}.$$

La struttura di spazio anulato di $(X, \mathcal{A})$ induce una struttura di spazio anulato $(M, \mathcal{A}(M))$ su ogni sottoinsieme $M \subset X$.

Il fascio $\mathcal{A}(M)$ è generato dal prefascio che associa all'aperto V di M l'anello delle funzioni f che sono restrizione di qualche elemento di $\Gamma(U, \mathcal{A})$, ove U è un aperto di X, tale che: $U \cap M = V$.

Gli $\mathcal{A}$ insiemi di X, nel seguito, verranno sempre considerati con la loro struttura indotta di spazi anulati. È di immediata verifica che, se M è un sottoinsieme di X l'immersione $i: M \to X$ è un'applicazione morfa delle strutture anulate $(M, \mathcal{A}(M))$, $(X, \mathcal{A})$.

Diamo ora due esempi.

Sia D un aperto di $\boldsymbol{C}^n$; indichiamo con O il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su D. (D, O) è uno spazio anulato, gli O–insiemi di D si diranno insiemi analitici complessi locali.

Sia E un aperto di R^n, indichiamo con $\mathcal{R}$ il fascio dei germi delle funzioni analitiche reali su E. $(E, \mathcal{R})$ è uno spazio anulato, gli $\mathcal{R}$–insiemi di E si diranno insiemi analitici reali locali.

Uno spazio anulato $(X, \mathcal{A})$ si dice spazio analitico complesso (o reale) se:

1) X è di HAUSDORFF

2) ogni $x \in X$ ha un intorno U il quale, con la struttura anulata indotta da quella di $(X, \mathcal{A})$, è isomorfo ad un insieme analitico complesso (o reale) locale.

Spesso, seguendo l'uso comune, diremo spazio complesso invece di spazio analitico complesso. Le applicazioni morfe fra spazi complessi si dicono anche applicazioni olomorfe e quelle fra spazi analitici reali (o complessi) applicazioni analitiche reali (o complesse). Osserviamo che si può fare una teoria degli spazi analitici non di Hausdorff; in questo lavoro però ci interesseremo solo agli spazi separati.

Ci saranno utili le seguenti definizioni:

Diremo che lo spazio topologico X è localmente numerabile se, per ogni $x \in X$, esiste un intorno $U \ni x$ che, con la topologia indotta è uno spazio topologico soddisfacente al II assioma di numerabilità.

Lo spazio topologico X si dice localmente metrizzabile se per ogni $x \in X$ esiste un intorno $U \ni x$ che è uno spazio metrizzabile.

Le proprietà topologiche degli spazi analitici connessi che ci serviranno nel seguito sono riassunte nel seguente:

Teorema 1. - *Per ogni spazio topologico di Hausdorff connesso, localmente numerabile e localmente metrizzabile le seguenti ipotesi sono equivalenti:*

a) X è paracompatto

b) X soddisfa al II assioma di numerabilità

c) X è un sottospazio del prodotto topologico di un'infinità numerabile di rette euclidee

d) X è metrizzabile.

Prova. - Seguiamo la schema $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow a)$

1) $a) \Rightarrow b)$ lo spazio X sia localmente metrizzabile, localmente numerabile e paracompatto; dimostriamo che X soddisfa al II assioma di numerabilità.

Per ogni $x \in X$ si prenda un intorno $U_x \ni X$ tale che U_x soddisfa al II assioma di numerabilità; sia $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un raffinamento, localmente finito del ricoprimento $\{U_x\}_{x \in X}$. Osserviamo che, se l'insieme W di X soddisfa al II assioma di numerabilità, allora $\tilde{W} = \{$unione degli U_λ tali che $U_\lambda \cap W \neq \emptyset\}$ soddisfa al II assioma di numerabilità. Sia infatti $\{V_n\}_{n \in Z}$ un ricoprimento numerabile di W, tale che ogni V_n intersechi solo un numero finito,

$$\{U_{\lambda_i^n}\}_{i=1 \dots r_n}$$

di elementi di $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Si ha:

$$\tilde{W} \subset \bigcup_{i,n} U_{\lambda_i^n} = \widehat{W}$$

e $\widehat{W}$, essendo unione di un'infinità numerabile di elementi di $\{U_\lambda\}$ soddisfa, con ogni suo sottospazio, al II assioma di numerabilità.

Fissato il ricoprimento $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, diciamo due punti x, $y \in X$ equivalenti se esiste una catena finita $\{U_{\lambda_i}\}_{i=1\ldots n}$ di elementi di $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tali che $U_{\lambda_1} \ni x$, $U_{\lambda_n} \ni y$, $U_{\lambda_i} \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ per $1 \leq i < n$.

Essendo X localmente numerabile, la relazione ora definita è di equivalenza, ed ogni classe di equivalenza risulta aperta. Ogni classe sarà perciò anche chiusa, perchè complementare di tutte le altre. Essendo X connesso, tutti i suoi punti sono equivalenti fra loro nel senso ora stabilito.

Fissiamo un punto $\bar{x}$ di X e sia $C_n^{\bar{x}} = \{y \in X$ per cui esiste una catena $\{U_{\lambda_i}\}_{i=1\ldots n}$ per cui

$$U_{\lambda_1} \ni \bar{x}, \qquad U_{\lambda_n} \ni y, \qquad U_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_{i+1}} \neq \emptyset \qquad 1 \leq i < n\}.$$

Per quanto visto $X = \bigcup_{n\in N} C_n^{\bar{x}}$, basta pertanto provare che $C_n^{\bar{x}}$ soddisfa al II assioma di numerabilità.

Ragioniamo per induzione: $C_1^{\bar{x}} = \{$unione degli U_λ che contengono $\bar{x}\}$; essendo $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ localmente finito risulta che $C_1^{\bar{x}}$ soddisfa al II assioma di numerabilità.

Ammettiamo che $C_{n-1}^{\bar{x}}$ soddisfi al II assioma di numerabilità; $C_n^{\bar{x}}$ è l'unione degli U_λ per cui

$$C_{n-1}^{\bar{x}} \cap U_\lambda \neq \emptyset,$$

quindi $C_n^{\bar{x}}$ soddisfa al II assioma di numerabilità per quanto abbiamo osservato dianzi. Si è così provato che da *a*) segue *b*.

2) *b*) $\Rightarrow$ *c*) Essendo X di HAUSDORFF e localmente metrizzabile, X è completamente regolare. Si può perciò costruire un'immersione di X nel prodotto topologico di una infinità numerabile di rette euclidee.

3) *c*) $\Rightarrow$ *d*) È ovvio perchè X risulta sottospazio di uno spazio metrico.

4) *d*) $\Rightarrow$ *a*) Ogni spazio metrico è paracompatto (vedi ad esempio J. KELLEY «General topology» pag. 160).

OSSERVAZIONE 1. – Il teorema 1 è sostanzialmente in [3], nell'ipotesi che X sia localmente compatto. Nel seguito di questo lavoro tale ipotesi è sempre verificata; abbiamo tuttavia voluto svincolarci da questa condizione perchè recentemente sia H. GRAUERT che A. DOUADY hanno studiato generalizzazioni del concetto di spazio analitico. Tali spazi più generali non risultano sempre localmente compatti.

OSSERVAZIONE 2. – Per lo studio degli spazi analitici non connessi è utile ricordare il seguente, ben noto, teorema di topologia: sia X uno spazio

T_2 localmente metrizzabile, allora le seguenti due ipotesi sono equivalenti:

i) X è paracompatto

ii) X è metrizzabile.

Notiamo che ogni spazio analitico, reale o complesso, è localmente connesso (vedi ad esempio [4]), quindi se X è uno spazio analitico le sue componenti connesse sono aperte e chiuse.

OSSERVAZIONE 3. Per ogni spazio analitico paracompatto X, (reale o complesso), vale la seguente proprietà:

a) dato un ricoprimento aperto $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ esiste un raffinamento $\{V_i\}_{i\in I}$ tale che ogni aperto V_i interseca solo un numero finito di elementi di $\{V_i\}_{i\in I}$. (X è paracompatto e localmente compatto quindi $\{V_i\}_{i\in I}$ può essere preso localmente finito e tale che $\overline{V}_i$ sia compatto per ogni $i\in I$, ciò prova la tesi).

Dato uno spazio analitico complesso (o reale) $(X, \mathcal{A})$ diremo insieme analitico di X ogni $\mathcal{A}$-insieme di X.

Assegnato lo spazio analitico complesso (o reale) $(X, \mathcal{A})$, per ogni $x\in X$ consideriamo la famiglia $\mathcal{A}_x$ degli insiemi analitici contenenti x e definiti su un aperto contenente x.

In $\mathcal{A}_x$ poniamo la seguente relazione di equivalenza:

$V \sim W \Leftrightarrow$ esiste un aperto $U \ni x$ tale che $V\cap U = W\cap U$.

L'insieme quoziente G_x è detto insieme dei germi di insiemi analitici di X in x. Gli elementi di G_x sono detti germi di insieme analitico (complesso o reale).

Se V è un insieme analitico di X indicheremo con V_x il germe individuato da V in x.

Siano dati due spazi analitici complessi (o reali) X, Y e due germi $V_x\in G_x$, $x\in X$, $W_y\in G_y$, $y\in Y$. Diremo che fra V_x e W_y è definito un isomorfismo (o, più in generale, che è definito un morfismo di V_x in W_y) se esistono: due aperti $U\ni x$, $U'\ni y$, due insiemi analitici $V\subset U$, $W\subset U'$ della classe di V_x, W_y ed un isomorfismo surgettivo $\varphi: V \longrightarrow W$ (rispettivamente un morfismo $\varphi: V\longrightarrow W$).

Dicesi che V_x e W_y sono isomorfi, se esiste un isomorfismo di V_x in W_y.

Da ora in poi il corpo K sarà il corpo reale o quello complesso.

Osserviamo che ogni germe di insieme analitico, reale o complesso, è isomorfo al germe di un insieme analitico di K^n.

Il germe di un insieme analitico V_x si dice realizzabile in K^n se è isomorfo al germe di un insieme analitico di K^n. V_x si dice realizzato in K^n se è assegnato un insieme analitico in un aperto di K^n, isomorfo ad un rappresentante di V_x.

Indicheremo con O_x l'anello dei germi delle funzioni analitiche in $x\in K^n$, e con $\mathfrak{A}(V_x)$ l'ideale di O_x formato dai germi delle funzioni che si annullano su V_x.

Ogni funzione analitica f definita su un intorno di x si scrive, in modo unico, nella forma $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n + \dots$ ove f_i è il polinomio omogeneo di grado i nelle coordinate di K^n.

Si dice termine principale della f il polinomio f_k se $f_0 = f_1 = \dots = f_{k-1} = 0$, $f_k \neq 0$. Assegnato il germe V_x di insieme analitico di K^n diremo ideale tangente, e lo indicheremo con $\breve{\mathfrak{A}}(V_x)$, l'ideale di O_x generato dai termini principali degli elementi di $\mathfrak{A}(V_x)$. Sia V lo spazio vettoriale, su K, delle funzioni lineari, appartenenti all'ideale $\breve{\mathfrak{A}}(V_x)$, e sia $l_1 \dots l_r$ una base di V.

Dicesi spazio tangente di ZARISKI di V_x, e si indica con τ_{V_x}, il sottospazio K^n dato da:

$$\tau_{V_x} = \{ z \in K^n \mid l_1(z) = l_2(z) = \dots = l_r(z) = 0 \}.$$

Quando non sono possibili confusioni scriveremo τ_x in luogo di τ_{V_x}.

Per come è stato definito lo spazio tangente di ZARISKI dipende dalla realizzazione scelta di V_x. Il seguente teorema ci svincola da questa dipendenza.

TEOREMA 2. - *Sia V_x il germe di un insieme analitico realizzato in K^m e τ_x il suo spazio tangente di Zariski, si ha allora:*

a) la minima dimensione di uno spazio lineare, su K, in cui si può realizzare V_x è $d = \dim_K \tau_x$.

b) sia $V \subset \tau_x$ un rappresentante di V_x e $\varphi : V \to W$ un isomorfismo di V su un insieme analitico W, con $W \subset U'$, U' aperto di K^n. In queste ipotesi φ si prolunga, in modo unico, ad un isomorfismo $\varphi : U \to \varphi(U) \subset U'$ ove U è un aperto di τ_x contenente x e $\varphi(U)$ è una sottovarietà analitica di K^n.

c) sia V_x realizzato in due modi diversi in τ_x, allora esiste un isomorfismo di τ_x, in sè che porta una realizzazione nell'altra.

La dimostrazione del teorema 2, è sviluppata in [2], § 1 per $K = \boldsymbol{C}$ e resta sostanzialmente invariata per $K = R$.

§ 2. - Complessificazione di uno spazio analitico reale coerente.

a) Il caso locale

Supporremo sempre nel seguito R^n canonicamente immerso $\boldsymbol{C}^n$; cioè $R^n = Re(\boldsymbol{C}^n)$.

Sia V un insieme analitico reale realizzato in un aperto di R^n, $x \in V$.

PROPOSIZIONE 1. – *Esiste in C^n uno, ed un solo, germe di insieme analitico complesso $\tilde{V}_x$ tale che:*

a) $\tilde{V}_x \supset V_x$, $\tilde{V}_x \cap R^n = V_x$. *$\tilde{V}_x$ è il più piccolo germe di insieme analitico complesso a godere di queste proprietà.*

b) ogni germe di funzione olomorfa nel punto x, che si annulla su V_x, si annulla su $\tilde{V}_x$.

Per la dimostrazione vedi [6] pag. 90.

Il germe di insieme analitico complesso $\tilde{V}_x$ si dice complessificato di V_x (rispetto alla realizzazione scelta).

Il complessificato del germe di R^n, in un punto $x \in R^n$, è il germe indotto da C^n nel punto x.

Ricordiamo che, se l'ideale dei germi di funzioni analitiche reali che si annullano su V_x, è generato da $f_1 \dots f_r$, $\tilde{V}_x$ è il germe di insieme analitico complesso individuato dalle equazioni

$$\tilde{f}_1 = \dots = \tilde{f}_r = 0,$$

ove $\tilde{f}_i$ sono i germi delle funzioni olomorfe che prolungano le f_i.

Dato il germe di insieme analitico reale V_x, ci proponiamo di definire, in modo intrinseco, cioè indipendente dalla realizzazione di V_x, il suo complessificato $\tilde{V}_x$.

LEMMA 1. – *Sia V_x il germe di un insieme analitico reale di R^n, V_τ, sia il germe di una realizzazione di V_x nel suo spazio tangente di Zariski τ e $\varphi : V_\tau \longrightarrow V_x$ un isomorfismo.*

Indichiamo con $\tilde{V}_x$, $\tilde{\tau}$, $\tilde{V}_\tau$ le complessificazioni di V_x in $C^n \supset R^n$, di τ, e di V_τ in $\tilde{\tau}$.

In queste ipotesi esiste un solo isomorfismo $\tilde{\varphi} : \tilde{V}_\tau \longrightarrow \tilde{V}_x$ che prolunga φ.

PROVA. – Per il teorema 2 l'isomorfismo φ si prolunga ad un isomorfismo $\widehat{\varphi} : U \longrightarrow R^n$ di un intorno $U \ni x$ di τ.

Sono perciò definite delle funzioni analitiche reali $g_1 \dots g_n$ su U tali che:

$$\text{rango}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \dim_R \tau = p, \tag{1}$$

ove $x_1 \dots x_p$ sono le coordinate in τ, e si ha:

$$\widehat{\varphi}(x_1 \dots x_p) = \{g_1(x_1 \dots x_p) \dots g_n(x_1 \dots x_p)\}.$$

Siano $\tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_n$ i prolungamenti olomorfi di $g_1 \dots g_n$ definiti in un aperto di $\tilde{\tau}$; le $\tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_n$ risultano definite contemporaneamente su un aperto $\widehat{U} \ni x$ di $\tilde{\tau}$, per la (1), definiscono un isomorfismo $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \subset \boldsymbol{C}^n$ su un intorno aperto $\tilde{U} \subset \widehat{U}$ di x.

Per la (1) $\tilde{\varphi}(\tilde{U}) = \tilde{W}$ è una sottovarietà complessa di un aperto di $\boldsymbol{C}^n$. Essendo $\tilde{\varphi} | \tilde{U}$ un isomorfismo, $\tilde{\varphi}(\tilde{V}_\tau)$ è un germe di insieme analitico complesso ed esso contiene $\tilde{V}_x$ in quanto $\tilde{\varphi}$ prolunga φ.

Vogliamo provare che $\tilde{\varphi}(\tilde{V}_\tau) = \tilde{V}'_x = \tilde{V}_x$. Sia f il germe di una funzione olomorfa su $\tilde{V}'_x$ e supponiamo $f | V_x \equiv 0$, allora $f \circ \varphi | \tilde{V}_\tau \equiv 0$ perchè $f \circ \varphi | V_\tau \equiv 0$ e $\tilde{V}_\tau$ è il complessificato di V_τ. Si ha perciò

$$f | \tilde{V}'_x \equiv 0$$

da cui

$$\tilde{V}'_x = \tilde{\varphi}(\tilde{V}_\tau)$$

è il germe di un insieme analitico complesso che gode della proprietà caratteristica del complessificato di V_x e quindi coincide con esso.

Essendo $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ un isomorfismo, anche la sua restrizione $\tilde{\varphi} : \tilde{V}_\tau \to \tilde{V}_x$ risulta un isomorfismo.

L'estensione $\tilde{\varphi} : \tilde{V}_\tau \to \tilde{V}_x$ è unica perchè due estensioni della φ coincidono, per il teorema 2, su un aperto di τ contenente $\varphi^{-1}(x)$ e quindi su un aperto di $\tilde{\tau}$ contenente $\varphi^{-1}(x)$. Ciò conclude la dimostrazione.

LEMMA 2. - *Dati due germi V_x, W_y di insiemi analitici reali di R^n, R^m ed un isomorfismo $\varphi : V_x \to W_y$, esiste un unico isomorfismo $\tilde{\varphi} : \tilde{V}_x \to \tilde{W}_y$ che prolunga φ ai complessificati di V_x e W_y.*

PROVA. - Siano V'_x, W'_y, i germi di due realizzazioni di V_x e W_y nel loro spazio tangente di ZARISKI τ_x, τ_y.

Notiamo con $i : V'_x \to V_x$, $j : W'_y \to W_y$ due isomorfismi.

L'isomorfismo $(j)^{-1} \circ \varphi \circ i : V'_x \to W'_y$, per il lemma 1 ed il teorema 2, si prolunga ad un isomorfismo complesso $\widehat{\varphi} : \tilde{U}_x \to \tilde{U}_y$ fra due aperti $\tilde{U}_x$, $\tilde{U}_y$ dei complessificati $\tilde{\tau}_x$, $\tilde{\tau}_y$ di τ_x, τ_y.

Come provato dal lemma 1, $\widehat{\varphi}$ induce un isomorfismo fra i complessificati $\tilde{V}'_x$, $\tilde{W}'_y$ di V'_x, W'_y. Gli isomorfismi, i, j, si estendono, in modo unico. a due isomorfismi $\tilde{i} : \tilde{V}'_x \to \tilde{V}_x$, $\tilde{j} : \tilde{W}'_y \to \tilde{W}_y$. È così definito l'isomorfismo $\varphi : \tilde{V}_x \to \tilde{W}_y$ dato da

$$\tilde{\varphi} = \tilde{j} \circ \widehat{\varphi} \circ (\tilde{i})^{-1};$$

$\tilde{\varphi}$ estende φ. Rimane da provare l'unicità dell'estensione.

Siano ψ, ψ' due isomorfismi di $\tilde{V}_x$ in $\tilde{W}_y$ tali che $\psi | V_x = \psi' | V_x$, dimostriamo che allora $\psi = \psi'$ su $\tilde{V}_x$.

Gli isomorfismi ψ e ψ' si esplicitano, in un intorno U di x, con delle funzioni olomorfe $g_1 \dots g_m$, $g'_1 \dots g'_m$. Si ha cioè:

$$\psi(p) = \{g_1(p) \dots g_m(p)\} \in \boldsymbol{C}^m$$
$$\psi'(p) = \{g'_1(p) \dots g'_m(p)\} \in \boldsymbol{C}^m, \qquad \forall\, p \in U$$

Su U si ha dunque

$$\psi(p) - \psi'(p) = \{g_1(p) - g'_1(p) \dots g_m(p) - g'_m(p)\},$$

ma le funzioni olomorfe $g_i - g'_i$ sono nulle su V_x e quindi anche su $\tilde{V}_x$. Onde

$$\psi | \tilde{V}_x = \psi' | \tilde{V}_x .$$

I lemmi dimostrati ci permettono di definire, a meno di isomorfismi, il complessificato del germe di un insieme analitico reale V_x.

Definizione. - Dicesi complessificato di V_x il germe di insieme analitico complesso ottenuto costruendo il complessificato di una realizzazione di V_x in uno spazio euclideo R^n. Salvo avviso contrario, indicheremo il complessificato di V_x con $\tilde{V}_x$.

I lemmi 1 e 2 garantiscono che $\tilde{V}_x$ è definito, a meno di isomorfismi, e datene due realizzazioni $\tilde{V}_x$, $\tilde{V}'_x$ l'identità $V_x \to V'_x$ si prolunga, in modo unico, ad un isomorfismo $\tilde{V}_x \to \tilde{V}'_x$.

Ricordiamo che O_{V_x} è l'anello dei germi di funzioni analitiche reali, sul germe di insieme analitico reale V_x, allora $O_{V_x} \otimes \boldsymbol{C}$ è l'anello dei germi di funzioni olomorfe sul germe del complessificato (vedi [6]). Da ciò segue, in particolare, che se lo spazio tangente di Zariski a V_x è R^n, quello del complessificato è $\boldsymbol{C}^n$.

Identificando $\boldsymbol{C}$ con l'R^2 soggiacente ogni spazio complesso diventa uno spazio analitico reale.

Sia $\tilde{X}$ uno spazio analitico complesso, $X \subset \tilde{X}$ un insieme analitico reale di $\tilde{X}$ considerato come spazio analitico reale.

Diremo che $\tilde{X}$ è un complessificato di X, nel punto $x \in X$, se esiste una realizzazione del germe $\tilde{X}_x$, in un aperto di $\boldsymbol{C}^n$ tale che il germe X_x indotto da X sia contenuto in $R^n \subset \boldsymbol{C}^n$ ed abbia, in $\boldsymbol{C}^n$, $\tilde{X}_x$ come complessificato.

Dato un insieme analitico reale V di un aperto di R^n, non sempre, vedi ad esempio [6], il fascio di ideali dei germi delle funzioni analitiche reali che si annullano su V è $\mathcal{R}$ coerente ($\mathcal{R}$ = fascio dei germi delle funzioni analitiche reali su R^n). L'insieme analitico reale V si dice coerente nel punto x se il fascio dei germi delle funzioni analitiche reali nulle su V è $\mathcal{R}$-coerente in un intorno di x.

Si ha la seguente caratterizzazione degli insiemi analitici reali coerenti ([6] pag. 94):

PROPOSIZIONE 2. – *Sia V un insieme analitico reale di un aperto di R^n. Condizione necessaria e sufficiente affinchè V sia coerente in x è che ogni rappresentante del complessificato $\tilde{V}_x$ di V_x induca il complessificato di V_y, per tutti gli y di un aperto di V contenente x.*

Poniamo dunque la

DEFINIZIONE. – Lo spazio analitico reale X si dice coerente nel punto $x \in X$ se, detto $\tilde{X}'$ un rappresentante del complessificato di X_x si ha che, per tutti i punti y di un aperto $U \ni x$, $\tilde{X}'_y$ coincide con $\tilde{X}_y$.

Lo spazio analitico reale X si dice coerente se è coerente in ogni suo punto.

b) Il caso globale

DEFINIZIONE. – Dato uno spazio analitico reale X diremo complessificato, o complessificazione, di X ogni spazio analitico complesso $\tilde{X}$ tale che:

1) X è un insieme analitico reale, chiuso, di $\tilde{X}$, considerato come spazio analitico reale.

2) $\tilde{X}_x$ è il complessificato di X_x in ogni $x \in X$.

Ci proponiamo ora di provare il segnente

TEOREMA 3. – *Sia X uno spazio analitico reale paracompatto e coerente, allora esiste una complessificazione $\tilde{X}$ di X, che è ancora uno spazio paracompatto. Date inoltre due complessificazioni $\tilde{X}$, $\tilde{X}'$ di X, l'applicazione identica $i: X \to X$ si estende a un isomorfismo $\tilde{i}: U \to U'$ fra due aperti di $\tilde{X}$, $\tilde{X}'$.*

Premettiamo alla dimostrazione del teorema il

LEMMA 3. – *Dati due spazi analitici reali paracompatti, coerenti U e V, siano $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ due complessificazioni e $\rho: U \to V$ un isomorfismo surgettivo. Per ogni compatto $C \subset U$, esiste un aperto $\tilde{C} \supset C$ di $\tilde{U}$ ed un'estensione $\tilde{\rho}: \tilde{C} \to \tilde{V}$ di ρ che è un isomorfismo tra gli aperti $\tilde{C}$ e $\tilde{\rho}(\tilde{C})$. Lo spazio $\tilde{C}$ è inoltre paracompatto.*

PROVA. – Poichè lo spazio $\tilde{U}$ è localmente compatto esiste un intorno $\tilde{U}_C$ di C in $\tilde{U}$, che è compatto. $\tilde{U}$ è uno spazio complesso. Per il teorema 1, $\tilde{U}_C$ soddisfa al II assioma di numerabilità ed ogni suo sottospazio è paracompatto. Prendiamo un ricoprimento finito $\{B_i\}_{i \in I}$ di C, formato di aperti di

$\tilde{U}_C$, tale che:

1) $\bar{B}_i$ è compatto per ogni $i \in I$

2) in ogni $B_i \cap U$ esiste esiste un punto x_i tale che l'isomorfismo dei germi $\rho : U_{x_i} \longrightarrow V_{\rho(x_i)}$ si prolunghi ad un isomorfismo $\tilde{\rho}_i : B_i \longrightarrow \tilde{\rho}_i(B_i) \subset \tilde{V}$.

Tale ricoprimento esiste perchè C è compatto.

L'esistenza delle estensioni $\tilde{\rho}_i$ è garantita dal lemma 2.

Sia ora $\{C_i\}_{i \in I}$ un restringimento di $\{B_i\}_{i \in I}$, cioè un ricoprimento aperto tale che: $\bar{C}_i \subset B_i$, $\forall\, i \in I$, $\bigcup_{i \in I} C_i \supset U$.

Fissati due indici l, $m \in I$ sia $\bar{C}_l \cap \bar{C}_m \neq \emptyset$. Si ha:

$$\bar{C}_l \cap \bar{C}_m \subset B_l \cap B_m .$$

Su $B_l \cap B_m$ sono definiti gli isomorfismi $\tilde{\rho}_l$, $\tilde{\rho}_m$. Sia $D_{l,m}$ l'insieme di $B_l \cap B_m$ su cui $\tilde{\rho}_l = \tilde{\rho}_m$; $D_{l,m}$ è un intorno di $\bar{C}_l \cap \bar{C}_m \cap U$.

Gli insiemi: $C'_l = C_l - (\bar{C}_l \cap \bar{C}_m)$, $C'_m = C_m - (\bar{C}_l \cap \bar{C}_m)$, $\mathring{D}_{l,m}$ sono tre aperti la cui unione che indicheremo con $E_{l,m}$, contiene $(C_l \cup C_m) \cap U$.

Su C'_l è definita $\tilde{\rho}_l$, su C'_m $\tilde{\rho}_m$ e su $\mathring{D}_{l,m}$ sono definite entrambe le applicazioni. Poichè esse coincidono su $\mathring{D}_{l,m}$ risulta definita su $E_{l,m}$ un'estensione di $\rho|_{(C_l \cup C_m) \cap U}$.

Iterando un numero finito di volte l'argomentazione precedente si costruisce una $\tilde{\rho}$ definita su un intorno $\widehat{U} \supset C$ che estende la ρ. Dalla costruzione segue che $\tilde{\rho}$ è continua su ogni C_l e quindi risulta continua su $\widehat{U}$. L'applicazione $\tilde{\rho}$ è localmente un isomorfismo. Resta soltanto da provare che esiste un intorno $\tilde{C}$ di C tale che

$$\tilde{\rho} : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{\rho}(\tilde{C})$$

è un isomorfismo.

Supponiamo, per assurdo, non esista un intorno $\widehat{C}$ di C tale che

$$\tilde{\rho} : \widehat{C} \longrightarrow \tilde{\rho}(\widehat{C})$$

sia biunivoca.

Preso un sistema fondamentale di intorni E_n di C, con $E_n \supset \bar{E}_{n+1}$, esisterebbero delle coppie di punti

$$(x_n ,\ y_n), \qquad x_n \in E_n , \qquad y_n \in E_n$$

tali che

$$\tilde{\rho}(x_n) = \tilde{\rho}(y_n).$$

Essendo $\tilde{U}$ localmente compatto, gli E_n si possono prendere a chiusura compatta. Esisterebbe perciò una successione di coppie di punti (x_{i_j}, y_{i_j}) tali che

$$x_{i_j} \longrightarrow x \in C, \qquad y_{i_j} \longrightarrow y \in C.$$

Avendosi $\tilde{\rho}(x_{i_j}) = \tilde{\rho}(y_{i_j})$, per continuità si ottiene

$$\tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}(y).$$

Poichè $\tilde{\rho} \mid U$ è iniettiva quindi segue $x = y$. $\tilde{\rho}$ è localmente un isomorfismo, esiste un intorno D di x in $\tilde{U}$ su cui $\tilde{\rho}$ è iniettiva. L'intorno D non può quindi contenere nessuna coppia di punti x_{i_j}, y_{i_j}, ma questo è impossibile perchè $x_{i_j} \longrightarrow x$, $y_{i_j} \longrightarrow x$; non si può perciò supporre che $\tilde{\rho}$ non sia iniettiva su nessun E_n. Sia $\tilde{\rho}$ iniettiva su $E_{\bar{n}}$, allora

$$\tilde{\rho} : E_{\bar{n}+1} \longrightarrow \tilde{\rho}(E_{\bar{n}+1})$$

è un omeomorfismo perchè $\bar{E}_{\bar{n}+1}$ è compatto e $\tilde{V}$ e T_2.

Prova del teorema 3.

Sia $\{T'_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X tale che:

1) $\bar{T}'_i$ sia compatto per ogni $i \in I$.

2) ogni T_i intersechi solo un numero finito di aperti del ricoprimento.

3) esistano $\{U'_i\}_{i \in I}$ e $\{V'_i\}_{i \in I}$, due restringimenti, rispettivamente di $\{T'_i\}_{i \in I}$ ed $\{U'_i\}_{i \in I}$ tali che: in ogni V'_i vi sia un punto x_i per cui esista un rappresentante della complessificazione del germe X_{x_i} che induca per tutti gli $y \in T'_i$ il germe del complessificato di X_y.

4) $V'_i \cap V'_j \neq \emptyset$ se, e solo se $T'_i \cap T'_j \neq \emptyset$.

5) ogni T'_i è realizzabile nello spazio tangente di ZARISKI di X_{x_i}.

Il ricoprimento $\{T'_i\}_{i \in I}$ ed i restringimenti $\{U'_i\}_{i \in I}$, $\{V'_i\}_{i \in I}$ esistono perchè X è paracompatto e coerente.

Per ogni $i \in I$ sia T_i la realizzazione di T'_i nello spazio tangente di ZARISKI di X_{x_i} e sia $\tilde{X}_{x_i}$ il complessificato di X_{x_i}.

Per le ipotesi fatte esiste una realizzazione $\tilde{T}_i$ di $\tilde{X}_{x_i}$, nella complessificazione dello spazio tangente di ZARISKI ad X_{x_i}, che è un complessificato dello spazio analitico reale T_i.

Analogamente indichiamo con $U_i \subset T_i$, $V_i \subset U_i$ le realizzazioni di U'_i, V'_i nello spazio tangente di ZARISKI di X_{x_i}.

Indichiamo con $\varphi_i : T'_i \longrightarrow T_i$, $i \in I$, l'isomorfismo di T'_i nella sua realizzazione. Siano

$$\tilde{T}_i \supset \tilde{U}_i \supset \tilde{V}_i, \qquad \forall\, i \in I,$$

dei complessificati di T_i, U_i, V_i e

$$T_{i,j} = \varphi_i(T'_i \cap T'_j), \qquad U_{i,j} = \varphi_i(U'_i \cap U'_j), \qquad V_{i,j} = \varphi_i(V'_i \cap V'_j).$$

Possiamo supporre che il ricoprimento $\{T'_i\}_{i\in I}$ sia il restringimento di un ricoprimento $\{W'_i\}_{i\in I}$ godente delle proprietà 1), 2), 3), 4), 5).

Poichè T_i è relativamente compatto in W_i si può applicare il lemma 3, gli isomorfismi

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : T_{i,j} \longrightarrow T_{j,i}$$

si possono perciò estendere a degli isomorfismi

$$\psi_{i,j} : \tilde{T}_{i,j} \longrightarrow \tilde{T}_{i,j}$$

definiti fra due intorni di $T_{i,j}$, $T_{j,i}$ in $\tilde{T}_i$, $\tilde{T}_j$.

Con la proposizione 1 di [4] si prova il seguente

Corollario. - Sia X uno spazio metrizzabile localmente compatto,

$$\{T'_i\}_{i\in I}, \qquad \{U'_i\}_{i\in I}, \qquad \{V'_i\}_{i\in I}$$

tre ricoprimenti localmente finiti formati da aperti relativamente compatti e sia

$$T'_i \supset \bar{U}'_i, \qquad U'_i \supset \bar{V}'_i.$$

Siano assegnati degli spazi metrici localmente compatti $\tilde{T}_i$ e degli omeomorfismi

$$\varphi_i : T'_i \longrightarrow \varphi^i(T'_i) \subset \tilde{T}_i$$

fra T'_i ed un chiuso

$$T'_i = \varphi_i(T'_i) \quad \text{di} \quad \tilde{T}_i.$$

Supponiamo infine che gli omeomorfismi $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ si estendano ad uu omeomorfismo fra due intorni di $\varphi_i(T'_i \cap T'_j)$ e $\varphi_j(T'_i \cap T'_j)$, in queste ipotesi esistono degli aperti $\tilde{V}_i$ di $\tilde{T}_i$ contenenti V_i tali che:

a) nello spazio $\bigcup_{i\in I} \tilde{V}_i$ la relazione $p \in \tilde{V}_i$ è equivalente a $q \in \tilde{V}_j$ se, e solo se $\psi_{ij}(p) = q$ è una relazione di equivalenza che verrà notata con $\mathfrak{R}$.

b) lo spazio quoziente $\bigcup_{i\in I} \tilde{V}_i/\mathcal{R} = \tilde{X}$ è uno spazio separato e la proiezione $\pi: \bigcup_{i\in I} \tilde{V}_i \longrightarrow \tilde{X}$ è aperta.

c) $\pi(\bigcup_{i\in I} V_i) = X' \subset \tilde{X}$ è omeomorfo ad X.

d) $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j \neq \emptyset \Leftrightarrow V_i \cap V_j \neq \emptyset$.

Dotiamo ora lo spazio quoziente $\tilde{X}$ costruito nel corollario precedente di struttura di spazio complesso, a tale scopo basterà, per ogni $x \in \tilde{X}$, definire su un suo intorno aperto U_x il fascio dei germi delle funzioni olomorfe.

Per ogni $x \in \tilde{X}$ l'insieme $\pi^{-1}(x)$ è finito per le ipotesi 2) e *d*). Sia

$$\pi^{-1}(x) = \{x_{i_1} \dots x_{i_r}\}, \qquad x_{i_1} \in \tilde{V}_{i_1}, \dots, x_{i_r} \in \tilde{V}_{i_r}.$$

Gli insiemi

$$\tilde{V}_{i,j} = \psi_{j,i}(\tilde{V}_j \cap \tilde{T}_{j,i})$$

sono aperti in $\tilde{V}_i$, $\forall\, i, j \in I$, quindi esiste un aperto

$$U_{x_1} \ni x_{i_1}$$

tale che

$$U_{x_1} \subset \psi_{i_j, i_1}(\tilde{V}_{i_j} \cap \tilde{T}_{i_j, i_1})$$

per ogni $j = 1 \dots r$.

L'insieme $\pi(U_{x_1})$ è un aperto di $\tilde{X}$ contenente x,

$$\pi^{-1}(\pi(U_{x_1}))$$

è unione disgiunta di un numero finito di spazi analitici complessi

$$U_{i_j} \ni x_{i_j}, \qquad j = 1 \dots r.$$

Poichè inoltre le applicazioni $\rho_{j,j'}$, $U_{i_j} \longrightarrow U_{i_{j'}}$, definite da

$$\rho_{j,j'}(q) = \pi^{-1}(\pi(q)) \cap U_{i_{j'}},$$

sono isomorfismi per ogni $j, j' = 1 \dots r$, viene definita su $\pi(U_{x_1})$ una struttura di spazio complesso. È una verifica constatare che $X' = \pi(\bigcup_{i\in I} V_i) \subset \tilde{X}$ è isomorfo ad X e $\tilde{X}$ è un suo complessificato.

X' risulta unione di una famiglia, localmente finita, di chiusi, e quindi è chiuso. Identificando X' ad X si conclude dunque che X ammette un complessificato.

Per il modo in cui è stato costruito, $\tilde{X}$ è unione di una famiglia localmente finita, $\{\tilde{V}_i\}_{i\in I}$, di aperti paracompatti, quindi è paracompatto.

La dimostrazione dell'unicità della complessificazione, in virtù del lemma 2, si riconduce a quella fatta in [4].

OSSERVAZIONE 1. - Dal teorema 3 dell'osservazione 2 del § 1 si deduce il seguente risultato utile nel seguito: sia X uno spazio analitico paracompatto e coerente ed $\tilde{X}$ una sua complessificazione (eventualmente non paracompatta). Esiste un intorno aperto $\tilde{U}$ di X in $\tilde{X}$, che è una complessificazione di X ed è paracompatta. Ogni componente connessa di X soddisfa al II assioma di numerabilità; l'intorno $\tilde{U}$ può essere preso in modo che le sue componenti connesse intersechino X in insiemi connessi e soddisfino al II assioma di numerabilità. Sia infatti $\tilde{X}$ un complessificato di X, per il teorema 3 esiste una complessificazione di X che è paracompatta ed è isomorfa ad un intorno $\hat{U}$ di X in $\tilde{X}$. Lo spazio $\hat{U}$ è metrizzabile per l'osservazione 2 del § 1. Poichè inoltre le componenti connesse di $X \subset \hat{U}$ sono chiuse ed aperte, esiste un aperto $\tilde{U}$ di $\hat{U}$ che contiene X e tale che ogni componente connessa di $\tilde{U}$ interseca X in un connesso. Per come è stato costruito il complessificato di X nel teorema 3, se X soddisfa al II assioma di numerabilità, anche $\tilde{X}$ gode di questa proprietà.

§ 3. - Il teorema di immersione.

Scopo di questo paragrafo è generalizzare, agli spazi analitici reali coerenti, soddisfacenti al II assioma di numerabilità, il teorema di immersione provato per le varietà analitiche reali in [9]. Più precisamente, dato uno spazio analitico reale coerente, paracompatto V ed una sua complessificazione $\tilde{V}$, proveremo che esiste un sistema fondamentale di intorni di V in $\tilde{V}$ che sono spazi di STEIN. I risultati di [12] e quelli ottenuti nel § 2, permettono allora di affermare che ogni spazio analitico reale di dimensione n, soddisfacente al II assioma di numerabilità e coerente ammette un'applicazione analitica, propria iniettiva e regolare nei punti non singolari, in R^{4n+2}.

In questo paragrafo tutti gli spazi analitici saranno supposti paracompatti. Riportiamo per comodità del lettore alcune definizioni con la terminologia di [12] e [9]).

Una funzione a valori reali, definita su un aperto D di $\boldsymbol{C}^n$ si dice convessa se è superiormente continua e se, ristretta ad ogni retta complessa, è subarmonica.

La funzione f si dice fortemente convessa se, per ogni aperto a chiusura compatta $U \subset\subset D$, esiste un $\epsilon > 0$ tale che: se h è una funzione reale C^∞ in D, ed i valori assoluti di h, delle sue derivate prime e seconde, in D, sono minori di ϵ, allora $f + h$ è convessa in U.

Se la funzione f è di classe C^2 si può definire la forma di LEVI

$$L(f) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$$

della f.

Dalla definizione è immediato che, se f è di classe C^2 in D, essa è fortemente convessa se, e solo se, la forma quadratica $(L(f))$ associata ad $L(f)$ è definita positiva in ogni punto di D.

Con il simbolo $(L(f(x))$ verrà indicata la matrice della forma di LEVI nel punto x.

Una funzione reale f, definita su uno spazio analitico complesso V, si dice convessa se, per ogni $x \in V$ esiste un intorno $U \ni x$ ed un isomorfismo $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset D$, D aperto in $\boldsymbol{C}^n$, tale che su D sia definita una funzione convessa $g : D \rightarrow R$ per cui: $f = g \circ \varphi$.

Se g può essere presa fortemente convessa, f si dice fortemente convessa.

Sia V uno spazio analitico complesso (o reale) ed $f : V \longrightarrow R$ una funzione continua, f dicesi di classe C^r se per ogni $x \ni V$ esiste un intorno $U_x \ni x$ ed un isomorfismo $\varphi : U_x \longrightarrow \varphi(U_x) \subset D$, ove D è un aperto di $\boldsymbol{C}^n$ (o di R^n) su cui è definita una funzione $g : D \longrightarrow R$ di classe C^r tale che $f = g \circ \varphi$.

Si può dimostrare, usando i risultati del teorema 2, che, se f è una funzione di classe C^r su V e $\varphi : V \longrightarrow \varphi(F) \subset \tau_x$ è una realizzazione del germe V_x nel suo spazio tangente di ZARISKI, allora $f \circ \varphi^{-1}$ è restrizione di una funzione C^r definita su un aperto di τ_x contenente $\varphi(x)$.

Da ciò segue che la somma, il prodotto, la composizione di funzioni di classe C^r definite su V è uua funzione di classe C^r su V.

Analogamente si prova che la somma di due funzioni convesse (fortemente convesse) su V è una funzione convessa (fortemente convessa).

Sia V uno spazio analitico reale, $\tilde{V}$ una sua complessificazione. Seguendo la terminologia di [9] diremo che una funzione $f : \tilde{V} \longrightarrow R$ è una p-funzione in senso forte se:

1) $f \geq 0$ su $\tilde{V}$ ed è di classe C^∞.

2) per ogni $x \in V$ esiste un intorno $U \ni x$ in $\tilde{V}$, ed una realizzazione $\varphi : U \longrightarrow D$, in un aperto D di $\boldsymbol{C}^n$, su cui è definita una funzione $g : D \longrightarrow R$ di classe C^∞ tale che: $g \circ \varphi = f$, e la g è nulla con le sue derivate prime su $\varphi(U \cap V)$.

3) f è fortemente convessa in un intorno di V.

Generalizziamo ora le proposizioni 6 e 7 di [9].

PROPOSIZIONE 3. - *Sia V uno spazio analitico reale coerente, $\tilde{V}$ un suo complessificato, per ogni funzione $r : \tilde{V} \longrightarrow R$ di classe C^2, esiste una p-funzione in senso forte f, definita su un intorno $\tilde{V}'$ di V tale che $f + r$ sia fortemente convessa su $\tilde{V}'$.*

Prova. - Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento, localmente finito di V, formato di aperti di $\tilde{V}$, tale che:

i) esiste un restringimento $\{V_i\}_{i\in I}$ di $\{U_i\}$ per cui si ha:

$$(\bigcup_{i\in I} V_i)\supset V, \qquad \bar{V}_i\subset U_i \text{ e } \bar{V}_i$$

è compatto per ogni $i\in I$.

ii) per ogni $i\in I$ esiste un isomorfismo

$$\rho_i : U_i \longrightarrow U_i'\subset \boldsymbol{C}^{n_i}$$

di U_i in un insieme analitico U_i', realizzato in un aperto di $\boldsymbol{C}^{n_i}$, e si ha: $\rho_i(U_i\cap V)=R^{n_i}\cap \rho_i(U_i)\subset \boldsymbol{C}^{n_i}$.

Tale ricoprimento esiste perchè $\tilde{V}$ è paracompatto. Per ogni $i\in I$ sia

$$f_i' = 4\sum_{j=1}^{n_i} y_j^2 = -\sum_{j=1}^{n_i}(z_j-\bar{z}_j)^2$$

ove $z_j = x_j + iy_j$ sono le coordinate di $\boldsymbol{C}^{n_i}\supset U_i'$.

Si verifica che $(L(f_i'))=\begin{pmatrix}2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 2\end{pmatrix}$ perciò le funzioni f_i' sono fortemente convesse e sono p-funzioni in senso forte in $\boldsymbol{C}^{n_i}\supset R^{n_i}$.

Poniamo $f_i = f_i'\circ\rho_i$. Le funzioni f_i sono ≥ 0 su U_i e nulle su $U_i\cap V$ per la condizione *ii*).

Sia $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una famiglia di funzioni definite su $\tilde{V}$ tali che:

a) supporto $\alpha_i\subset U_i$, $\alpha_i\circ\rho_i^{-1}=\alpha_i'$ è la restrizione di una funzione di classe C^∞ su un aperto di $\boldsymbol{C}^{n_i}$.

b) $\alpha_i(x)>0$ per ogni $x\in\bar{V}_i$, $\forall\, i\in I$ e per $y\in V$ risulta $\sum_{i\in I}\alpha_i(y)=1$; si ha inoltre $\alpha_i(x)\geq 0$, $\forall\, x\in U_i$.

L'esistenza della famiglia $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ è garantita dalle seguenti osservazioni: esiste un ricoprimento aperto, localmente finito, di $\tilde{V}$, ottenuto aggiungendo ad $\{U_i\}_{i\in I}$, una famiglia di aperti $\{W_j\}_{j\in J}$ tali che $\bar{W}_j\cap V=\emptyset$, $\forall\, j\in J$. Ad esso si può subordinare una partizione continua dell'unità ed è evidente dalla costruzione della partizione che si può anche imporre che le funzioni α_i siano positive su $\bar{V}_i$. Per i noti teoremi di approssimazione delle funzioni continue tramite funzioni C^∞ le funzioni della famiglia $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ cercata possono essere prese C^∞.

Sia $K_i = \inf.\{\alpha_i(\bar{V}_i)\}$; si ha, per la *b*), $K_i>0$, $\forall\, i\in I$.

Si verifica che

$$(L(\alpha_i' f_i')) \geq \begin{pmatrix} K_i 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_i 2 \end{pmatrix} \quad \text{su } \rho_i(\bar{V}_i \cap V). \tag{1}$$

Infatti le f_i' sono nulle con il loro differenziale su $\rho_i(V \cap U_i)$ si ha ivi:

$$L(f_i' \alpha_i') = \alpha_i' L(f_i'). \tag{2}$$

Essendo la forma quadratica associata alla forma di LEVI delle funzioni $f_i' \alpha_i'$ positiva o nulla su $\rho_i(U_i \cap V)$, le $\alpha_i f_i$ sono convesse su un intorno di V. Anzi si osserva che esiste un intorno di V in $\tilde{V}$ su cui le $\alpha_i f_i$ sono tutte convesse.

Per la (1) si ha anche che, per ogni $i \in I$, esiste una costante positiva h_i tale che:

$$h_i \alpha_i f_i + r \tag{3}$$

è fortemente convessa su $V \cap V_i$ e quindi su un suo intorno. Sia

$$f = \sum_{i \in I} h_i \cdot \alpha_i \cdot f_i,$$

la f risulta definita su un intorno di V in $\tilde{V}$ perchè il ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ è localmente finito. Dalla (2) segue inoltre che f è una p-funzione in senso forte.

Vogliamo provare che $f + r$ è fortemente convessa in un intorno $\tilde{V}'$ di V. Sia $x \in (V_i \cap V)$; si ha:

$$f + r = \sum_{j \in I} h_j \alpha_j f_j + r = h_i \alpha_i f_i + r + \sum_{j \in I - \{i\}} h_j \alpha_j f_j .$$

Per la (3) esiste un intorno di x in $\tilde{V}$ su cui

$$h_i \alpha_i f_i + r$$

è fortemente convessa; le funzioni $h_j \alpha_j f_j$, $j \in I - \{i\}$ sono tutte convesse in un intorno di V in $\tilde{V}$. Ciò prova la proposizione.

PROPOSIZIONE 4. - *Sia V uno spazio analitico reale coerente. $\tilde{V}$ una sua complessificazione. Esistono due intorni $\widehat{W}$, W di V, $\widehat{W} \supset W$ ed una funzione $\eta : \widehat{W} \longrightarrow R$ di classe C^∞ tale che:*

I) $\eta(x) \geq 0$ *per* $x \in \widehat{W}$, $\eta(V) = 0$ *ed* η *è convessa su* $\widehat{W}$

II) η *è fortemente convessa nei punti in cui è positiva e si ha* $\eta(x) \geq 1$ *per ogni x della frontiera ∂W di W.*

PROVA. - Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto, localmente finito, di V in $\tilde{V}$ tale che:

a) esistono degli insiemi analitici complessi U_i' di aperti di $\boldsymbol{C}^{n_i}$ e degli isomorfismi

$$\rho_i : U_i \longrightarrow U_i' \subset \boldsymbol{C}^{n_i}$$

tali che

$$\rho_i^{-1}(U_i' \cap R^{n_i}) = U_i \cap V, \qquad R^{n_i} \subset \boldsymbol{C}^{n_i}$$

b) $\{U_i\}_{i\in I}$ ha un restringimento $\{V_i\}_{i\in I}$ tale che $\bar{V}_i \subset U_i$, $\bar{U}_i$, $\bar{V}_i$ sono compatti ed $(\bigcup_{i\in I} V_i) \supset V$.

c) Posto

$$V_i' = \rho_i(V_i) \quad \text{e} \quad \delta_i = \text{dist.}\,(\partial(V_i' \cap R^{n_i}),\ \partial(U_i' \cap R^{n_i})),$$

si ha $\delta_i > 0$ ed ogni punto di

$$U_i' \cap \rho_i((\bigcup_{j\in I} V_j) \cap U_i)$$

dista da R^{n_i} meno di $\frac{1}{4}\delta_i$.

Tale ricoprimento esiste perchè V è paracompatto e $\tilde{V}$ è un suo complessificato.

Siano $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1 \dots n_i$ le coordinate in $\boldsymbol{C}^{n_i}$; per ogni punto $a = \{a_1 \dots a_{n_i}\} \in R^{n_i}$ consideriamo la funzione

$$\widehat{\psi}_a^i = 2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_j)^2 - \sum_{j=1}^{n_i} |x_j - a_j|^2.$$

Si verifica che

$$(L(\widehat{\psi}_a^i)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vogliamo provare che la funzione $\widehat{\eta}_a^i = e^{-\left(\frac{1}{\widehat{\psi}_a^i}\right)}$ è fortemente convessa nell'insieme dei punti in cui

$$\frac{1}{2} > \widehat{\psi}_a^i > 0.$$

Posto $\eta(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ si ha:

$$\frac{d\eta}{dt} = t^{-2} e^{\frac{1}{t}}$$

quindi, per

$$t > 0, \quad \frac{d\eta}{dt} > 0 \tag{2}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = t^{-3} e^{-\frac{1}{t}} \left(\frac{1}{t} - 2 \right)$$

da cui

$$\frac{1}{2} > t > 0 \Rightarrow \frac{d^2\eta}{dt^2} > 0. \tag{3}$$

Valutiamo ora la forma di LEVI della funzione $\widehat{\eta}_a^i$ su una retta complessa di cordinate z. si ha:

$$\frac{\partial^2 \widehat{\eta}_a^i}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \widehat{\eta}_a^i}{\partial \widehat{\psi}_a^{i^2}} \cdot \frac{\partial \widehat{\psi}_a^i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \widehat{\psi}_a^i}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \widehat{\eta}_a^i}{\partial \widehat{\psi}_a^i} \cdot \frac{\partial^2 \widehat{\psi}_a^i}{\partial z \partial \bar{z}}. \tag{4}$$

Essendo $\widehat{\psi}_a^i$ una funzione reale si ha:

$$\frac{\partial \widehat{\psi}_a^i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \widehat{\psi}_a^i}{\partial \bar{z}} \geq 0$$

onde per le (1), (2), (4) segue che nell'insieme dei punti in cui $0 < \widehat{\psi}_a^i < \frac{1}{2}$ la funzione $\widehat{\eta}_a^i$ è fortemente convessa essendo strettamente subarmonica su ogni retta complessa.

Osserviamo le funzioni

$$\tilde{\eta}_a^i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \widehat{\eta}^i(x) < 0 \\ \widehat{\eta}_a^i(x) & \text{se} \quad \widehat{\eta}_a^i(x) \geq 0 \end{cases}$$

sono di classe C^∞ su $\boldsymbol{C}^{n_i}$ infatti:

$$\widehat{\eta}_a^i = e^{\left(-\frac{1}{\widehat{\psi}_a^i}\right)} = \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{\widehat{\psi}_a^i}\right)}}$$

quindi se $\widehat{\psi}_a^i \to 0$ per $x \to x_0$ la funzione $\widehat{\eta}_a^i$ tende a zero più rapidamente di ogni funzione del tipo $|x - x_0|^n$, quindi essa ha tutte le derivate nulle nei punti in cui è nulla.

Notiamo con $\eta^i_a = \tilde{\eta}^i_a \circ \rho_i$ le funzioni definite su U_i tramite le $\tilde{\eta}^i_a$.

Sia W un intorno di V in $\tilde{V}$ tale che $\overline{W} \subset (\bigcup_{i \in I} V_i)$. Detta ∂W la frontiera di W risulta $\partial W \cap V = \emptyset$ perchè W è un intorno di V. Proviamo ora che, per ogni $i \in I$ si ha:

$$\rho_i(U_i \cap \partial W) \cap R^{n_i} = \emptyset. \tag{5}$$

Sia, per assurdo,

$$y \in \rho_i(U_i \cap \partial W) \cap R^{n_i};$$

essendo ρ_i iniettiva, esisterebbe, per la condizione *a*), un

$$x \in V \cap U_i, \qquad x \in U_i \cap \partial W$$

tale che $\rho_i(x) = y$, ma questo è impossibile perchè $\partial W \cap V = \emptyset$.

Poniamo

$$\tilde{K}^i_a = \{x \in \boldsymbol{C}^{n_i} \mid \tilde{\eta}^i_a(x) > 0, \ \ a \in R^{n_i}, \ \ i \in I\}$$

e sia

$$K^i_a = \rho_i^{-1}(\tilde{K}^i_a \cap U'_i).$$

Per la (5) l'intorno W di V, può essere preso in modo che ogni punto di ∂W sia interno ad un insieme K^i_a, ove a verifica la condizione

$$\text{dist.}(a, \ V'_i \cap R^{n_i}) < \frac{\delta_i}{4}. \tag{6}$$

Esiste perciò un ricoprimento localmente finito:

$$\{K^{i_j}_{a_j}\}_{j \in J} \quad \text{di} \quad \partial W$$

per cui i punti a_j verificano la (6).

Indichiamo ancora con $\eta^{i_j}_{a_j}$ le funzioni $\eta^{i_j}_{a_j}$ prolungate a tutto W assumendole eguali a O fuori di $U_j \cap W$. Per la condizione *c*) le funzioni $\eta^{i_j}_{a_j}$ sono di classe C^∞ su W.

È immediato che esistono delle costanti positive β_j, $j \in J$ tali che la funzione $\eta = \sum_{j \in J} \beta_j \eta^{i_j}_{a_j}$ gode delle seguenti proprietà:

i) η è ben definita (ciòè la serie $\sum_{j \in J} \beta_j \eta^{i_j}_{a_j}$ ha solo un numero finito di termini diversi da O, in ogni punto di un intorno $\overline{W}$). Si ha: $\eta(x) \geq 1$ per ogni $x \in \partial W$.

ii) η è classe C^∞, convessa su un intorno di V e si ha

$$\eta(V) = 0. \qquad \eta(x) \geq 0 \quad \text{per} \quad x \in W.$$

iii) η è fortemente convessa nei punti di W in cui è positiva (per verificare questa condizione basta prendere gli intorni U_i abbastanza piccoli perchè sia $\psi_a^i < \frac{1}{2}$ su U_i').

La funzione η soddisfa alle proprietà richieste e la proposizione è provata.

OSSEVAZIONE 1. - Nella prova delle proposizioni 3 e 4 si è sfruttato del fatto che $\tilde{V}$ fosse un complessificato di V solo la seguente proprietà: esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}_{i\in I}$ di V in $\tilde{V}$ e delle realizzazioni $\rho_i : U_i \longrightarrow U_i' \subset \boldsymbol{C}^{n_i}$ tali che

$$\rho_i(U_i \cap V) = \rho_i(U_i) \cap R^{n_i}.$$

TEOREMA 4. - *Sia V uno spazio analitico reale paracompatto, coerente e $\tilde{V}$ una sua complessificazione. V ha in $\tilde{V}$ un sistema fondamentale di intorni ogni cui componente connessa è uno spazio di Stein.*

PROVA. - Per l'osservazione 1 del § 2 non è restrittivo supporre che V sia connesso ed U sia un intorno che soddisfi al II° assioma di numerabilità.

R. NARASIMHAN ha provato in [13] il seguente teorema: uno spazio complesso W, soddisfacente al II assioma di numerabilità, è di STEIN se, e solo se, esistono su W: una funzione convessa continua f, tale che $W_t = \{x \in X | f(x) < t\}$ è relativamente compatto in W per ogni $t \in R$, una funzione continua g fortemente convessa su tutto W.

Per provare la tesi basta quindi dimostrare che, per ogni intorno U', di V, in U, esiste un intorno $W \subset U'$ di V su cui sono definite le funzioni f, g soddisfacenti ai requisiti del teorema.

Fissato l'intorno U' di V, per la proposizione 3, si può costruire, su un intorno $U_1 \subset U'$ di V, una funzione g fortemente convessa di classe C^∞. Per quanto visto lo spazio topologico U_1 soddisfa al secondo assioma di numerabilità ed è localmente compatto; esiste perciò una funzione continua non negativa, $r : U_1 \longrightarrow R$, tale che gli insiemi

$$U_1^\lambda = \{x \in U_1 \,|\, r(x) \,| \leq \lambda\}$$

siano compatti.

Per i noti teoremi di approssimazione delle funzioni continue con funzioni di classe C^∞ possiamo supporre che r sia di classe C^∞.

Per la proposizione 3 esiste una p-funzione in senso forte φ definita su un intorno $U_2 \subset U_1$ di V, tale che: $\varphi + r = \psi$ è una funzione di classe C^∞ fortemente convessa su un intorno $U_3 \subset U_2$ di V.

Per la proposizione 4 esiste una funzione convessa η, di classe C^∞, definita su un intorno $U_4 \subset U_3$ di V, tale che:

$$\eta(V) = 0 \qquad \eta(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in U_4,$$

ed η è fortemente convessa ove è positiva. Posto:

$$U_4^\lambda = \{ x \in U_4 | \, | \eta(x) | < \lambda \},$$

si ha infine: $\bar{U}_4^1 \subset U_4$. Essendo η continua ed $\eta(V) = 0$ l'insieme $W = U_4^1$ è un intorno di V in $\tilde{V}$.

La funzione

$$h = \frac{1}{1-\eta} = 1 + \eta + \eta^2 + \ldots$$

definita su W risulta convessa perchè $(\eta)^r$ è tale, $\forall\, r \in N$. Dimostriamo che la funzione convessa, di classe C^∞: $f = \psi + h$, definita su W è tale che gli insiemi

$$D_\lambda = \{ x \in W | \, | f(x) | < \lambda \}$$

sono a chiusura compatta in W.

Posto

$$U_h^\lambda = \{ x \in W | \, | h(x) | < \lambda \}$$

si ha:

$$D_\lambda \subset U_h^\lambda, \qquad D_\lambda \subset U_1^\lambda. \tag{1}$$

La chiusura di D_λ in U_1^λ è compatta perchè contenuta in U_1^λ che è compatto; per la (1) la chiusura di D_λ in U_1^λ è contenuta in W perchè $\bar{U}_h^\lambda \subset W$ e ciò prova che D_λ ha chiusura compatta in W. Si è dunque provato, con l'esistenza di f e di g, che W è uno spazio di STEIN e questo conclude la dimostrazione.

Usando i risultati di [12] e di [6] possiamo ora trarre due importanti conseguenze del teorema 4.

TEOREMA 5. - *Sia V uno spazio analitico reale, soddisfacente al secondo assioma di numerabilità, coerente di dimensione n. Esiste un'applicazione iniettiva, analitica, propria*

$$\varphi : V \longrightarrow R^{4n+2}$$

il cui Jacobiano è di rango massimo in ogni punto regolare di V.

PROVA. - Per il teorema 3 esiste una complessificazione

$$\tilde{V} \supset V,$$

per il teorema 4 V ha, in $\tilde{V}$, un intorno aperto U che è uno spazio di STEIN.

R. NARASHIMHAN in [12] prova che esiste un'applicazione olomorfa, iniettiva, propria, regolare nei punti non singolari $\tilde{\varphi} : U \longrightarrow C^{2n+1} = R^{4n+2}$.

La $\tilde{\varphi}$, ristretta a V, dà l'applicazione cercata.

È immediato infatti che $\tilde{\varphi} : V \longrightarrow R^{4n+2}$ è analitica, ed iniettiva, sia $x \in V$ un punto regolare di V, allora x è punto regolare anche di $\tilde{V}$ perciò $\tilde{\varphi}|V$ ha lo jacobiano di rango massimo in x. Essendo V chiuso in U l'applicazione $\tilde{\varphi}|V$ è propria, ciò conclude la dimostrazione.

Dato lo spazio analitico reale V, sia $\mathfrak{R}$ il fascio dei germi delle funzioni analitiche reali su V ed $\mathfrak{F}$ un fascio di $\mathfrak{R}$-moduli.

Indichiamo con $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{F}_x$ la spiga di $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{F}$ nel punto $x \in V$.

Vale il seguente:

TEOREMA 6. *Sia V uno spazio analitico, reale coerente, ed $\mathfrak{F}$ un fascio coerente di $\mathfrak{R}$ moduli. Si ha allora:*

A) per ogni $x \in V$: l'$\mathfrak{R}_x$ modulo $\mathfrak{F}_x$ è generato dall'immagine dell'applicazione indotta dalla restrizione:

$$H^0(V, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathfrak{F}_x .$$

B) per ogni intero $q \geq 1$ si ha:

$$H^p(V, \mathfrak{F}) \simeq \{0\}.$$

PROVA. - Per il teorema 3 V si può vedere immerso in un complessificato $\tilde{V}$. Per il teorema 4 V ha in $\tilde{V}$ un sistema fondamentale di intorni che sono spazi di STEIN, quindi, per il teorema 1 e la proposizione 6 di [6] il teorema risulta provato. In [6] si suppone che $\tilde{V}$ e V siano varietà, ma, come già notato nello stesso lavoro, le dimostrazioni si estendono banalmente al caso degli spazi analitici.

§ 4. - **Prime conseguenze e generalizzazioni.**

a) Immersione reale

Tutti gli spazi analitici, reali o complessi, considerati in questo paragrafo soddisfano al secondo assioma di numerabilità.

Siano V, W due spazi complessi e $\varphi : V \longrightarrow W$ un'applicazione continua.

Diremo che φ è antiolomorfa se, per ogni punto $x \in V$, esistono due intorni:

$$U_x \ni x, \qquad U_{\varphi(x)} \ni \varphi(x),$$

due loro realizzazioni

$$\rho : U_x \longrightarrow U'_x \subset \boldsymbol{C}^n, \qquad \widehat{\rho} : U_{\varphi(x)} \longrightarrow U'_{\varphi(x)} \subset \boldsymbol{C}^m$$

ed un'applicazione antiolomorfa $\psi : B \longrightarrow B'$, fra due aperti B, B', di $\boldsymbol{C}^n$ e $\boldsymbol{C}^m$, $B \ni \rho(x)$, $B' \ni \widehat{\rho}(\varphi(x))$ tale che:

$$\widehat{\rho}^{-1} \circ \psi \circ \rho | U_x = \varphi | U_x .$$

Una trasformazione antiolomorfa $\varphi : V \longrightarrow V$, tale che

$$\varphi \circ \varphi = \mathrm{id},$$

sarà detta antiinvoluzione di V.

Sia data un'applicazione antiolomorfa $\varphi : V \longrightarrow W$, sia $x \in V$ ed U_x un intorno di x, realizzato nello spazio tangente di ZARISKI τ_x a V_x.

Si prova usando gli argomenti dei lemmi 1 e 2, che φ è indotta dalla restrizione di un'applicazione antiolomorfa di un aperto di τ_x in un aperto dello spazio tangente di ZARISKI, a W, in $\varphi(x)$. Da ciò segue che, se $\varphi' : W \longrightarrow Z$ è una seconda applicazione antiolomorfa fra gli spazi complessi W e Z, allora $\varphi' \circ \varphi$ è un'applicazione olomorfa di X in Z.

OSSERVAZIONE 1. – Sia $\tilde{V}$ un complessificato dello spazio analitico reale V. Siano U_1 ed U_2 due intorni di V in $\tilde{V}$, su cui siano definite due antiinvoluzioni

$$\sigma_1 : U_1 \longrightarrow U_1 , \qquad \sigma_2 : U_2 \longrightarrow U_2 ,$$

tali che i punti di V siano fissi sia per σ_1 che per σ_2.

Esiste allora un intorno U_3 di V in $\tilde{V}$ tale che

$$\sigma_1 | U_3 = \sigma_2 | U_3 .$$

Sia infatti U'_1 un intorno di V tale che

$$U'_1 \subset U_1 , \qquad \sigma_1(U'_1) \subset U_2$$

Si ha:

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 : U'_1 \longrightarrow U_2 ,$$

$\sigma_2 \circ \sigma_1$ è un'applicazione olomorfa e risulta

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 | V = id,$$

quindi $\sigma_2 \circ \sigma_1$ è l'identità su un intorno $U_3 \subset U_1'$ di V in $\tilde{V}$.

Su U_3 sisulta $\sigma_1^{-1} = \sigma_1 = \sigma_2$, da cui segue $\sigma_1 | U_3 = \sigma_2 | U_3$, ed anche, ovviamente: $\sigma_1 = \sigma_2$ su ogni aperto di $U_1 \cap U_2$, ogni componente irriducibile del quale interseca l'insieme dei punti regolari di V.

Si è così provato che, se $\tilde{V}$ è un complessificato di V, esiste un intorno di V in $\tilde{V}$ su cui esiste, al più, un'antiinvoluzione il cui luogo dei punti fissi contiene V. Se, ad esempio, V è realizzato, con equazioni a coefficienti reali, in un aperto di $R^n \subset \boldsymbol{C}^n$ e $\tilde{V}$ in $\boldsymbol{C}^n$ esiste un intorno U di V in $\tilde{V}$, tale che l'unica antiinvoluzione di U, avente V contenuto nell'insieme dei punti fissi, è quella indotta dal coniugio in $\boldsymbol{C}^n$.

Possiamo ora provare il

TEOREMA 7. - *Sia X uno spazio analitico reale coerente, esiste allora un complessificato $\tilde{X}$ di X, su cui è definita una antiinvoluzione $\sigma : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ per cui si ha*

$$X = \{ x \in \tilde{X} | \sigma(x) = x \}.$$

PROVA. - Nella costruzione del complessificato (teorema 3), gli insiemi $\tilde{T}_i$, sono complessificati degli insiemi analitici T_i.

Gli insiemi T_i risultano coincidenti col luogo dei punti fissi dell'antiinvoluzione σ_i, indotta su $\tilde{T}_i$ dal coniugio nello spazio tangente di ZARISKI, a $\tilde{T}_i$, in x_i.

Supponiamo che $\tilde{T}_i$ e tutti i suoi sottoinsiemi che si considerano nel resto della dimostrazione, sianò trasformati in sè da detta antiinvoluzione (la cosa è possibile perchè tutte le condizioni che si impongono a detti sottoinsiemi nel corso del teorema sono del tipo: essere abbastanza piccolo da...). Si ha quindi anche

$$\sigma_i(\tilde{V}_i) = \tilde{V}_i .$$

Seguendo la costruzione del teorema 3 si ha:

$$\pi : \bigcup_{i \in I} \tilde{V}_i \longrightarrow \tilde{X}.$$

Siano σ_i' le antiinvoluzioni definite da σ_i su $\pi(\tilde{V}_i)$. Due antiinvoluzioni σ_i', σ_j' hanno come comune luogo dei punti fissi

$$\pi(V_i) \cap \pi(V_j)$$

e quindi per l'osservazione 1, esse coincidono su un intorno di

$$\pi(V_i) \cap \pi(V_j).$$

Per il modo in cui è stato costruito $\tilde{X}$ le σ_i' inducono quindi, per incollamento, un'antiinvoluzione su un intorno di X. Ciò conclude la dimostrazione.

Sia $\tilde{X}$ uno spazio complesso, $\sigma: \tilde{X} \to \tilde{X}$ un'antiinvoluzione di $\tilde{X}$. L'insieme

$$X_\sigma = \{ x \in \tilde{X} | \sigma(x) = x \}$$

è uno spazio analitico reale e verrà detto parte fissa di $\tilde{X}$ per l'antiinvoluzione σ.

Il teorema 4 si può affinare col

TEOREMA 8. - *Ogni spazio analitico reale, coerente V è parte fissa di uno spazio di Stein che è un suo complessificato.*

PROVA. - Sia $\boldsymbol{C}^{n_i}$ lo spazio in cui sono realizzati gli aperti U_i della proposizione 4. Esiste un intorno $\tilde{U}$ di V in $\tilde{V}$ su cui le antiinvoluzioni degli spazi $\boldsymbol{C}^{n_i}$ inducono un'antiinvoluzione σ avente V come luogo dei punti fissi.

La funzione η della proposizione 4 è invariante rispetto a σ onde lo spazio di STEIN $W = \{ x \in \tilde{U} | \eta(x) < 1 \}$ è mutato in sè da σ e questa è la tesi.

Il teorema 5 afferma che ogni spazio analitico reale V coerente, di dimensione n, ammette un'immersione in

$$\boldsymbol{C}^{2n+1} = R^{4n+2};$$

detta immersione è inoltre la restrizione di un'immersione di un suo complessificato $\tilde{V}$ di cui V è parte fissa. L'immersione $\tilde{\varphi}$ definita dal teorema 5 ha però il difetto di non garantire la commutatività del diagramma seguente:

(1)
$$\begin{tikzcd} \tilde{V} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\sigma"] & \boldsymbol{C}^{2n+1} \arrow[d, "\bar{\sigma}"] \\ \tilde{V} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \boldsymbol{C}^{2n+1} \end{tikzcd}$$

ove σ è un'antiinvoluzione di $\tilde{V}$ che abbia V come parte fissa e $\bar{\sigma}$ è indotta dal coniugio in $\boldsymbol{C}^{2n+1}$.

Fissata σ, pur di raddoppiare la dimensione dello spazio $\boldsymbol{C}^{2n+1}$, si può costruire un'immersione che renda commutativo il diagramma 1. Si ha infatti

TEOREMA 9. - *Sia V uno spazio analitico reale, coerente di dimensione n; esiste allora un complessificato $\tilde{V}$ di V, ed una antiinvoluzione $\sigma : \tilde{V} \to \tilde{V}$ tale che V sia luogo dei punti fissi di σ.*

Esiste inoltre un' applicazione olomorfa $\eta : \tilde{V} \to \boldsymbol{C}^{4n+2}$ tale che:

i) η è inettiva, propria, ed ha lo Jacobiano di rango massimo nei punti regolari di $\tilde{V}$.

ii) $\eta(V) = R^{4n+1} \cap \eta(\tilde{V})$ e σ induce in $\eta(\tilde{V})$ l' antiinvoluzione generata dal coniugio in $\boldsymbol{C}^{4n+2}$, cioè il diagramma (1) è commutativo.

PROVA. - Per il teorema 8 esiste un complessificato $\tilde{V}$ di V tale che $\tilde{V} \supset V$, $\tilde{V}$ è uno spazio di STEIN su cui è definita un'antiinvoluzione $\sigma : \tilde{V} \to \tilde{V}$, avente V come parte fissa. Per quanto provato in [12] esiste un' applicazione olomorfa, propria, iniettiva, avente lo Jacobiano di rango massimo nei punti regolari di $\tilde{V}$:

$$\alpha : \tilde{V} \to \boldsymbol{C}^{2n+1}.$$

Notiamo:

$$\alpha(p) = \{ f_1(p) = f_1' + if_1''(p) \dots f_{2n+1}(p) = f_{2n+1}'(p) + if_{2n+1}''(p) \}$$

ove le

$$f_j = f_j' + if_j'', \qquad\qquad j = 1 \dots 2n+1.$$

sono le fuzioni olomorfe che danno l' immersione α.

Definiamo $\eta : \tilde{V} \to \boldsymbol{C}^{4n+2}$ ponendo:

$$\eta(p) = \{ f_1(p) + \overline{f_1(\sigma(p))} \dots f_{2n+1}(p) + \overline{f_{2n+1}(\sigma(p))},$$
$$i(f_1(p) - \overline{f_1(\sigma(p))}) \dots i(f_{2n+1}(p) - \overline{f_{2n+1}(\sigma(p))}) \}, \qquad p \in \tilde{V}.$$

Essendo $\sigma : \tilde{V} \to \tilde{V}$ antiolomorfa le funzioni $\overline{f_i(\sigma(p))}$ risultano olomorfe, quindi $\eta : \tilde{V} \to \boldsymbol{C}^{4n+2}$ è un' applicazione olomorfa.

Se $p \in V$, è $\sigma(p) = p$ e quindi:

$$\eta(p) = \{ f_1(p) + \overline{f_1(p)}, \dots, f_{2n+1}(p) + \overline{f_{2n+1}(p)},$$
$$i(f_1(p) - \overline{f_1(p)}) \dots i(f_{2n+1}(p) - \overline{f_{2n+1}(p)}) \}$$

onde segue

$$\eta(V) \subset \eta(\tilde{V}) \cap R^{4n+2}.$$

Viceversa sia

$$\eta(p) \in R^{4n+2}.$$

Si ha:

$$f_j''(p) - f_j''(\sigma(p)) = 0 \qquad f_j'(p) - f_j'(\sigma(p)) = 0$$

onde segue

$$f_j(p) = f_j(\sigma(p))$$

per $j = 1 \dots 2n+1$ e quindi essendo α iniettiva si deduce

$$p = \sigma(p),$$

cioè $p \in V$. Si è così provato che $\eta(\tilde{V}) \cap R^{4n+2} = \eta(V)$.

Osserviamo che si ha per ogni $p \in \tilde{V}$:

$$\eta(\sigma(p)) = \{ f_1(\sigma(p)) + \overline{f_1(p)}, \dots f_{2n+1}(\sigma(p)) + \overline{f_{2n+1}(p)},$$
$$i(f_1(\sigma(p)) - \overline{f_1(p)}), \dots, i(f_{2n+1}(\sigma(p)) - \overline{f_{2n+1}(p)}) \}$$

cioè l'antiinvoluzione σ induce su $\eta(\tilde{V})$ l'antiinvoluzione σ indotta dal coniugio in $\boldsymbol{C}^{4n+2}$. Si è così completamente provato il punto *ii*); rimane da verificare che η è iniettiva, ha lo Jacobiano di rango massimo nei punti regolari di $\tilde{V}$ ed è propria.

Sia

$$\eta(p) = \eta(q),$$

allora

$$f_j(p) + \overline{f_j(\sigma(p))} = f_j(q) + \overline{f_j(\sigma(q))}$$

e

$$f_j(p) - \overline{f_j(\sigma(p))} = f_j(q) - \overline{f_j(\sigma(q))}$$

per $j = 1 \dots 2n+1$ di cui

$$f_j(p) = f_j(q), \qquad f_j(\sigma(p)) = f_j(\sigma(q)), \qquad\qquad j = 1 \dots 2n+1$$

e quindi

$$\alpha(p) = \alpha(q).$$

Si è così provato che dall'attività di α segue quella di η.

Per dimostrare che lo Jacobiano di η è di rango massimo nei punti regolari di $\tilde{V}$. Osserviamo che, detto $z_1 \dots z_n$ un sistema di coordinate in un intorno di un punto regolare $p \in V$, si può supporre che σ nelle coordinate scelte sia il coniugio e quindi si ha:

$$\frac{\partial(f_s(p)+\overline{f_s(\sigma(p))})}{\partial z_j}=\frac{\partial f_s(p)}{\partial z_j}+\frac{\partial \overline{f_s(\sigma(p))}}{\partial z_j}=2Re\left(\frac{\partial f_s}{\partial z_j}\right)_p$$

$$\frac{\partial i(f_s(p)-\overline{f_s(\sigma(p))})}{\partial z_j}=i\left[\frac{\partial f_s(p)}{\partial z_j}-\frac{\partial \overline{f_s(\sigma(p))}}{\partial z_j}\right]=-2Im\left(\frac{\partial f_s}{\partial z_j}\right)_p.$$

Se lo Jacobiano di α ha, in p, n righe linearmente indipendenti, anche lo Jacobiano di η ha rango n in p, e quindi in tutto un intorno di p in $\tilde{V}$. Ciò prova che η ha lo Jacobiano di rango massimo nei punti regolari di un intorno W di V in $\tilde{V}$. Potendo trovare in W un intorno di V invariante per σ che è uno spazio di STEIN, possiamo porre $W=\tilde{V}$. Rimane da dimostrare che η è propria.

Si ha

$$\alpha(p)=\{f_1(p)\dots f_{2n+1}(p)\}$$

$$\eta(p)=\{f_j(p)+\overline{f_j(\sigma(p))};\ i(f_j(p)-\overline{f_j(\sigma(p))})\}\qquad j=1\dots 2n+1 \text{ e } p\in\tilde{V}.$$

D'altra parte:

$$|f_j(p)+\overline{f_j(\sigma(p))}|+|i(f_j(p)-\overline{f_j(\sigma(p))})|\geq|f_j(p)|.$$

Posto

$$\|\alpha(p)\|=\sum_{j=1}^{2n+1}|f_j(p)|$$

e

$$\|\eta(p)\|=\sum_{j=1}^{2n+1}|f_j(p)+\overline{f_j(\sigma(p))}|+\sum_{j=1}^{2n+1}|f_j(p)-\overline{f_j(\sigma(p))}|$$

si ha

$$\|\eta(p)\|\geq\|\alpha(p)\|.$$

Le norme ora stabilite C^{2n+1} e C^{4n+2} danno loro la topologia euclidea.

Sia, per assurdo, η non chiusa. Esisterebbe una successione di punti $x_n\in V$ tale che:

a) ogni sottoinsieme di $S=\bigcup_{n\in N}x_n$ è chiuso,

b) $\{\eta(x_n)\}_{n\in N}$ è una successione di CAUCHY e si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\eta(x_n)\notin\eta(S).$$

Per quanto provato $\{\alpha(x_m)\}_{m\in N}$ è una successione di CAUCHY, sia

$$l=\lim_{n\to\infty}\alpha(x_n).$$

Essendo α chiusa, continua, iniettiva si ha: $l \in \alpha(S)$, d'altra parte $S - \alpha^{-1}(l)$ è chiuso mentre $\alpha(S - \alpha^{-1}(l))$ non è tale, contro l'ipotesi.

Si conclude dunque che η deve essere chiusa e quindi propria. Ciò conclude la dimostrazione.

b) Parte reale di uno spazio complesso.

Sia $\breve{X}$ uno spazio complesso. Identificando $\boldsymbol{C}$ con R^2, si può considerare $\breve{X}$ come spazio analitico reale. Noteremo con $\breve{X}^R$ lo spazio analitico reale associato ad $\breve{X}$; si userà anche dire che $\breve{X}^R$ è lo spazio X, considerato con la struttura analitica reale soggiacente.

Sia X un sottospazio analitico reale chiuso, di $\breve{X}^R$. Diremo che X è una parte reale di $\breve{X}$, se esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in N}$ di $\breve{X}$, per cui sono definite delle realizzazioni

$$\rho_i : U_i \longrightarrow U_i' \subset \boldsymbol{C}^{n_i}$$

per $i \in N$, tali che:

$$\rho_i(U_i) \cap R^{n_i} = \rho_i(U_i \cap X). \tag{1}$$

Osserviamo subito che, se $\breve{X}$ è parte fissa di X, allora X è parte reale di $\breve{X}$. Infatti usando la costruzione del teorema 9 si possono ottenere delle realizzazioni locali soddisfacenti la (1).

L'inverso, in generale, non è vero. Si consideri ad esempio in $\boldsymbol{C}^2$ la retta $V = \{(x, y) \in \boldsymbol{C}^2 | x - iy = 0\}$. V ha come parte reale il punto $(0, 0)$.

Sia ora $\sigma : V \longrightarrow V$ un'antiinvoluzione; come si proverà nel teorema 19 il luogo dei punti fissi di σ è vuoto, oppure è una varietà analitica reale di dimensione uno. Quindi il punto $(0, 0)$ non è parte fissa di V rispetto ad alcuna antiinvoluzione.

È immediata verifica che, se $\tilde{V}$ è un complessificato dello spazio analitico reale V, allora V è una parte reale di $\tilde{V}$.

A proposito delle parti reali di uno spazio complesso è molto utile il seguente:

TEOREMA 10. - *Sia $\breve{X}$ uno spazio complesso ed X una parte reale di $\breve{X}$. In queste ipotesi X ha, in $\breve{X}$, un sistema fondamentale di intorni che sono spazi di Stein.*

PROVA. - Per l'osservazione 1 del paragrafo 3 le proposizioni 3 e 4 valgono anche in questo caso e si può ripetere la dimostrazione del teorema 4. Ciò conclude la prova.

COROLLARIO 2. - *Per ogni spazio analitico reale X, che sia parte reale di uno spazio complesso $\breve{X}$, di dimensione n, esiste un' applicazione, analitica, reale, iniettiva, propria* $\varphi : X \longrightarrow R^{4n+2}$.

La φ è inoltre la restrizione di un' applicazione olomorfa, iniettiva, propria $\varphi : U \longrightarrow \boldsymbol{C}^{2n+1} = R^{4n+2}$ *di un intorno U di X in $\breve{X}$.*

PROVA. - È immediata conseguenza dei teoremi di immersione di [12] e del teorema 10.

Vogliamo ora dare una forma più forte al teorema di immersione degli spazi di Stein.

Vale il seguente

TEOREMA 11. - *Sia X uno spazio di Stein di dimensione*

$$n < +\infty;$$

sia U un aperto di X per cui esiste $m \in N$ che maggiora la dimensione dello spazio tangente di Zariski, ad X, in ogni punto di U.

In queste ipotesi esiste un' applicazione olomorfa

$$\varphi : X \longrightarrow \boldsymbol{C}^r$$

tale che:

i) φ è iniettiva, propria, ed ha lo Jacobiano di rango massimo in tutti i punti regolari di X.

ii) $\varphi(U)$ è un insieme analitico di un aperto di $\boldsymbol{C}^r$ e $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ è un isomorfismo.

PROVA. - È noto, (vedi [12]), che esiste un omeomorfismo

$$f : X \longrightarrow X' \subset \boldsymbol{C}^{2n+1}$$

di X su un insieme analitico X' di $\boldsymbol{C}^{2n+1}$ tale che f sia olomorfa ed abbia lo Jacobiano di rango massimo su tutti i punti regolari di X.

Sia O il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su X ed O' il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su X'.

Sia $\widehat{O}$ l'immagine diretta di O su X' (2), per un teorema di H. GRAUERT (vedi [10]) $\widehat{O}$, e quindi $\widehat{O}/O'$, è coerente.

---

(2) $\widehat{O}$ è il fascio generato dal prefascio che associa all'aperto V di X' il gruppo $\Gamma(O, f^{-1}(V))$.

È immediato che il supporto T' di $\widehat{O}/O'$ è un insieme analitico complesso immagine, tramite f, dell'insieme T dei punti x di X tali che $f: X_x \to X'_{f(x)}$, ove X_x e $X'_{f(x)}$ indicano i germi individuati da X od X' in x e $f(x)$), non è un isomorfismo.

L'insieme T è l'immagine inversa, tramite f, di un insieme analitico e quindi è un insieme analitico.

Possiamo così riassumere quanto provato: sia $\psi: W \to W'$ un'applicazione olomorfa, tale che ψ è un omeomorfismo, chiameremo ψ un omeomorfismo olomorfo fra gli spazi complessi W e W',

Dato un omeomorfismo olomorfo ψ l'insieme dei punti x, in cui $\psi: W_x \to W_{\psi(x)}$ non è un isomorfismo, è un insieme analitico di W, avente codimensione almeno uno. Quest'ultimo fatto è conseguenza della seguente, ben nota, proprietà: se $\psi': \breve{W} \to \breve{W}'$ è un omeomorfismo olomorfo fra le varietà complesse $\breve{W}$ e $\breve{W}'$ allora ψ' è biolomorfa.

Sia $S \subset X$ l'insieme analitico di X tale che:

$$x \in S \Rightarrow f: X_x \to X'_{f(x)}$$

non è un isomorfismo.

Lo spazio X soddisfa al socondo assioma di numerabilità quindi $S' = S \cap U$ sarà unione, al più, di un'infinità numerabile di componenti irriducibili: $S' = \cup S_i$.

Sia $x_i \in S_i$, per ogni i; $\{x_i\}$ è una successione, senza punti di accumulazione in X, oppure un numero finito di punti.

Per ipotesi la dimensione dello spazio tangente di ZARISKI τ_x è minore od eguale ad m, qualsiasi $x \in U$.

Si possono perciò assegnare, per ogni punto x_i m elementi differenziali del primo ordine: $df_1^i, \ldots, df_m^i$ tali che le $f_1^i, \ldots, f_m^i$ diano un isomorfismo di un intorno di x_i in un insieme analitico di un aperto di $\boldsymbol{C}^m$.

Essendo X uno spazio di STEIN esistono m funzioni olomorfe globali $f_1, \ldots, f_m$ che hanno in ogni x_i, gli elementi differenziali del primo ordine assegnati. Consideriamo ora l'immersione $\varphi: X \to \boldsymbol{C}^{m+2n+1}$ data da:

$$\varphi_1(x) = f(x) \times \{f_1(x) \times \ldots \times f_m(x)\}.$$

La φ_1 induce un isomorfismo di germi in tutti i punti $\{x_i\}$, oltre che nei punti in cui f è un isomorfismo. Il luogo dei punti in cui φ_1 non induce un isomorfismo di germi è quindi un insieme analitico di U di codimensione almeno due.

Procedendo così si eliminano succesivamente i punti in cui φ_1 non è un isomorfismo e dopo, al più, $n-1$ costruzioni si ottiene l'immersione cercata. Si verifica immediatamente che le applicazioni che si costruiscono sono sempre applicazioni proprie iniettive, aventi lo Jacobiano di rango massimo nei punti regolari e ciò conclude la dimostrazione.

Si potrebbero dare ora dei criteri di realizzabilità di spazi analitici reali, non necessariamente coerenti, in R^m. Per non dover ripetere più tardi queste considerazioni preferiamo estendere prima il teorema 3 e dare detti criteri nella loro forma più generale nel § 7.

Osserviamo che dalla dimostrazione del teorema 11, si potrebbe ricavare agevolmente una maggiorazione per la dimensione dello spazio coordinato complesso in cui si può immergere lo spazio di STEIN con le proprietà sopra richieste.

§ 5. - Gli *R*-spazi analitici.

Scopo di questo paragrafo è generalizzare agli R-spazi analitici i teoremi del paragrafo 3.

A volte nella letteratura (vedi ad esempio in [8]) gli R-spazi analitici sono detti spazi analitici reali (con elementi nilpotenti)

Gli R-spazi analitici sono una generalizzazione degli spazi analitici reali coerenti; non si può dire però che la teoria degli R-spazi analitici contenga quella degli spazi analitici reali.

Come vedremo infatti gli R-spazi analitici sono spazi analitici reali, con eventuali elementi nilpotenti, che siano parte reale di qualche spazio complesso. Sfuggono quindi alla teoria degli R-spazi tutti quegli spazi analitici reali che non sono parte reale di qualche spazio complesso. L'esistenza di tali spazi analitici reali «patologici» è stata messa in luce da H. CARTAN che ne dà esempi in [6]. Notiamo ancora, per comodità del lettore, che gli spazi analitici reali, che sono parte reale di uno spazio complesso, sono, sostanzialmente, i C-insieme analitici nella terminologia di [4].

Nel presente lavoro noi siamo interessati, principalmente, allo studio degli spazi analitici reali. Proveremo quindi, per gli R-spazi analitici solo quelle proprietà che ci servono per studiare gli spazi analitici reali.

Richiamiamo ora la definizione ed alcune proprietà di un R-spazio analitico (la terminologia è quella di [11]).

Dicesi spazio, con fascio di anelli locali, uno spazio topologico X su cui è definito un fascio di anelli locali O_X, detto fascio strutturale.

Un morfismo $\gamma = (f, \vartheta)$ fra due spazi con fascio di anelli locali: (X, O_X), (Y, O_Y) è, per definizione, il dato di un'applicazione continua $f: X \longrightarrow Y$ e di un omomorfismo, $\vartheta: O_Y \longrightarrow O_X$, che induce degli omomorfismi di anelli locali: $\vartheta_x: O_{Y,f(x)} \longrightarrow O_{X,x}$ (ove $O_{Y,f(x)}$, $O_{X,x}$ sono le spighe di O_Y ed O_X nei punti $f(x)$ ed x).

Un morfismo si dice un isomorfismo se ammette un inverso.

Sia ora K un corpo valutato completo (nel seguito con K indicheremo il corpo reale od il corpo complesso) e K^n il prodotto topologico di n copie di K.

Indichiamo con A_{K^n} il fascio dei germi delle funzioni analitiche definite in K^n, a valori in K. Sia G un aperto di K^n, noteremo con A_G la restrizione di A_{K^n} a G.

Per ogni aperto G di K^n la coppia (G, A_G) è uno spazio con fascio di anelli locali.

Sia I un fascio di ideali di A_G generato da un numero finito di funzioni analitiche, definite su tutto G. Notiamo con $S(I)$ il supporto di A_G/I. La coppia $(S(I), A_G/I_{|S(I)})$ è uno spazio con fascio di anelli locali. Un tale spazio viene detto K-spazio analitico locale. Supponiamo ora che I' sia un secondo fascio di ideali di A_G e sia $I' \subset I$.

In questo caso si ha l'immersione $f: S(I') \to S(I)$, e l'omomorfismo canonico $\vartheta: A_G/I \to A_G/I'$. Il dato del K-spazio analitico locale $(S(I), A_G/I')$ e del morfismo (f, ϑ) è detto sotto K-spazio analitico locale di $(S(I), A_G/I)$.

Diamo infine la seguente:

DEFINIZIONE. - Dicesi K-spazio analitico uno spazio di HAUSDORFF [3], con fascio di anelli locali, (X, O_X) tale che:

1) per ogni $x \in X$ esiste un aperto $U \ni x$ tale che $(U, O_{X|U})$ sia isomorfo ad un K-spazio analitico locale.

2) X soddisfa al II assioma di numerabilità.

Diremo realizzazione di un aperto U di X un isomorfismo fra $(U, O_{X|U})$ ed un K-spazio analitico locale. Anche per i K-spazi analitici si dà la nozione di germe di K-spazio analitico in un punto. La terminologia e le notazioni sono analoghe a quelle usate per gli spazi analitici e non ci soffermeremo quindi su di esse.

Dicesi sotto K-spazio analitico di (X, O_X) un K-spazio analitico (Y, O_Y), tale che Y sia un sottospazio topologico di X, e sia definito un morfismo

$$(f, \vartheta): (Y, O_Y) \to (X, X_X),$$

soddisfacente alle condizione:

i) $f: Y \to f(Y)$ è l'applicazione identica ed $f(Y)$ è localmente chiuso in X.

ii) (Y, O_Y) col morfismo (f, ϑ) è, localmente, un sotto K-spazio analitico locale di (X, O_X).

Sia (X, O_X) un R-spazio analitico, si verifica che $(X, O_X \otimes \boldsymbol{C})$ è uno spazio con fascio di anelli locali.

Dato un R-spazio analitico (X, O_X) diremo O_X-complessificazione (od O_X-complessificato) di X il dato di un $\boldsymbol{C}$-spazio analitico (Y, O_Y) e di un morfismo

$$j = (f, \vartheta): (X, O_X) \to (Y, O_Y)$$

---

[3] L'ipotesi che X sia di HAUSDORFF non è essenziale ad una teoria dei K-spazi analitici. Noi la introduciamo perchè nel seguito saremo interessati solo a spazi separati.

tale che: $Y \supset X$ ed $f: X \longrightarrow f(X)$ è l'applicazione identica, $f(X)$ è chiuso in Y è

$$\vartheta : O_{Y|f(X)} \longrightarrow O_X \otimes \boldsymbol{C}$$

è un isomorfismo delle $\boldsymbol{C}$ strutture.

OSSERVAZIONE 1. - Sia (X, O_X) un K-spazio analitico (ove K è il corpo reale o complesso), vogliamo provare che il fascio O_X è coerente come O_X modulo [4]. Il fascio O_X è, localmente, un quoziente del fascio dei germi delle funzioni analitiche in un aperto di K^n e quindi è finitamente generato, essendo detto fascio coerente.

Dalla definizione di K-spazio analitico segue poi che il fascio delle relazioni di O_X è finitamente generato e ciò prova che O_X è coerente.

Sia (X, O_X) un R-spazio analitico.

Se X è sotto R-spazio analitico di una varietà analitica reale V, esso è il supporto di un fascio coerente di ideali del fascio dei germi delle funzioni analitiche su V. Da ciò segue che X è un C-insieme analitico di V ed X è il luogo di zeri di un numero finito di funzioni analitiche globali di V (per la dimostrazione vedi [4]).

OSSERVAZIONE 2. - Nella definizione di K-spazio analitico locale il fascio di ideali I non è, necessariamente, il fascio dei germi di tutte le funzioni analitiche che si annullano su $S(I)$. Il fascio O_X di un K-spazio analitico non si può quindi, in generale, interpretare come il fascio dei germi delle funzioni analitiche su X. Di conseguenza un morfismo $(X, O_X) \longrightarrow (Y, O_Y)$ non è individuato dall'applicazione $f: X \longrightarrow Y$, nè basta, in generale, dare una f analitica perchè sia possibile assegnare un morfismo, avente f come applicazione fra gli spazi.

Dato un K-spazio analitico (X, O_X) si può considerare il fascio di ideali I_T di O_Y formato dai germi delle funzioni analitiche, identicamente nulle su X.

Per un fondamentale teorema di K. OKA il fascio I_T è coerente se $K = \boldsymbol{C}$. H. CARTAN ha messo in luce che può non esserlo se $K = R$.

In ogni caso $(X, O_X/I_T)$ è uno spazio analitico (reale o complesso) ed il fascio O_X/I_T risulta essere il fascio dei germi delle funzioni analitiche su X.

Lo spazio analitico $(X, O_X/I_T)$ si chiama spazio analitico reale, (o complesso), ridotto associato al K-spazio analitico (X, O_X) e verra spesso indicato con X.

---

[4] È noto che O_X è coerente come O_X modulo se, e solo se, presa una realizzazione $(U, O_{X|U}) \longrightarrow (U', O_{U'})$ dall'aperto U di X nel K-spazio analitico locale U' definito nell'aperto G di K^n, si ha che $O_{U'}$ è coerente come A_G modulo. (vedi ad esempio [8] exposé 9).

Osserviamo ancora che, dato l'R-spazio analitico (X, O_X), se $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ è una sua O_X complessificazione, essa non è individuata dallo spazio analitico reale ridotto X.

Ad esempio X può essere un punto ed $\tilde{X}$ uno spazio di dimensione arbitraria.

Notiamo infine che lo spazio analitico reale, paracompatto X ha un complessificato se, e solo se, X è coerente. Infatti se X è coerente, per il teorema 3, esiste un suo complessificato, viceversa, per la definizione di coerenza, se X ha un complessificato, esso è coerente.

Ricordiamo la seguente definizione: dicesi algebra analitica, sul corpo valutato completo K, una K algebra isomorfa ad un quoziente, non nullo, di un anello di serie di potenze convergenti $K[t_1, \dots, t_n]$. Ad ogni germe X_x di K-spazio (X, O_X) è associata l'algebra analitica: spiga di O_X in x, detta algebra analitica del germe X_x.

Vale il seguente

TEOREMA 12. - *Sia (X, O_X) un R-spazio analitico, esiste allora una O_X complessificazione $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ di (X, O_X).*

Lo spazio X ha in $\tilde{X}$ un sistema fondamentale di intorni aperti, i cui spazi complessi ridotti associati, sono spazi di Stein.

PROVA. - È immediato che un isomorfismo fra due germi di R-spazi analitici induce un isomorfismo fra le algebre analitiche associate ai germi dei complessificati.

Per il teorema 1.3, pag. 13.02 di [8], ogni isomorfismo fra le algebre analitiche induce un unico isomorfismo fra i germi associati. Si sono così provati i corrispondenti dei lemmi 1 e 2 nel caso degli R-spazi analitici.

Il resto della costruzione del complessificato è identica a quella fatta nel paragrafo 2.

L'esistenza degli intorni di STEIN è garantita dal teorema 10 in quanto, se $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ è un O_X complessificato di (X, O_X), lo spazio analitico reale $X \subset \tilde{X}$, associato ad (X, O_X), è una parte reale dello spazio complesso ridotto associato ad $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$.

TEOREMA 13. - *Sia (X, O_X) un R-spazio analitico, $\mathcal{F}$ un fascio di O_X moduli che sia coerente; si ha allora:*

A) per ogni $x \in X$ l' $O_{X,x}$ modulo $\mathcal{F}_x$ è generato dalla immagine della applicazione di restrizione $H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ (ove $O_{X,x}$, $\mathcal{F}_x$ sono le spighe di O_X, $\mathcal{F}$ nel punto x).

B) per ogni $q \geq 1$ si ha: $H^q(X, \mathcal{F}) \simeq \{o\}$.

PROVA. - Per il teorema 12 e l'osservazione 1 di questo paragrafo la dimostrazione si riduce a quella del teorema 6.

Sia G un aperto $\boldsymbol{C}^n$ ed A_G il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su G. Sia I un sottofascio di ideali di A_G generato dalle funzioni

$$f_1 = f_1' + if_1'', \ldots, f_n = f_n' + if_n''.$$

Detto $S(I)$ il supporto di A_G/I la coppia

$$(S(I),\ A_G/I|_{S(I)})$$

è, per definizione, un $\boldsymbol{C}$-spazio analitico locale.

Identifichiamo $\boldsymbol{C}^n$con R^{2n} e sia A_G^R il fascio dei germi delle funzioni analitiche reali su G. Notiamo con I_R il fascio di ideali generato da $f_1', \ldots, f_n'$, $f_1'', \ldots, f_n''$ su $G \subset R^{2n}$.

La coppia

$$(S(I_R),\ A_G^R/I_R|_{S(I_R)})$$

è, per definizione, un R-spazio analitico locale. Il passare dal $\boldsymbol{C}$-spazio analitico

$$(S(I),\ A_G/I|_{S(I)})$$

all'R-spazio analitico

$$(S(I_R),\ A_G^R/I_R|_{S(I_R)})$$

sarà detto: considerare il $\boldsymbol{C}$-spazio analitico con la struttura analitica reale soggiacente.

Quanto fatto nel caso locale si estende facilmente al caso globale. Dato un $\boldsymbol{C}$-spazio analitico (X, O_X) lo denoteremo (X^R, O_X^R) quando considerato come R-spazio analitico, con la struttura reale soggiacente. È immediato che lo spazio analitico ridotto associato ad (X^R, O_X^R) è lo spazio analitico reale associato allo spazio complesso ridotto associato ad (X, O_X).

Sia $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ un $\boldsymbol{C}$-spazio analitico ed $\alpha = (\sigma, \vartheta)$ un morfismo di $(\tilde{X}^R, O_{\tilde{X}}^R)$ in sè.

Diremo che $\alpha = (\sigma, \vartheta)$ è un'antiinvoluzione di $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$, se $\alpha \circ \alpha = \mathrm{id}.$ e se $\sigma : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$, considerata sullo spazio complesso ridotto, associato ad $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$, è antiolomorfa.

Sia (X, O_X) un sotto R-spazio analitico di $(\tilde{X}^R, O_{\tilde{X}}^R)$ e $(i, \pi) : (X, O_X) \longrightarrow (\tilde{X}^R, O_{\tilde{X}}^R)$ il morfismo associato.

Diremo che (X, O_X) è fisso, od è parte fissa, per la antiinvoluzione $\alpha = (\sigma, \vartheta)$ se:

$$X = \{x \in \tilde{X} | \sigma(x) = x\}$$

ed inoltre si ha:

$$\pi \circ \vartheta = \pi, \quad \text{ove} \quad \vartheta: O^R_{\tilde{X}} \longrightarrow O^R_{\tilde{X}} \quad \text{e} \quad \pi: O^R_{\tilde{X}} \longrightarrow O_X$$

sono le applicazioni fra i fasci strutturali.

OSSERVAZIONE 3. – Sia (X, O_X) un R–spazio analitico, $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ un O_X complessificato di (X, O_X) e siano

$$\alpha = (\sigma, \vartheta), \quad \alpha' = (\sigma', \vartheta')$$

due antiinvoluzioni di $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ aventi (X, O_X) come parte fissa.

In tali ipotesi α coincide α' su un intorno di X in $\tilde{X}$. Consideriamo infatti l'applicazione $\sigma' \circ \sigma: \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ del morfismo $\alpha' \circ \alpha$ di $(\tilde{X}^R, O^R_{\tilde{X}})$ in sè. L'applicazione $\sigma' \circ \sigma$ risulta olomorfa quindi $\alpha' \circ \alpha$ è un morfismo di $\boldsymbol{C}$–spazi analitici in quanto $\sigma' \circ \sigma$ definisce nn omomorfismo dell'algebra analitica di $\tilde{X}_x$ in sè per ogni $x \in X$.

L'algebra analitica individuata da $\tilde{X}_x$, nei punti $x \in X$, è isomorfa all'algebra analitica associata ad X_x tensorizzata con il corpo $\boldsymbol{C}$.

$\vartheta \circ \vartheta'$ è l'identità sull'algebra analitica di X_x e quindi, essendo $\alpha' \circ \alpha$ un morfismo di $\boldsymbol{C}$ strutture, esso induce l'identità sull'algebra analitica associata ad $\tilde{X}_x$.

Si ha quindi, per il teorema 1.3 pag. 13.02 di [8] che $\alpha' \circ \alpha$ è l'identità su un intorno, in $\tilde{X}$, di ogni $x \in X$ e questo prova che su un intorno di $X: \alpha \circ \alpha' = \text{id.}$ e perciò $\alpha' = \alpha^{-1} = \alpha$ che è la tesi.

Le considerazioni ora svolte ci permettono di concludere con il seguente

TEOREMA 14. – *Sia (X, O_X) un R–spazio analitico, esiste allora un O_X complessificato $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ di (X, O_X) tale che:*

lo spazio complesso ridotto associato $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ è uno spazio di Stein, su cui è definita un'antiinvoluzione α di cui (X, O_X) è la parte fissa.

PROVA. – Sia $\tilde{X}'$ un O_X complessificato di (X, O_X). Fissiamo un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in N}$ di $\tilde{X}'$; tale che esistano delle realizzazioni $\rho_i: U_i \longrightarrow U'_i \subset \boldsymbol{C}^{n_i}$, per cui sia:

$$\rho_i(U_i \cap X) = \rho_i(U_i) \cap R^{n_i}.$$

Le antiinvoluzioni indotte su U'_i dal coniugio in $\boldsymbol{C}^{n_i}$ definiscono delle antiinvoluzioni α_i su U_i. In virtù della osservazione 3 le α_i definiscno, per incollamento, un'antiinvoluzione su un intorno aperto $\tilde{X}$ di X in $\tilde{X}'$.

Come già osservato nel teorema 8 si può fare in modo che $\tilde{X}$ sia uno spazio di STEIN.

Possiamo ora provare il seguente teorema di immersione:

TEOREMA 15. – *Sia* (X, O_X) *un* R*–spazio analitico, esiste allora un* O_X*–complessificazione* $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ *di* (X, O_X) *tale che:* $\tilde{X} \supset X$, $\tilde{X}$ *è uno spazio di Stein e su* $\tilde{X}$ *è definita un'antiinvoluzione*

$$\alpha = (\sigma, \vartheta) : (\tilde{X}, O_{\tilde{X}}) \longrightarrow (\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$$

di cui (X, O_X) *è la parte fissa.*

Se inoltre $\dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{X} = n$ *esiste un'applicazione olomorfa iniettiva, propria, avente lo Jacobiano di rango massimo nei punti regolari di* $\tilde{X} : \tilde{\varphi} : \tilde{X} \longrightarrow \boldsymbol{C}^{4n+2}$ *tale che, detta* $\varphi = \tilde{\varphi} \,|\, X$, *si ha:*

i) $\varphi(X) = \tilde{\varphi}(\tilde{X}) \cap R^{4n+2}$. *Lo spazio analitico reale* $\varphi(X)$ *risulta inoltre essere il luogo degli zeri di un numero finito di funzioni analitiche globali di* R^{4n+2} *ed inoltre:*

$$\overline{\tilde{\varphi}(x)} = \tilde{\varphi}(\sigma(x)), \qquad \forall\, x \in \tilde{X},$$

ove $\overline{\tilde{\varphi}(x)}$ *è il punto di* $\boldsymbol{C}^{4n+2}$ *avente per componenti le coniugate di* $\tilde{\varphi}(x)$.

ii) φ *è iniettiva, propria ed ha lo Jacobiano di rango massimo in tutti i punti* $x \in X$ *che sono regolari sia in* X *che in* $\tilde{X}$.

Se la dimensione dello spazio tangente di Zariski τ_x *ad* $\tilde{X}_x$ *rimane limitata, al variare di* x *in* X, *esiste un intorno* $\tilde{X}'$ *di* X *in* $\tilde{X}$ *per cui e definita un'applicazione olomorfa propria* $\psi : \tilde{X}' \longrightarrow \boldsymbol{C}^m$ *tale che* $\psi(\tilde{X}')$ *è un insieme analitico di* $\boldsymbol{C}^m$ *e* $\psi : \tilde{X}' \longrightarrow \psi(\tilde{X}')$ *è un isomorfismo.*

PROVA. – Per il teorema 14 esiste una O_X complessificazione $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ di (X, O_X) tale che: $\tilde{X}$ è uno spazio di STEIN su cui è definita un'antiinvoluzione che ha (X, O_X) come parte fissa.

Ripetendo la costruzione fatta nel teorema 9 si ottiene una $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \longrightarrow \boldsymbol{C}^{4n+2}$ propria, iniettiva ed avente lo Jacobiano di rango massimo nei punti regolari di $\tilde{X}$ e soddisfacente alle condizioni

$$\tilde{\varphi}(\tilde{X}) \cap R^{4n+2} = \tilde{\varphi}(X) \quad \text{e} \quad \overline{\tilde{\varphi}(x)} = \tilde{\varphi}(\sigma(x)), \qquad \forall\, x \in \tilde{X}.$$

L'insieme $\varphi(X)$ è il supporto di un fascio coerente quindi, per quanto provato in [6], $\varphi(X)$ è luogo di zeri di un numero finito di funzioni analitiche globali su R^{4n+2}. Si è così provato il punto i).

Essendo X un chiuso di $\tilde{X}$, è immediato che φ è propria ed iniettiva.

Sia ora $x \in X$, x punto regolare per $\tilde{X}$ e per X, allora $\tilde{\varphi}$ ha, per il teorema 9 lo Jacobiano di rango massimo. La $\tilde{\varphi}$ definisce quindi un isomorfismo fra un aperto $U \ni x$ di $\tilde{X}$ ed un aperto $\tilde{\varphi}(U)$ di $\tilde{\varphi}(\tilde{X})$.

La $\tilde{\varphi}$ ristretta ad $X \cap U$ sarà ancora un isomorfismo e quindi φ ha Jacobiano di rango massimo in x.

Si è così provato il punto ii).

Supponiamo ora lo spazio tangente di ZARISKI τ_x ad $\tilde{X}_x$ abbia dimensione $\leq m$, $\forall x \in X$. Esiste allora un intorno aperto $\tilde{X}'$ di X in $\tilde{X}$ tale che lo spazio tangente di ZARISKI ad un qualsiasi punto di $y \in \tilde{X}'$ ha dimensione non superiore ad m. Si può quindi applicare il teorema 6 di [12] e ne segue la tesi.

Sia X uno spazio analitico reale; ci siamo occupati, nei paragrafi precedenti, delle seguenti situazioni:

a) X è parte fissa di qualche spazio complesso

b) X è parte reale di qualche spazio complesso

c) X è lo spazio analitico reale ridotto associato ad un R–spazio (X, O_X).

Vale il seguente

TEOREMA 16. – *Se X è uno spazio analitico reale paracompatto, connesso allora le condizioni a), b), c), sono equivalenti fra loro.*

PROVA. – $a) \Rightarrow b)$ è ovvia conseguenza del teorema 9. $b) \Rightarrow c)$. Sia $\tilde{X} \supset X$ uno spazio complesso di cui X è una parte reale. Esiste allora un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in N}$ di $\tilde{X}$ e delle realizzazioni $\rho_i : U_i \longrightarrow U_i' \subset \boldsymbol{C}^{n_i}$ tali che:

$$\rho_i(U_i \cap X) = \rho_i(U_i) \cap R^{n_i}.$$

Sia I_i il fascio di ideali dei germi delle funzioni analitiche su R^{n_i}, il cui prolungamento al germe di una funzione olomorfa su $\boldsymbol{C}^{n_i}$ è identicamente nullo su U_i'.

Sia G_i un aperto di R^{n_i}, $G_i \supset U_i' \cap \rho_i(U_i \cap X) = V_i$.

Notiamo con A_{G_i} il fascio dei germi delle funzioni analitiche reali su G_i. La coppia $(V_i, A_{G_i}/I_i|_{V_i})$ è un R–spazio analitico ed X viene dotato di struttura di R–spazio analitico dall'atlante $\{V_i\}_{i \in N}$.

$c) \Rightarrow a)$. Sia (X, O_X) un R–spazio analitico, allora per il teorema 14 lo spazio analitico ridotto associato ad (X, O_X) è parte fissa di uno spazio complesso.

§ 6. - Applicazioni indotte sul complessificato.

Siano (X, O_X), (Y, O_Y) due R–spazi analitici e

$$\varphi \quad (X, O_X) \longrightarrow (Y, O_Y)$$

un morfismo.

Supponiamo che (X, O_X) ed (Y, O_Y) siano contenuti in due loro O_X, O_Y complessificati:

$$(\tilde{X}, O_{\tilde{X}}), \quad (\tilde{Y}, O_{\tilde{Y}}),$$

Proveremo in questo paragrafo che il morfismo φ si estende ad un morfismo $\tilde{\varphi}$ di un aperto di $\tilde{X}$ in $\tilde{Y}$.

Nel caso in cui X e Y siano coerenti ed $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ due loro complessificati si possono dare risultati più precisi e dedurre, ad esempio, la surgettività locale di $\tilde{\varphi}$ da quella di φ.

Daremo infine un criterio per stabilire quando un omeomorfismo analitico reale $\varphi : X \longrightarrow Y$ è un isomorfismo.

In base ai risultati di questo paragrafo si può così concludere che, associando ad ogni R–spazio analitico (X, O_X), il germe del suo O_X complessificato si definisce un funtore fra la categoria degli R–spazi analitici e quella dei germi di $\boldsymbol{C}$–spazi analitici.

TEOREMA 17. – *Siano (X, O_X), (Y, O_Y) due R–spazi analitici contenuti in due loro O_X, O_Y complessificati: $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$, $(\tilde{Y}, O_{\tilde{Y}})$ e $\varphi = (f, \vartheta)$ un morfismo di (X, O_X) in (Y, O_Y). Il morfismo φ estende ad un morfismo*

$$\tilde{\varphi} : (\tilde{U}, O_{\tilde{X}|\tilde{U}}) \longrightarrow (\tilde{Y}, O_{\tilde{Y}})$$

definito su un aperto $\tilde{U}$ di $\tilde{X}$.

Si ha inoltre:

i) *se $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\varphi}'$ sono due estensioni di φ, esse coincidono su un aperto $\tilde{V} \supset X$ di $\tilde{X}$.*

ii) *φ è un isomorfismo se, e solo se, esistono un aperto $\tilde{U} \supset X$ di $\tilde{X}$ ed un aperto $\tilde{W} \supset Y$ di $\tilde{Y}$, tale che*

$$\tilde{\varphi} : (\tilde{U}, O_{\tilde{X}|\tilde{U}}) \longrightarrow (\tilde{W}, O_{\tilde{Y}|\tilde{W}})$$

è un isomorfismo.

PROVA. – Per definizione di complessificato, per ogni $x \in X$ si ha:

$$O_{X,x} \otimes \boldsymbol{C} = O_{\tilde{X},x}, \quad O_{Y,f(x)} \otimes \boldsymbol{C} = O_{\tilde{Y},f(x)}$$

ove $O_{X,x}$, $O_{\tilde{X},x}$ ... indicano le spighe dei fasci O_X, $O_{\tilde{X}}$ ...

L'omomorfismo di R–algebre $\vartheta : O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ si estende perciò, in modo unico, ad un omomorfismo di $\boldsymbol{C}$–algebre:

$$\tilde{\vartheta} : O_{Y,f(x)} \otimes \boldsymbol{C} \to O_{X,x} \otimes \boldsymbol{C}.$$

Per il teorema 1.3 pag. 13.02 di [8] $\tilde{\vartheta}$ induce un unico morfismo: $\tilde{\varphi}_U$, di un aperto $U \ni x$ di $\tilde{X}$, in $\tilde{Y}$.

Per la coerenza del fascio $O_{\tilde{Y}}$ il morfismo $\tilde{\varphi}_U$ estende φ nei punti di $U \cap X$ (vedi [8] pag. 10.01) e quindi si può definire per incollamento, un prolungamento $\tilde{\varphi}$ di φ.

Siano $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}'$ due prolungamenti di φ, essendo il prolungamento di φ localmente unico, esiste un intorno di X in cui $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\varphi}'$ coincidono.

Si è così provato i).

Se l'estensione $\tilde{\varphi}$ di φ è un isomorfismo anche φ è tale, perchè $\varphi = \tilde{\varphi}|_X$ e quindi l'inverso di $\tilde{\varphi}$, ristretto ad $f(X)$, è l'inverso di φ.

Viceversa, sia φ un isomorfismo, $\tilde{\varphi}$ un'estensione di φ e $\widehat{\varphi}$ un'estensione di φ^{-1}. Risulta allora che $\widehat{\varphi} \circ \tilde{\varphi}$ è un morfismo di $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ in sè che, ristretto ad X, è l'identità; quindi, per quanto gia provato esiste un intorno $\tilde{U}$ di X in $\tilde{X}$ tale che $\widehat{\varphi} \circ \tilde{\varphi}$ sia l'identità su $\tilde{U}$. Ciò prova che, su $\tilde{U}$, $\tilde{\varphi}$ ha un inverso, e quindi che ivi è un isomorfismo. Ciò conclude la dimostrazione.

COROLLARIO 1. – *Siano X, Y due spazi analitici reali coerenti,* $\varphi: X \to Y$ *un'applicazione analitica di X in Y ed $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ due complessificati di X ed Y. Valgono allora le conclusioni del teorema* 17.

PROVA. – Gli spazi X, Y sono, per ipotesi, coerenti. Si possono perciò ripetere gli argomenti del teorema 17 e ne segue la tesi.

OSSERVAZIONE 1. – Siano (X, O_X), (Y, O_Y) due R–spazi analitici ed $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$, $(\tilde{Y}, O_{\tilde{Y}})$ due O_X, O_Y complessificati.

Sia $f: X \to Y$ un'applicazione analitica fra i due spazi analitici reali ridotti associati ad (X, O_X), (Y, O_Y).

In generale la f non ammette un'estensione univocamente determinata fra gli spazi analitici ridotti $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$.

Vale il seguente

TEOREMA 18. – *Siano X, Y due spazi analitici reali coerenti, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ due loro complessificati.*

Sia $f: X \to Y$ un'applicazione analitica ed $\tilde{f}$ una sua estensione ad un aperto $\tilde{U}$ di $\tilde{X}$, $\tilde{U} \supset X$.

Si ha allora:

i) *detti* X_x, $Y_{f(x)}$ *i germi individuati da* X *in* x *ed* Y *in* $f(x)$, *se* $f: X_x \to Y_{f(x)}$ *è surgettiva allora* $\tilde{Y}_{f(x)}$ *è il più piccolo germe di insieme analitico complesso contenente* $\tilde{f}(\tilde{X}_x)$.

ii) *sia* $f: X_x \to Y_{f(x)}$ *iniettiva, in generale* $\tilde{f}: \tilde{X}_x \to \tilde{Y}_{f(x)}$ *non è iniettiva.*

iii) *Sia* f *un omeomorfismo ed inoltre per ogni* $x \in X$ *esista un intorno* $U \ni x$, *tale che* $\tilde{f}|_U$ *sia iniettiva, esiste allora un intorno* $\widehat{U}$ *di* $\tilde{X}$, $\widehat{U} \subset \tilde{U}$, *tale che* $\tilde{f}: \widehat{U} \to f(\widehat{U})$ *è un omeomorfismo ed* $\tilde{f}(\widehat{U})$ *è un intorno di* Y *in* $\tilde{Y}$.

PROVA. – Dimostriamo prima che l'applicazione f^* indotta da $f: X_x \to Y_{f(x)}$ sulle algebre analitiche associate ad $Y_{f(x)}$, X_x è iniettiva.

Sia per assurdo, f^* non iniettiva, esiste allora un germe di funzione analitica g, su $Y_{f(x)}$, tali che

$$g|_{Y_{f(x)}} \not\equiv 0,$$
$$f^*(g) \equiv 0$$

su X_x. Detto V_g il luogo degli zeri di g si ha che

$$V_g \cap Y_{f(x)} = \widehat{Y}_{f(x)},$$

è contenuto propriamente in $Y_{f(x)}$.

Si ha d'altra parte, che $f(X_x) \subset \widehat{Y}_{f(x)}$, perchè $f^*(g) \equiv 0$ su X_x, ma questo contraddice la surgettività di $f: X_x \to Y_{f(x)}$ e quindi f^* deve essere iniettiva.

Notiamo con $\tilde{f}^*$ l'omomorfismo ottenuto estendendo f^*, per $\mathbf{C}$-linearità sulle algebre analitiche associate ad $\tilde{Y}_{f(x)}$, $\tilde{X}_x$. L'omomorfismo $\tilde{f}^*$ induce un'applicazione olomorfa

$$\tilde{f}: \tilde{X}_x \to \tilde{Y}_{f(x)}$$

la quale coincide con l'estensione di f essendo $\tilde{f}^*$ l'estensione di f^*. Trattandosi di spazi vettoriali dall'iniettività di f^* segue quella di $\tilde{f}^*$ [5]. È poi immediato che l'iniettività di $\tilde{f}^*$ prova l'ultima parte di i).

ii) Sia $X = R$, $Y = R$, X con la coordinata x ed Y con la coordinata y. Sia $f: X \to Y$ definita da $y = f(x) = x^3$; la $f: X_0 \to Y_0$ è iniettiva ma non lo è $\tilde{f}: \tilde{X}_0 \to \tilde{Y}_0$.

iii) Supponiamo che, per ogni $x \in X$, esista un intorno $U \ni x$, in $\tilde{X}$, tale che $\tilde{f}|_U$ è iniettiva. Per la parte i), già provata, se ci restringiamo ad un

---

[5] Sugli spazi vettoriali il funtore $\otimes$ è esatto anche a sinistra.

intorno U compatto, si ha che: $\tilde{f}: U \longrightarrow \tilde{f}(U)$ è un omeomorfismo ed $\tilde{f}(U)$ e un intorno di $f(x)$ in $\tilde{Y}$, infatti $\tilde{f}$ risulta propria e perciò $\tilde{f}(\tilde{X}_x) = \tilde{Y}_{f(x)}$.

Il punto iii) sarà dunque provato se dimostreremo il seguente risultato topologico.

LEMMA 4. - *Siano $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ due spazi topologici metrici e localmente compatti, $X \subset \tilde{X}$, $Y \subset \tilde{Y}$ due chiusi.*

Sia $\tilde{f}: \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ un'applicazione continua tale che.

1) *per ogni $x \in X$ esiste un intorno $\tilde{U}_x \ni x$ di $\tilde{X}$ per cui $\tilde{f}: \tilde{U}_x \longrightarrow \tilde{f}(\tilde{U}_x)$ è un omeomorfismo ed $\tilde{f}(\tilde{U}_x)$ è un intorno di $\tilde{f}(x)$:*

2) *$\tilde{f}: X \longrightarrow Y$ è un omeomorfismo.*

In queste ipotesi esiste un intorno U di X in $\tilde{X}$, tale che $\tilde{f}: \tilde{U} \longrightarrow \tilde{f}(\tilde{U})$ sia un omeomorfismo ed $\tilde{f}(\tilde{U})$ sia un intorno di Y in $\tilde{Y}$.

PROVA. - Incominciamo col provare il seguente caso particolare: sia $K \subset X$ un compatto, allora esiste un intorno $\tilde{K}$ di K, in $\tilde{X}$, tale che $\tilde{f}: \tilde{K} \longrightarrow \tilde{f}(\tilde{K})$ è un omeomorfismo ed $\tilde{f}(\tilde{K})$ è un intorno di $\tilde{f}(K)$ in $\tilde{Y}$.

Essendo $\tilde{X}$ localmente compatto, esiste un intorno compatto $\hat{K}$ di K in $\tilde{X}$. Lo spazio $\tilde{Y}$ è T_2, basterà quindi provare che esiste un intorno chiuso $\tilde{K} \subset \hat{K}$ di K, tale che $\tilde{f}|_{\tilde{K}}$ è iniettiva ed $\tilde{f}(\tilde{K})$ è un intorno di $\tilde{f}(K)$. L'esistenza dell'intorno $\tilde{K}$ su cui $\tilde{f}$ è iniettiva è stata provata nel lemma 3.

Per l'ipotesi 1) ogni $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni U_x^n tale che $\tilde{f}(U_x^n)$ è un intorno di $\tilde{f}(x)$, da questo segue che $\tilde{f}(\tilde{K})$ è un intorno di $\tilde{f}(K)$.

Si è così provato il lemma nel caso particolare.

In generale, sia $\{U_i\}_{i \in N}$ un ricoprimento aperto di X tale che:

α) ogni $\bar{U}_i$ incontra solo un numero finito di $\bar{U}_j$, $i, j \in N$

β) $\bar{U}_i$ è compatto, $\forall\, i \in N$.

Sia $S_i = \{$unione di U_i e degli U_j, $j \in N$, tali che: $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j \neq \emptyset\}$; per le condizioni α) e β) $\bar{S}_i$ è compatto per ogni $i \in N$.

Siano $W_i \supset \bar{S}_i$ degli aperti di $\tilde{X}$ tali che $\tilde{f}: W_i \longrightarrow \tilde{f}(W_i) = W_i'$ è un omeomorfismo e W_i' sia un intorno di $S_i' = \tilde{f}(S_i)$; detti W_i esistono per quanto già provato.

Sia $\{\tilde{U}_i\}_{i \in N}$ una famiglia di aperti di $\tilde{X}$, tale che $\tilde{U}_i \cap X = U_i$, $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \emptyset \Leftrightarrow \bar{U}_i \cap \bar{U}_j \neq \emptyset$, $\forall\, i, j \in N$, ed infine: $\tilde{U}_i \subset W_j$ se $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j \neq \emptyset$.

Questo ricoprimento aperto è costruibile perchè $\tilde{X}$ è uno spazio metrico.

Prendiamo ora una famiglia di aperti $\{\tilde{U}'_i\}_{i\in N}$ di $\tilde{Y}$ tali che: $\tilde{U}'_i \supset U'_i = \tilde{f}(U_i)$.
Supponiamo inoltre che gli $\{\tilde{U}'_i\}$ siano abbastanza piccoli da soddisfare alle seguenti condizioni:

$$\text{(I)} \quad \tilde{U}'_j \subset \tilde{f}(W_i) \quad \text{se} \quad \bar{U}_i \cap \bar{U}_j \neq \emptyset$$

$$\text{(II)} \quad \tilde{U}'_i \cap \tilde{U}'_j \neq \emptyset \Leftrightarrow U'_i \cap U'_j \neq \emptyset , \qquad \forall\, i,\, j \in N.$$

Posto $\tilde{Z}_i = \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}'_i)$ ed $\tilde{U} = \bigcup\limits_{i\in N} \tilde{Z}_i$ vogliamo provare che f è iniettiva, se ristretta ad $\tilde{U}$.

Se per assurdo, vi fossero due punti x, y di $\tilde{U}$ tali che $\tilde{f}(x)=\tilde{f}(y)$, allora essendo f iniettiva su ogni W_i dovrebbe essere $x \in \tilde{Z}_i \subset \tilde{U}_i$, $y \in \tilde{Z}_j \subset \tilde{U}_j$ con $U_i \cap U_j = \emptyset$, ma allora, essendo, per ipotesi, $\tilde{f}: X \longrightarrow Y$ un omeomorfismo, si ha: $\bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j = \emptyset$, e, per la II) quindi $\tilde{U}'_i \cap \tilde{U}'_j = \emptyset$ e perciò non può essere $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y)$, perchè

$$\tilde{f}(\tilde{Z}_i) \subset \tilde{U}'_i, \quad \tilde{f}(\tilde{Z}_j) \subset \tilde{U}'_j .$$

Si è quindi provato che esiste un intorno $\tilde{U}$ di X in $\tilde{X}$ tale che $\tilde{f}: \tilde{U} \longrightarrow \tilde{f}(\tilde{U})$ è biunivoca ed $\tilde{f}(\tilde{U})$ è un aperto di $\tilde{Y}$.

Per ipotesi, poi la $\tilde{f}^{-1}$ è continua in ogni punto di un aperto di $\tilde{Y}$ contenente Y e questo conclude la dimostrazione.

Siano X, Y due spazi analitici reali, $f: X \longrightarrow Y$ un omeomorfismo analitico. È facile vedere che, in generale, f^{-1} non è analitica, neppure se X ed Y sono varietà

La seguente proposizione dà un criterio per riconoscere quando f^{-1} è analitico.

PROPOSIZIONE 5. - *Siano X, Y due spazi analitici reali coerenti ed $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ due complessificazioni di X, Y*

Sia dato un omeomorfismo $f: X \longrightarrow Y$ e sia $\tilde{f}: \tilde{U} \longrightarrow \tilde{Y}$ un'estensione olomorfa di f.

Condizione sufficiente affinchè f^{-1} sia analitica e che siano soddisfatte le seguenti ipotesi.

1) *per ogni $x \in X$ esiste un intorno $U_x \ni x$ in $\tilde{X}$ tale che $\tilde{f}$ sia iniettiva su U_x.*

2) *$\tilde{Y}$ è normale in tutti i punti di Y.*

PROVA. - La condizione 1 garantisce, per il teorema 18, che esiste un intorno aperto $\tilde{U}$ di X in $\tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(\tilde{U})$ sia un aperto ed

$$\tilde{f}: \tilde{U} \longrightarrow \tilde{f}(\tilde{U})$$

sia un omeomorfismo.

La condizione 2) assicura che esiste un aperto $\tilde{W}$ di $\tilde{Y}$, $\tilde{W} \supset Y$ tale che $\tilde{W}$ è uno spazio normale (6).

Per un opportuno intorno $\tilde{T}$ di X in $\tilde{X}$ si avrà dunque che

$$\tilde{f} : \tilde{T} \to \tilde{f}(\tilde{T})$$

è un omeomorfismo, olomorfo ed $\tilde{f}(\tilde{T})$ è un sottospazio aperto, normale di $\tilde{Y}$.

Per un noto teorema, (vedi [0] pag. 325), allora

$$\tilde{f}^{-1} : \tilde{f}(\tilde{T}) \to \tilde{T}$$

è olomorfa e quindi la sua restrizione ad Y è analitica. Si è così provato che $\tilde{f}_{|X}$ ha un inverso analitico e questa è la tesi.

§ 7. - Alcune proprietà delle parti fisse di uno spazio complesso.

a) Il caso delle varietà, prime applicazioni.

Tutti gli spazi analitici, reali o complessi, di cui si tratta in questo paragrafo e nel successivo soddisfano per ipotesi al secondo assioma di numerabilità.

Sia $\tilde{X}$ uno spazio complesso, $\sigma : \tilde{X} \to \tilde{X}$ un'antiinvoluzione. Abbiamo visto, nel paragrafo 5 che il luogo dei punti fissi di σ è uno spazio analitico reale X, anzi esiste un R-spazio analitico, (X, O_X) di cui X è lo spazio ridotto associato.

Viceversa si è provato che ogni R-spazio analitico è la parte fissa di uno spazio complesso.

Scopo di questo paragrafo è studiare gli R-spazi analitici tramite questa caratterizzazione.

Si proverà prima che il luogo dei punti fissi di un'antiinvoluzione $\sigma : \tilde{X} \to \tilde{X}$, definita su una varietà complessa $\tilde{X}$ di dimensione n, è vuoto, oppure è una varietà analitica reale di dimensione n.

Usando questo risultato si prova, successivamente, che ogni R-spazio analitico, di dimensione n è parte fissa di uno spazio complesso di dimensione n.

(6) Ricordiamo che in uno spazio complesso l'insieme dei punti normali è un aperto.

Da ciò si otterrà un teorema di immersione per gli R–spazi analitici in R^m che generalizza tutti i risultati di questo tipo ottenuti fino ad ora.

Nel seguito si dimostrerà che l'insieme dei punti singolari di un R–spazio analitico X è contenuto in un sottoinsieme analitico di codimensione almeno uno.

Il paragrafo termina con la dimostrazione del fatto che uno spazio analitico reale coerente ammette una decomposizione in componenti irriducibili globali. Tale decomposizione gode delle stesse caratteristiche di quella, già nota, degli spazi complessi.

Di grande utilità per il seguito è il seguente

TEOREMA 19. - *Sia V^n una varietà complessa di dimensione n, $\sigma: V^n \to V^n$ un'antiinvoluzione. L'insieme*

$$F = \{ x \in V^n | \sigma(x) = x \}$$

è vuoto oppure è una varietà analitica reale di dimensione n.

Premettiamo alla dimostrazione il seguente

LEMMA 5. - *Sia $\varphi : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ un'antiinvoluzione lineare, l'insieme*

$$F = \{ x \in \boldsymbol{C}^n | \varphi(x) = x \}$$

è una sottovarietà lineare reale di dimensione n di

$$\boldsymbol{C}^n \simeq R^{2n}.$$

PROVA. - Dette $z_1, \ldots, z_n$ le coordinate di $\boldsymbol{C}^n$, la trasformazione φ si scriverà:

$$\varphi(z_1 \ldots z_n) = (\varphi_1(z_1 \ldots z_n), \ldots, \varphi_n(z_1 \ldots z_n))$$

con

$$\varphi_i(z_1 \ldots z_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{z}_j \quad i = 1 \ldots n \quad \text{ed} \quad a_{ij} \in \boldsymbol{C}.$$

La φ è dunque determinata dalla matrice $A = (a_{ij})$ ed in forma matriciale può scriversi:

$$\varphi \begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix} = (A) \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{z}_n \end{bmatrix}$$

o più brevemente $\varphi(z) = A\bar{z}$ ove

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Essendo $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$ si ha

$$\varphi(\varphi(z)) = \varphi(A\bar{z}) = A\,\overline{A\bar{z}} = A\,\bar{A}z = z$$

per ogni $z \in \boldsymbol{C}^n$ quindi vale

1) $$A\bar{A} = E \text{ ove } E \text{ è la matrice identica.}$$

La trasformazione φ è uguale al prodotto della trasformazione $\boldsymbol{C}$-lineare $\Psi : z \longrightarrow \bar{A}z$ e del coniugio; si ha infatti:

$$\overline{\Psi(z)} = \overline{\bar{A}z} = A\bar{z} = \varphi(z).$$

Mediante un opportuno cambiamento di base complesso: $z = Bw$, con B matrice non degenere di numeri complessi, la trasformazione Ψ si esprimerà: $\Psi : w \longrightarrow \bar{O}w$ con O matrice ridotta in forma canonica cioè del tipo:

$$O = \begin{bmatrix} O_1 & & & & O \\ & O_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ O & & & & O_p \end{bmatrix} \quad \text{ove} \quad O_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & O \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \lambda_i & 1 \\ O & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots p$$

ove λ_i sono gli autovalori di O (vedi [14] vol. II pagina 121).

Analogamente, a quanto fatto prima si osserva che $O\bar{O} = E$ onde se O_i ha più di una colonna si ha:

$$\lambda_i\bar{\lambda}_i = 1$$
$$\lambda_i = O$$

il che è impossibile, perciò O è una matrice diagonale del tipo:

$$O = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \lambda_j\bar{\lambda}_j = 1, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Le equazioni di φ nella base $w_1 \dots, w_n$ sono quindi:

$$\varphi(w_j) = \lambda_j \bar{w}_j \quad \text{con} \quad \lambda_j \bar{\lambda}_j = 1, \qquad j = 1, \dots, n.$$

I punti uniti della φ si ottengono risolvendo il sistema lineare

2) $$w_j = \lambda_j \bar{w}_j, \; j=1 \dots n \quad \text{e posto} \quad w_j = w'_j + i w''_j, \qquad \lambda_j = \lambda'_j + i\lambda''_j$$

il sistema 2) diventa:

$$w'_j + i w''_j = (\lambda'_j + i\lambda''_j)(w'_j - i w''_j)$$

da cui

3) $$\begin{cases} w'_j(\lambda'_j - 1) + w''_j \lambda''_j = 0 \\ w'_j \lambda''_j - w''_j(\lambda'_j + 1) = 0 \end{cases} \qquad j = 1 \dots n.$$

Il determinante del sistema 3) è:

$$-\lambda'^2_j + 1 - \lambda''^2_j = 1 - \lambda_j \bar{\lambda}_j = 0$$

cioè per ogni j le due relazioni non sono linearmente indipendenti.

Si è quindi provato che delle $2n$ relazioni lineari del sistema 3) solo n sono linearmente indipendenti (una per ogni j) e quindi $\dim_R F = n$, che è la tesi.

Dimostrazione del teorema 19.

Sia p un punto fisso della trasformazione σ, supponiamo che p sia l'origine di un sistema di coordinate locali $z_1 \dots z_n$ definite in un intorno di p.

In queste coordinate σ si scriverà:

$$\sigma(z_1 \dots z_n) = (\sigma_1(z_1 \dots z_n), \dots, \sigma_n(z_1 \dots z_n))$$

con

$$\sigma_i(z_1 \dots z_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{z}_j + O^2 \qquad i = 1 \dots n$$

ove O^2 è la serie formata dalle potenze di grado maggiore di 1.

Le equazioni che danno F sono dunque:

4) $$z_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{z}_j - O^2 = 0.$$

Valendo $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$, detta A la matrice (a_{ij}) vale come provato nel lemma 5, $A\bar{A} = E$ e quindi il rango dello Jacobiano delle $2n$ equazioni reali che equivalgono al sistema 4) è, in ogni punto di F, eguale ad n.

Si è così provato che F è il luogo di zeri di $2n$ funzioni analitiche reali il cui Jacobiano ha, in ogni punto, rango n; questo per il teorema delle funzioni implicite prova che F è una varietà analitica reale di dimensione n.

OSSERVAZIONE 1. - In generale non si può affermare che un' antiinvoluzione $\sigma : V \to V$ abbia punti uniti, neppure nel caso in cui V sia una varietà compatta.

Sia infatti $\tilde{V}^1 = \boldsymbol{C}^1$, $\Gamma = \{x \in \boldsymbol{C}^1 | x = p + iq \text{ con } p \text{ e } q \text{ interi}\}$, V^1 sia il gruppo quoziente $\boldsymbol{C}^1/\Gamma$, ovviamente V^1 ha una struttura complessa indotta da quella di $\boldsymbol{C}^1$ ed in particolare il coniugio su $\boldsymbol{C}^1$ induce an'antiinvoluzione su V^1.

Consideriamo su $\boldsymbol{C}^1$ la trasformazione antiolomorfa:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2} + \bar{z},$$

la Ψ induce su V^1 un'antiinvoluzione σ.

I punti uniti di σ si ottengono risolvendo l'equazione

$$z = \bar{z} + \frac{1}{2} (\mathrm{mod}\ \Gamma)$$

cioè:

$$\begin{cases} x = x + \dfrac{1}{2} (\mathrm{mod}\ \Gamma) \\[2ex] y = -y \quad (\mathrm{mod}\ \Gamma) \end{cases}$$

questo sistema non ha risoluzione, quindi σ non ha punti uniti.

OSSERVAZIONE 2. - Come caso particolare del teorema 3, oppure per quanto provato in [4], si ha che ogni varietà analitica reale paracompatta si può vedere come il luogo dei punti uniti di una antiinvoluzione di una varietà complessa. Si può quindi enunciare il seguente risultato:

condizione necessaria e sufficiente affinchè una varietà topologica paracompatta di dimensione n, ammetta una struttura analitica è che sia omeomorfa al luogo dei punti uniti di una antiinvoluzione di una varietà complessa di dimensione n.

LEMMA 6. - *Sia X uno spazio complesso, $x \in X$. Sia X_x il germe individuato da X in x ed X_x^R il germe individuato da X, considerato come spazio analitico reale.*

Indichiamo con τ_x^C e τ_x^R gli spazi tangenti di Zariski ad X_x e X_x^R. Si ha

$$\dim_C \tau_x^C = \frac{1}{2} \dim_R \tau_x^R$$

ed inoltre τ_x^R si identifica a τ_x^C, dotato della struttura reale soggiacente.

PROVA. - Supponiamo X_x sia realizzato in τ_x^C e τ_x^C abbia coordinate

$$z_1 = x_1 + i y_1, \dots, z_q = x_q + i y_q.$$

Indichiamo con $\mathcal{A}_X$, $\mathcal{A}_X^R$ gli ideali dei germi delle funzioni analitiche in τ_x^C e τ_x^R che si annullano su X_x, X_x^R.

Per definizione di spazio tangente di ZARISKI si ha:

1) $$\sum_{j=1}^{q} (\alpha_j' + i\alpha_j'') z_j = 0 \text{ mod. } \mathcal{A}_X \Leftrightarrow \alpha_j' = \alpha_j'' = 0, \qquad j = 1 \dots q$$

Dalla minimalità dello spazio tangente di ZARISKI (vedi teorema 2) si ha:

$$\dim \tau_x^R \leq 2q,$$

in quanto X_x^R è realizzato in

$$R^{2q} = C^q.$$

Dimostriamo che non può essere $\dim \tau_x^R < 2q$.

Sia, per assurdo,

$$\dim \tau_x^R < 2q.$$

Esisterebbero allora dei numeri reali, non tutti nulli:

$$\gamma_1 \dots, \gamma_q, \eta_1, \dots, \eta_q$$

tali che:

2) $$\varphi_R = \sum_{j=1}^{q} \gamma_j x_j + \sum_{j=1}^{q} \eta_j y_j = 0 \text{ mod. } \mathcal{A}_X^R.$$

Posto nella (2) $\gamma_j = \alpha_j'$, $\eta_j = -\alpha_j''$, $j = 1, \dots, q$ la (2) diventa:

$$\varphi_R = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j' x_j - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j'' y_j; \quad \text{notiamo}$$

$$\varphi_I = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j'' x_j + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j' y_j.$$

Si ha:

$$\varphi = \varphi_R + i\varphi_I = \sum_{j=1}^{q} (\alpha'_j + i\alpha''_j)(x_j + iy_j) = \sum_{j=1}^{q} (\alpha'_j + i\alpha''_j) z_j$$

quindi φ è una funzione lineare olomorfa la cui parte reale φ_R è, per la (2), identicamente nulla su X^R_x.

Per una nota proprietà (vedi [0] pag. 299) si ha allora che φ è identicamente nulla su $X^R_x = X_x$ e quindi la (2) implica la (1). Non può essere dunque

$$\dim \tau^R_x < 2q$$

e la tesi è provata.

COROLLARIO 1. - *Sia X uno spazio complesso, $\sigma: X \longrightarrow X$ una antiinvoluzione; σ applica punti regolari di X in punti regolari, e quindi punti singolari in punti singolari.*

PROVA. - Sia τ_x lo spazio tangente di ZARISKI ad X. Ricordiamo la seguente caratterizzazione dei punti regolari di uno spazio complesso $X: x$ è regolare se, e solo se,

$$\dim_C X_x = \dim_C \tau_x \tag{1}$$

(vedi [15] pag. 161).

σ è un isomorfismo della struttura analitica reale di X, onde, se la dimensione dello spazio tangente di ZARISKI ad X^R_x è $2q$, tale è anche la dimensione dello spazio tangente di ZARISKI ad $X^R_{\sigma(x)}$. Si ha quindi, per il lemma 6,

$$\dim_C \tau_x = \dim_C \tau_{\sigma(x)}.$$

σ è un omeomorfismo quindi

$$\dim_C X_x = \dim_C X_{\sigma(x)},$$

Per quanto osservato si ha perciò che se la (1) vale in x vale anche in $\sigma(x)$, ed il corollario è provato.

PROPOSIZIONE 6. - *Sia (X, O_X) un R-spazio analitico e supponiamo esso sia parte fissa di un O_X complessificato $(\tilde{X}', O_{\tilde{X}'})$ per un'antiinvoluzione $\sigma: \tilde{X}' \longrightarrow \tilde{X}'$.*

In queste ipotesi esiste un sotto $\boldsymbol{C}$-spazio analitico chiuso $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ di $(\tilde{X}' O_{\tilde{X}'})$ tale che, detta

$$\tilde{X} = \bigcup_{i \in N} \tilde{X}_i$$

la decomposizione di $\tilde{X}$ *in componenti irriducibili* (*nel senso globale*) *si ha*:

i) $\sigma(\tilde{X}_i) = \tilde{X}_i$, $\forall\, i \in N$, *X è parte fissa di* $\tilde{X}$ *ed* $\tilde{X}$ *è uno spazio di Stein se* $\tilde{X}'$ *era tale*,

ii) *vale* $\dim_{\mathbf{C}} \tilde{X}_i = \dim_R \tilde{X}_i \cap X$, $\forall\, i \in N$

iii) $\tilde{X}_i \cap X \not\subset (\bigcup_{j \in N - \{i\}} \tilde{X}_j)$, $\forall\, i \in N$.

PROVA. - Per il teorema 14 esiste una O_X complessificato $(\tilde{X}', O_{\tilde{X}'})$ di (X, O_X) su cui è definita un'antiinvoluzione $\sigma: \tilde{X}' \to \tilde{X}'$, che ha (X, O_X) come parte fissa ed $\tilde{X}'$ è uno spazio di STEIN. Supporremo quindi che $\tilde{X}'$ sia uno spazio di STEIN.

Sia

$$\tilde{X}' = \bigcup_{i \in N} \tilde{X}'_i$$

la decomposizione di $\tilde{X}'$ in componenti irriducibili. Per ogni $\tilde{X}'_i$ l'insieme $\hat{\tilde{X}}'_i$ dei punti regolari è una varietà connessa (vedi [0] pag. 295)

σ è un omeomorfismo, per il corollario del lemma 6

σ manda punti regolari in punti regolari e quindi si ha:

$$\sigma(\hat{\tilde{X}}'_i) = \hat{\tilde{X}}'_j, \quad \sigma(\hat{\tilde{X}}'_j) = \hat{\tilde{X}}'_i. \tag{1}$$

Sia $N' \subset N$ l'insieme degli indici $i \in N$ tali che

$$\hat{\tilde{X}}'_i \cap X = \emptyset.$$

Poniamo

$$\tilde{X}^1 = \tilde{X}' - (\bigcup_{i \in N'} \hat{\tilde{X}}'_i);$$

$\tilde{X}^1$ è un chiuso di $\tilde{X}'$ ed è un sottospazio di $\tilde{X}'$. Si ha inoltre:

$$\sigma(\tilde{X}^1) = \tilde{X}^1;$$

infatti se

$$x \in \tilde{X}' - \tilde{X}^1$$

allora x è un punto di un $\hat{\tilde{X}}'_i$ che non ha punti fissi, quindi, per la (1),

$$\sigma(\hat{\tilde{X}}'_i) = \hat{\tilde{X}}'_i$$

oppure

$$\sigma(\hat{\tilde{X}}'_i) = \hat{\tilde{X}}'_j, \quad i \neq j,$$

ed in ogni caso

$$\sigma(x) \in \bigcup_{l \in N'} \tilde{\tilde{X}}'_l .$$

Per l'involutorietà di σ questo prova che $\sigma(\tilde{X}^1) = \tilde{X}^1$. È poi immediato che X è parte fissa di $\tilde{X}^1$.

Ripetendo la costruzione si ottiene una successione di sottospazi chiusi

$$\tilde{X}' \supset \tilde{X}^1 \supset \tilde{X}^2 \supset \ldots \supset \tilde{X}^n \supset \ldots \tag{2}$$

sia $\tilde{X} = \bigcap_{i \in N} \tilde{X}^i$.

La successione (2) è localmente costante, da un certo punto in poi in ogni punto x di $\tilde{X}'$. Infatti x ha un intorno che interseca un numero finito di $\tilde{X}'_i$; ogni $\tilde{X}'_i$, essendo puramente dimensionale, può mutare solo un numero finito di volte e ciò prova l'affermazione.

Dalla proprietà ora dimostrata segue che $\tilde{X}$ è un sottospazio complesso chiuso di $\tilde{X}'$. Si ha inoltre

$$\sigma(\tilde{X}) = \tilde{X}$$

ed X è parte fissa di $\tilde{X}$ per l'antiinvoluzione $\sigma|_{\tilde{X}}$.

Lo spazio $\tilde{X}'$ è di STEIN, quindi $\tilde{X}$, che è un suo sottospazio chiuso, è di STEIN.

Fissiamo ora l'attenzione su una componente irriducibile $\tilde{X}_i$ di $\tilde{X}$. Sia, per assurdo,

$$\dim_C \tilde{X}_i > \dim_R(\tilde{X}_i \cap X) .$$

In questa ipotesi l'insieme dei punti regolari di $\tilde{X}_i$, per il teorema 19, non avrebbe punti fissi. Perciò $\tilde{X}_i$ sarebbe stato privato dell'insieme dei punti regolari in uno dei procedimenti di (2), ed allora dovrebbe essere $\tilde{X}_i \not\subset \tilde{X}$, il che è contro l'ipotesi che $\tilde{X}_i$ sia una componente irriducibile di $\tilde{X}$.

Si è così provato

$$\dim_C \tilde{X}_i = \dim_R(\tilde{X}_i \cap X) . \tag{3}$$

Supponiamo ora, per assurdo, che sia

$$\sigma(\tilde{X}_i) = \tilde{X}_j$$

con $i \neq j$.

In queste ipotesi l'insieme dei punti regolari di $\tilde{X}_i$ non avrebbe punti fissi, ma ciò contrasta, per il teorema 19, con la (3) e quindi deve essere $\sigma(\tilde{X}_i) = \tilde{X}_i$. Si è così completamente dimostrato i) ed ii).

Per provare iii) basta osservare che, presa una componente irriducibile $\tilde{X}_i$ di $\tilde{X}$, di dimensione p, l'insieme

$$S = \tilde{X}_i \cap \left(\bigcup_{j \in N - \{i\}} \tilde{X}_j \right)$$

è un insieme analitico complesso di codimensione almeno uno. Si ha quindi:

$$\dim_R \tilde{X}_i \cap X = p,$$

$$\dim S \cap X \leq p - 1,$$

onde la tesi.

OSSERVAZIONE 3. - Se $\tilde{X}$ è lo spazio costruito nella proposizione precedente, data una componente irriducibile $\tilde{X}_i$ di $\tilde{X}$, in generale $\tilde{X}_i \cap X$ non è irriducibile nel senso reale. Nè si può concludere che non esistano in $\tilde{X}_i \cap X$ componenti irriducibili di dimensione più piccola della dimensione di $\tilde{X}_i$.

Notiamo infine che lo spazio complesso $\tilde{X}$ non è individuato, neppure come germe, dallo spazio analitico reale ridotto X.

Siamo ora in grado di provare il seguente teorema di immersione:

TEOREMA 20. - *Sia (X, O_X) un R-spazio analitico di dimensione n. Sia U un aperto di X, tale che:*

α) la dimensione dello spazio tangente di Zariski ad un O_X complessificato $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ di (X, O_X), sia minore, od eguale, ad $m < +\infty$, in ogni punto di U.

Si ha allora:

i) *esiste un'applicazione iniettiva, propria, analitica*

$$\varphi : X \longrightarrow R^{4n+2}$$

ii) *esiste un'applicazione iniettiva, propria, analitica*

$$\Psi : X \longrightarrow R^{2q}$$

tale che

$$\Psi : U \longrightarrow \Psi(U)$$

sia un isomorfismo di U in un insieme analitico $\Psi(U)$ di R^{2q}.

Se inoltre X è coerente, sostituendo ad α) l'ipotesi che la dimensione dello spazio tangente di Zariski ad X_x sia minore od eguale ad m, per $x \in U$, si ottengono i risultati i) *ed* ii).

In questa ipotesi si può affermare inoltre che φ e Ψ hanno lo Jacobiano di rango massimo nei punti regolari di X.

Se poi $U = X$ esiste un'immersione propria

$$\chi : X \longrightarrow R^{2n+2m}$$

tale che $\chi(X)$ sia un insieme analitico reale di R^{2n+2m} e $\chi : X \longrightarrow \chi(X)$ sia un isomorfismo.

PROVA. - Per la proposizione 6 esiste uno spazio di STEIN $\tilde{X}$, di dimensione n, su cui è definita un'antiinvoluzione di cui X è parte fissa. R. NARASIMHAN in [12] ha provato l'esistenza di un'immersione

$$\tilde{\varphi} : \tilde{X} \longrightarrow \boldsymbol{C}^{2n+1}.$$

Sia $\tilde{U}$ un intorno di U in $\tilde{X}$, il teorema 11 assicura l'esistenza di una immersione

$$\Psi : \tilde{X} \longrightarrow \boldsymbol{C}^q$$

tale che $\Psi : \tilde{U} \longrightarrow \boldsymbol{C}^q$ sia un isomorfismo; dette immersioni, ristrette ad X, danno la φ e la Ψ cercate. Si è quindi provato i) ed ii).

Se X è coerente, la dimensione reale dello spazio tangente di ZARISKI ad X_x è uguale alla dimensione complessa dello spazio tangente di ZARISKI ad $\tilde{X}_x$.

Si ha inoltre che x è regolare in X se, e solo se, è regolare nel complessificato $\tilde{X}$ e quindi, per i risultati di [12] il teorema è completamente provato.

OSSERVAZIONE 4. - Come è detto nella prova del teorema 20 le applicazioni φ e Ψ sono restrizioni di applicazioni olomorfe $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\Psi}$ definite su spazi complessi $\tilde{X}'$, $\tilde{X}$ di cui X è parte fissa.

Seguendo la tecnica del teorema 9 si possono ottenere immersioni di $\tilde{X}'$, $\tilde{X}$, nello spazio complesso coordinato, tali che le antiinvoluzioni di $\tilde{X}'$, $\tilde{X}$ commutiamo col coniugio.

Lasciamo al lettore di sviluppare in dettaglio le dimostrazioni di questi fatti.

b) *L'insieme dei punti singolari in un R-spazio analitico.*

È noto che l'insieme dei punti singolari di uno spazio analitico reale non è, in generale, un sottospazio analitico. Vi sono esempi in cui l'insieme dei punti singolari di uno spazio analitico non è contenuto in alcun sottospazio analitico di codimensione 1 (vedi [5] esempio 1).

Si vede facilmente che se (X, O_X) è un R-spazio analitico l'insieme dei punti singolari può non essere un sottoinsieme analitico. Si consideri, ad esempio, in R^3 l'insieme analitico

$$V = \{(x, y, z) \in R^3 | z(x^2 + y^2) - x^4 = 0\}.$$

V ha come luogo dei punti singolari la semiretta

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

che non è un insieme analitico.

Vale però il seguente:

LEMMA 9. - *Sia (X, O_X) un R-spazio analitico e supponiamo che lo spazio analitico ridotto associato X, abbia dimensione n. Sia S l'insieme dei punti singolari di X. Si ha allora*:

i) *esiste un sottoinsieme analitico S' di X, tale che*:

$$S \subset S', \ \dim S' \leq n - 1$$

ii) *se X è coerente S è un sottoinsieme analitico di X di codimensione almeno uno.*

PROVA. - Per il teorema 14 e la proposizione 6 esiste un $\boldsymbol{C}$-spazio analitico $\tilde{X}$ di dimensione complessa n, su cui è definita un'antiinvoluzione σ di cui X è la parte fissa.

Indichiamo con $\tilde{S}'$ il luogo dei punti non regolari di $\tilde{X}$; per il corollario 1 del lemma 6 si ha:

$$\sigma(\tilde{S}') = \tilde{S}'.$$

Per il teorema 19 S è contenuto nell'insieme analitico S' luogo dei punti fissi dell'antiinvoluzione

$$\sigma : \tilde{S}' \to \tilde{S}'.$$

Per il teorema 19 S' ha dimensione non superiore ad $n - 1$ e questo prova i).

Supponiamo che X sia coerente. Esiste, per conseguenza, un complessificato $\tilde{X}$, $\tilde{X} \supset X$, su cui è definita un'antiinvoluzione di cui X è la parte fissa.

Sia $x \in X$, x regolare in $\tilde{X}$. Per il teorema 19, x è regolare in X.

Sia viceversa x non regolare in $\tilde{X}$. Detti $\tilde{\tau}_x$, τ_x gli spazi tangenti di ZARISKI ad $\tilde{X}_x$, X_x si ha

$$\dim_C \tilde{X}_x < \dim_C \tilde{\tau}_x .$$

Essendo $\tilde{X}$ un complessificato di X si ha:

$$\dim_C \tilde{\tau}_x = \dim_R \tau_x , \ \dim_C \tilde{X}_x = \dim_R X_x$$

e quindi x è non regolare anche in X perchè

$$\dim_R \tau_x > \dim_R X_x .$$

Si è quindi provato che l'insieme S dei punti non regolari di X coincide col luogo dei punti uniti dell'antiinvoluzione $\sigma' : \tilde{S} \to \tilde{S}$ ove $\tilde{S}$ è il luogo dei punti non regolari di $\tilde{X}$. Da ciò segue che S è un sottoinsieme analitico reale di codimensione almeno uno e ciò conclude la dimostrazione.

c) *Decomposizione in componenti irriducibili degli spazi analitici reali coerenti.*

È noto (vedi ad esempio [0] § 34.B) che ogni spazio complesso X ammette una decomposizione:

$$X = \bigcup_{i \in N} X_i$$

in una famiglia numerabile o finita di sottospazi chiusi, ognuno dei quali non può essere decomposto nell'unione di due sottospazi complessi, propri e chiusi.

I sottospazi X_i risultano puramente dimensionali e sono detti le componenti irriducibili (nel senso globale) di X.

La famiglia $\{X_i\}_{i \in N}$ risulta inoltre localmente finita in X.

La decomposizione risulta caratterizzata dalla seguente proprietà: l'insieme dei punti regolari di X_i è una varietà connessa, disgiunta dall'insieme dei punti regolari di ogni altro X_j, $j \neq i$.

Nel caso degli spazi analitici reali non esiste una decomposizione di questo tipo.

H. CARTAN ed F. BRUHAT, dopo aver messo in luce le difficoltà esistenti nel caso reale, (vedi [5]) hanno proposto una nuova definizione di componente irriducibile.

In questo lavoro noi proveremo soltanto che, nel caso degli spazi analitici reali coerenti, tali difficoltà non sussistono e, per detti spazi, si ottiene una buona decomposizione in componenti irriducibili.

Purtroppo, anche nel caso reale coerente, l'insieme dei punti regolari di una componente irriducibile non è connessa; il che rende più faticosa la definizione della decomposizione.

I lemmi seguenti mettono in luce alcune proprietà degli spazi analitici reali coerenti.

LEMMA 10. – *Sia $\tilde{X}$ un complessificato dello spazio analitico reale X. Sia*

$$\tilde{X} = \bigcup_{i \in N} \tilde{X}_i$$

la decomposizione di $\tilde{X}$ in componenti irriducibili. In queste ipotesi, per ogni sottoinsieme $N' \subset N$, l'insieme $\bigcup_{i \in N'} \tilde{X}_i$ è un complessificato di

$$\Big(\bigcup_{i \in N'} \tilde{X}_i\Big) \cap X .$$

PROVA. – Sia $x \in X$ ed $X_x \cap \tilde{X}_{i,x} = X_{i,x}$ il germe di $X \cap \tilde{X}_i$ in x. Il complessificato $\tilde{X}'_{i,x}$ di $X_{i,x}$ è certamente contenuto in $\tilde{X}_{i,x}$, per la minimalità del complessificato.

D'altra parte supponiamo, per assurdo, che $\tilde{X}_{i,x}$ abbia una componente irriducibile $\tilde{X}^j_{i,x}$, che non sia il complessificato di una componente irriducibile di $X_{i,x}$.

Si sa che $\tilde{X}^j_{i,x}$ è la complessificata di una componente irriducibile X^j_x di X_x, perchè $\tilde{X}$ è un complessificato di X. Detta componente deve essere in $\tilde{X}^j_{i,x}$ e quindi $\tilde{X}_{i,x}$, contro l'ipotesi.

Si è perciò dimostrato che, per ogni $i \in N$, $\tilde{X}_i$ è un complessificato di $\tilde{X}_i \cap X$.

Essendo la famiglia $\{\tilde{X}_i\}_{i \in N}$ localmente finita segue immediatamente, da quanto già provato, che $\bigcup_{i \in N'} \tilde{X}_i$ è un complessificato di $\big(\bigcup_{i \in N'} \tilde{X}_i\big) \cap X$, ed il lemma è provato.

Sia X uno spazio analitico reale, $\tilde{X}$ uno spazio complesso su cui sia definita un'antiinvoluzione

$$\sigma : \tilde{X} \to \tilde{X}$$

che abbia X come parte fissa.

Sia

$$\tilde{X} = \bigcup_{i \in N} \tilde{X}_i$$

la decomposizione di $\tilde{X}$ nelle componenti irriducibili. Indichiamo con $\widehat{\tilde{X}}_i$ l'insieme dei punti regolari di $\tilde{X}_i$ e sia

$$\widehat{X}_i = \widehat{\tilde{X}}_i \cap X .$$

Per il teorema 19 gli insiemi $\widehat{X}_i$ sono varietà analitiche vuote, o della stessa dimensione di $\tilde{X}_i$.

Gli insiemi $\overline{\widehat{X}}_i$, in generale, non sono insiemi analitici e $\bigcup_{i \in N} \overline{\widehat{X}}_i$ non coincide con X.

Vale però, il

LEMMA 11. - *Sia X uno spazio analitico reale ed $\tilde{X}$ un suo complessificato. Sia*

$$\tilde{X} = \bigcup_{i \in N} \tilde{X}_i$$

la decomposizione di $\tilde{X}$ in componenti irriducibili.

Con le notazioni introdotte sopra si ha:

i) $\overline{\widehat{X}}_i$ *è un sottospazio analitico di X,* $\forall\, i \in N$

ii) $\bigcup_{i \in N} \overline{\widehat{X}}_i = X$.

PROVA. - Dimostriamo che

$$\overline{\widehat{X}}_i = \tilde{X}_i \cap X .$$

Proviamo che, se $x \in \tilde{X}_i \cap X$, è $x \in \overline{\widehat{X}}_i$. $\tilde{X}_i$, per il lemma 10, è il complessificato di $\tilde{X}_i \cap X$ e quindi, essendo $\tilde{X}_i$ puramente dimensionale, tale è anche $\tilde{X}_i \cap X$. Si ha quindi che x è punto di accumulazione di punti regolari della stessa dimensione di $\tilde{X}_i$ e perciò $x \in \overline{\widehat{X}}_i$.

Si è provato che

$$\overline{\widehat{X}}_i \supset \tilde{X}_i \cap X, \quad \forall\, i \in N.$$

Sia ora $x \in \overline{\widehat{X}}_i$, allora x è un punto di $\tilde{X}_i$ e di X perchè $\tilde{X}_i \supset \widehat{X}_i$, $X \supset \widehat{X}_i$ ed $\tilde{X}_i$ e X sono chiusi in $\tilde{X}$. Si è così provato

$$\overline{\widehat{X}}_i = \tilde{X}_i \cap X .$$

Essendo

$$\overline{\widehat{X}}_i = \tilde{X}_i \cap X ,$$

$\overline{\widehat{X}}_i$ è un sottospazio analitico reale di X

Dalla relazione $\overline{\overline{X}}_i = \tilde{X}_i \cap X$ segue:

$$X = \bigcup_{i \in N} (\tilde{X}_i \cap X) = \bigcup_{i \in N} \overline{\overline{X}}_i$$

e quindi il lemma è provato

Usando le notazioni sopra introdotte osserviamo che le varietà $\widehat{X}_i$ sono unione di, al più, un'infinità numerabile di componenti connesse $\widehat{X}_i^j$:

$$\widehat{X}_i = \bigcup_{j \in N_i} \widehat{X}_i^j .$$

Fissato l'indice i, diremo che due componenti $\widehat{X}_i^j$, $\widehat{X}_i^m$ sono contigue se esiste

$$x \in \overline{\overline{X}}_i^j \cap \overline{\overline{X}}_i^m$$

ed una componente irriducibile X_x^n di X_x per cui si ha:

$$X_x^n \cap \widehat{X}_i^j \neq \emptyset \quad \text{e} \quad X_x^n \cap \widehat{X}_i^m \neq \emptyset .$$

Diremo che due componenti connesse $\widehat{X}_i^j$, $\widehat{X}_i^m$ sono nella stessa componente irriducibile, se esiste un numero finito

$$\widehat{X}_i^{j_1}, \widehat{X}_i^{j_2}, \dots, \widehat{X}_i^{j_r},$$

di componenti, tali che:

$$j_1 = j \, , \quad j_r = m$$

ed inoltre $\widehat{X}_i^{j_t}$ è contigua a $\widehat{X}_i^{j_{t+1}}$ per $t = 1 \dots r-1$.

È immediato che la relazione

$$\widehat{X}_i^j \backsim \widehat{X}_i^m \Leftrightarrow \widehat{X}_i^j \quad \text{e} \quad \widehat{X}_i^m$$

sono nella stessa componente irriducibile è una relazione di equivalenza. Nel seguito diremo equivalenti due aperti $\widehat{X}_i^j$, $\widehat{X}_i^m$ se sono nella stessa componente irriducibile.

LEMMA 12. - *Sia X uno spazio analitico reale coerente ed $\tilde{X}$ un suo complessificato.*

Sia

$$\tilde{X} = \bigcup_{i \in N} \tilde{X}_i$$

la decomposizione di $\tilde{X}$ in componenti irriducibili e

$$\{\widehat{X}_i^j\}_{i,\,j\in N}$$

siano le componenti connesse definite sopra. Per ogni $\widehat{X}_i^{\bar{j}}$ fissato la chiusura $X_{i,\bar{j}}$ dell'unione di tutti gli aperti $\widehat{X}_i^j$, equivalenti ad $\widehat{X}_i^{\bar{j}}$, è un insieme analitico di X. Inoltre $X_{i,\bar{j}}$ è irriducibile, (*cioè non è unione di due sottospazi analitici reali, propri e chiusi*).

PROVA. - Sia $X_{i,\bar{j}}$ la chiusura dell'unione di tutte le componenti equivalenti ad $\widehat{X}_i^{\bar{j}}$. Essendo $X_{i,\bar{j}}$ chiuso, per provare che è un insieme analitico di X, basterà dimostrare che per ogni punto $x \in X_{i,\bar{j}}$ esiste un intorno in $X_{i,\bar{j}}$ che è un insieme analitico.

Se x appartiene ad una componente $\widehat{X}_i^j$ equivalente $\widehat{X}_i^{\bar{j}}$ allora x ha in $X_{i,\bar{j}}$, un intorno isomorfo ad un disco di R^q, ove $q = \dim_C \tilde{X}_i$, e l'asserto è provato.

Sia x elemento della frontiera di un $\widehat{X}_i^j$ equivalente ad $\widehat{X}_i^{\bar{j}}$. Il germe dell'insieme analitico $X_i = \tilde{X}_i \cap X$, in x, sarà formato da certe componenti irriducibili:

$$X_{i,x}^{l_1}, \ldots, X_{i,x}^{l_r};$$

per come è stato definito, $X_{i,\bar{j}}$ contiene interamente quelle componenti

$$X_{i,x}^{l_1}, \; X_{i,x}^{l_2} \ldots X_{i,x}^{l_p}, \; p \leq r,$$

che hanno punti regolari a comune con una delle componenti connesse equivalenti ad $\widehat{X}_i^{\bar{j}}$. Infatti contiene interamente la chiusura dei punti regolari di tali componenti.

Si è così provato, anche in questo caso che, x ha, in $X_{i,\bar{j}}$, un intorno che è un insieme analitico e quindi $X_{i,\bar{j}}$ è un insieme analitico chiuso di X.

Dimostriamo ora che $X_{i,\bar{j}}$ è uno spazio analitico irriducibile. Sia per assurdo $X_{i,\bar{j}}$ unione di due sottospazi analitici propri e chiusi:

$$X_{i,\bar{j}} = Y \cup W.$$

Uno almeno dei due sottospazi, ad esempio Y, deve avere dimensione eguale a

$$q = \dim X_{i,\bar{j}},$$

perciò Y contiene un aperto formato dai punti di una componente equivalente ad $\widehat{X}_i^{\bar{j}}$.

Incominciamo col provare che, se Y contiene un aperto, non vuoto, di una componente $\widehat{X}_i^j$, allora $Y \supset \widehat{X}_i^j$.

L'insieme dei punti di $Y \cap \widehat{X}_i^j$ è un chiuso di $\widehat{X}_i^j$ perchè Y è chiuso in X. D'altra parte se

$$x \in \partial(\overset{\circ}{\overline{Y \cap \widehat{X}_i^j}}),$$

esiste un intorno U di x, in $\widehat{X}_i^j$, su cui si annulla ogni funzione analitica nulla su Y, quindi

$$U \subset Y \cap \widehat{X}_i^j .$$

Si ha quindi che $Y \subseteq \widehat{X}_i^j$ è aperto e chiuso in $\widehat{X}_i^j$, ed essendo $\widehat{X}_i^j$ connesso, risulta $Y \supset \widehat{X}_i^j$.

Proviamo ora che se $Y \supset \widehat{X}_i^j$ allora Y contiene tutte le componenti equivalenti ad $\widehat{X}_i^j$.

Sia $\widehat{X}_i^{j'}$ contigua ad $\widehat{X}_i^j$. Esiste

$$x \in \overline{\widehat{X}}_i^{j'} \cap \overline{\widehat{X}}_i^j$$

ed una componente irriducibile $X_{i,x}^m$ di $X_{i,x}$ tale che

$$X_{i,x}^m \cap \widehat{X}_i^j \neq \emptyset, \quad X_{i,x}^m \cap \widehat{X}_i^{j'} \neq \emptyset.$$

Ogni funzione analitica, che si annulla su $X_{i,x}^m \cap \widehat{X}_i^j$ si annulla su $X_{i,x}^m$ e quindi su

$$X_{i,x}^m \cap \widehat{X}_i^{j'},$$

perchè in caso contrario, esisterebbe un germe di insieme analitico propriamente contenuto in $X_{i,x}^m$, della stessa dimensione di $X_{i,x}^m$ e questo è impossibile perchè $X_{i,x}^m$ è irriducibile (questa proprietà è nota per i germi di insiemi analitici complessi, per dimostrarla nel caso reale basta passare ai complessificati).

Annullandosi su $X_{i,x}^m$ ogni funzione analitica, che si annulla su $\widehat{X}_i^j$, si ha che, da $Y \supset \widehat{X}_i^j$ segue $Y \supset X_{i,x}^m$ e quindi

$$Y \cap \widehat{X}_i^{j'} \neq \emptyset$$

e, per quanto già provato:

$$Y \supset \widehat{X}_i^{j'}.$$

Procedendo così si dimostra che se Y contiene $\widehat{X}_i^j$ contiene tutte le componenti connesse equivalenti ad $\widehat{X}_i^j$ e quindi contiene $X_{i,\bar{j}}$. Per quanto già osservato si ha perciò

$$Y = X_{i,\bar{j}}.$$

Siamo ora in grado di provare il seguente

TEOREMA 21. - *Sia X uno spazio analitico reale corente, X è unione di una famiglia, al più numerabile, di sottospazi analitici chiusi X_i tali che:*

I) $\dim_R X_i = i$ *e gli X_i sono puramente dimensionali.*

Ogni X_i è unione di una famiglia $\{X_{i,j}\}_{j\in N''}$, al più numerabile di sottospazi analitici chiusi tali che:

II) *la famiglia $\{X_{i,j}\}_{i,j}$ è localmente finita in X, e gli spazi $X_{i,j}$ e $X_{i',j'}$ hanno a comune punti regolari se, e solo se, $i = i'$ e $j = j'$ e quindi*

$$X_{i,j} \not\subset \bigcup_{\substack{i'\in N'-\{i\}\\ j'\in N''-\{j\}}} X_{i',j'}.$$

PROVA. - Sia $\tilde{X}$ un complessificato di X.

Indichiamo con $\tilde{X}_i$ l'unione di tutte le componenti irriducibili di $\tilde{X}$, aventi dimensione i, e sia:

$$X_i = X \cap \tilde{X}_i.$$

Per il lemma 10 $\tilde{X}_i$ è complessificato di X_i, quindi X_i è un sottospazio analitico reale chiuso e coerente di X ed inoltre X_i è puramente dimensionale, di dimensione i.

Si è così provato I).

Partendo da ogni X_i si faccia la decomposizione, in componenti irriducibili, eseguita nel lemma 12. Si ha:

$$X_i = \bigcup_{j\in N''} X_{i,j}.$$

Si osservi che, nella prova del lemma 12, non si usava il fatto che X_i fosse il luogo dei punti fissi di una componenente irriducibile del complessificato, ma di una parte puramente dimensionale del complessificato, quindi si hanno, anche in questo caso, i medesimi risultati.

Che la famiglia

$$\{X_{i,j}\}_{\substack{i\in N'\\ j\in N''}}$$

sia localmente finita segue dal fatto che, per ogni $x \in X$, il germe X_x ha solo un numero finito di componenti irriducibili. Si ha quindi che esiste un intorno U di x che interseca solo un numero finito di componenti connesse $\widehat{X}_i^j$ del lemma 12 e quindi, a fortiori, un numero finito di $X_{i,j}$.

Gli spazi $X_{i,j}$ sono coerenti perchè, per ogni punto $x \in X_{i,j}$, il germe di $X_{i,j}$ in x è formato dall'unione di alcuni germi irriducibili di $X_{i,j}$. Tali germi irriducibili sono coerenti essendo ogni X_i coerente e quindi $X_{i,j}$ è coerente. Si è così provato II).

Se $i \neq i'$ X_i ed $X_{i'}$ non hanno punti regolari a comune. Se $i = i'$ e $j \neq j'$ per costruzione $X_{i,j}$ e $X_{i,j'}$ non hanno punti regolari in comune. Il teorema è così completamente dimostrato.

§ 8. - **La normalizzazione degli *R*-spazi analitici.**

Nella prima parte di questo paragrafo si dà un criterio per riconoscere quando uno spazio analitico reale è coerente. L'enunciato di detto criterio, ed altre considerazioni, potrebbero far sperare che, se il complessificato $\tilde{X}_x$, di un germe di insieme analitico reale X_x, è normale allora X_x sia coerente. Un esempio mostra che ciò non è vero.

Nella seconda parte di questo paragrafo si ricorda, brevemente, la costruzione del normalizzato di uno spazio complesso e si dimostra che una simile operazione si può eseguire per gli spazi analitici reali coerenti.

Si associa così ad ogni spazio analitico reale coerente X, uno spazio analitico reale coerente normale $\widehat{X}$ lo spazio $\widehat{X}$ sarà detto normalizzato di X.

Si prova poi che, dato un R-spazio analitico (X, O_X), può costruire un suo normalizzato.

Tale normalizzazione però, come prevedibile, non è individuata dallo spazio analitico ridotto X.

a) *Condizioni di coerenza.*

Sia X uno spazio analitico reale, sarà utile per il seguito, avere un criterio per riconoscere se X è coerente in suo punto.

LEMMA 13. - *Sia X uno spazio analitico reale, X_x il germe individuato da X, in $x \in X$, ed $\tilde{X}_x$ il suo complessificato.*

Se X_x è irriducibile X è coerente, nel punto x, se, e solo se, è verificata la seguente condizione:

esiste un intorno U di x in X tale che:

α) $y \in U \Rightarrow \dim X_y = \dim X_x$, *ove X_y è il germe individuato da X in y.*

β) *esiste un rappresentante $\tilde{X}'$ di $\tilde{X}_x$ tale che per ogni $y \in U$ il numero delle componenti irriducibili di X_y è uguale a quello delle componenti irriducibili di $\tilde{X}'_y$.*

PROVA. - Supponiamo che X sia coerente in x. Detto $\tilde{X}'$ un rappresentante del complessificato di X_x, esiste un intorno U di x in X, tale che:

$$y \in U \Rightarrow \tilde{X}_y = \tilde{X}'_y. \tag{1}$$

Essendo X_x irriducibile tale e anche $\tilde{X}_x$, e quindi U può essere preso in modo che:

$$\dim.\tilde{X}'_y = p = \dim.\tilde{X}_x$$

per ogni $y \in U$, ciò prova la α).

È noto (vedi [6] pag. 92) che $\tilde{X}_y$ ha lo stesso numero di componenti irriducibili di X_y, ciò prova, per la (1), che vale la β).

Supponiamo ora che valgano le α) e β) e mostriamo che il rappresentante $\tilde{X}'$ di $\tilde{X}_x$ induce il complessificato di X_y, per ogni $y \in U$, e quindi X è coerente in x.

Il complessificato di X_y, per $y \in U$, è un germe di insieme analitico complesso, formato da n_y componenti irriducibili di dimensione

$$p = \dim X_x,$$

ove n_y è il numero delle componenti irriducibili di X_y. Si ha $\tilde{X}'_y \supset X_y$, e quindi, per la minimalità del complessificato $\tilde{X}'_y \supset \tilde{X}_y$.

D'altra parte $\tilde{X}'_y$ e $\tilde{X}_y$ hanno, per la α) e β) n_y componenti irriducibili di dimensione p e perciò $\tilde{X}'_y = \tilde{X}_y$. Si è così provata la tesi.

Diremo che uno spazio analitico, reale o complesso, X è puramente dimensionale, nel punto x, se esiste un intorno di x che è puramente dimensionale. Il lemma precedente dà luogo al:

COROLLARIO 1. - *Sia X uno spazio analitico reale, $x \in X$, $\tilde{X}_x$ il complessificato di X_x. Se $\tilde{X}_x$ è normale nel punto x, allora X è coerente in x se, e solo se X è puramente dimensionale nel punto x.*

PROVA. - Sia $\tilde{X}'$ un rappresentante di $\tilde{X}_x$. Dal fatto che $\tilde{X}_x$ è normale segue che $\tilde{X}'$ è normale in tutti i punti di un aperto $\tilde{U} \ni x$ in $\tilde{X}'$. Essendo $\tilde{X}'$

normale in ogni punto di $\tilde{U}$ esso è irriducibile in ogni punto di $\tilde{U}$, si può quindi applicare il lemma 13 e ne segue la tesi.

Il corollario precedente mostra come, imponendo la condizione di normalità sul complessificato di X_x, la caratterizzazione della coerenza può essere fatta in termini di dimensione.

Si noti ancora che, se $\tilde{X}_x$ è normale, la codimensione dell'insieme dei punti singolari di X, in un intorno di x, è almeno due.

L'ultima osservazione si prova come segue: negli spazi complessi nòrmali il luogo dei punti singolari ha codimensione maggiore od eguale a due (vedi ad esempio [7]).

Sia $\tilde{X}'$ un rappresentante di $\tilde{X}_x$, che sia uno spazio normale; sia S l'insieme dei punti singolari di X, per il teorema 19, S è contenuto nell'insieme $\tilde{S}$ dei punti singolari di $\tilde{X}'$.

Poichè localmente ogni spazio analitico reale è un R-spazio, per il lemma 9, S è contenuto in un insieme analitico S' di X. Il complessificato di S' è contenuto in $\tilde{S}$ e quindi S' ha codimensione almeno due e l'osservazione è provata.

Queste considerazioni potrebbero far sperare che dalla normalità di $\tilde{X}_x$ seguisse la coerenza di X_x.

Diamo a tale proposito un controesempio.

Esempio di germe di insieme analitico reale, non coerente, il cui complessificato è normale.

Consideriamo l'insieme analitico V di R^4 determinato dall'equazione

$$\varphi(x, y, z, w) = z(x^2 + y^2) - x^2w^2 + w^2 = 0 \tag{1}$$

Sia $\tilde{V}$ l'insieme analitico di $\boldsymbol{C}^4$, definito dalla $\varphi = 0$, letta in $\boldsymbol{C}^4$.

Sia ha:

I) $\tilde{V}$ *è normale*

PROVA. - Il luogo dei punti non regolari di $\tilde{V}$ è dato dai punti ove si annullano tutte le derivate parziali prime di φ; cioè dalle soluzioni del sistema

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 2zx - 2xw^2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 2zy \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= x^2 + y^2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} &= 2w - 2wx^2. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Il luogo dei punti non regolari di $\tilde{V}$ è dato quindi dalle curve:

$$S' = \begin{cases} x^2 + y^2 = o \\ z = o \\ w = o \end{cases} \qquad S'' = \begin{cases} x = o \\ y = o \\ w = o. \end{cases}$$

Concludendo $\tilde{V}$ è un'ipersuperficie di $\boldsymbol{C}^4$, avente luogo dei punti non regolari, di codimensione due. Per un teorema di Oka (vedi [1]), $\tilde{V}$ risulta uno spazio normale.

Dimostriamo ora che, detto o l'origine di $\boldsymbol{C}^4$ si ha:

II) *$\tilde{V}_0$ è il complessificato di V_0 e V_0 non è coerente.*

Prova. - Il germe V_0 ha dimensione tre, infatti dalla (1) si ha:

$$z = \frac{x^2 w^2 - w^2}{x^2 + y^2},$$

quindi, per tutte le terne (x_1, y_1, w_1) con $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$, esiste un punto

$$(x_1, y_1, z_1, w_1) \in V.$$

Essendo $\tilde{V}_0$ irriducibile, di dimensione tre, e $\tilde{V}_0 \supset V_0$ ne segue che $\tilde{V}_0$ è il complessificato di V_0.

Dimostriamo ora che nei punti

$$P = (0, 0, z_1, 0)$$

di V con $z_1 > 0$, $z_1 \ll 1$, si ha

$$\dim_R V_P = 1.$$

Risulta

$$(x, y, z, w) \in V \Leftrightarrow x^2 w^2 = w^2 + z(x^2 + y^2); \tag{3}$$

supponiamo di essere in un intorno U, sufficientemente piccolo di P. Si ha in U:

$$z(x^2 + y^2) \geq 0 \quad \text{e} \quad x^2 w^2 < w^2$$

onde, in U, la (3) è verificata solo se:

$$w = 0 \quad \text{ed} \quad x^2 + y^2 = 0.$$

Si è quindi provato che in U l'insieme V si riduce ad un segmento.

Da quanto visto segue che V non è puramente dimensionale nell'origine e quindi V_0 non è coerente.

b) *Il normalizzato di uno spazio analitico reale coerente.*

Ricordiamo brevemente, per comodità del lettore, alcuni fatti ben noti.

Uno spazio analitico, reale o complesso, X si dice normale, nel punto x, se X_x è irriducibile e l'anello A_x dei germi di funzioni analitiche su X_x è un anello di integrità, integralmente chiuso nel proprio corpo quoziente.

In ogni spazio complesso l'insieme dei punti normali è aperto e denso nello spazio. Uno spazio analitico, reale o complesso, si dice normale se è normale in ogni suo punto.

Ricordiamo ora come si costruisce il normalizzato di uno spazio complesso.

Sia X uno spazio complesso, $\widehat{X}$ l'insieme delle coppie (X_p^i, p) ove $p \in X$ ed X_p^i è il germe di una componente irriducibile di X_p. Sia

$$\pi : \widehat{X} \longrightarrow X$$

la proiezione canonica, definita da:

$$\pi(X_p^i, p) = p.$$

Definiamo su $\widehat{X}$ la seguente topologia: una base di aperti si ottiene prendendo, per ogni aperto U di X ed ogni componente irriducibile (nel senso globale) U^i, di U, l'insieme $\pi^{-1}(U^i)$.

Si verifica che $\widehat{X}$, con la topologia ora definita, è uno spazio separato e le componenti connesse di $\widehat{X}$ hanno per immagini, tramite π, le componenti irriducibili di X.

L'applicazione π risulta continua e propria.

Per ogni $\widehat{a} \in \widehat{X}$, sia $a = \pi(\widehat{a})$, ed U_a^i un aperto di una componente irriducibile di X che contiene a.

Sia

$$f : U_a^i \longrightarrow \boldsymbol{C}$$

una funzione continua ed olomorfa nei punti regolari di U_a^i, poniamo

$$\widehat{f} = f \circ \pi;$$

le funzioni $\widehat{f}$, così definite, fanno di $\widehat{X}$ uno spazio anulato.

Si prova (vedi [7]) che $\widehat{X}$, con le funzioni sopra definite, ha la struttura di spazio complesso normale e l'applicazione $\pi : \widehat{X} \longrightarrow X$ è olomorfa.

Lo spazio complesso $\widehat{X}$ gode della seguente proprietà universale che lo caratterizza: sia Y uno spazio complesso normale, $\varphi \; Y \longrightarrow X$ un'applicazione olomorfa, esiste allora una, ed una sola applicazione olomorfa $\Psi : Y \longrightarrow \widehat{X}$ tale che $\pi \circ \Psi = \varphi$.

Lo spazio complesso $\widehat{X}$ si dice normalizzato di X.

Si pone in modo naturale il problema di definire il normalizzato, anche per gli spazi analitici reali. Una risposta parziale è data dal seguente:

TEOREMA 22. - *Sia X uno spazio analitico reale coerente, $\tilde{X}$ un suo complessificato e $\pi : \widehat{\tilde{X}} \longrightarrow \tilde{X}$, la normalizzione di $\tilde{X}$.*

Detto $\widehat{X} = \pi^{-1}(X)$ si ha:

i) *$\widehat{X}$ è uno spazio analitico reale, localmente irriducibile, ed $\widehat{\tilde{X}}$ è un suo complessificato.*

ii) *$\widehat{X}$ è normale e coerente.*

PROVA. - Non è restrittivo supporre che su $\tilde{X}$ sia definita un'antiinvoluzione σ, che abbia X come parte fissa.

Sia

$$x \in \tilde{X} \quad \text{e} \quad \tilde{X}_x = \bigcup_{i=1 \dots i_x} \tilde{X}_x^i$$

la decomposizione di $\tilde{X}_x$ in componenti irriducibili. Se si prendono dei rappresentanti, abbastanza piccoli, di $\tilde{X}_x^i$ gli insiemi dei loro punti regolari possono essere presi connessi (vedi [0] § 34).

L'antiinvoluzione σ trasforma punti regolari di $\tilde{X}$ in punti regolari (vedi corollario 1 del § 7). quindi, essendo un omeomorfismo, trasforma germi di componenti irriducibili in germi di componenti irriducibili, se $x \in X$, le $\tilde{X}_x^i$ sono trasformate in se stesse da σ e sono le complessificate dell'insieme X_x^i dei loro punti fissi.

Infatti essendo $\tilde{X}_x$ il complessificato X_x, le componenti irriducibili di X_x sono in corrispondenza biunivoca con quelle di $\tilde{X}_x$ ed hanno la stessa dimensione. Da questa ultima proprietà segue che le $\tilde{X}_x^i$ devono essere trasformate in sè da σ.

Da quanto osservato fin ora, si può dedurre che l'antiinvoluzione σ induce un'applicazione involutoria

$$\widehat{\sigma} : \widehat{\tilde{X}} \longrightarrow \widehat{\tilde{X}}$$

definita da:

$$\widehat{\sigma}(\tilde{X}^i_x,\ x) = (\sigma(\tilde{X}^i_x),\ \sigma(x))$$

ove $\sigma(\tilde{X}^i_x)$ è la componente irriducibile di $\tilde{X}_{\sigma(x)}$ in cui viene trasformata $\tilde{X}^i_x$ da σ. Ricordando come è stata definita la topologia su $\tilde{\tilde{X}}$ si verifica facilmente che $\widehat{\sigma}$ è un omeomorfismo di $\tilde{\tilde{X}}$ in sè.

Proviamo ora che $\widehat{\sigma}$ è antiolomorfa.

Se U' è un aperto $\tilde{X}$ formato da punti regolari ed

$$U = \pi^{-1}(U').$$

Per come è stata definita la struttura complessa su $\tilde{\tilde{X}}$ l'applicazione

$$\pi : U \longrightarrow U'$$

è un isomorfismo.

Si ha:

$$\widehat{\sigma}|_U = (\pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi)|_U \tag{1}$$

da ciò segue che $\widehat{\sigma}|_U$ è antiolomorfa.

Localmente $\widehat{\sigma}$ si può esprimere:

$$\widehat{\sigma}(z_1, \ldots, z_n) = (w_1(z_1, \ldots, z_n) \ldots\ w_n(z_1, \ldots, z_n)),$$

per come è definito il normalizzato dalla (1) segue che le funzioni

$$f_j(z_1, \ldots, z_n) = \overline{w_j(z_1, \ldots, z_n)}$$

sono olomorfe e $\widehat{\sigma}$ è olomorfa.

Se $x \in X$ ed $\tilde{X}^i_x$ è una componente irriducibile di $\tilde{X}_x$ abbiamo osservato che:

$$\sigma(\tilde{X}^i_x) = \tilde{X}^i_x.$$

Si ha quindi che $\pi^{-1}(X)$ è contenuto nel luogo dei punti fissi di $\widehat{\sigma}$.

Viceversa, se $(\tilde{X}^i_x,\ x)$ è fisso per $\widehat{\sigma}$, si ha:

$$\sigma(x) = x.$$

Si ha perciò che

$$\pi^{-1}(X) = \widehat{X}$$

coincide col luogo dei punti fissi di $\widehat{\sigma}$, e quindi $\widehat{X}$ è un insieme analitico reale chiuso di $\tilde{\tilde{X}}$.

Sia ora

$$y = (\widetilde{X}^i_x,\ x) \in \widehat{X}.$$

Il germe $\widehat{\widetilde{X}}_y$ è irriducibile, perchè $\widehat{\widetilde{X}}$ è normale, e si ha:

$$\dim_C \widehat{\widetilde{X}}_y = \dim_C \widetilde{X}^i_x = \dim_R X^i_x = \dim_R \widehat{X}_y .$$

Quindi $\widehat{\widetilde{X}}_y$ è il complessificato di $\widehat{X}_y$.

Essendo $\widehat{\widetilde{X}}$ un complessificato di $\widehat{X}$ lo spazio $\widehat{X}$ è coerente.

Lo spazio $\widehat{\widetilde{X}}$ è localmente irriducibile (perchè normale) quindi anche $\widehat{X}$, di cui $\widehat{\widetilde{X}}$ è un complessificato, è localmente irriducibile. Si è così provato i).

Dimostriamo ora che $\widehat{X}$ è normale. Sia

$$x \in \widehat{X},\ \varphi = \frac{f}{g}$$

un elemento del corpo quoziente, dell'anello dl integrità A_x dei germi di funzioni analitiche su $\widehat{X}_x$. Supponiamo φ sia aritmeticamente dipendente su A_x, cioè esistano degli elementi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ di A_x tali che:

$$\varphi^n + \alpha_1 \varphi^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0, \text{ identicamente su } \widehat{X}_x \tag{1}$$

I germi $f, g, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ di X_x sono restrizione, in modo unico, di germi $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$ di funzioni olomorfe definite su

$$\widehat{\widetilde{X}}_x = \widetilde{\widehat{X}}_x .$$

Si avrà quindi, posto

$$\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} = \tilde{\varphi}:$$

$$\tilde{\varphi}^n + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\varphi}^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_n = 0, \text{ identicamente su } \widehat{X}_x \tag{2}$$

Essendo $\widehat{\widetilde{X}}_x$ il complessificato di $\widehat{X}_x$ la (2) equivale a:

$$\tilde{\varphi}^n + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\varphi}^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_n = 0 \quad \text{su} \quad \widetilde{\widehat{X}}_x \tag{3}$$

Essendo $\widehat{\widetilde{X}}_x$ normale, la (3) implica che

$$\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{f}}{g}$$

è una funzione analitica. Di più φ è a valori reali perchè

$$\varphi = \frac{f}{g}.$$

Ciò prova che $\widehat{X}$ è normale.

OSSERVAZIONE 1. - Nel provare il teorema 22 si è dimostrato il seguente fatto: siano $\tilde{X}$ uno spazio complesso,

$$\sigma : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$$

un'antiinvoluzione ed X il luogo dei punti fissi di σ.

Sia inoltre $\widehat{\tilde{X}}$ il normalizzato di $\tilde{X}$, $\pi : \widehat{\tilde{X}} \longrightarrow \tilde{X}$ la proiezione canonica; esiste allora un'antiinvoluzione

$$\widehat{\sigma} \quad \widehat{\tilde{X}} \longrightarrow \widehat{\tilde{X}}$$

tale che $\pi \circ \widehat{\sigma} = \sigma \circ \pi$. Risulta inoltre

$$\pi^{-1}(X) \supset \widehat{X},$$

ove $\widehat{X}$ è l'insieme dei punti fissi di $\widehat{\sigma}$.

Basta notare infatti che, nella prova del teorema 22, l'antiinvoluzione $\widehat{\sigma}$ è stata costruita usando solo l'ipotesi che X fosse parte fissa di $\tilde{X}$.

OSSERVAZIONE 2. - Notiamo che, nella prova del teorema 22, si è dimostrato che, se il germe di un insieme analitico reale X_x ha il complessificato $\tilde{X}_x$ normale, X_x è normale.

Vale anche l'inverso, ma non ci soffermeremo su questo punto.

Da quanto detto discende che, se X è uno spazio analitico reale coerente, l'insieme dei punti normali è un aperto denso in X.

Se X è uno spazio analitico qualsiasi l'insieme dei punti normali, in generale, non è aperto.

OSSERVAZIONE 3. - Sia (X, O_X), un R-spazio analitico ed $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ un O_X complessificato di (X, O_X), su cui sia definita un'antiinvoluzione σ, di cui (X, O_X) sia la parte fissa.

Sia $\widehat{\tilde{X}}$ il normalizzato di $\tilde{X}$. Per l'osservazione 1, l'antiinvoluzione σ, induce su $\widehat{\tilde{X}}$ un'antiinvoluzione $\widehat{\sigma}$.

Detto $\widehat{\tilde{X}}$ il luogo dei punti fissi di $\widehat{\sigma}$ e

$$\pi : \widehat{\tilde{X}} \longrightarrow \tilde{X}$$

la proiezione canonica segue, da quanto già provato, che

$$\pi(\widehat{X}) \subset X,$$

$\widehat{X}$ è normale nei punti x per i quali $\widehat{\widehat{X}}_x$ è il complessificato di $\widehat{X}_x$.

Si verifica con facili esempi, che in generale $\pi(X)$ non coincide con X e lo spazio $\widehat{X}$ non è determinato dallo spazio analitico ridotto associato ad (X, O_X).

BIBLIOGRAFIA

[0] S. S. ABHYANKAR, *Local Analytic geometry*, Acad. Press New York and London 1964.

[1] — —, *Concepts of order and rank on a complex space and a condition for normality*, Math. Ann. 141 (1960) pp. 171-192.

[2] A. ANDREOTTI, *Theorems des dependance algebrique sur les espaces complexes pseudo-concaves*, Bulletin de la Soc. Math. de France 91 (1963) pp. 1-38.

[3] N. BOURBAKI, *Topologie generale*, Cap. 1 Actualites scient. et industr. 1142.

[4] F. BRUHAT - H. WHITNEY, *Quelques proprieties fondamentales des ensembles analytiques reel*, Com. Math. Helvetici, Vol. 33 fasc. 2 (1959) pag 132-160.

[5] F. BRUHAT - H. CARTAN, *Sur les composantes irreductibles d'un sous-ensembles analytique-reel*, C.R. Acad. Sc. Paris 244 (1957) 1123-1126

[6] H. CARTAN, *Varietes analytiques reel et varietes analytiques complexes*, Bull. Soc. Math. France 85 (1957) pp. 77-100.

[7] — —, Seminaire E.N.S. 1953-54.

[8] — —, Seminaire E.N.S. 1960-61.

[9] H. GRAUERT, *On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifold*, Annals of Math. 68 (1958) pag. 460-472.

[10] — —, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie un die Modulraume Komplexer Strukturen*, Paris Presses universitaires de France 1960.

[11] H. HIRONAKA, *The resolution of singularities of an algebraic variety*.

[12] R. NARASIMHAN, *Inbedding of holomorphically complex space*, Amer Jour. of Math. Vol. 82 n. 4 (1960) pag. 917-934.

[13] — —, *The Levi problem for complex spaces*, Math. Annalen 146 (1962) pag. 195-216.

[14] VAN DER WAERDEN, *Modern Algebra*, Frederik Ungar Publ. Co. New York 1950.

[15] V. VILLANI, *Sulle varie nozioni di dimensione per un insieme analitico*, Annali scuola normale di Pisa, Vol. XVII (1963) pag. 141-173.