Considérations sur les gradients généralisés de G. Fichera et E. De Giorgi.

di CHR. PAUC (a Nantes).

À Mauro Picone pour son 70^{me} anniversaire.

Résumé. - Dans notre « Cours de Varenna » (15-25 Août 1954) nous avons comparé les notions de dérivé et d'intégrant, en particulier dans la théorie des fonctions de cellule. Parmi les exemples examinés figurent au chapitre IV les gradients généralisés de G. FICHERA et d'E. DE GIORGI. Dans la présente note nous établissons quelques résultats qui y étaient formulés seulement comme conjectures.

1. Préliminaires.

E_r : espace euclidien cartésien à r dimensions, μ : mesure de BOREL sur E_r , σ_i : mesure de BOREL $((r-1)$ -dimensionnelle) dans les hyperplans $x_i = Cte$, f : fonction numérique définie sur E_r , borélienne et bornée.

1.1. Nous posons avec G. FICHERA (Lezioni sulle Trasformazioni Lineari, Istituto Matematico, Università di Trieste, 1954, vol. I, p. 428) pour tout intervalle fermé I

$$(1) \quad F_i^*(I) = \int_I f \cdot \nu_i \cdot d\sigma,$$

ν_i désignant le i -ième cosinus directeur de la normale en un point x intérieur à une face quelconque de I , dirigée vers l'extérieur de I , avec l'axe des x_i ($i = 1, 2, \dots, r$), σ l'aire (mesure $(r-1)$ -dimensionnelle) sur la frontière $\mathfrak{F}I$ de I .

Ainsi

$$F_i^*(I) = \int_{(F+)_i} f \cdot d\sigma_i - \int_{(F-)_i} f \cdot d\sigma_i$$

(cf. G. STAMPACCHIA, Sopra una classe di funzioni in n variabili, Ricerche di Matematica, vol. I, 1952, p. 27), $(F+)_i$ et $(F-)_i$ désignant les faces supérieure et inférieure de I perpendiculaires à l'axe des x_i .

Les fonctions d'intervalle F_i^* sont additives (entendant: au sens fini). Supposons comme FICHERA que

la fonction vectorielle $\mathbf{F}^*(I) = (F_1^*(I), \dots, F_r^*(I))$ est à variation bornée (hypothèse Fichera).

La décomposition de la fonction d'intervalle $F_i^*(I)$ en partie singulière et partie μ -continue (absolument continue) (G. FICHERA, Lezioni. Cap. VIII;

CHR. PAUC, Contributions à une théorie de la différentiation de fonctions d'intervalle sans hypothèse de Vitali, C. R. Paris, 236, 1953, 1937-1939, et « Cours de Varenna », II, 2., Th. II)

$$(2) \quad F_i^*(I) = S_i^*(I) + \int_I Dif \cdot d\mu$$

procure à FICHERA des *dérivées premières généralisées* Dif , définies comme *intégrants de Radon-Nikodym*, donc à des ensembles de BOREL de μ -mesure nulle indéterminés près, d'où

$$(3) \quad \text{grad } f = (D_1 f, \dots, D_r f).$$

Le choix par FICHERA d'intervalles mixtes alors que nous adoptons des intervalles fermés, ne change rien aux définitions précédentes comme on le voit en se reportant aux procédés d'extraction des parties singulière et μ -continue (régulière) dans les travaux cités plus haut.

Désignons par $\mathcal{G}$ l'espace de BANACH des fonctions $g(x)$ numériques, définies sur Er , continues et $\rightarrow 0$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$, avec $\|g\| = \max |g(x)|$, par G l'ensemble de ces fonctions. $\mathcal{G}$ est l'espace $\overline{K}(Er)$ de N. BOURBAKI (Intégration, Act. Sci. Ind. 1175, 1952 Hermann, Paris, p. 60).

Considérons l'intégrale de RIEMANN-STIELTJES relative aux intervalles

$$(RS) \int_{Er} g \cdot dF_i^* \quad \text{pour } g \in G.$$

Il existe pour $i = 1, \dots, r$ une mesure de LEBESGUE-STIELTJES (ou de RADON) bornée et une seule Φ_i telle que

$$(4) \quad (RS) \int_{Er} g \cdot dF_i^* = \int_{Er} g \cdot d\Phi_i$$

pour toute fonction $g \in G$, l'intégrale de droite étant une intégrale lebesguienne. Chaque Φ_i peut être obtenue sur les ensembles ouverts A (fermés C) par le procédé de M. PICONE et T. VIOLA (Lezioni sulla Teoria Moderna dell'Integrazione, Edizioni Scientifiche Einaudi, 1952, § 34. p. 105 et § 95, p. 246), à savoir : faisant correspondre à toute décomposition coordonnée $\mathfrak{D}$ de Er le nombre $\sum F_i^*(T_k)$, $k = 1, \dots, n$, où T_k désignent les intervalles de $\mathfrak{D}$ inclus dans A (rencontrant C), $\Phi_i(A)$ ($\Phi_i(C)$) en est la limite relativement au système dirigé des $\mathfrak{D}$ (« per decomposizioni progressive », PICONE-VIOLA, Lezioni, p. 46). Il est aisé d'en déduire que la mesure de LEBESGUE-STIELTJES correspondant à S_i^* est la partie singulière de la fonction d'ensemble Φ_i et que la mesure de LEBESGUE-STIELTJES correspondant à $\int_I Dif \cdot d\mu$ est la partie μ -continue de Φ_i . Ainsi Dif est l'intégrant de RADON-NIKODYM de Φ_i , $\text{grad } f$ (selon FICHERA) est l'intégrant de RADON-NIKODYM de la mesure vectorielle $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_r)$ relativement à la mesure μ .

La variation totale

$$(5) \quad (RS) \int_{Er} \|dF^*\| = \int_{Er} \|d\Phi\|.$$

Les *fonctions déterminantes* (« funzioni determinanti », PICONI-VIOLA, Lezioni, p. 283) correspondant à F_i^* sont les fonctions

$$(6) \quad R_i^*(x) = \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_{i-1}}^{x_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{x_{i+1}} \dots \int_{a_r}^{x_r} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_r) \cdot d\xi_1 \dots d\xi_{i-1} d\xi_{i+1} \dots d\xi_r,$$

$a_1, \dots, a_r$ étant des constantes arbitraires.

Nous introduisons aussi

$$(7) \quad R^*(x) = \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_i}^{x_i} \dots \int_{a_r}^{x_r} f(\xi_1, \dots, \xi_r) \cdot d\xi_1 \dots d\xi_i \dots d\xi_r,$$

R^* est donc la μ -intégrale (ponctuelle) indéfinie de f .

Il résulte des définitions des R_i^* et de R^* que

$$f(x_1, \dots, x_r) = \frac{\partial^{r-1} R_i^*}{\partial x_1 \dots \partial x_{i-1} \partial x_{i+1} \dots \partial x_r}.$$

à un ensemble de BOREL de σ_i -mesure nulle (dépendant en général de x_i) près et que

$$f(x_1, \dots, x_r) = \frac{\partial^r R^*}{\partial x_1 \dots \partial x_r}.$$

à un ensemble de BOREL de μ -mesure nulle près.

EXEMPLE: $r=2$, f est la fonction caractéristique de l'ensemble des points dont au moins une coordonnée est rationnelle, alors $R_1^*(x_1, x_2) = x_2 - a_2$ si x_1 est rationnel, $= 0$ si x_1 est irrationnel, $R_2^*(x_1, x_2) = x_1 - a_1$ si x_2 est rationnel, $= 0$ si x_2 est irrationnel, $R^*(x)$ est identiquement nulle.

1.2. DE GIORGI (Su una teoria generale della misura $(r-1)$ -dimensionale in uno spazio ad r dimensioni, Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV, Tomo XXXVI, 1954, 191-213) définit en tout point x de Er et pour tout $\lambda > 0$

$$(8) \quad W_\lambda f(x) = f_\lambda(x) = (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{Er} e^{-\frac{\|x-\xi\|^2}{\lambda}} f(\xi) \cdot d\mu.$$

Il s'agit donc de la moyenne de f relativement à une distribution de GAUSS-LAPLACE normée, isotrope, centrée sur x et dont l'écart type, à savoir $\sqrt{r\lambda/2}$, tend vers 0 avec λ .

La fonction obtenue, la λ -régularisée, est indéfiniment dérivable. A chaque $W_\lambda f$ correspond une mesure vectorielle $F^\lambda = (F_1^\lambda, \dots, F_r^\lambda)$ dont la densité en chaque point (vis-à-vis de μ) est le *gradient classique* de $W_\lambda f$. La variation totale $\phi_\lambda(Er)$ de cette mesure vectorielle est une fonction non croissante de λ dont la limite pour $\lambda \rightarrow 0$ est désignée par $\mathbb{I}(f)$. DE GIORGI suppose que

$\mathbb{I}(f)$ est *finie* (*hypothèse De Giorgi*).

DE GIORGI montre alors que la suite des F^λ converge faiblement vers une mesure vectorielle $F = (F_1, \dots, F_r)$ qui est par définition la mesure gradient de f ⁽¹⁾ et dont $\mathbb{I}(f)$ est la variation totale (sur Er).

2. THÉOREME I. - *L'hypothèse Fichera implique l'hypothèse De Giorgi et $\Phi = F$.*

Avant d'aborder la démonstration du théorème nous établissons deux lemmes.

2.1. LEMME (*formule d'intégration par parties*). - U et V étant deux fonctions (numériques) définies sur Er , chacune à variation totale (selon VITALI ⁽²⁾) finie, m_U et m_V les mesures de LEBESGUE-STIELTJES correspondantes

$$\int_{Er} U^- dm_V + \int_{Er} V^+ dm_U = U(+\infty)V(+\infty) - U(-\infty)V(-\infty),$$

$+$ et $-$ indiquant les limites à droite et à gauche, $U(+\infty)$ et $V(+\infty)$ désignant les limites de $U(x) = U(x_1, \dots, x_r)$ et $V(x) = V(x_1, \dots, x_r)$ quand $x_i \rightarrow +\infty$ ($i = 1, \dots, r$), $U(-\infty)$ et $V(-\infty)$ les limites quand $x_i \rightarrow -\infty$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. - Nous adaptons la démonstration due à L. C. YOUNG, donnée dans S. SAKS, *Theory of the Integral*, Warszawa-Lwow, 1937 pour sa formule d'intégration par parties relative au cas linéaire.

Introduisons la mesure m_{UV} produit (borélien) des mesures m_U sur $X = Er$ et m_V sur $Y = Er$, qui correspond d'ailleurs à UV sur l'espace euclidien à $2r$ dimensions $X \times Y$. Désignons par T l'ensemble des points $(x, y) = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r)$ de $X \times Y$ vérifiant $x < y$, entendant par là que $x_i < y_i$ pour $i = 1, \dots, r$.

Nous allons exprimer de deux manières différentes $m_{UV}(T)$, faisant intervenir d'abord les x -sections $Tx \subset Y$, $x \in X$, puis les y -sections $Ty \subset X$, $y \in Y$, observant que la *fonction de répartition* ⁽³⁾ de m_U est $U^-(x) - U(-\infty)$

(1) Cette mesure est $-F$ chez DE GIORGI (cf. loc. cit., formule (21), p. 195).

(2) « a variazione r -pla limitata in Er » selon PICONE-VIOLA, *Lezioni*, p. 288.

(3) A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1953, p. 669.

et que celle de m_V est $V^-(x) - V(-\infty)$:

$$(9) \quad m_{UV}(T) = \int_{\mathbb{E}^r} m_V(Tx) \cdot dm_U = \int_{\mathbb{E}^r} (V(+\infty) - V^+(x)) \cdot dm_U = \\ = V(+\infty)(U(+\infty) - U(-\infty)) - \int_{\mathbb{E}^r} V^+(x) \cdot dm_U,$$

$$(10) \quad m_{UV}(T) = \int_{\mathbb{E}^r} m_U(Ty) \cdot dm_V = \int_{\mathbb{E}^r} (U^-(y) - U(-\infty)) \cdot dm_V = \\ = \int_{\mathbb{E}^r} U^-(y) \cdot dm_V - U(-\infty)(V(+\infty) - V(-\infty)).$$

Egalant (9) et (10), nous obtenons après réduction des termes $V(+\infty)U(-\infty)$ la formule annoncée.

2.2. LEMME. - R désignant une fonction (numérique) borélienne, définie sur $\mathbb{E}^r$, à variation totale (selon VITALI) finie, la λ -régularisée R_λ est à variation totale $(RS) \int_{\mathbb{E}^r} |dR_\lambda|$ inférieure ou égale à la variation totale $(RS) \int_{\mathbb{E}^r} |dR|$ de R , donc aussi à variation bornée.

DÉMONSTRATION DU LEMME. - Nous adaptons une démonstration de DE GIORGI (loc. cit., p. 197, dém. du th. III), la différence résidant dans la formule d'intégration par parties employée.

Nous avons

$$(11) \quad \frac{\partial^r R_\lambda}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_r} = (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{\mathbb{E}^r} \frac{\partial^r}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_r} e^{-\frac{\|x-\xi\|^2}{\lambda}} R(x) \cdot dx_1 \dots dx_r = \\ = (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{\mathbb{E}^r} \frac{\partial^r}{\partial x_1 \dots \partial x_r} e^{-\frac{\|x-\xi\|^2}{\lambda}} R(x) \cdot dx_1 \dots dx_r.$$

Regardant provisoirement x comme variable et ξ comme constante, nous posons $E(x) = e^{-\frac{\|x-\xi\|^2}{\lambda}}$ et désignons par m_E la mesure de LEBESGUE-STIELTJES dont E est la fonction de répartition, ainsi

$$(12) \quad (11) = (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{\mathbb{E}^r} R(x) \cdot dm_E.$$

Appliquons le lemme 2.1. pour $U(x) = R(x)$, $V(x) = E(x)$. Les produits $R(+\infty)E(+\infty)$ et $R(-\infty)E(-\infty)$ sont nuls, $E^+(x) = E(x)$ car $E(x)$ est continue. La fonction $R^-(x)$ ne diffère de $R(x)$ que sur une union dénombrable d'hyperplans dont la m_E -mesure est nulle, par conséquent

$$(13) \quad \int_{\mathbb{E}^r} R(x) \cdot dm_E = \int_{\mathbb{E}^r} R^-(x) \cdot dm_E = - \int_{\mathbb{E}^r} E(x) \cdot dm_R,$$

m_R représentant la mesure de LEBESGUE-STIELTJES correspondant à R .

Nous pouvons écrire

$$(14) \quad \left| \frac{\partial^r R_\lambda}{\partial x_1 \dots \partial x_r} \right| \leq (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{\mathbb{R}^r} e^{-\frac{\|x-\xi\|^2}{\lambda}} \cdot d|m_R|$$

utilisant la notation de N. BOURBAKI, loc. cit., p. 55.

Or

$$(15) \quad (RS) \int_{\mathbb{R}^r} |dR_\lambda| = \int_{\mathbb{R}^r} \left| \frac{\partial^r R_\lambda}{\partial x_1 \dots \partial x_r} \right| d\mu,$$

donc d'après (14)

$$(16) \quad \leq (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{\mathbb{R}^r} d\mu \int_{\mathbb{R}^r} e^{-\frac{\|x-\xi\|^2}{\lambda}} d|m_R|,$$

d'où en permutant les intégrations

$$= (\pi\lambda)^{-\frac{r}{2}} \int_{\mathbb{R}^r} d|m_R| \int_{\mathbb{R}^r} e^{-\frac{\|x-\xi\|^2}{\lambda}} d\mu = \int_{\mathbb{R}^r} d|m_R| = \text{variation totale de } R,$$

ce qui établit le lemme en question.

2.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I. — Nous supposons que $\mathbb{F}^*(I)$ est de variation bornée, il en est alors de même de chaque $F_i^*(I)$, $i = 1, \dots, r$.

La variation totale $(RS) \int_{\mathbb{R}^r} |dR_i^*|$ est finie.

L'opérateur W_λ étant permutable avec les opérateurs de dérivation (DE GIORGI, loc. cit., p. 193), nous avons

$$(17) \quad \frac{\partial^{r-1}}{\partial x_1 \dots \partial x_{i-1} \partial x_{i+1} \dots \partial x_r} W_\lambda R_i^* = W_\lambda \frac{\partial^{r-1}}{\partial x_1 \dots \partial x_{i-1} \partial x_{i+1} \dots \partial x_r} R_i^* = W_\lambda f.$$

Appliquons le lemme 2.2 à R_i^* :

$$(18) \quad (RS) \int_{\mathbb{R}^r} |dR_{i,\lambda}^*| \leq (RS) \int_{\mathbb{R}^r} |dR_i^*| < \infty$$

pour $i = 1, \dots, r$.

Posons

$$(19) \quad \mathbb{I}_{i,\lambda}[f(x)] = \int_{\mathbb{R}^r} \left| \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \right| \cdot d\mu \quad \text{où} \quad f_\lambda = W_\lambda f.$$

D'après (17)

$$(20) \quad \mathbb{I}_{i,\lambda}[f(x)] = \int_{\mathbb{R}^r} \left| \frac{\partial^r}{\partial x_1 \dots \partial x_r} W_\lambda R_i^* \right| \cdot d\mu = (RS) \int_{\mathbb{R}^r} |dR_{i,\lambda}^*|.$$

Or

$$\psi_\lambda(Er) = \int_{Er} |\operatorname{grad} f_\lambda(x)| \cdot d\mu$$

est

$$(21) \quad \leq \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_{i,\lambda}[f(x)] \leq \sum_{i=1}^r (RS) \int_{Er} |dR_{i,\lambda}^*|$$

d'après (18), donc

$$(22) \quad \mathbb{I}[f(x)] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi_\lambda(Er) \text{ est fini.}$$

Les fonctions déterminantes $R_{i,\lambda}^*$ convergent μ -presque partout vers R_i^* , $i = 1, \dots, r$. En outre leurs variations totales (sur Er) sont uniformément bornées, donc pour toute fonction $g \in G$,

$$(23) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} (RS) \int_{Er} g \cdot dR_{i,\lambda}^* \text{ existe et est } (RS) \int_{Er} g \cdot dR_i^* \quad (*)$$

Or

$$(24) \quad (RS) \int_{Er} g \cdot dR_{i,\lambda}^* = \int_{Er} g \cdot \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \cdot d\mu = \int_{Er} g \cdot dF_i^\lambda.$$

Par définition de la mesure vectorielle $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_r)$

$$(25) \quad (RS) \int_{Er} g \cdot dR_i^* = \int_{Er} g \cdot d\Phi_i.$$

La relation (23) exprime la convergence faible de F_i^λ vers Φ_i pour tout i , ou de la mesure vectorielle $\mathbf{F}^\lambda$ vers Φ . Or précisément la mesure gradient $\mathbf{F}$ de DE GIORGI (loc. cit., p. 196) est définie comme la limite faible de $\mathbf{F}^\lambda$ pour toute suite $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ de nombres positifs $\rightarrow 0$.

3. THÉOREME II. - *Si f est continue, l'hypothèse De Giorgi implique l'hypothèse Fichera et $\mathbf{F} = \Phi$.*

DÉMONSTRATION. - Nous supposons f continue et $\mathbb{I}(f)$ finie. Alors

$$(26) \quad \mathbb{I}_{i,\lambda}[f(x)] = \int_{Er} \left| \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \right| \cdot d\mu \leq \mathbb{I}_\lambda[f(x)] \leq \mathbb{I}(f) < \infty.$$

Or

$$(27) \quad \int_{Er} \left| \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \right| \cdot d\mu = (RS) \int_{Er} |dR_{i,\lambda}^*|.$$

(*) On le voit aisément en plaquant sur Er un réseau $\mathbf{R}$ de convergence (c'est-à-dire que pour toute maille T du réseau $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta T R_{i,\lambda}^* = \Delta T R_i^*$ pour $i = 1, \dots, r$, la notation ΔT étant empruntée à PICONE-VIOLA, *Lezioni*, p. 282) métriquement fin, puis définissant les intégrales RS (certainement existantes) au moyen de $\mathbf{R}$.

Par conséquent

$$(28) \quad (RS) \int_{Er} |dR_{i,\lambda}^*| \leq \mathbb{I}(f).$$

pour $i = 1, \dots, r$, λ positif quelconque.

f étant continue, les fonctions R_i^* sont aussi continues, par conséquent

$$\lim R_{i,\lambda}^*(x) = R_i^*(x) \text{ partout et uniformément sur tout compact}$$

(cf. DE GIORGI, loc. cit., p. 193, form. (5)).

Or la variation totale d'une fonction est une fonctionnelle semicontinue inférieurement, donc

$$(29) \quad \int_{Er} |dR_i^*| \leq \liminf (RS) \int_{Er} |dR_{i,\lambda}^*| \leq \mathbb{I}(f),$$

l'hypothèse FICHERA est satisfaite. L'égalité $F = \Phi$ résulte du théorème I.

3.1. *Sur la nécessité de la continuité de f dans Th. II.* — Mr. DE GIORGI dans une lettre du 29 Janvier 1955 nous a communiqué le contre-exemple suivant, montrant la nécessité de la continuité de f dans l'énoncé du théorème II: f est la fonction caractéristique de l'ensemble des points de Er dont au moins une coordonnée est rationnelle. La variation totale de chaque F_i^* est infinie alors que $\mathbb{I}(f)$ est nulle. Si nous nous limitons aux intervalles I à coordonnées irrationnelles, alors les fonctions F_i^* sont toutes identiquement nulles, ce qui cadre avec le résultat que fournit la théorie de DE GIORGI. f n'étant pas continue, nous ne pouvons plus affirmer que $\lim R_{i,\lambda}^*(x) = R_i^*(x)$ partout, mais seulement presque partout, d'où perte de la propriété de semi-continuité inférieure de la variation totale par passage à la limite si nous définissons comme d'habitude la variation totale au moyen de tous les intervalles. Par contre si nous nous limitons à un réseau de convergence, nous retrouvons l'accord avec la théorie de DE GIORGI. Nous voyons pourquoi la méthode de définition de la mesure gradient à partir des F_i^* perd son intérêt quand on ne suppose pas f continue comme le font FICHERA et STAMPACCHIA: les fonctions F_i^* sont en effet trop sensibles aux variations locales de f .

Il est intéressant à ce propos de constater que dans l'exemple de DE GIORGI, R^* est identiquement nul, ce qui conduit à penser qu'au lieu de faire appel aux n fonctions d'intervalle F_i^* dont les fonctions déterminantes proviennent de f par $(r-1)$ intégrations successives, nous pourrions considérer la fonction R^* qui est continue ayant été obtenue à partir de f par intégrations successives vis-à-vis de toutes les variables. Si $\text{grad } R^*$ est de variation bornée (au sens de VITALI), nous en déduisons par adaptation aisée de la démonstration du théorème I que $\mathbb{I}(f)$ est finie et que la mesure de LEBESGUE-STIELTJES Φ^* correspondant à $\text{grad } R^*$ comme fonction détermi-

nante, donc définie par

$$(30) \quad (RS) \int_{Er} g \cdot d(\text{grad } R^*) = \int_{Er} g \cdot d\Phi^*$$

pour toute $g \in G$, coïncide avec la mesure gradient Φ de DE GIORGI.

Nous avons cherché à montrer (sans y parvenir) que l'hypothèse pour $\text{grad } R^*$ d'être à variation bornée (au sens de VITALI) implique la finitude de $\mathbb{I}(f)$. La démonstration du théorème II serait transposable si nous établissions préalablement la semi-continuité inférieure de la variation totale de $\text{grad } R^*$ pour une fonction R continue, la fonction R admettant des dérivées premières, relativement à la convergence simple (ou ponctuelle) uniforme sur tout compact.

4. Dérivées généralisées définies au moyen de formules d'intégration par parties.

DE GIORGI (loc. cit., p. 195) montre que sous l'hypothèse $\mathbb{I}(f) < \infty$ pour les fonctions auxiliaires $\alpha(x)$ continues, à dérivées premières continues et sommables sur Er , vaut l'équation

$$(De\ G.) \quad \int_{Er} \alpha(x) \cdot d\Phi = - \int_{Er} f(x) \cdot \text{grad } \alpha(x) \cdot d\mu.$$

Cette propriété peut servir de point de départ vers une nouvelle caractérisation des fonctions à gradient généralisé et obtention de la mesure gradient.

En effet supposons comme initialement f borélienne et bornée. L'intégrale

$$(31) \quad L(\alpha) = - \int_{Er} f(x) \cdot \text{grad } \alpha(x) \cdot d\mu$$

est finie et représente une fonctionnelle additive (au sens fini) et homogène sur la variété linéaire $A \subset G$ des fonctions α dont les valeurs sont des vecteurs de Er . Pour que nous puissions prolonger cette fonctionnelle en une fonctionnelle linéaire au sens de Banach (c'est-à-dire: additive, homogène et continue) sur l'espace $\mathcal{S}$, il est nécessaire et suffisant que sa norme

$$= \sup_{\|\alpha\| \leq 1} \|L(\alpha)\|$$

soit finie. D'après le théorème de représentation de F. RIESZ appliqué à chaque composante de $L(\alpha)$, il est aussi nécessaire et suffisant qu'il existe une mesure de Radon F sur Er dont les valeurs sont des vecteurs de Er bornée (c'est-à-dire: à variation totale finie) telle que

$$L(\alpha) = \int_{Er} \alpha(x) \cdot dF$$

pour tout $\alpha \in A$.

DE GIORGI (loc. cit., p. 197) montre que cette condition implique que $\mathbb{I}(f)$ soit finie et que $\mathbf{F}$ coïncide alors avec sa mesure gradient définie comme la limite faible des $\mathbf{F}^n$.

Nous rencontrons là une *méthode générale pour définir des dérivées généralisées au moyen de formules d'intégration par parties*.

Considérons la i -ième composante

$$L_i(\alpha) = - \int_{E_r} f(x) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \cdot d\mu$$

du second membre de (De G.) la fonction α , numérique, définie sur E_r s'annulant en dehors d'un compact et possédant des dérivées premières continues. Soit A' l'ensemble de ces fonctions. Organisons A' en *espace vectoriel topologique* $\mathcal{A}'$ en convenant que α_n converge vers α si toutes les α_n s'annulent en dehors d'un même compact, les α_n convergent uniformément vers α , et les $\partial \alpha_n / \partial x_j$ vers $\partial \alpha / \partial x_j$ pour $j = 1, \dots, r$. L_i est alors une fonctionnelle additive, homogène et *continue* dans $\mathcal{A}'$ que nous pouvons regarder comme la *distribution définissant la dérivée généralisée de f par rapport à x_i* . On peut consulter sur ce point: J. C. BURKILL, An Integral for Distributions, Proc. International Congress Math., 1954, vol. II, p. 90 et L. SCHWARTZ, Théorie des Distributions, Act. Sci. Ind., 1091, 1950, p. 34 et suivantes.

Au lieu d'envisager A' comme *espace autonome*, regardons-le comme un sous-espace de $\mathcal{G}$, qui est d'ailleurs dense dans G . Demandons de f la *possibilité de prolongement de L_i de A sur G* , c'est-à-dire que $\mathbb{I}_i(f) = \lim \mathbb{I}_{i,\lambda}$ soit fini. La dérivée généralisée de f par rapport à x_i apparaît alors comme une fonctionnelle linéaire (au sens de BANACH) sur $\mathcal{G}$ et peut par conséquent être *interprétée comme une mesure de Radon bornée F_i* . Ces mesures sont d'après L. SCHWARTZ (loc. cit., p. 14-20) les distributions les plus simples après les fonctions. Pour les relations entre les procédés de régularisation dont celui de DE GIORGI est un exemple, et la théorie des distributions nous renvoyons au chapitre VI, Produit de Composition, dans le Tome II de L. SCHWARTZ, Théorie des Distributions, Act. Sci. Ind., 1122, 1951.