Sulla regolarità e irregolarità della frontiera per il primo problema di valori al contorno relativo all'equazione del calore.

di BRUNO PINI (a Cagliari).

A Mauro Picone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Sia D un dominio tipico relativo al primo problema di valori al contorno per l'equazione del calore. Nel presente lavoro si stabiliscono delle condizioni sufficienti di regolarità e delle condizioni sufficienti di irregolarità per i punti di quella porzione della $\mathfrak{F}D$ su cui si assegnano i dati.*

È ben noto che se A è un campo dell'S_n, il problema di DIRICHLET $\Delta u = 0$ in A, $u = f$ su $\mathfrak{F}A$, essendo f un'arbitraria funzione continua, può non avere soluzione nel senso ordinario. Un punto P_0 della $\mathfrak{F}A$ si dice, con la terminologia di LEBESGUE, *regolare* se il $\lim u(P) = f(P_0)$ per P tendente in A a P_0, *irregolare* se ciò non si verifica.

La regolarità o irregolarità di un punto della $\mathfrak{F}A$ è una proprietà locale di questa e si debbono a POINCARÉ, ZAREMBA, BOULIGAND, LEBESGUE (1) delle condizioni di carattere geometrico sufficienti ad assicurare la regolarità di un punto; a WIENER (2) è dovuta la prima « esplicita » condizione necessaria e sufficiente di regolarità.

La condizione di WIENER si fonda sui concetti di *potenziale conduttore* e di *capacità*.

Nel caso classico, dato un dominio limitato D con frontiera opportunamente regolare, la funzione armonica in CD, infinitesima all'infinito ed eguale ad uno sulla $\mathfrak{F}D$, è il potenziale conduttore, mentre la massa totale della distribuzione corrispondente a tale potenziale è la capacità. Mediante la sua soluzione generalizzata del problema di DIRICHLET, WIENER associa alla frontiera di un arbitrario insieme aperto limitato una funzione e una costante che generalizzano il potenziale conduttore e la capacità e coincidono con quelli classici se detta frontiera è sufficientemente regolare.

(1) Cfr. per esempio F. VASILESCO, *La notion de capacité*, Paris, 1937, *La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet*, Paris 1938.

(2) N. WIENER, *The Dirichlet problem*, « J. of Math. and Phys. Massachussetts Inst. of Tecnology », III (1924); per una semplificazione dei ragionamenti di WIENER cfr. O. D. KELLOGG, *Recent progress with the Dirichlet problem*, « Bull. Am. Math. Soc. », 32 (1926) e *Foundations of potential theory*, Berlin 1929.

Orbene, se, anzichè riferirsi al problema di DIRICHLET per l'equazione di LAPLACE, ci si riferisce al primo problema di valori al contorno per l'equazione del calore, anche in questo caso si presenta l'opportunità di una distinzione tra punti regolari e punti irregolari. Ciò è stato fatto da PETROWSKI ([3]), il quale, fondandosi sul metodo delle funzioni superiori e inferiori di PERRON, ha assegnato delle condizioni sufficienti di regolarità e delle condizioni sufficienti di irregolarità.

In una precedente Nota ([4]) si è mostrata la possibilità di estendere al problema ora detto anche la soluzione generalizzata nel senso di WIENER; nel presente lavoro, fondandoci su tale soluzione, introduciamo un analogo del potenziale conduttore e un analogo della capacità; sulla base di questi concetti si dà successivamente una condizione sufficiente di irregolarità e una condizione sufficiente di regolarità.

Il completamento di questi risultati e la loro estensione al caso generale (qui limitati al piano) nonchè lo studio della struttura dell'insieme dei punti irregolari sarà oggetto di una successiva ricerca.

1. In tutto il seguito diremo *regolare* un arco γ di equazione $x=\chi(y)$, $0\leq y\leq a$, con $\chi(y)$ continua insieme alla sua derivata prima su $0\leq y\leq a$. Indicheremo con S la striscia $0\leq y\leq a$ e con $S_1(\gamma)$, $S_2(\gamma)$ le semistriscie $0\leq y\leq a$, $x<\chi(y)$ e $0\leq y\leq a$, $x>\chi(y)$ rispettivamente.

Proponiamoci di determinare una funzione $u(x, y)$ che in $S_1(\gamma)$ e in $S_2(\gamma)$ sia soluzione ordinaria dell'equazione

$$\mathfrak{L}(u)=u_{xx}-u_y=0, \tag{1}$$

si annulli per $y=0$, $x\neq\chi(0)$, e sia eguale all'unità su γ, prescindendo dal punto $(\chi(0), 0)$. Poichè γ è regolare si può esprimere $u(P)$ $(P\equiv(x, y))$ come un semplice strato

$$u(P)=\int_0^y \mu(\eta)U(x, y;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta, \tag{2}$$

essendo $U(x, y;\ \xi, \eta)=U(P, Q)$ la soluzione fondamentale di (1) (se riguardata nelle variabili x, y). Da (2) si ha

$$\int_0^y \mu(\eta)U(\chi(y),\ y;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta=1, \qquad 0<y\leq a, \tag{3}$$

([3]) I. PETROWSKI, *Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung*, « Compositio Mathematica », 1 (1935).

([4]) B. PINI, *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, « Rend. Sem. Mat. Padova », XXIII (1954).

che, moltiplicata per $dy/\sqrt{z-y}$ e integrata da 0 a z, si trasforma, in seguito a inversione nell'ordine delle integrazioni e successiva derivazione rispetto a z, nell'equazione integrale di VOLTERRA di seconda specie

$$\mu(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z}} - \frac{1}{\pi}\int_0^z \mu(\eta)\,\frac{\partial H(\eta,\, z)}{\partial z}\,d\eta \tag{3'}$$

ove

$$H(\eta,\, z) = \int_\eta^z \frac{1}{\sqrt{z-y}}\, U(\chi(y),\, y\,;\, \chi(\eta),\, \eta)dy.$$

Osservando che $\partial H/\partial z = L(\eta,\, z)/\sqrt{z-\eta}$ con $L(\eta,\, z)$ funzione continua in η e z per $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, e che perciò

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{\eta}}\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right| d\eta < +\infty,$$

l'equazione (3') ha una soluzione continua per $z > 0$. Da una prima iterazione, avendosi

$$\mu(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z}} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{\eta}}\,\frac{\partial H}{\partial z}\,d\eta + \frac{1}{\pi^2}\int_0^z\left(\int_\eta^z \frac{\partial H(\eta,\, t)}{\partial t}\,\frac{\partial H(t,\, z)}{\partial z}\,dt\right)\mu(\eta)d\eta,$$

si ha che

$$\lim_{z\to 0+} \pi\sqrt{z}\,\mu(z) = 1.$$

È facile riconoscere che *la funzione* $u(P)$ *definita da* (2) — (3) *è tale che* $0 \leq u(P) \leq 1$, *ed è continua in tutto* S *escluso il punto* $(\chi(0),\, 0)$.

Poichè i ragionamenti sono gli stessi in $S_1(\gamma)$ ed in $S_2(\gamma)$, riferiamoci per esempio ad $S_1(\gamma)$. Osserviamo che per $x \to -\infty$ si ha $\lim u(P) = 0$ uniformemente rispetto ad y; scegliamo un $X(<\chi(y)$ per $0 \leq y \leq a)$ tale che $|u(x,y)| < \varepsilon$, con ε positivo < 1 arbitrariamente fissato, per $x \leq X$, e riferiamoci alla porzione $X \leq x \leq \chi(y)$, $0 \leq y \leq a$ di S_1. Supponiamo che in un punto $P_1 \equiv (x_1,\, y_1)$ interno a tale dominio sia $u(P_1) > 1 + \delta$ $(\delta > 0)$. Consideriamo una successione $\{y_n\}$ decrescente a zero e chiamiamo $D_{n,\,n+1}$ il dominio $y_{n+1} \leq y \leq y_n$, $X \leq x \leq \chi(y)$; in ciascuno di tali domini la u è continua (frontiera inclusa); per una proprietà estremale delle soluzioni di (1), poichè $u(P) = 1$ su γ e $|u(P)| < \varepsilon$ per $x = X$, il $\max u(P)$ in $D_{1,2}$ sarà raggiunto in un punto della caratteristica che limita inferiormente $D_{1,2}$, sia $P_2 \equiv (x_2,\, y_2)$; tale massimo sarà $> 1 + \delta$; ripetendo il ragionamento si viene a individuare una successione di punti $\{P_n\}$ tali che per ogni n è $u(P_n) > 1 + \delta$; poichè la successione $\{y_n\}$ decresce a zero e la $\{x_n\}$ è limitata, dalla successione $\{P_n\}$ si può estrarre una successione convergente a un punto $\overline{P}$ della caratteristica

$y=0$; l'ascissa $\bar{x}$ di $\bar{P}$ non può essere $<\chi(0)$ perchè $u(\bar{x}, \chi(0))=0$; neppure può essere $\bar{x}=\chi(0)$; infatti $\mu(y)=1/\pi\sqrt{y}+\nu(y)$ con $\nu(y)$ finita, e conseguentemente

$$u(P)=\frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{1}{\sqrt{\eta}} U(x,\ y;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta+\int_0^y \nu(\eta)U(x,\ y;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta\ ;$$

ora il secondo addendo converge a zero per $y\rightarrow 0+$ mentre il primo è costantemente ≤ 1; allora in un intorno di $(\chi(0),\ 0)$ sarà $u(P)<1+\delta/2$, mentre, per quanto precede, è $u(P_n)>1+\delta$. Dunque è $u(P)\leq 1$.

Supponiamo ora che in un punto P_1 sia $u(P_1)<-\delta$ $(\delta>0)$; scegliamo la ε, di cui si è parlato sopra, minore di δ, e in conseguenza scegliamo la X. Ragionando come si è già fatto precedentemente, si viene a individuare una successione di punti $\{P_n\}$ convergente a $(\chi(0),\ 0)$ tale che $u(P_n)<-\delta$. Ora è $\lim\limits_{y\rightarrow 0+}\pi\sqrt{y}\,\mu(y)=1$ e quindi $u(P)$ è certamente positiva per y abbastanza piccolo. Di qui l'assurdo.

Proviamo ora che *la funzione* $\mu(y)$ *è non negativa.*

Supponiamo che per un certo y_2, tale che $0<y_2\leq a$, sia $\mu(y_2)<0$; per ragioni di continuità sarà $\mu(y)<0$ in tutto un intervallo $y_1\leq y\leq y_2$. Si ha

$$1=\int_0^{y_2}\mu(\eta)U(\chi(y_2),\ y_2\ ;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta=\int_0^{y_1}\mu(\eta)U(\chi(y_2),\ y_2\ ;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta+$$
$$+\int_{y_1}^{y_2}\mu(\eta)U(\chi(y_2),\ y_2\ ;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta$$

onde per l'ipotesi

$$\int_0^{y_1}\mu(\eta)U(\chi(y_2),\ y_2\ ;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta>1. \tag{4}$$

Ora la funzione

$$\int_0^{y_1}\mu(\eta)U(x,\ y\ ;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta,$$

che in tutto il semipiano $y>0$, esclusi i punti dell'arco $x=\chi(y)$, $0\leq y\leq y_1$, è soluzione regolare di (1), poichè per $y=y_1$ è ≤ 1 ed è infinitesima all'infinito, è sempre ≤ 1; ciò contraddice la (4).

Essendo $\mu(y)$ la funzione definita dalla (3), chiameremo *potenziale conduttore parabolico* dell'arco γ la funzione

$$v(P)=\int_0^a \mu(\eta)U(x,\ y\ ;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta$$

e diremo che $\mu(y)$ è la corrispondente distribuzione di masse. La $v(P)$ è definita e continua in tutto il piano, escluso il punto $(\chi(0),\ 0)$; è non negativa e non superiore all'unità; è identicamente nulla per $y\leq 0$ (escluso il punto $(\chi(0),\ 0)$), assume il valore 1 nei punti di γ (fatta eccezione del punto $(\chi(0),\ 0)$) ed è soluzione regolare di (1) in ogni regione cui sia esterna la γ.

Consideriamo ora un contorno parabolico C costituito da due archi regolari γ_1 e γ_2 di equazione $x=\chi_1(y)$, $x=\chi_2(y)$, $0\leq y\leq b$, $b\geq a$, con $\chi_1(y)<\chi(y)<\chi_2(y)$ per $0\leq y<a$, e dal segmento di caratteristica $\chi_1(b)\leq x\leq \chi_2(b)$, $y=b$, che eventualmente può ridursi a un solo punto. Se $u(P)$ è una funzione continua insieme a u_{xx} e u_y nel dominio D individuato da C e da $y=0$, detto $\mathfrak{M}$ l'operatore aggiunto di $\mathfrak{L}$, si ha

$$u(Q)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C \{[U(P,\ Q)u_x-U_x(P,\ Q)u]dy-U(P,\ Q)udx\}-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint_D U(P,\ Q)\mathfrak{M}(u)dP,$$

essendo C percorso positivamente. Per $u(P)\equiv 1$, si ha

$$2\sqrt{\pi}=-\int_C [U(P,\ Q)dx+U_x(P,\ Q)dy].$$

Ora se $v(P)$ è il potenziale conduttore parabolico di γ, si ha

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C (vdx+v_xdy)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C\left[\left(\int_\gamma U(P,\ Q)\mu(\eta)d\eta\right)dx+\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\gamma U(P,\ Q)\mu(\eta)d\eta\right)dy\right]=$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_\gamma\left(\int_C [U(P,\ Q)dx+U_x(P,\ Q)dy]\right)\mu(\eta)d\eta=\int_\gamma \mu(\eta)d\eta.$$

Dunque l'integrale $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C (vdx+v_xdy)$ è indipendente dalla curva C d'integrazione e coincide con la massa totale relativa al potenziale conduttore parabolico. Questa quantità la chiameremo *capacità parabolica* di γ e la indicheremo con c.

Un modo molto semplice di esprimere la capacità parabolica è il seguente: consideriamo un contorno C limitato superiormente dalla caratteristica $y=a$ e mandiamo γ_1 e γ_2 all'infinito; poichè, per $|x| \to +\infty$, $\lim U(x, y;\ \chi(\eta), \eta)=0$ uniformemente al variare di η da zero a y e di y da 0 ad a, si ha

$$(5) \qquad c = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x,\ a)dx,$$

essendo $v(P)$ il potenziale conduttore parabolico di γ.

Si ha che *se γ è un arco regolare e γ_1 e γ_2 sono gli archi in cui γ è scomposto da un suo punto, dette c_γ, c_{γ_1}, c_{γ_2} le corrispondenti capacità paraboliche, è*

$$(6) \qquad c_\gamma \geq c_{\gamma_1}, \qquad c_\gamma \geq c_{\gamma_2}, \qquad c_\gamma \leq c_{\gamma_1} + c_{\gamma_2}.$$

Sia $x=\chi(y)$, $0 \leq y \leq b$, l'equazione di γ; $x=\chi(y)$, $0 \leq y \leq a$, e $x=\chi(y)$, $a \leq y \leq b$, $(a<b)$, quelle di γ_1 e γ_2. Siano $v(P)$, $v_1(P)$, $v_2(P)$ i potenziali conduttori parabolici e $\mu(y)$, $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$ le relative distribuzioni di masse.

La prima relazione (6) è immediata; poichè $\mu(y)=\mu_1(y)$ per $0<y\leq a$, si ha

$$c_\gamma = \int_0^b \mu(y)dy \geq \int_0^a \mu_1(y)dy = c_{\gamma_1}.$$

Per provare la seconda relazione basta far vedere che $v(P) \geq v_2(P)$ e ricordare l'espressione (5) della capacità parabolica. Allo scopo ragioniamo a sinistra di γ (a destra si può ripetere lo stesso ragionamento). Proviamo dunque che per $a \leq y \leq b$, $x<\chi(y)$, è $v(P)-v_2(P) \geq 0$. Infatti $v(P)-v_2(P)$ è positiva per $x<\chi(a)$, $y=a$, ed è nulla per $x=\chi(y)$, $a<y\leq b$; $v(P) \to 1$ per $P \to (\chi(a),\ a)$, mentre $v_2(P)$ è discontinua in $(\chi(a),\ a)$ con valori compresi tra 0 ed 1. Ora, se fosse $v(P)-v_2(P)<0$ in un punto P_1, sia per esempio $v(P_1)-v_2(P_1)=-\alpha^2$, con un ragionamento del tipo di uno già più volte usato, si vede che da ciò seguirebbe la esistenza di una successione $\{P_n\}$ di punti con $\{y_n\}$ decrescente ad a, tale che $v(P_n)-v_2(P_n)<-\alpha^2$ per ogni n; tale successione di punti deve convergere a $(\chi(a),\ a)$ perchè nei restanti punti della caratteristica $y=a$ è $v(P)-v_2(P)>0$. Ma per n abbastanza grande è $v(P_n)>1-\alpha^2/2$ e ciò contraddice la $v(P_n) \leq v_2(P_n)-\alpha^2 \leq 1-\alpha^2$.

Proviamo ora la terza delle relazioni (6). Poichè $\mu(y)=\mu_1(y)$ per $0<y\leq a$, basta provare che

$$\int_a^b \mu(\eta)d\eta \leq \int_a^b \mu_2(\eta)d\eta$$

o, per l'espressione (5) della capacità parabolica, che

$$\int_a^y \mu(\eta)U(x,\ y;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta \leq \int_a^y \mu_2(\eta)U(x,\ y;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta, \qquad a < y \leq b.$$

Chiamiamo $w(P)$ il primo integrale; esso è continuo per $a \leq y \leq b$, $x \leq \chi(y)$ (ragionando sulla sinistra di γ; sulla destra il ragionamento è lo stesso); è infinitesimo per $P \to (\chi(a),\ a)$ e nullo per $y = a$. Ora $w(P) - v_2(P)$ è nullo per $y = a$, $x < \chi(a)$, è negativo per $x = \chi(y)$, $a < y \leq b$. Se in un punto P_1 fosse $w(P_1) - v_2(P_1) = \alpha^2$, col solito ragionamento si individuerebbe una successione $\{P_n\}$ di punti convergente a $(\chi(a),\ a)$ tale che $w(P_n) - v_2(P_n) \geq \alpha^2$ per ogni n. Tenendo presente che $\mu(y)$ è continua per $y = a$ e che $\mu_2(y) \backsim \backsim 1/\pi\sqrt{y - a}$, si riconosce che

$$w(P_n) - v_2(P_n) = \int_a^{y_n} [\mu(\eta) - \mu_2(\eta)]U(x_n,\ y_n;\ \chi(\eta),\ \eta)d\eta < 0$$

non appena n è abbastanza grande. Di qui l'assurdo.

Dal ragionamento ora svolto segue che *relazioni analoghe alla* (6) *sussistono anche per i potenziali conduttori parabolici, cioè*

$$(6') \qquad v(P) \geq v_1(P), \qquad v(P) > v_2(P), \qquad v(P) \leq v_1(P) + v_2(P).$$

Inoltre le prime due delle (6) si generalizzano immediatamente nel senso che *la capacità parabolica di un arco è non inferiore alla capacità parabolica di un arco appartenente ad esso.*

Sia ora γ un arco regolare di equazione $x = \chi(y)$, $0 \leq y \leq a$. Proviamo che *la capacità parabolica dell'arco* $x = \chi(y)$, $a - \varepsilon \leq y \leq a$, *tende a zero insieme a* ε.

Premettiamo la seguente osservazione: sia γ_1 un altro arco regolare di equazione $x = \chi_1(y)$, $0 \leq y \leq a$, con $\chi(y) \leq \chi_1(y)$. Siano $v(P)$ e $v_1(P)$ i relativi potenziali conduttori parabolici. Allora se P è un punto di $S_2(\gamma_1)$, è $v(P) \leq v_1(P)$; infatti $v_1(P) - v(P)$ è non negativa su γ_1, nulla per $y = 0$, $x > \chi_1(0)$; ora se in un punto P_1 di $S_2(\gamma_1)$ fosse $v(P_1) > v_1(P_1)$, sia $v(P_1) - v_1(P_1) = \delta (\delta > 0)$, con un ragionamento di cui ci siamo serviti altre volte si verrebbe a individuare una successione di punti $\{P_n\}$ convergente a $(\chi_1(0),\ 0)$ tale che $v(P_n) - v_1(P_n) \geq \delta$ per ogni n. D'altra parte se $\mu_1(y)$ è la distribuzione di masse relativa a $v_1(P)$, poichè a $v(P)$ si può associare una distribuzione continua di masse $\bar{\mu}(y)$ tale che

$$v(P) = \int_0^y \bar{\mu}(\eta)U(x,\ y;\ \chi_1(\eta),\ \eta)d\eta \qquad \text{in } S_2(\gamma_1),$$

e poichè $\mu_1(y) \backsim 1/\pi\sqrt{y}$ per $y \to 0+$, la

$$v_1(P_n) - v(P_n) = \int_0^{y_n} [\mu_1(\eta) - \bar{\mu}(\eta)U(x_n, y_n; \chi_1(\eta), \eta)d\eta$$

riesce positiva per n abbastanza grande. Di qui l'assurdo. Analogo ragionamento se ci si riferisce ad $S_1(\gamma)$ anzichè ad $S_2(\gamma)$.

Ciò premesso, racchiudiamo l'arco γ_ε di γ compreso tra $y = a - \varepsilon$ e $y = a (\varepsilon > 0)$ in un rettangolo di cui due lati appartengano alle rette $x = x_1$, $x = x_2 (x_1 < x_2)$ e gli altri due alle caratteristiche $y = a - \varepsilon$ e $y = a$. Se $v_1(P)$ e $v_2(P)$ sono i potenziali conduttori parabolici dei primi due lati, si ha

$$(7) \quad c_{\gamma_\varepsilon} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{x_1} v_1(x, a)dx + \int_{x_1}^{x_2} dx + \int_{x_2}^{+\infty} v_2(x, a)dx\right) < \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\pi} + \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{\pi}} + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\pi}.$$

tenendo presente che la capacità parabolica del segmento $x = 0$, $0 \leq y \leq h$ è eguale a $2\sqrt{h}/\pi$. Ora se il rettangolo anzidetto è il più piccolo tra quelli che contengono γ_ε, per $\varepsilon \to 0$ anche $x_2 - x_1 \to 0$ e quindi $c_{\gamma_\varepsilon} \to 0$.

Sia ora P_0 un punto ed E un insieme di punti appartenenti a un semipiano $y \leq y_1$ con $y_1 < y_0$. Consideriamo le curve $\mathcal{C}(P_0, r)$ di equazione $U(x_0, y_0; x, y) = 1/r (r > 0)$ e sia $\mathfrak{D}(P_0, r)$ il dominio limitato che ha $\mathcal{C}(P_0, r)$ per completa frontiera. Sia r_g l'elemento di separazione delle due classi di numeri positivi r' ed r'' per cui $\mathfrak{D}(P_0, r')$ contiene E e per cui esistono punti di E esterni a $\mathfrak{D}(P, r'')$. Sia inoltre r_p l'elemento di separazione delle due classi di numeri positivi r' ed r'' per cui $\mathfrak{D}(P_0, r')$ non contiene punti di E e per cui $\mathfrak{D}(P_0, r'')$ contiene punti di E. Chiamiamo r_g ed r_p la *più grande* e la *più piccola distanza parabolica* P_0 da E. Orbene, se γ è l'arco regolare $x = \chi(y)$, $0 \leq y \leq a$, ed è $y_0 > a$, se $v(P)$ è il potenziale conduttore parabolico di γ e c_γ la sua capacità parabolica, si ha

$$(8) \qquad \frac{c_\gamma}{r_g} = \frac{1}{r_g}\int_0^a \mu(\eta)d\eta \leq v(P_0) = \int_0^a \mu(\eta)U(x_0, y_0; \chi(\eta), \eta)d\eta \leq \frac{1}{r_p}\int_0^a \mu(\eta)d\eta = \frac{c_\gamma}{r_p}.$$

2. Estendiamo ora i risultati del n. 1, al caso che γ sia un arco $x = \chi(y)$, $0 \leq y \leq a$, con $\chi(y)$ una funzione che supponiamo soltanto continua.

Allo scopo premettiamo alcune osservazioni.

1) Sia γ un arco regolare $x = \chi(y)$, $0 \leq y \leq a$, e $\{\gamma_n\}$ una successione di archi regolari, con γ_n di equazione $x = \chi_n(y)$, tali che $\chi(y) \leq \chi_n(y) \leq \chi_{n-1}(y)$ per $0 \leq y \leq a$, $n \geq 2$. Sia $v_n(P)$ il potenziale conduttore parabolico di γ_n. Supponiamo inoltre che sia $\lim_{n \to \infty} \chi_n(y) = \chi(y)$ uniformemente su $0 \leq y \leq a$.

Allora, comunque si fissi un punto P con $x > \chi(y)$, $0 \leq y \leq a$, ad esso corrisponde una $\bar{n}$ tale che $x > \chi_n(y)$ per $n > \bar{n}$; la successione $v_{\bar{n}+1}(P)$, $v_{\bar{n}+2}(P)$, ..., è monotona non crescente in P. Dunque in ogni dominio appartenente ad $S_2(\gamma)$, per una proposizione analoga al secondo teorema di HARNACK, la successione $\{v_n(P)\}$ converge uniformemente a una $\mathfrak{L}$-funzione $\bar{v}(P)$. Dimostriamo che $\bar{v}(P)$ coincide col potenziale conduttore parabolico $v(P)$ di γ. Poichè in ogni punto a destra di γ la $\{v_n(P)\}$ è non crescente (almeno da un certo n in poi) e $v_n(P) \geq v(P)$ (per n abbastanza grande), sarà $\bar{v}(P) \geq v(P)$ (a destra di γ). Ora $\bar{v}(P) - v(P)$ è nulla per $y = 0$, $x > \chi(0)$, è nulla per $x = \chi(y)$, $0 < y \leq a$; inoltre in $S_2(\gamma)$ è compresa tra 0 ed 1 ed è ivi una $\mathfrak{L}$-funzione regolare. Di più è evidentemente

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^a [v(\chi_n(y), y) - \bar{v}(\chi_n(y), y)]^2 dy = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \int_0^a [\bar{v}(x, y) - v(x, y)]^2 dy = 0$$

e quindi, per un teorema di unicità stabilito in altro luogo ([5]), dalla convergenza in media a zero segue che $\bar{v}(P) \equiv v(P)$ in $S_2(\gamma)$.

Analogo ragionamento in $S_1(\gamma)$.

2) Siano ora γ_1 e γ_2 due archi regolari $x = \chi_1(y)$, $x = \chi_2(y)$, $0 \leq y \leq a$, con $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ per $0 < y \leq a$. Siano $v_1(P)$ e $v_2(P)$ i relativi potenziali conduttori parabolici. Sia D il dominio $0 \leq y \leq a$, $\chi_1(y) \leq \chi_2(y)$. Chiameremo potenziale conduttore parabolico di D la funzione $w(P)$ così definita

$$w(P) = v_1(P) \qquad \text{per } x < \chi_1(y), \quad 0 \leq y \leq a,$$

$$w(P) = v_2(P) \qquad \text{per } x > \chi_2(y), \quad 0 \leq y \leq a,$$

$$w(P) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\chi_1(a)} U(x, y;\ \xi, a) v_1(\xi, a) d\xi + \int_{\chi_1(a)}^{\chi_2(a)} U(x, y;\ \xi, a) d\xi + \int_{\chi_2(a)}^{+\infty} U(x, y;\ \xi, a) v_2(\xi, a) d\xi \right)$$
$$\text{per } y > a.$$

Se γ_1 e γ_2 convergono uniformemente a γ, allora $w(P)$ converge al potenziale conduttore parabolico di γ.

([5]) Cfr. B. PINI, *Sui punti singolari delle soluzioni delle equazioni paraboliche lineari*, « Annali Univ. Ferrara », Sez. VII, Sci. Mat., vol. II (1953).

Veramente una proposizione della Nota ora citata è attualmente applicabile immediatamente se come curve approssimanti γ_n si considerano le particolari curve γ_n^* di equazione $x = \chi(y) + t_n$ con $\{t_n\}$ successione decrescente a zero. Però ad ogni γ_n si può associare una γ_n^* tale che $\chi_n(y) \leq \chi(y) + t_n$ per $0 \leq y \leq a$; detto allora $v_n^*(P)$ il potenziale conduttore parabolico di γ_n^*, e $v^*(P)$ il $\lim_{n \to \infty} v_n^*(P)$, in ogni punto di $S_2(\gamma)$ si ha, almeno per n abbastanza grande, $v_n^*(P) \geq v_n(P)$ e quindi $v^*(P) \geq \bar{v}(P) \geq v(P)$; avendosi $v^*(P) \equiv v(P)$, segue l'asserto.

L'integrale

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C (w\,dx + w_x\,dy) \tag{9}$$

esteso ad un contorno parabolico C (percorso positivamente) costituito da due archi regolari $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $0 \leq y \leq b$ $(b \geq a)$, con $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ per $0 \leq y < b$, e $\psi_1(y) < \chi_1(y)$, $\chi_2(y) < \psi_2(y)$ per $0 \leq y \leq a$, e dal segmento di caratteristica $y = b$, $\psi_1(b) \leq x \leq \psi_2(b)$ (eventualmente costituito da un solo punto), è indipendente da C; infatti se C' é un altro contorno del medesimo tipo e contenuto nel dominio limitato da C e dalla caratteristica $y = 0$, detto $D(C, C')$ il dominio limitato da C, C' e dai due segmenti della caratteristica $y = 0$ che hanno per estremi gli estremi di C e C' di ascisse rispettivamente minori di $\chi_1(0)$ e maggiori di $\chi_2(0)$, si ha

$$0 = \iint_{D(C,\,C')} \mathfrak{L}(w)\,dx\,dy = \int_C (w\,dx + w_x\,dy) - \int_{C'} (w\,dx + w_x\,dy),$$

se si tiene presente che $w(P) = 0$ per $y = 0$.

Poichè, se γ_1 e γ_2 convergono a γ, l'integrale (9) converge alla capacità parabolica di γ, lo chiameremo capacità parabolica di D. Di essa possiamo dare la seguente rappresentazione

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\chi_1(a)} v_1(x, a)\,dx + \chi_2(a) - \chi_1(a) + \int_{\chi_2(a)}^{+\infty} v_2(x, a)\,dx\right) \tag{5'}$$

che si ottiene in modo analogo alla (5).

3) Consideriamo il dominio limitato D individuato dagli archi regolari γ_1 e γ_2 di equazioni $x = \chi_1(y)$, $x = \chi_2(y)$, $0 < y \leq b$, $(\chi_1(y) < \chi_2(y))$ e dalle caratteristiche $y = 0$ e $y = b$. Siano γ_{11}, γ_{12} e γ_{21}, γ_{22} gli archi in cui la caratteristica $y = a (0 < a < b)$ scompone γ_1 e γ_2; D_1 e D_2 i domini in cui $y = a$ scompone D (intendiamo che γ_{11} e γ_{21} appartengono al semipiano $y < a$, γ_{12} e γ_{22} al semipiano $y \geq a$). Siano $w(P)$, $w_1(P)$, $w_2(P)$ i potenziali conduttori parabolici di D, D_1, D_2; $v_{11}(P)$, $v_{12}(P)$, $v_1(P)$ quelli di γ_{11}, γ_{12}, γ_1 e $v_{21}(P)$, $v_{22}(P)$, $v_2(P)$ quelli di γ_{21}, γ_{22}, γ_2. Si ha $w(P) = w_1(P) = v_{11}(P)$ in $S_1(\gamma_{11})$, $w_2(P) = v_{12}(P)$ in $S_1(\gamma_{12})$, $w(P) = w_1(P) = v_{21}(P)$ in $S_2(\gamma_{21})$, $w_2(P) = v_{22}(P)$ in $S_2(\gamma_{22})$; inoltre $w(P) = v_1(P)$ in $S_1(\gamma_1)$, $w(P) = v_2(P)$ in $S_2(\gamma_2)$. Ora, per quanto si è visto precedentemente, in $S_1(\gamma_1)$ è $v_1(P) \geq v_{11}(P)$, $v_1(P) > v_{12}(P)$, $v_1(P) < v_{11}(P) + v_{12}(P)$, mentre in $S_2(\gamma_2)$ è $v_2(P) > v_{21}(P)$, $v_2(P) > v_{22}(P)$, $v_2(P) < v_{21}(P) + v_{22}(P)$. Osservato ciò, è immediato che in $S_1(\gamma_{12})$ e in $S_2(\gamma_{22})$ è $w(P) > w_1(P)$ e così pure $w(P) > w_2(P)$. Inoltre per $y = b$, $x < \chi_1(b)$ è $w(P) = v_1(P) \leq v_{11}(P) + v_{12}(P) < \leq w_1(P) + w_2(P)$; per $y = b$, $\chi_1(b) < x \leq \chi_2(b)$, è $w(P) = w_2(P) = 1$ e $w_1(P) > 0$; per $y = b$, $x > \chi_2(b)$ è $w(P) = v_2(P) \leq v_{21}(P) + v_{22}(P) < w_1(P) + w_2(P)$. Pertanto

è sempre

$$w(P) \geq w_1(P), \qquad w(P) \geq w_2(P), \qquad w(P) \leq w_1(P) + w_2(P).$$

Poichè inoltre

$$c_{D_1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(x,\, b)dx\,, \qquad c_{D_2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x,\, b)dx\,, \qquad c_D = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,\, b)dx\,,$$

risulta

$$c_D \geq c_{D_1}, \qquad c_D \geq c_{D_2}, \qquad c_D \leq c_{D_1} + c_{D_2}.$$

Queste relazioni e quelle di sopra relative ai potenziali conduttori parabolici, estendone al caso in esame le (6) e (6').

Premesse le osservazioni 1), 2) e 3), consideriamo ora l'arco γ di equazione $x = \chi(y)$, $0 \leq y \leq a$, con $\chi(y)$ soltanto continua. Sia $x = \chi_n(y)$, $0 \leq y \leq a$, $n = 1, 2, \ldots$, una successione di funzioni continue con le derivate prime tali che $\chi(y) \leq \chi_n(y) \leq \chi_{n-1}(y)$ per $0 \leq y \leq a$, $n \geq 2$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_n(y) = \chi(y)$ uniformemente su $0 \leq y \leq a$. Siano $v_1(P)$, $v_2(P), \ldots$, i potenziali conduttori parabolici delle curve $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ora considerate e $\bar{v}_1(P)$, $\bar{v}_2(P), \ldots$, le funzioni così definite

$$\bar{v}_n(P) = \begin{cases} 1 & \text{per } \ 0 \leq y \leq a, \qquad \chi(y) \leq x \leq \chi_n(y) \\ v_n(P) & \ \ \text{»} \quad\ 0 \leq y \leq a, \qquad\qquad\ \ x > \chi_n(y). \end{cases}$$

Le funzioni $\bar{v}_n(P)$ in $S_2(\gamma)$ sono tutte $\mathfrak{L}$-prevalenti e la successione $\{\bar{v}_n(P)\}$ è una successione non crescente di funzioni non negative e ≤ 1; allora, per un teorema analogo al secondo teorema di HARNACK, essa converge a una funzione $\bar{v}(P)$, uniformemente in ogni dominio appartenente ad $S_2(\gamma)$, che è ivi soluzione regolare di $\mathfrak{L}(u) = 0$.

Questa funzione $\bar{v}(P)$ è indipendente dalla particolare successione $\{\gamma_n\}$. Infatti se $\{\gamma_n^*\}$ è un'altra successione dello stesso tipo, detta $\bar{v}^*(P)$ la funzione che resta individuata in corrispondenza di questa, avendosi $\bar{v}_n(P) \geq \bar{v}^*(P)$ e $\bar{v}_n^*(P) \geq \bar{v}(P)$, segue $\bar{v}(P) \geq \bar{v}^*(P) \geq \bar{v}(P)$ onde $\bar{v}^*(P) \equiv \bar{v}(P)$. Tale funzione coincide in $S_2(\gamma)$ col potenziale conduttore parabolico di γ se γ è regolare (in base all'osservazione 1)).

Se poi si considera una successione di archi approssimanti γ da sinistra anzichè da destra, si viene a individuare anche nella banda $S_1(\gamma)$ una $\mathfrak{L}$-funzione. La funzione che coincide con la prima in $S_2(\gamma)$, con la seconda in $S_1(\gamma)$ e che nel semipiano $y > a$ è individuata dall'integrale di POISSON coi valori di quelle sulla caratteristica $y = a$, si chiamerà il *potenziale conduttore parabolico* di γ. Detta $v(P)$ tale funzione, l'integrale

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C (vdx + v_x dy) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x,\, a)dx.$$

ove C è un contorno parabolico come quelli indicati precedentemente con la stessa lettera, si chiamerà la *capacità parabolica* di γ.

Poichè il potenziale conduttore e la capacità parabolici risultano i limiti del potenziale e della capacità parabolici di un dominio parabolico compreso tra $y=0$ e $y=a$ e contenente γ, si ha ancora che se $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ è

$$v_\gamma(P)\geq v_{\gamma_1}(P),\quad v_\gamma(P)\geq v_{\gamma_2}(P),\quad v_\gamma(P)\leq v_{\gamma_1}(P)+v_{\gamma_2}(P),$$
$$c_\gamma\geq c_{\gamma_1},\quad c_\gamma\geq c_{\gamma_2},\quad c_\gamma\leq c_{\gamma_1}+c_{\gamma_2},$$

relazioni che estendono le (6) e (6') al caso di un arco soltanto continuo.

Anche la (8) si estende al caso che l'arco γ sia soltanto continuo.

3. Consideriamo ora un dominio parabolico D definito da $\chi_1(y)\leq x\leq\chi_2(y)$, $0\leq y\leq a$ con $\chi_1(y)$ e $\chi_2(y)$ due funzioni continue tali che $\chi_1(y)<\chi_2(y)$ per $0<y\leq a$, e sia P_0 un punto per esempio dell'arco $\gamma_2(x=\chi_2(y))$. Si è già visto in altro luogo [6] che P_0 è regolare se è tale per D_{y_0} (intendendosi con tale notazione la porzione di D appartenente al semipiano $y\leq y_0$) e la condizione necessaria e sufficiente di regolarità è che esista una funzione $\mathfrak{L}$-prevalente continua in D_{y_0}, positiva in $D_{y_0}-P_0$ e infinitesima per $P\to P_0$. Di qui segue subito che se P_0 è regolare per il dominio D, lo è anche per ogni altro dominio contenuto in D e avente P_0 in comune con D. In particolare P_0 è regolare se per esso si può spiccare una semiretta appartenente al semipiano $y<y_0$, sia $x-x_0=m(y-y_0)$ con $|m|<+\infty$, tale che per $y_0-\delta\leq y\leq y_0 (\delta>0)$ sia $\chi_2(y)\leq\chi_2(y_0)+m(y-y_0)$.

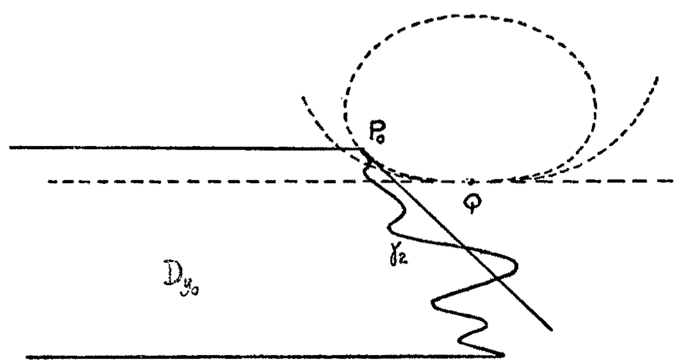

Fig. 1.

In queste condizioni si può infatti trovare un punto $Q(\bar{x},\bar{y})$ con $y_0-\delta\leq\bar{y}<y_0$ e un numero positivo r tali che il dominio limitato di frontiera $U(x, y;\bar{x},\bar{y})=1/r$ abbia il solo punto P_0 in comune con D_{y_0}. A ogni punto P del semipiano $y>\bar{y}$ esterno al dominio ora detto corrisponde un numero $\rho (r<\rho)$ tale che $U(x, y;\bar{x},\bar{y})=1/\rho$.

(6) Cfr. l. c. in (4).

Allora la funzione

$$V(x, y) = \begin{cases} 1/r - 1/\rho & \text{per} \quad \bar{y} \leq y \leq y_0 \\ 1/r & \text{»} \quad y < \bar{y} \end{cases} \tag{11}$$

è una barriera per D_{y_0} in P_0.

Ha quindi interesse esaminare soltanto il caso in cui

$$\min_{y \to y_0 -} \lim \frac{\chi_2(y) - \chi_2(y_0)}{y - y_0} = -\infty.$$

Possiamo anche trascurare il caso, in cui come si è già visto ([7]) P_0 è irregolare, dell'esistenza di un dominio di frontiera $U(x_0, y_0; x, y) = 1/r$ contenuto in D_{y_0}.

4. Sempre nell'ipotesi che P_0 sia un punto di γ_2, indichiamo con $\gamma_{2,r}$ l'arco di γ_2 compreso tra $y = y_0$ e $y = y_0 - r$ e sia $v_r(P)$ il suo potenziale conduttore parabolico. Sussiste il seguente teorema in tutto simile a un teorema di KELLOGG: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè P_0 sia regolare è che, qualunque sia r, riesca*

$$\lim_{P \to P_0} v_r(P) = 1, \qquad P \subset D_{y_0} - D_{y_0 - r} - \gamma_{2,r}.$$

La condizione è necessaria. Infatti se P_0 è regolare per D_{y_0}, lo è anche per $D_{y_0} - D_{y_0-r}$ (è sottinteso che r non è superiore all'altezza della striscia contenente D_{y_0}) e quindi dovrà verificarsi la precedente relazione di limite.

La condizione è anche sufficiente. Infatti sia $r_1, r_2, \ldots,$ una successione decrescente a zero e sia $r_1 > r$ (qualora sia $y_0 - r$ eguale alla più piccola ordinata dei punti di γ_2 si può sempre pensare di aver prolungato γ_2 al disotto della caratteristica corrispondente a tale ordinata); sia γ_{2,r_n} l'arco di γ_2 compreso tra $y = y_0$ e $y = y_0 - r_n$ e $v_{r_n}(P)$ il corrispondente potenziale conduttore parabolico. Poniamo

$$V(P) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{2^n} v_{r_n}(P).$$

Se P appartiene a γ_2, allora è $y_0 > y$ e quindi in P sono nulle tutte le $v_{r_n}(P)$ con n abbastanza grande, onde $V(P) < 1$; se P appartiene a $D_{y_0} - D_{y_0-r} - \gamma_{2,r}$ vi sarà qualche $v_{r_n}(P) < 1$ e quindi $V(P) < 1$. Dunque $1 - V(P)$ è una funzione $\mathfrak{L}$-prevalente, continua in $D_{y_0} - D_{y_0-r} - \gamma_{2,r}$, limitata in $D_{y_0} - D_{y_0-r}$ e con estremo inferiore positivo in ogni dominio ottenuto togliendo da $D_{y_0} - D_{y_0-r}$ un intorno di P_0. Poichè per ipotesi le $v_{r_n}(P)$ convergono ad 1 per $P \to P_0$, qualunque sia n, e la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_n v_{r_n}(P)/2^n$ è uniformemente convergente, si ha che $1 - V(P) \to 0$ per $P \to P_0$. Esiste dunque una barriera per $D_{y_0} - D_{y_0-r}$ in P_0 e quindi P_0 è regolare.

([7]) Cfr. l. c. in ([4]).

5. Sia ora γ un arco di equazione $x = \chi(y)$, $a \leq y \leq y_0$, con $\chi(y)$ continua. Sia λ un numero positivo $\neq 1$, per esempio < 1. Indichiamo con $\mathcal{C}(P_0, \lambda^n)$ la curva di equazione $U(x_0, y_0; x, y) = 1/\lambda^n$ per $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, essendo $x_0 = \chi(y_0)$.

Sia P_1 un punto di γ appartenente a $\mathcal{C}(P_0, \lambda)$ e riferiamoci all'arco $\widehat{P_0P_1}$. Chiamiamo S la striscia $y_1 \leq y \leq y_0$ ed S_1, S_2 le due bande in cui γ divide S. Sull'intervallo $y_1 \leq y \leq y_0$ resterà individuata una successione crescente $y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \ldots < y_0$ tale che l'arco e_n di γ di equazione $x = \chi(y)$, $y_n \leq y \leq y_{n+1}$, è tutto contenuto nella corona $[\mathcal{C}(P_0, \lambda^{\nu_n}), \mathcal{C}(P_0, \lambda^{\nu_n+1})]$, essendo $\nu_1, \nu_2, \ldots$, una successione di numeri interi (positivi o negativi) non necessariamente distinti.

Gli archi e_n possono anche venir ordinati raggruppando tra loro quelli contenuti nella stessa corona, siano $e_{n,1}, e_{n,2}, \ldots, e_{n,h_n}(h_n \leq +\infty)$ quelli contenuti nella corona, $[\mathcal{C}(P_0, \lambda^n), \mathcal{C}(P_0, \lambda^{n+1})]$. Indichiamo con c_n, $v_n(P)$ e $c_{n,i}$, $v_{n,i}(P)$ la capacità parabolica e il potenziale conduttore parabolico rispettivamente di e_n e di $e_{n,i}$.

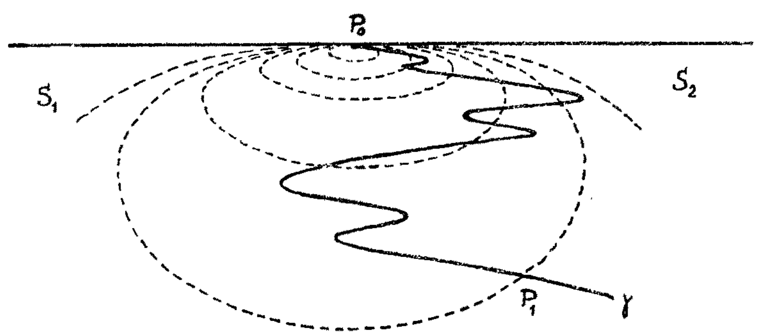

Fig. 2.

Ciò posto, consideriamo la serie

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{c_n}{\lambda^{\nu_n}} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{\sum_1^{h_n}{}_k c_{n,k}}{\lambda^n}. \tag{11}$$

Si ha che *se per un certo* $\lambda (0 < \lambda < 1)$ *la serie* (11) *è convergente, allora* P_0 *è irregolare per almeno una delle due bande* S_1, S_2.

Siano $\widehat{P_0P_m}$ e $\widehat{P_0P_{m'}}$ gli archi $x = \chi(y)$, $y_m \leq y \leq y_0$, e $x = \chi(y)$, $y_{m'} \leq y \leq y_0$, con $m' > m$; m sia tale che risulti

$$\sum_{m}^{\infty}{}_i \frac{c_i}{\lambda^{\nu_i}} < \frac{\lambda}{4}.$$

Chiamiamo $V_m(P)$, $V_{m'}(P)$, $V_{m,m'}(P)$ i potenziali conduttori parabolici rispettivamente di $\widehat{P_0P_m}$, $\widehat{P_0P_{m'}}$ e $\widehat{P_mP_{m'}}$. Per provare che P_0 è irregolare per almeno una delle due bande S_1, S_2, si deve far vedere che non è

$$\lim_{P \to P_0} V_m(P) = 1$$

al tendere di P a P_0 in $S - S\cdot\gamma$. Nell'ipotesi che ciò si verifichi, esisterà un intorno J di P_0 tale che per ogni P di $J\cdot(S - S\cdot\gamma)$ sarà

$$V_m(P) > 3/4 .$$

Ora è

$$V_m(P) \leq V_{m'}(P) + V_{m,m'}(P)$$

e la capacità $\overline{C}_{m'}$ di $\widehat{P_0P_{m'}}$ tende a zero per $m' \to +\infty$, in base una osservazione già fatta. D'altra parte, fissato un δ positivo sufficientemente piccolo e un ε positivo minore di δ, si può prendere m' così grande che $\widehat{P_0P_{m'}}$ sia contenuto nel rettangolo $y_{m'} \leq y < y_0$, $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$, che il rettangolo $y_{m'} \leq y \leq y_0$, $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ sia contenuto in $J\cdot S$ e che la più piccola distanza parabolica, r_p, dei segmenti $s^+(x = x_0 + \delta,\ y_{m'} \leq y \leq y_0)$ ed $s^-(x = = x_0 - \delta,\ y_{m'} \leq y \leq y_0)$ da $\widehat{P_0P_{m'}}$, che risulta positiva, soddisfi la condizione

$$r_p > 4\overline{C}_{m'} .$$

Poichè su s^+ ed s^- è

$$V_{m'}(P) \leq \frac{\overline{C}_{m'}}{r_p}$$

mentre su s'^+ $(y = y_{m'},\ \chi(y_{m'}) < x \leq x_0 + \delta)$ e su s'^- $(y = y_{m'},\ x_0 - \delta \leq x < < \chi(y_{m'}))$ è $V_{m'}(P) = 0$.

Pertanto su s^+, s^-, s'^+, s'^-, è

$$3/4 < 1/4 + V_{m,m'}(P)$$

cioè

$$V_{m,m'}(P) > 1/2.$$

Ma $V_{m,m'}(P)$ è il limite di una successione non crescente di funzioni le quali saranno tutte $> 1/2$ sui segmenti anzidetti ed eguali ad 1 in un intorno di $x = \chi(y_{m'})$ sulla retta $y = y_{m'}$ (intorno beninteso variabile dall'una all'altra funzione) e poichè per $y > y_{m'}$ sono soluzioni regolari di $\mathfrak{L}(u) = 0$, per una proprietà estremale delle $\mathfrak{L}$-funzioni, saranno anche tutte $> 1/2$ nell'interno del rettangolo $y_{m'} \leq y \leq y_0$, $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$.

Perciò in tale rettangolo è

$$V_{m,m'}(P) \geq 1/2. \tag{12}$$

Ora la minima distanza parabolica di P_0 da e_i è λ^{ν_i+1}, essendo e_i contenuto nella corona $[\mathcal{C}(P_0, \lambda^{\nu_i}), \mathcal{C}(P_0, \lambda^{\nu_i+1})]$; perciò

$$V_{m,m'}(P_0) \leq \sum_{m}^{m'-1}{}_i\, v_i(P_0) \leq \sum_{m}^{m'-1}{}_i \frac{c_i}{\lambda^{\nu_i+1}} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{m}^{+\infty}{}_i \frac{c_i}{\lambda^{\nu_i}} < \frac{1}{4}$$

e quindi anche, per continuità,

$$V_{m,m'}(P) < 1/4$$

in tutti i punti di S di un intorno di P_0, il che contraddice la (12).

In applicazione del provato criterio di irregolarità diamo ora un esempio di punto irregolare più riposto di quelli indicati nel precedente n. 3.

Consideriamo la curva di equazione

$$x = 2\sqrt{y \lg \sqrt{-y}}, \qquad -1 \leq y \leq 0.$$

Sia λ un numero positivo < 1 ed $n_1, n_2, \dots, n_\nu, \dots$, una successione crescente di numeri naturali. Indichiamo con P_ν il punto di γ appartenente alla caratteristica $y = -\lambda^{2n_\nu}$ e con Q_ν il punto appartenente alla semiretta $y = -\lambda^{2n_\nu}$, $x \geq 0$, e alla curva $\mathcal{C}(0, \lambda^\nu)$. Detto e_ν l'arco $\widehat{P_\nu P_{\nu+1}}$ di γ, scegliamo su e_ν due punti P_ν' e P_ν'' tali che l'ordinata del primo sia inferiore a quella del secondo, e chiamiamo $\bar{e}_\nu$ l'arco $\widehat{P_\nu' P_\nu''}$ di γ. Se sostituiamo l'arco e_ν con la curva costituita dai segmenti $\overline{Q_\nu P_\nu'}$, $\overline{Q_{\nu+1} P_\nu''}$ e dall'arco $\bar{e}_\nu$, e ciò facciamo per $\nu = 1, 2, \dots$, si viene a individuare una nuova curva $\bar{\gamma}$. Ebbene, è possibile prendere la successione $n_1, n_2, \dots$, e i punti P_ν' e P_ν'', $\nu = 1, 2, \dots$, in modo tale che O riesca irregolare per la banda a sinistra di $\bar{\gamma}$.

La capacità parabolica $\bar{c}_\nu$ di $\bar{e}_\nu$ è non superiore alla capacità parabolica c_ν di e_ν; ora non appena ν è abbastanza grande, sia $\nu \geq \bar{\nu}$, l'arco e_ν è contenuto nel rettangolo che ha due vertici opposti in P_ν e $P_{\nu+1}$; perciò, per una osservazione fatta al n. 2, c_ν è inferiore alla capacità parabolica di tale rettangolo, che è

$$\frac{4\lambda^{n_\nu}}{\pi} \sqrt{1 - \lambda^{2(n_{\nu+1} - n_\nu)}} + \frac{\lambda^{n_\nu}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{|\lg \lambda|}\, \left| \sqrt{n_\nu} - \sqrt{n_{\nu+1} \lambda^{2(n_{\nu+1} - n_\nu)}} \right|. \tag{13}$$

Il segmento $\overline{Q_\nu P_\nu'}$ è scomposto dalle curve $\mathcal{C}(0, \lambda^i)$, $i = 1, 2, \dots, \nu - 1$, in ν parti, siano, nell'ordine, $\delta_{\nu,1}, \delta_{\nu,2}, \dots, \delta_{\nu,\nu}$. Se P_ν' è sufficientemente prossimo a P_ν, la capacità parabolica di $\delta_{\nu,i}$ differisce di tanto poco quanto si vuole da

$$c_{\nu,i} = \frac{\sqrt{|\lg \lambda|}}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{n_\nu - i + 1} - \sqrt{n_\nu - i}) \lambda^{n_\nu}.$$

Analoga osservazione se P_ν' si sostituisce con P_ν''.

Allora, poichè gli archi e_ν hanno da 0 distanza parabolica eguale ad 1 e $\delta_{\nu,i}$ è contenuto nella corona $[\mathcal{C}(0, \lambda^{i-1}), \mathcal{C}(0, \lambda^i)]$, in base al precedente criterio di irregolarità, 0 è irregolare, ed evidentemente per la banda a sinistra di $\bar{\gamma}$, se sono convergenti le serie

$$\sum_{\nu}^{\infty} c_\nu, \qquad \sum_{\nu}^{\infty} \sum_{1}^{\nu}{}_i \frac{c_{\nu,i}}{\lambda^i}.$$

D'altra parte, ricordando la (13) e l'espressione di $c_{\nu,i}$, si vede che si può prendere la successione $n_1, n_2, \ldots$, in modo che riescano convergenti le serie

$$\sum_{\nu}^{\infty} \lambda^{n_\nu} \,|\, \sqrt{n_\nu} - \sqrt{n_{\nu+1}\lambda^{2(n_{\nu+1}-n_\nu)}} \,|$$

e

$$\sum_{\nu}^{\infty} \sum_{1}^{\nu}{}_i \lambda^{n_\nu - i}(\sqrt{n_\nu - i + 1} - \sqrt{n_\nu - i})$$

(per esempio prendendo $\lambda = 1/2$ e $n_\nu = 2^\nu$).

Notiamo espressamente che per nessun numero positivo ρ il dominio limitato di frontiera $U(0, 0;\ x, y) = 1/\rho$ è tutto contenuto nella banda a sinistra di $\bar{\gamma}$.

6. Passiamo ad esporre un criterio di regolarità.

Indichiamo con γ il solito arco di equazione $x = \chi(y)$, $a \leq y \leq y_0$, con $\chi(y)$ continua e usiamo le stesse notazioni introdotte all'inizio del n. 5. Si ha che: *Se esiste un numero intero $N \geq 0$ tale che, per dei numeri λ, $0 < \lambda < 1$, arbitrariamente prossimi ad uno, si verifica che per ogni numero naturale n esiste un arco e_n^* di γ contenuto contemporaneamente nella corona $[\mathcal{C}(P_0, \lambda^{n-N}), \mathcal{C}(P_0, \lambda^{n+1})]$ e nella striscia $y_0 - \lambda^{2n} \leq y \leq y_0 - \lambda^{2n+2}$, ed è divergente la serie*

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{c_n^*}{\lambda^n} \tag{14}$$

(ove c_n^* indica la capacità di e_n^*), allora P_0 è regolare per entrambe le bande S_1 ed S_2.

Cominciamo col supporre che l'arco di γ appartenente a un arbitrario semipiano $y \leq \bar{y}$ con $\bar{y} < y_0$, sia regolare. È evidente che, fissato ad arbitrio un numero naturale k, almeno una delle serie

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{c_{kn+i}^*}{\lambda^{kn+i}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

è divergente. Sia per esempio divergente la prima di queste. Poniamo

$$V_{m,m'}(P) = \sum_{m}^{m'}{}_n v_{kn}^*(P) \qquad (m' > m)$$

dove $v^*_{kn}(P)$ è il potenziale conduttore parabolico dell'arco e^*_{kn} di capacità parabolica c^*_{kn}. Su $e^*_{km'}$ è

$$v^*_{km'}(P) \leq 1, \quad v^*_{k(m'-i)}(P) \leq \frac{c^*_{k(m'-i)}}{\sqrt{\lambda^{2k(m'-i)+2} - \lambda^{2km'}}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m'-m;$$

e quindi

$$V_{m,m'}(P) \leq 1 + \sum_1^{m'-m}{}_i \frac{c^*_{k(m'-i)}}{\lambda^{k(m'-i)}\sqrt{\lambda^2 - \lambda^{2ki}}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^{2k}}} \sum_m^{m'}{}_j \frac{c^*_{kj}}{\lambda^{kj}}.$$

Su $e^*_{k(m'-1)}$ è

$$v^*_{k(m'-1)}(P) \leq 1, \quad v^*_{k(m'-i)}(P) \leq \frac{c^*_{k(m'-i)}}{\sqrt{\lambda^{2k(m'-i)+2} - \lambda^{2k(m'-1)}}}, \quad i = 2, 3, \ldots, m'-m,$$

e quindi

$$V_{m,m'}(P) \leq 1 + \sum_2^{m'-m}{}_i \frac{c^*_{k(m'-i)}}{\lambda^{k(m'-i)}\sqrt{\lambda^2 - \lambda^{2k(i-1)}}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^{2k}}} \sum_m^{m'}{}_j \frac{c^*_{kj}}{\lambda^{kj}}.$$

Ecc. Perciò sugli archi $e^*_{km}, e^*_{k(m+1)}, \ldots, e^*_{km'}$ è

$$V_{m,m'}(P) < \frac{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^{2k}} + \sum_m^{m'}{}_i \frac{c^*_{ki}}{\lambda^{ki}}}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^{2k}}} < \frac{1 + \sum_m^{m'}{}_i \frac{c^*_{ki}}{\lambda^{ki}}}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^{2k}}}$$

e quindi anche

$$\overline{V}_{m,m'}(P) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^{2k}}}{1 + \sum_m^{m'}{}_i \frac{c^*_{ki}}{\lambda^{ki}}} V_{m,m'}(P) < 1. \tag{15}$$

Ma $\overline{V}_{m,m'}(P)$ fuori degli archi e^*_{ki} è una $\mathfrak{L}$-funzione regolare, nulla nei punti di ordinata minore della minima ordinata dei punti di e^*_{km}, sia $\bar{y}_m$, e infinitesima all'infinito. Perciò il suo massimo è raggiunto su tali archi e quindi la (15) è vera dappertutto. Ora il potenziale conduttore parabolico $V(P)$ dell'arco di γ appartenente alla striscia $\bar{y}_m \leq y \leq y_0$ è uguale ad 1 sugli archi e^*_{ki}, onde $V(P) \geq \overline{V}_{m,m'}(P)$. D'altra parte e^*_{ki} è contenuto in una corona $[\mathcal{C}(P_0, \lambda^{\nu^*_{ki}}), \mathcal{C}(P_0, \lambda^{\nu^*_{ki}+1})]$ con $ki - N \leq \nu^*_{ki} \leq ki$, onde

$$v^*_{ki}(P_0) > \frac{c^*_{ki}}{\lambda^{\nu^*_{ki}}} \geq \frac{c^*_{ki}}{\lambda^{ki-N}} \tag{16}$$

e quindi

$$1 \geq V(P) > \lambda^N \sqrt{\lambda^2 - \lambda^{2k}} \frac{\sum_m^{m'}{}_i \frac{c^*_{ki}}{\lambda^{ki}}}{1 + \sum_m^{m'}{}_i \frac{c^*_{ki}}{\lambda^{ki}}}. \tag{17}$$

Ma, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può prendere λ così prossimo alla unità e k così grande che sia

$$\lambda^N \sqrt{\lambda^2 - \lambda^{2k}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2};$$

poi, fissato m, si può prendere m' così grande che sia

$$\sum_{m}^{m'}{}_i \frac{c^*_{ki}}{\lambda^{ki}} > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Inoltre la (16) sussiste, per continuità, se al posto di P_0 si pone un arbitrario punto di un intorno J_i abbastanza piccolo di P_0; allora per P in un intorno di P_0 comune agl'intorni $J_m, J_{m+1}, \dots, J_{m'}$, sarà

$$1 \geq V(P) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 > 1 - \varepsilon.$$

È allora verificata la condizione del n. 4 e perciò P_0 è regolare.

Se poi si abbandona l'ipotesi che ogni arco di γ, appartenente a un qualsiasi semipiano $y \leq \bar{y}$ con $\bar{y} < y_0$, sia regolare, la condizione è la stessa, come si riconosce ragionando sulle funzioni che al limite definiscono i potenziali conduttori parabolici.

Diamo ora, appoggiandoci al provato criterio di regolarità, un esempio di punto regolare cui non sono applicabili le condizioni di regolarità del n. 3. Questo esempio permette anche di istituire facilmente un confronto con la seguente condizione di regolarità di Petrowski: se $\rho(y)$ è una funzione positiva per $c \leq y \leq 0$, decrescente e convergente a zero per $y \to 0-$, e se $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$ sono due funzioni continue tali che $\varphi_1(y) < \varphi_2(y)$ per $c \leq y < 0$ (potendo eventualmente essere $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$) e

$$\varphi_1(y) - \varphi_1(0) \geq -2\sqrt{y \lg \rho(y)} \quad , \quad \varphi_2(y) - \varphi_2(0) \leq 2\sqrt{y \lg \rho(y)}$$

per $c \leq y \leq 0$, allora se l'integrale

$$\int_c^0 \frac{\rho(y)\sqrt{|\lg \rho(y)|}}{y}\, dy$$

è divergente, i punti $(\varphi_1(0), 0)$ e $(\varphi_2(0), 0)$ sono regolari per il dominio $c \leq y \leq 0$, $\varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)$.

Fissiamo un numero $\lambda (0 < \lambda < 1)$ e consideriamo il segmento $x = 0$, $-\lambda^2 \leq y \leq 0$. Indichiamo con P_n il punto $(0, -\lambda^n)$ e consideriamo i segmenti $\overline{P_{2n}P_{2n+1}}$, $n = 1, 2, \dots$.

Il segmento $\overline{P_{2n}P_{2n+1}}$ è contenuto nella striscia $-\lambda^{2n} \leq y \leq -\lambda^{2n+2}$ e nella corona $[\mathcal{C}(0, \lambda^n), \mathcal{C}(0, \lambda^{n+1})]$ ed è

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\operatorname{cap} \overline{P_{2n}P_{2n+1}}}{\lambda^n} = +\infty$$

perchè cap $\overline{P_{2n}P_{2n+1}} = 2\sqrt{\lambda^{2n} - \lambda^{2n+1}}/\pi$. Sostituiamo ora $\lambda^{1/4}$ a λ. $\overline{P_{2n}P_{2n+1}}$ si scompone nei segmenti $\overline{Q_{4n}Q_{4n+1}}$ e $\overline{Q_{4n+1}Q_{4n+2}}$ appartenenti rispettivamente alle striscie $-\lambda^{2n} \leq y \leq -\lambda^{2n+1/2}$, $-\lambda^{2n+1/2} \leq y \leq -\lambda^{2n+1}$ e alle corone $[\mathcal{C}(0, \lambda^n)$, $\mathcal{C}(0, \lambda^{n+1/4})]$, $[\mathcal{C}(0, \lambda^{n+1/4})$, $\mathcal{C}(0, \lambda^{n+1/2})]$ ed è

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \left(\frac{\text{cap } \overline{Q_{4n}Q_{4n+1}}}{\lambda^n} + \frac{\text{cap } \overline{Q_{4n+1}Q_{4n+2}}}{\lambda^{n+1/4}} \right) = +\infty.$$

Analogo risultato si ha sostituendo $\lambda^{1/8}$ a $\lambda^{1/4}$, ecc.

Pertanto, se si fissa ad arbitrio una successione $\{x_n\}$ convergente a zero e si indica con γ la spezzata $P_2P_3\overline{P}_3P_4P_5\overline{P}_5 \ldots$ ove $\overline{P}_{2n+1}$ sta ad indicare il punto $(x_n, -(\lambda^{2n+1} + \lambda^{2n+2})/2)$, si ottiene una curva che si trova nelle condizioni del teorema precedente. Pertanto 0 è regolare per entrambe le bande in cui γ divide la striscia $-\lambda^2 \leq y \leq 0$.

D'altra parte, se ci poniamo a sinistra di γ e supponiamo ad esempio che sia $x_n = ((\lambda^{2n+1} + \lambda^{2n+2})/2)^{1/4}$, detta $x = \varphi_2(y)$ l'equazione di γ, è evidente che non esiste nessuna funzione positiva $\rho(y)$ soddisfacente le condizioni di PETROWSKI e per cui sia $\varphi_2(y) \leq 2\sqrt{y \lg \rho(y)}$.

Pertanto il nostro criterio di regolarità non rientra in quello di PETROWSKI.