Sur l'espace des fonctions partielles.

par K. KURATOWSKI (à Warszawa).

À Mauro Picone pour son 70me anniversaire.

Résumé. - *L'auteur montre que la famille des fonctions continues définies sur des sous-ensembles fermés d'un espace compact peut être conçue comme espace métrique.*

1. **L'espace fonctionnel** Y^X. - Soient X et Y deux espaces métriques dont le premier est compact [1]. Nous désignons par Y^X l'espace de toutes les fonctions continues $y = f(x)$, où x parcourt l'espace X (tout entier) et où y appartient à l'espace Y; la distance entre deux éléments f et g de l'espace Y^X est définie par la formule

$$(1) \qquad |f - g| = \sup |f(x) - g(x)|.$$

Ainsi, par exemple, si X est un intervalle $a \leq x \leq b$ et Y est l'ensemble de tous les nombres réels, la distance des fonctions f et g est la longueur du plus grand segment vertical contenu entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$.

On prouve que la formule (1) confère à l'ensemble Y^X le caractère d'un espace métrique; de plus, si Y est un espace complet [2], Y^X l'est également (voir [1] et [3], p. 312).

Ajoutons que la convergence d'une suite $f_1, f_2, \ldots$, vers f, entendue dans le sens de la définition (1) (ce qui veut dire que $\lim_{n=\infty} |f_n - f| = 0$), signifie la convergence uniforme de cette suite sur X.

2. **Distance entre ensembles.** - Avant de formuler le théorème qui présente le sujet principal de cette note, rappelons la notion, due à HAUSDORFF, de distance entre ensembles.

---

(1) Un espace est dit *compact* (au sens de FRÉCHET) lorsque toute suite infinie de points contient une suite partielle convergente.

(2) On dit qu'une suite de points (d'un espace métrique) $x_1, x_2, \ldots$ satisfait à la *condition de Cauchy* lorsqu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un k tel que pour $n > k$ on a $|x_n - x_k| < \varepsilon$. Si toute suite satisfaisant à la condition de CAUCHY converge vers un point appartenant à l'espace envisagé, cet espace est dit *complet.*

Étant donnés un point p de l'espace métrique envisagé et un sous-ensemble A (non vide) de cet espace, on entend par écart de p à A le nombre

$$\rho(p, A) = \inf_{x \in A} |p - x|.$$

A et B étant deux sous-ensembles fermés et bornés (non vides) d'un espace métrique X, on entend par distance (de Hausdorff) de ces ensembles, en symboles: dist (A, B), la borne supérieure des écarts $\rho(x, B)$ et $\rho(y, A)$ où x et y parcourent respectivement A et B (voir [2] ou [3], p. 106).

La famille des sous-ensembles fermés et bornés (non vides) de l'espace X est désignée par 2^X. Désignons par $(2^X)_c$ la famille des sous-ensembles compacts (non vides) de X. Tout ensemble compact étant fermé et borné, la distance de Hausdorff attribue à cette famille le caractère d'espace métrique. Le passage à la limite dans cet espace est donc défini par l'équivalence

$$(2) \qquad (A_n \to A) \equiv (\lim_{n=\infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0).$$

En vue des raisonnements qui suivent, il importe de remarquer que la notion de limite d'une suite d'ensembles peut être définie aussi (d'une façon équivalente), comme il suit.

Étant donnée une suite d'ensembles $A_1, A_2, \ldots$, on appelle *limite supérieure* (topologique) de cette suite l'ensemble $Ls\, A_n$ composé de tous les points x de la forme

$$(3) \qquad x = \lim_{n=\infty} x_{k_n} \text{ où } x_{k_n} \in A_{k_n} \text{ et } k_1 < k_2 < \ldots$$

On appelle *limite inférieure* — l'ensemble $Li\, A_n$ composé des points x de la forme

$$(4) \qquad x = \lim_{n=\infty} x_n \text{ où } x_n \in A_n.$$

Si $Li\, A_n = A = Ls\, A_n$, on écrit $A = \operatorname{Lim} A_n$.

On montre que, si X est compact, on a dans l'espace $(2^X)_c$, identique à 2^X, l'équivalence suivante:

$$(5) \qquad (A_n \to A) \equiv (A = \operatorname{Lim} A_n).$$

Bien que dans la suite nous allons supposer — pour simplifier — que l'espace X (ainsi que Y) est *compact,* il semble intéressant de remarquer que l'équivalence suivante a lieu dans l'espace $(2^X)_c$ pour tout X (compact ou non):

$$(A_n \to A) \equiv (A = \operatorname{Lim} A_n \text{ et } A \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \text{ est compact}).$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'établir le lemme suivant:

Lemme. - *Si les ensembles $A, A_1, A_2, \ldots$ sont compacts et $A_n \to A$, l'ensemble-somme $A \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ est compact.*

Soit, en effet, $x_n \in A_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Par hypothèse (cf. (2)), $\lim\limits_{n=\infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0$. Il existe donc une suite de points $p_1, p_2, \ldots$ de A telle que

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} |p_n - x_n| = 0.$$

L'ensemble A étant compact, cette suite contient une suite partielle convergente :

$$\lim_{n=\infty} p_{k_n} = p, \text{ d'où } \lim_{n=\infty} x_{k_n} = p \in A.$$

en vertu de (6).

La suite $x_1, x_2, \ldots$ contient donc une suite convergente. Cela prouve que l'ensemble $A \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ est compact.

3. **L'espace $P(X, Y)$ des fonctions partielles.** - Nous désignons ainsi l'ensemble de toutes les fonctions continues définies sur des sous-ensembles compacts (non-vides) de l'espace X et dont les valeurs appartiennent à l'espace Y. En d'autres termes

$$P(X, Y) = \bigcup_{A \in (2^X)_c} Y^A.$$

Désignons par A_f l'ensemble des arguments de la fonction f (c'est donc un ensemble compact, par hypothèse). Nous introduisons la notion de limite dans $P(X, Y)$ en admettant la définition suivante.

DÉFINITION. - *La suite $f_1, f_2, \ldots$ converge vers f, en symbole $\lim\limits_{n=\infty} f_n = f$, lorsque*

1° $A_{f_n} \to A_f$ *(dans le sens établi au N. 2)*,

2° *la convergence de la suite $f_1, f_2, \ldots$ vers f est continue* (cf. [3], p. 93), *c'est-à-dire que la condition*

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} x_n = x, \quad \text{où } x_n \in A_{f_n} \text{ et } x \in A_f,$$

entraîne

$$(8) \qquad \lim_{n=\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

La notion de limite étant ainsi conçue, l'espace $P(X, Y)$ est un espace L^* (muni de la notion de limite, cf. [3] p. 83). Nous allons démontrer que cet espace est *métrisable :*

THÉORÈME. - *En identifiant l'élément $f \in P(X, Y)$ avec le sous-ensemble $\underset{x,y}{E}[y = f(x)]$ du produit cartésien $X \times Y$* [3] *et en admettant comme distance des ensembles f et g leur distance au sens de* HAUSDORFF, *on métrise l'espace $P(X, Y)$ sans affecter la notion de limite introduite ci-dessus.*

---

[3] On appelle *produit cartésien* des espaces X et Y l'espace $Z = X \times Y$ composé de tous les couples (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$. Si les espaces X et Y sont métriques, l'espace Z l'est également, en admettant que la distance de (x, y) à (x_1, y_1) est $|x - x_1| + |y - y_1|$.

Autrement dit, *on a l'équivalence:*

$$(9) \qquad (f_n \to f) \equiv (\lim_{n=\infty} f_n = f),$$

la limite dans le membre gauche étant entendue dans le sens établi au N. 2 et la limite dans le membre droit étant celle de la définition du N. 3.

4. **Lemme.** - *Soient X et Y deux espaces métriques. En faisant correspondre à tout sous-ensemble compact Z de $X \times Y$ sa projection $F(Z)$ sur l'axe X, on définit une transformation continue de l'espace* $(2^{X \times Y})_c$ *en* $(2^X)_c$.

Posons, en effet,

$$(10) \qquad Z = \mathrm{Lim}\, Z_n .$$

Il s'agit de montrer que $F(Z) = \mathrm{Lim}\, F(Z_n)$, c'est-à-dire que

$$(11) \qquad Ls\, F(Z_n) \subset F(Z) \subset Li\, F(Z_n).$$

Or, soit $x \in Ls\, F(Z_n)$. Il existe donc une suite $k_1 < k_2 < \dots$ telle que

$$(12) \qquad x = \lim_{n=\infty} x_{k_n}$$

et

$$(13) \qquad x_{k_n} \in F(Z_{k_n}).$$

La formule (13) implique l'existence d'une suite $y_{k_1}, y_{k_2}, \dots$ telle que

$$(14) \qquad (x_{k_n}, y_{k_n}) \in Z_{k_n}.$$

L'ensemble $Z \cup Z_1 \cup Z_2 \cup \dots$ étant compact (d'après le lemme du N. 2), la suite $(x_{k_1}, y_{k_1}), (x_{k_2}, y_{k_2}), \dots$ contient une suite partielle convergente. Sans affecter la généralité, on peut admettre que cette suite partielle est identique à la suite toute entière. Posons donc

$$(15) \qquad y = \lim_{n=\infty} y_{k_n}.$$

La formule (15), rapprochée de (12), implique en vertu de (14) et (10) que $(x, y) \in Z$, donc que $x \in F(Z)$.

La première inclusion (11) se trouve ainsi établie.

Afin d'établir la deuxième, posons $x \in F(Z)$. Il existe donc un y tel que $(x, y) \in Z$. D'autre part, en vertu de (10), on a $Z \subset Li\, Z_n$; il existe donc deux suites $x_1, x_2, \dots$ et $y_1, y_2, \dots$ telles que

$$\lim_{n=\infty} x_n = x, \quad \lim_{n=\infty} y_n = y \text{ et } (x_n, y_n) \in Z_n, \text{ d'où } x_n \in F(Z_n).$$

La première et la dernière de ces formules impliquent que $x \in Li\, F(Z_n)$. D'où la deuxième inclusion (11).

5. **Démonstration du théorème.** - La démonstration de l'équivalence (9) se compose de deux parties.

1) Admettons que

$$f_n \to f. \tag{16}$$

D'après le lemme du N. 4, la condition 1° du N. 3 est remplie. Il s'agit de prouver qu'il en est de même de la condition 2°, c'est-à-dire que les conditions (7) impliquent (8).

Admettons donc que les conditions (7) soient remplies. L'ensemble $f \cup f_1 \cup f_2 \cup \ldots$ étant compact d'après la formule (16) et le lemme du N. 2, il suffit — pour établir la formule (8) — de démontrer que toute suite convergente extraite de la suite $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... converge vers $f(x)$.

Or soit

$$\lim_{n=\infty} f_{k_n}(x_{k_n}) = y.$$

Il en résulte d'après (7) que

$$\lim_{n=\infty} (x_{k_n}, f_{k_n}(x_{k_n})) = (x, y),$$

d'où en vertu de (16), on a $(x, y) \in f$, c'est-à-dire $y = f(x)$.

2) Admettons que

$$\lim_{n=\infty} f_n = f. \tag{17}$$

Il s'agit d'établir la double inclusion

$$Ls\, f_n \subset f \subset Li\, f_n. \tag{18}$$

Or soit $(x, y) \in Ls\, f_n$. On a donc

$$x = \lim_{n=\infty} x_{k_n}, \quad y = \lim_{n=\infty} f_{k_n}(x_{k_n}), \text{ où } x_{k_n} \in A_{f_{k_n}}.$$

On en conclut en vertu de (17) (cf. N. 3, 1°) que $x \in A_f$ et que (cf. N. 3, 2°)

$$\lim_{n=\infty} f_{k_n}(x_{k_n}) = f(x), \text{ d'où } y = f(x), \text{ donc } (x, y) \in f.$$

La première inclusion (18) se trouve ainsi établie.

Afin de prouver la deuxième, posons $(x, y) \in f$, c'est-à-dire $y = f(x)$ et $x \in A_f$. D'après (17) on a (cf. N. 3, 1°) $A_f \subset Li\, A_{f_n}$, donc

$$x = \lim_{n=\infty} x_n \text{ et } x_n \in A_{f_n},$$

ce qui implique (8). En d'autres termes

$$(x, y) = \lim_{n=\infty} (x_n, f_n(x_n)), \text{ d'où } (x, y) \in Li\, f_n.$$

6. **Remarques.** - 1) Dans le cas où les fonctions $f, f_1, f_2, \ldots$ sont définies sur l'espace X tout entier, la condition $\lim f_n = f$ équivaut à la convergence uniforme de la suite $f_1, f_2, \ldots$ vers la fonction f. On voit ainsi que la définition du N. 3 généralise la notion de convergence uniforme sur laquelle a été basée la notion de limite dans l'espace Y^X (cf. N 1).

2) Admettons que les espaces X et Y soient complets. L'espace $P(X, Y)$ métrisé par la distance de HAUSDORFF (conformément au théorème du N. 3) n'est pas en général complet.

Ainsi, par exemple, en désignant par X et Y l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ et en posant $f_n(x) = x^n$, on constate aussitôt que la suite des fonctions $f_1, f_2, \ldots$, considérées comme sous-ensembles de l'espace $X \times Y$, converge (au sens de HAUSDORFF) vers l'ensemble composé des segments:

$$0 \leq x < 1, \ y = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq 1, \ x = 1.$$

Cette suite satisfait donc à la condition de CAUCHY sans être convergente dans l'espace $P(X, Y)$.

Il est cependant à remarquer que l'espace $P(X, Y)$ se laisse métriser de façon complète (sans altérer la notion de limite, telle qu'elle a été définie au N. 3) ([4]). Je reviendrai sur ce sujet ailleurs.

7. **Application à l'étude des continus localement connexes.** - Étant donné un continu C, on appelle distance relative (à C) des points x et y appartenant à C le diamètre ([5]) du plus petit continu que unit x à y dans C; désignons cette distance relative par $f_C(x, y)$ (cf. [6] ou [4], p. 180). On montre que, si C est un continu localement connexe ([6]) (et dans ce cas seulement), la fonction f_C est continue (cf. [4] p. 181, théorème 5).

X étant un espace compact, désignons par $P(X)$ la famille des sous-continus localement connexes de X. On confère à $P(X)$ le caractère d'un espace L^* en admettant (avec MAZURKIEWICZ, voir [7]) que la suite $C_1, C_2, \ldots$ converge vers C, lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1° $\operatorname{Lim} C_n = C$ (dans le sens de HAUSDORFF),

2° si $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n=\infty} y_n = y$ (où $x_n, y_n \in C_n$ et $x, y \in C$), la distance relative à C_n des points x_n et y_n converge vers la distance relative à C des points x et y.

([4]) En appliquant un procédé général concernant la métrisation complète; voir [5].

([5]) On appelle *diamètre* d'un ensemble la borne supérieure des distances mutuelles de ses points.

([6]) Un continu C est dit *localement connexe*, si à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel que tout couple de points x, y dont la distance est inférieure à δ se laisse unir par un sous-continu de C de diamètre inférieur à ε.

Les continus localement connexes coïncident avec les images continues de l'intervalle $0 \leq t \leq 1$.

On constate aussitôt que les conditions 1° et 2° équivalent à la condition

$$\lim_{n=\infty} f_{C_n} = f_C,$$

la limite étant entendue dans le sens de la définition du N. 3. Il en résulte en vertu du théorème du N. 4 que l'espace $P(X)$ devient métrique en entendant par distance de deux continus localement connexes C et K, la distance de HAUSDORFF des fonctions f et f_K.

Ajoutons que, la distance définie ainsi, l'espace $P(X)$ n'est pas en général complet et que — comme dans le cas de $P(X, Y)$ — cette distance peut être modifiée de façon que l'espace $P(X)$ devienne complet (7).

OUVRAGES CITÉS

[1] M. FRÉCHET, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », 22 (1906).
[2] F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig (1927).
[3] K. KURATOWSKI, *Topologie* I, Monogr. Mat., Warszawa-Wroclaw (1948).
[4] — — *Topologie* II, Monogr. Mat., Warszawa-Wroclaw (1950).
[5] — — *Un théorème sur les espaces complets et ses applications à l'étude de la connexité locale*, « Bull. Acad. Pol. Sc. », Série III, vol. 3 (1955), p. 75-80.
[6] S. MAZURKIEWICZ, « C. R. Soc. de Sc. de Varsovie », 6 (1913) et 9 (1916).
[7] — — *Sur l'espace des continus péaniens*, « Fund. Math. », 24 (1935), p 118-134.

(7) Cfr. le renvoi (4). Il est à noter que MAZURKIEWICZ dans son ouvrage précité [7] a défini une métrique complète de l'espace $P(X)$ en se basant sur des idées différentes.