Sulle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, lineari, in due variabili indipendenti, le cui soluzioni godono di proprietà integrali rispetto ad una delle variabili [1].

di ALDO GHIZZETTI (a Roma).

A Mauro Picone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Sono individuate, sotto opportune ipotesi, tutte le equazioni lineari a derivate parziali del 2° ordine, in due variabili indipendenti, le cui soluzioni godono di proprietà integrali rispetto ad una delle variabili, nel senso specificato nella parte prima del n. 1. Tali equazioni sono descritte negli enunciati conclusivi del n, 11.*

1. **Introduzione.** - In questo lavoro prenderemo in considerazione un'equazione differenziale alle derivate parziali del 2° ordine, lineare, in due variabili indipendenti:

$$(1,1)\qquad E[u] \equiv a(x,\ y)u_{xx} + 2b(x,\ y)u_{xy} + c(x,\ y)u_{yy} + 2p(x,\ y)u_x + \\ + 2q(x,\ y)u_y + r(x,\ y)u = f(x,\ y),$$

e ne studieremo le soluzioni $u(x,\ y)$ in un dominio T normale rispetto all'asse x, col proposito di ricercare le condizioni sotto le quali le $u(x,\ y)$ godono di *proprietà integrali rispetto alla variabile* y, nel senso che preciseremo fra breve.

Supposto che T sia definito dalle limitazioni:

$$(1,2)\quad x_0 \leq x \leq x_1,\ y_0(x) \leq y \leq y_1(x),\ [\text{con } x_0 < x_1,\ y_0(x) < y_1(x) \text{ per } x_0 < x < x_1],$$

dalla (1,1) segue, per ogni x di $(x_0,\ x_1)$:

$$(1,3)\qquad \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} E[u]v(x,\ y)dy = \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x,\ y)v(x,\ y)dy,$$

ove $v(x,\ y)$ denota un'arbitraria funzione continua in T. Noi diremo che le $u(x,\ y)$ godono in T di proprietà integrali rispetto alla variabile y quando é possibile scegliere la funzione $v(x,\ y)$ in modo tale che *la* (1,3) *equivalga ad*

[1] Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

un'equazione differenziale ordinaria (2) *nell'incognita:*

$$U(x) = \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} u(x, y) w(x, y) dy, \tag{1,4}$$

ove $w(x, y)$ o é la stessa $v(x, y)$ oppure é una funzione opportunamente legata ad essa.

È ovvio che questo fatto può verificarsi soltanto in particolari condizioni, ma ci convinceremo subito che tali condizioni vertono esclusivamente sui coefficienti $a(x, y), \dots, r(x, y)$ dell'equazione (1,1) (e non sul dominio T). Si tratta pertanto di proprietà relative all'equazione stessa; per abbreviare il discorso, le designeremo semplicemente come *proprietà I_y*.

In questo lavoro verranno individuate, sotto opportune ipotesi, tutte le equazioni che godono di proprietà I_y. Questa ricerca, che a prima vista può sembrare artificiosa, riveste invece una certa importanza perché é facile convincersi che essa costituisce il presupposto per determinare fino a quale punto sia applicabile il *metodo delle trasformate parziali* nella risoluzione dei problemi di integrazione della (1.1), nel dominio T, con appropriate condizioni al contorno. Il successo di tale metodo, in tanti problemi particolari (3), ha consigliato di intraprendere questa ricerca generale; in questo lavoro ne viene sviluppata la prima parte, mentre in un lavoro successivo sarà esposta la seconda che più propriamente si riferisce al metodo delle trasformate.

Ogni proprietà I_y proviene da una opportuna scelta della *funzione trasformante $v(x, y)$*. Dallo studio sviluppato in questo lavoro risulterà l'esistenza di equazioni che ammettono un numero finito di proprietà integrali (o, ciò che é lo stesso, di funzioni trasformanti) e di altre che ne ammettono infinite (4); naturalmente, queste ultime sono le uniche da prendersi in considerazione per l'applicazione del metodo delle trasformate parziali.

I risultati ottenuti saranno riassunti in tre teoremi enunciati nel n. 11. Nello stesso n. si troverà anche un altro enunciato che caratterizza le equazioni per le quali appare possibile l'applicazione del metodo delle trasformate parziali; tale enunciato costituirà il punto di partenza per il lavoro successivo.

---

(2) Tale equazione deve essere lineare, con coefficienti indipendenti dalla $u(x, y)$; il termine noto può invece dipendere dalla u [si vedrà che vi dipende attraverso i valori che la u e le sue derivate prime assumono sulle curve $y = y_0(x)$, $y = y_1(x)$].

(3) Vastissima é la letteratura al riguardo (basta pensare a tutti i problemi trattati per mezzo delle trasformate di LAPLACE, di FOURIER, ecc.). Ci limitiamo qui a citare i seguenti lavori: M. PICONE [1], [2], [3], [4], G. ASCOLI [1], A. GHIZZETTI [1], [2] nei quali sono in pari tempo enunciate alcune vedute di carattere abbastanza generale. I numeri fra [ ] si riferiscono alla «Bibliografia» posta in fine.

(4) Nel computo del numero delle funzioni trasformanti é sottinteso che sono da riguardarsi equivalenti due funzioni il cui rapporto dipenda dalla sola x (in particolare: sia costante).

Lo studio delle proprietà I_y ha anche interesse da un altro punto di vista. Le variabili x, y non hanno necessariamente il significato di coordinate cartesiane, ma possono interpretarsi come coordinate curvilinee qualsiasi nel piano; in particolare le linee $x =$ cost. possono essere chiuse ed allora é facile convincersi che le proprietà integrali equivalgono a ***teoremi di media*** analoghi a quello di GAUSS per le funzioni armoniche (cfr. G. ASCOLI [1]). Da questo punto di vista meriterebbero uno studio più approfondito quelle equazioni che ammettono un numero finito di proprietà integrali, ma di ciò non ci occuperemo.

2. **Enunciazione delle ipotesi ed impostazione del problema.** - D'ora in poi scriveremo semplicemente a, b, ... in luogo di $a(x, y)$, $b(x, y)$, ..., scrivendo $\rho(x)$, $\varphi(y)$, ... quando ci capiterà di incontrare funzioni della sola x o della sola y. Sulle funzioni $y_0(x)$, $y_1(x)$ che definiscono il dominio T e sui coefficienti e termine noto dell'equazione (1,1) faremo le ipotesi seguenti

$$y_0(x),\ y_0'(x),\ y_0''(x),\ y_1(x),\ y_1'(x),\ y_1''(x) \quad \text{continue in } (x_0, x_1), \tag{2,1}$$

$$a,\ a_x,\ a_{xx},\ b,\ b_x,\ b_y,\ b_{xy},\ c,\ c_y,\ c_{yy},\ p,\ p_x,\ q,\ q_y,\ r,\ f \quad \text{continue in } T, \tag{2,2}$$

supponendo poi di considerare soluzioni $u(x, y)$ della (1,1) e funzioni trasformanti $v(x, y)$ tali da aversi:

$$u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy},\ v,\ v_x,\ v_y,\ v_{xx},\ v_{xy},\ v_{yy} \quad \text{continue in T.} \tag{2,3}$$

Dell'operatore E si può pertanto considerare l'operatore aggiunto E^* per il quale si ha:

$$E^*[v] \equiv (av)_{xx} + 2(bv)_{xy} + (cv)_{yy} - 2(pv)_x - 2(qv)_y + rv, \tag{2,4}$$

mentre é opportuno introdurre anche l'operatore di 1° ordine D^* definito dalla:

$$D^*[v] \equiv (av)_x + (bv)_y - pv. \tag{2,5}$$

Riprendendo allora la (1,3) e trasformando l'integrale a primo membro per mezzo di opportune integrazioni per parti ed applicazioni del teorema di derivazione sotto il segno di integrale, é facile dare alla formula stessa l'aspetto seguente:

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} u \cdot av\,dy - 2\frac{d}{dx}\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} u \cdot D^*[v]dy + \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} u \cdot E^*[v]dy = F(x), \tag{2,6}$$

ove si é posto:

$$F(x) = \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} fvdy + [v \cdot \{ 2(ay_1' - b)u_x + (ay_1'^2 - c)u_y \} + u \cdot \{ (av)_y y_1'^2 - 2(bv)_y y_1' +$$
$$+ (cv)_y + 2pvy_1' - 2qv + avy_1'' \}]_{y=y_1(x)} - [v \cdot \{ 2(ay_0' - b)u_x + (ay_0'^2 - c)u_y \} +$$
$$+ u \cdot \{ (av)_y y_0'^2 - 2(bv)_y y_0' + (cv)_y + 2pvy_0' - 2qv + avy_0'' \}]_{y=y_0(x)}.$$

Supponiamo dapprima che il coefficiente a non sia identicamente nullo in T. Allora dall'esame della (2,6) si scorge che essa equivale ad un'equazione differenziale ordinaria di 2° ordine in una $U(x)$ del tipo (1,4) (e precisamente con $w = av$), allora e allora soltanto che sia possibile scegliere la funzione v e due funzioni $\rho(x)$, $\sigma(x)$ della sola x in guisa tale che risultino verificate in T le due equazioni:

(2,7) $$D^*[v] = \rho(x) \cdot av, \qquad E^*[v] = \sigma(x) \cdot av.$$

Se invece il coefficiente a é identicamente nullo in T, noi possiamo supporre che non lo sia uno almeno dei coefficienti b, p ([5]) ed allora la (2,6) si riduce ad un'equazione differenziale ordinaria di 1° ordine in una $U(x)$ del tipo (1,4) (e precisamente con $w = D^*[v]$) allora e allora soltanto che la funzione v é tale da aversi

(2,8) $$E^*[v] = \sigma(x) D^*[v] \qquad (\text{in } T),$$

con $\sigma(x)$ funzione arbitraria della sola x. È ovvio che, *in questo caso $a \equiv 0$, la* (1,1) *gode sempre di infinite proprietà I_y* [ammessa naturalmente l'esistenza in T di soluzioni della (2,8)].

Rimane perciò da proseguire l'analisi dell'altro caso che comporta, come si é visto, lo studio del sistema (2,7). Tale studio si presenta assai difficile quando lo si voglia condurre in generale con le sole ipotesi finora ammesse; supporremo perciò che siano verificate queste altre condizioni:

(2,9) $$a \neq 0 \text{ in } T; \; a_y,\ a_{xy},\ a_{yy},\ b_{yy},\ p_y \quad \text{continue in } T;$$

(2,10) *l'equazione* $a\varphi_x + b\varphi_y = 0$ *ammette in T un integrale φ continuo assieme alle sue derivate* φ_y, φ_{yy}, φ_{yyy} *(e di conseguenza anche alle* φ_x, φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{xxy}, φ_{xyy}*), con* $\varphi_y \neq 0$ ([6]).

Sotto queste ipotesi, il sistema (2,7) si può studiare abbastanza facilmente, ma si incontrano ancora delle grandi complicazioni formali che rendono inespressivi i risultati. Perciò noi sfrutteremo tali ipotesi stabilendo anzitutto due *caratteri di invarianza* delle proprietà I_y; esse ci permetteranno di ottenere per la (1,1) un'opportuna *forma canonica* con la quale si potrà studiare il sistema (2,7) senza eccessive complicazioni di calcolo.

Occorre infine fare un'ultima ipotesi, senza la quale non si può trarre alcun risultato espressivo. È ovvio che le funzioni trasformanti $v(x, y)$ vanno supposte non identicamente nulle in T, ma noi supporremo in più che *ogni $v(x, y)$ sia in T quasi ovunque diversa da zero.* Analogamente, quando diremo

---

([5]) Altrimenti la (1,1) sarebbe un'equazione differenziale ordinaria (con parametro).

([6]) Abbiamo posto quest'ipotesi (2,10) sotto la forma che ci sarà utile per il seguito; in realtà, come é ben noto, essa equivale a richiedere che per l'equazione differenziale ordinaria $dx/a = dy/b$ valga un opportuno teorema di esistenza *in grande.*

che uno dei coefficienti $a(x, y)$, $b(x, y)$,... dell'equazione (1,1) non é identicamente nullo, intenderemo che ciò significhi che *esso possa annullarsi al più in un sistema di misura nulla.* Soltanto con questa ipotesi [7], tutte le volte che incontreremo un'uguaglianza della forma $f \cdot g = 0$ con f funzione *continua* e g non identicamente nulla *nel senso specificato*, ci sarà possibile dedurre $f \equiv 0$. Avvertiamo che deduzioni di questo tipo saranno continuamente usate (quasi sempre tacitamente) nei nn. 5, 6, ..., 10 ove svolgeremo la ricerca delle equazioni che godono di proprietà I_y.

3. **Caratteri d'invarianza delle proprietà I_y.** - Se si effettua un cambiamento di variabili del tipo:

$$\xi = x, \qquad \eta = \varphi(x, y), \tag{3,1}$$

con φ continua in T assieme alle sue derivate φ_x, φ_y, φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{yy}, φ_{xxy}, φ_{xyy}, φ_{yyy} e con $\varphi_y \neq 0$, l'equazione (1,1) si muta nella seguente:

$$\bar{E}[\bar{u}] \equiv \bar{a}u_{\xi\xi} + 2\bar{b}u_{\xi\eta} + \bar{c}u_{\eta\eta} + 2\bar{p}u_\xi + 2\bar{q}u_\eta + \bar{r}u = \bar{f}, \tag{3,2}$$

ove si è posto

$$\bar{a} = a, \qquad \bar{b} = a\varphi_x + b\varphi_y, \qquad \bar{c} = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2, \tag{3,3}$$
$$\bar{p} = p, \qquad \bar{q} = \frac{1}{2}a\varphi_{xx} + b\varphi_{xy} + \frac{1}{2}c\varphi_{yy} + p\varphi_x + q\varphi_y, \qquad \bar{r} = r, \qquad \bar{f} = f,$$

mentre il dominio T si trasforma in dominio $\bar{T}$ normale rispetto all'asse ξ, definito da $x_0 \leq \xi \leq x_1$, $\varphi[\xi, y_0(\xi)] \leq \eta \leq \varphi[\xi, y_1(\xi)]$ oppure $\varphi[\xi, y_1(\xi)] \leq \eta \leq \varphi[\xi, y_0(\xi)]$ secondochè $\varphi_y > 0$ oppure $\varphi_y < 0$. Per la nuova equazione (3,2) valgono ancora le ipotesi analoghe alle (2,2), (2,9), (2,10); per essa e per il dominio $\bar{T}$ si potrà eseguire il calcolo analogo a quello del n. precedente ed in luogo del sistema (2,7) si troverà

$$\bar{D}^*[\bar{v}] = \bar{\rho}(\xi)\bar{a}\bar{v}, \qquad \bar{E}^*[\bar{v}] = \bar{\sigma}(\xi)\bar{a}\bar{v}. \tag{3,4}$$

È facile verificare che ad ogni soluzione $[v, \rho(x), \sigma(x)]$ di (2,7) corrisponde la soluzione $\bar{v} = v/\varphi_y$, $\bar{\rho}(\xi) = \rho(x)$, $\bar{\sigma}(\xi) = \sigma(x)$ di (3,4) e ciò ci permette di asserire che *le proprietà I_y sono invarianti rispetto ai cambiamenti di variabili del tipo* (3,1).

Analogamente, se in (1,1) si opera un cambiamento della funzione incognita, ponendo:

$$u = \theta\bar{u}, \tag{3,5}$$

---

[7] Restano dunque escluse dalle nostre considerazioni quelle equazioni nelle quali qualche coefficiente si annulli identicamente per esempio in un dominio T' propriamente contenuto in T, rimanendo diverso da zero in $T - T'$. Equazioni di questo tipo capitano raramente nelle applicazioni. Per esse appare quasi impossibile una ricerca *generale* delle proprietà I_y.

con $\theta \neq 0$ continua in T assieme alle sue derivate prime e seconde, si ottiene la nuova equazione:

(3,6) $$\bar{E}[\bar{u}] \equiv \bar{a}\bar{u}_{xx} + 2\bar{b}\bar{u}_{xy} + \bar{c}\bar{u}_{yy} + 2\bar{p}\bar{u}_x + 2\bar{q}\bar{u}_y + \bar{r}\bar{u} = \bar{f}.$$

con

(3,7) $$\bar{a} = a, \quad \bar{b} = b, \quad \bar{c} = c, \quad \bar{p} = a\frac{\theta_x}{\theta} + b\frac{\theta_y}{\theta} + p, \quad \bar{q} = b\frac{\theta_x}{\theta} + c\frac{\theta_y}{\theta} + q,$$
$$\bar{r} = a\frac{\theta_{xx}}{\theta} + 2b\frac{\theta_{xy}}{\theta} + c\frac{\theta_{yy}}{\theta} + 2p\frac{\theta_x}{\theta} + 2q\frac{\theta_y}{\theta} + r, \quad \bar{f} = \frac{f}{\theta}.$$

La nuova equazione verifica le solite ipotesi; per essa e per il dominio T si può eseguire il calcolo del n. 2 e trovare, come analogo di (2,7), un sistema del tipo:

(3,8) $$\bar{D}[\bar{v}] = \bar{\rho}(x)\bar{a}\bar{v}, \qquad \bar{E}^*[\bar{v}] = \bar{\sigma}(x)\bar{a}\bar{v}.$$

Si constata che ad ogni soluzione $[v, \rho(x), \sigma(x)]$ di (2,7) corrisponde la soluzione $\bar{v} = \theta v$, $\bar{\rho}(x) = \rho(x)$, $\bar{\sigma}(x) = \sigma(x)$, onde *le proprietà I_y sono invarianti rispetto ai cambiamenti della funzione incognita del tipo* (3,5).

Infine è evidente che le stesse proprietà si mantengono se si moltiplicano i due membri della (1,1) per una medesima funzione $k(x, y) \neq 0$, continua in T assieme alle sue derivate prime e seconde.

4. **Forma canonica per l'equazione data.** – Trasformiamo l'equazione data (1,1) con il cambiamento di variabili (3,1), assumendo per φ la funzione menzionata in (2,10); otteniamo così una nuova equazione nella quale, a norma della seconda delle (3,3), *risulta nullo il coefficiente $\bar{b}$*, ferme restando per tutti gli altri coefficienti le ipotesi ammesse.

Per questa nuova equazione *noi supporremo che tali ipotesi siano verificate, non solo nel dominio $\bar{T}$ corrispondente a T, ma in tutto un rettangolo $R(x_0 \leq \xi \leq x_1,\ y_0 \leq \eta \leq y_1)$ contenente $\bar{T}$.*

Allora, ritornando alle notazioni $x, y, a, b, \ldots$ in luogo di $\xi, \eta, \bar{a}, \bar{b}, \ldots$, possiamo operare sull'equazione dianzi ottenuta (con $b = 0$) un cambiamento della funzione incognita del tipo (3,5), assumendo $\theta = \exp\left(-\int \frac{p}{a}dx\right)$. Si deduce una nuova equazione in cui [vedi le (3,7)] *oltre ad essere $b = 0$, risulta anche $p = 0$*, valendo sempre per gli altri coefficienti le solite ipotesi nel rettangolo R.

Infine, in virtù di (2,9), possiamo dividere per a i due membri dell'equazione, arrivando così alla *forma canonica*:

(4,1) $$E[u] \equiv u_{xx} + cu_{yy} + 2qu_y + ru = f,$$

con $c, c_y, c_{yy}, q, q_y, r, f$ *continue in* $R[x_0 \leq x \leq x_1,\ y_0 \leq y \leq y_1]$.

Noi svolgeremo esplicitamente la ricerca delle proprietà I_y per l'equazione (4,1), potendo T essere un qualunque dominio normale contenuto in R. È però da tener presente che restano così implicitamente considerate anche tutte quelle equazioni che si possono ottenere da (4,1) con le trasformazioni indicate al n. 3.

Riferendoci dunque alle (4,1) risulta $D^*[v] = v_x$, $E^*[v] = v_{xx} + cv_{yy} + 2(c_y - q)v_y + (c_{yy} - 2q_y + r)v$ e quindi il sistema (2,7) si scrive:

$$v_x = \rho(x)v, \qquad v_{xx} + cv_{yy} + 2(c_y - q)v_y + (c_{yy} - 2q_y + r)v = \sigma(x)v. \tag{4,2}$$

Si è già osservato (vedi n. 1) che nella ricerca di soluzioni di questo sistema, possiamo riguardare come equivalenti due di esse quando il loro rapporto sia funzione della sola x. Possiamo perciò nelle (4,2) cambiare v in $v \cdot \exp\left(\int \rho(x)dx\right)$ ed ottenere così il nuovo sistema:

$$v_x = 0, \qquad cv_{yy} + 2(c_y - q)v_y + (c_{yy} - 2q_y + r)v = \tau(x)v, \tag{4,3}$$

avendo posto $\tau(x) = \sigma(x) - \rho'(x) - \rho^2(x)$. Con ciò il nostro problema resta ricondotto a quest'altro: *studiare se esistono due funzioni $v = v(y)$ della sola y, $\tau = \tau(x)$ della sola x in modo che sia verificata l'equazione differenziale:*

$$cv''(y) + 2(c_y - q)v'(y) + [c_{yy} - 2q_y + r - \tau(x)]v(y) = 0. \tag{4,4}$$

Discuteremo ora la questione così posta, trattando separatamente *il caso parabolico* ($c \equiv 0$) ed il *caso non parabolico* ($c \not\equiv 0$).

5. Studio delle equazioni paraboliche. - Se $c \equiv 0$, la (4,4) si scrive:

$$2qv'(y) + [2q_y - r + \tau(x)]v(y) = 0. \tag{5,1}$$

Distinguiamo due casi, senonchè q è identicamente nullo oppure no.

Se $q \equiv 0$, la (5,1) diventa $[r - \tau(x)]v(y) = 0$ onde, tenuto conto che $v(y) \neq 0$ quasi ovunque e che r, $\tau(x)$ sono funzioni continue, si può concludere che r deve essere una funzione $A_1(x)$ della sola x e che si deve assumere $\tau(x) = A_1(x)$, rimanendo arbitraria la $v(y)$. Abbiamo così trovato un *primo tipo di equazioni paraboliche che godono di proprietà I_y; si tratta delle*:

$$u_{xx} + A_1(x)u = f(x, y), \tag{5,2}$$

per le quali si può usare come trasformante una qualsiasi funzione $v(y)$ della sola y. È superfluo rilevare la banalità di questo caso!

Supponiamo ora che q non sia identicamente nullo e cominciamo col supporre che q sia il prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y. Posto $q = A(x)B(y)$, la (5,1) diventa $2A(x)B(y)v'(y) + [2A(x)B'(y) - r + \tau(x)]v(y) = 0$ e perciò il coefficiente r deve essere necessariamente del tipo $r = 2A(x)B_1(y) + A_1(x)$. Con questa nuova posizione la (5,1) assume la forma $2A(x)\{[B(y)v(y)]' - B_1(y)v(y)\} = [A_1(x) - \tau(x)]v(y)$ e questa implica l'esistenza di una costante λ tale da aversi $[B(y)v(y)]' - B_1(y)v(y) = \lambda v(y)$, $A_1(x) - \tau(x) = 2\lambda A(x)$. Ne segue che si deve assumere:

$$(5,3) \qquad v(y) = \frac{1}{B(y)} \exp\left[\lambda \int \frac{dy}{B(y)} + \int \frac{B_1(y)dy}{B(y)}\right], \quad \tau(x) = A_1(x) - 2\lambda A(x),$$

ove λ denota una costante arbitraria. Ecco dunque un *secondo tipo di equazioni paraboliche che godono di proprietà I_y; si tratta delle:*

$$(5,4) \qquad u_{xx} + 2A(x)B(y)u_y + [2A(x)B_1(y) + A_1(x)]u = f(x, y),$$

con $A(x)$, $B(y)$ non identicamente nulle. Per questo esistono ∞^1 funzioni trasformanti $v(x)$ date dalla prima delle (5,3) *al variare del parametro* λ. Si ammette naturalmente che queste $v(y)$ risultino continue assieme a $v'(y)$; ciò accade certamente se é sempre $B(y) \neq 0$, ma può accadere anche in altri casi, mantenendo in opportuni intervalli il parametro λ.

Supponiamo infine che q non sia il prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y. La (5,1) può sussistere soltanto se il coefficiente r é del tipo $r = 2q\varphi(y) + 2q_y + A_1(x)$. Con questa posizione la stessa equazione si scrive $2q \cdot [v'(y) - \varphi(y)v(y)] = [A_1(x) - \tau(x)]v(y)$ e di qui, tenendo conto dell'ipotesi fatta su q, si trae che deve necessariamente essere $v'(y) - \varphi(y)v(y) = 0$, $A_1(x) - \tau(x) = 0$ ossia $v(y) = \exp\left[\int \varphi(y)dy\right]$, $\tau(x) = A_1(x)$. Abbiamo così un *terzo tipo di equazioni paraboliche che godono di proprietà I_y; si tratta delle:*

$$(5,5) \qquad u_{xx} + 2[q(x, y)u]_y + [2\varphi(y)q(x, y) + A_1(x)]u = f(x, y),$$

con $q(x, y)$ non scindibile nel prodotto di una funzione della sola x per una della sola y. Per queste esiste una sola funzione trasformante $v(y)$ data dalla formula $v(y) = \exp\left[\int \varphi(y)dy\right]$.

6. **Studio delle equazioni non paraboliche** (Caso I). - Proseguiamo la discussione della (4,4), supponendo c non identicamente nullo. Conviene distinguere vari casi e sottocasi, secondo lo schema seguente:

Caso I) q é della forma $c\varphi(y) + c_y$ $\begin{cases} \text{Sottocaso } \mathrm{I}_1)\ c \text{ é della forma } A(x)B(y), \\ \text{Sottocaso } \mathrm{I}_2)\ c \text{ non é della forma } A(x)B(y); \end{cases}$

Caso II) q é della forma $c\varphi(y) + c_y + \alpha(x)\beta(y)$ $\begin{cases} \text{Sottocaso } \mathrm{II}_1)\ c \text{ é della forma } A(x)B(y), \\ \text{Sottocaso } \mathrm{II}_2)\ c \text{ é della forma } A(x)B(y) + C(x)D(y), \\ \text{Sottocaso } \mathrm{II}_3)\ c \text{ non é della forma } A(x)B(y) + C(x)D(y); \end{cases}$

Caso III) q non é della forma $c\varphi(y) + c_y + \alpha(x)\beta(y)$.

In questo n. studieremo il Caso I; gli altri saranno esaminati nei successivi nn. 7, 8, 9, 10.

Nel sottocaso I_1, posto $c = A(x)B(y)$, il coefficiente q risulta essere della forma $q = A(x)B_1(y)$, cosicchè la (4,4) diventa:

$$A(x)B(y)v''(y) + 2A(x)[B'(y) - B_1(y)]v'(y) + [A(x)B''(y) - 2A(x)B_1'(y) + r - \tau(x)]v(y) = 0$$

e questo mostra intanto che il coefficiente r deve essere del tipo $r = A(x)B_2(y) + A_1(x)$. Con questa posizione la precedente equazione si scrive:

$$A(x)\{[B(y)v(y)]'' - 2[B_1(y)v(y)]' + B_2(y)v(y)\} = [\tau(x) - A_1(x)]v(y),$$

onde deve esistere una costante λ tale da aversi:

$$[B(y)v(y)]'' - 2[B_1(y)v(y)]' + B_2(y)v(y) = \lambda v(y), \quad \tau(x) - A_1(x) = \lambda A(x).$$

Abbiamo così trovato un *primo tipo di equazioni non paraboliche che godono di proprietà I_y, si tratta delle:*

$$(6,1) \qquad u_{xx} + A(x)B(y)u_{yy} + 2A(x)B_1(y)u_y + [A(x)B_2(y) + A_1(x)]u = f(x, y),$$

con $A(x)$, $B(y)$ non identicamente nulle. Per queste esistono ∞^2 funzioni trasformanti $v(y)$ date dagli integrali dell'equazione differenziale ordinaria $(Bv)'' - 2(B_1v)' + (B_2 - \lambda)v = 0$, ove λ é un parametro arbitrario [8]. Anche qui si ammette che questi integrali siano continui assieme alle derivate prima e seconda; ciò accade senz'altro se $B(y) \neq 0$, ma può accadere anche nel caso contrario, limitando opportunamente la variabilità di λ.

Nel sottocaso I_2, ponendo $q = c\varphi(y) + c_y$ e sostituendo nella (4,4) si deduce immediatamente che r deve essere della forma $r = c\varphi_1(y) + 2c_y\varphi(y) + c_{yy} + A(x)$; tenuto conto di ciò, la stessa (4,4) scrive:

$$c \cdot \{v''(y) - 2[\varphi(y)v(y)]' + \varphi_1(y)v(y)\} = [\tau(x) - A(x)]v(y).$$

Siccome, per ipotesi, la funzione c non é scindibile nel prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y, quest'ultima equazione può essere soddisfatta soltanto se:

$$v''(y) - 2[\varphi(y)v(y)]' + \varphi_1(y)v(y) = 0, \quad \tau(x) = A(x).$$

Abbiamo così trovato un *secondo tipo di equazioni non paraboliche che godono di proprietà I_y; si tratta delle:*

$$(6,2) \qquad u_{xx} + [c(x, y)u]_{yy} + 2\varphi(y)[c(x, y)u]_y + [\varphi_1(y)c(x, y) + A(x)]u = f(x, y),$$

con $c(x, y)$ non scindibile nel prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y. Per queste esistono ∞^1 funzioni trasformanti $v(y)$ date dagli integrali dell'equazione differenziale ordinaria $v'' - 2(\varphi v)' + \varphi_1 v = 0$ [9].

---

[8] Abbiamo detto che le funzioni trasformanti sono ∞^2 (e non ∞^3) perchè due funzioni $v(y)$ aventi rapporto costante non sono sostanzialmente diverse fra loro.

[9] Cfr. nota precedente.

7. Studio delle equazioni non paraboliche. (Caso II_1). - Posto $c = A(x)B(y)$, con $A(x)$, $B(y)$ non identicamente nulle, si vede subito che q sarà della forma $q = A(x)B_1(y) + \alpha(x)\beta(y)$. Per non ricadere nel caso I_1 si deve naturalmente che $A(x)$, $\alpha(x)$ *siano linearmente indipendenti e che* $\beta(y)$ *non sia identicamente nulla*. Sostituendo in (4,4) si vede poi che il coefficiente r deve avere la forma $r = A(x)B_2(y) + 2\alpha(x)\beta_1(y) + A_1(x)$, cosicchè la stessa (4,4) diventa:

$$A(x)\{[B(y)v(y)]'' - 2[B_1(y)v(y)]' + B_2(y)v(y)\} -$$
$$- 2\alpha(x)\{[\beta(y)v(y)]' - \beta_1(y)v(y)\} = [\tau(x) - A_1(x)]v(y).$$

Tenuto conto dell'indipendenza lineare di $A(x)$, $\alpha(x)$, è facile persuadersi che questa equazione può essere soddisfatta soltanto se esistono due costanti λ, μ tali da far risultare:

$$[B(y)v(y)]'' - 2[B_1(y)v(y)]' + B_2(y)v(y) = \lambda v(y),$$
$$[\beta(y)v(y)]' - \beta_1(y)v(y) = \mu v(y),$$
$$\tau(x) = A_1(x) + \lambda A(x) - 2\mu\alpha(x).$$

Dalla seconda di queste equazioni si ricava:

$$v(y) = \frac{1}{\beta(y)} \exp\left[\mu \int \frac{dy}{\beta(y)} + \int \frac{\beta_1(y)}{\beta(y)}\,dx\right] \tag{7,1}$$

e sostituendo sulla prima, si perviene alla seguente relazione:

$$\mu^2 P(y) + \mu Q(y) + R(y) - \lambda = 0, \tag{7,2}$$

ove si è posto:

$$\left\{\begin{aligned} &P = \frac{B}{\beta^2}, \qquad Q = \frac{B}{\beta^2}(-3\beta' + 2\beta_1) + 2\frac{B'}{\beta} - 2\frac{B_1}{\beta}, \\ &R = \frac{B}{\beta^2}(2\beta'^2 - \beta\beta'' + \beta_1^2 - 3\beta'\beta_1 + \beta\beta'_1) + \\ &\qquad\qquad + 2\frac{B'}{\beta}(-\beta' + \beta_1) + B'' - 2\frac{B_1}{\beta}(-\beta' + \beta_1) - 2B_1' + B_2 . \end{aligned}\right. \tag{7,3}$$

È evidente che se le tre funzioni $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ risultano costanti (rispettivamente uguali a c_0, c_1, c_2), la (7,2) può essere soddisfatta scegliendo per μ un valore arbitrario ed assumendo poi $\lambda = c_0\mu^2 + c_1\mu + c_2$.

Se invece $P(y)$ non è costante e $Q(y)$ è del tipo $Q(y) = c_0P(y) + c_1$ (con c_0, c_1 costanti), dalla (7,2) discende che necessariamente $R(y)$ deve avere la forma $R(y) = c_2P(y) + c_3$ (con c_2, c_3 costanti). Con queste posizioni la (7,2) diventa $(\mu^2 + c_0\mu + c_2)P(y) + (c_1\mu + c_3 - \lambda) = 0$, e, siccome $P(y)$ non è costante, questa richiede che sia $\mu^2 + c_0\mu + c_2 = 0$, $\lambda = c_1\mu + c_3$, onde restano individuati per il parametro μ due soli valori (eventualmente coincidenti).

Infine, se $P(y)$ non è costante e $Q(y)$ non è della forma $Q(y) = c_0 P(y) + c_1$, la (7,2) può essere soddisfatta soltanto se $R(y)$ è del tipo $R(y) = -c_0^2 P(y) + c_0 Q(y) + c_1$, con c_0, c_1 costanti (determinate in modo unico, altrimenti $Q(y)$ non verificherebbe la condizione posta). La (7,2) diventa $(\mu^2 - c_0^2)P(y) + (\mu + c_0)Q(y) + (c_1 - \lambda) = 0$ e, per le ipotesi ammesse, questa può essere soddisfatta soltanto per $\mu = -c_0$, $\lambda = c_1$.

Questa discussione ci permette di concludere quanto segue: *esistono un terzo, quarto e quinto tipo di equazioni non paraboliche che godono di proprietà* I_y; *esse hanno tutte la forma:*

$$u_{xx} + A(x)B(y)u_{yy} + 2[A(x)B_1(y) + \alpha(x)\beta(y)]u_y + \\ + [A(x)B_2(y) + 2\alpha(x)\beta_1(y) + A_1(x)]u = f(x, y), \tag{7,4}$$

con $A(x)$, $\alpha(x)$ *linearmente indipendenti e* $B(y)$, $\beta(y)$ *non identicamente nulle.*

Il terzo tipo si ha quando, calcolate le funzioni $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ *secondo le* (7,3), *risulta* $P(y) = \text{cost.}$, $Q(y) = \text{cost.}$, $R(y) = \text{cost.}$; *in questo caso si hanno* ∞^1 *funzioni trasformanti* $v(y)$ *date dalla* (7,1) *con* μ *parametro arbitrario.*

Il quarto tipo si ha quando $P(y)$ *non è costante e risulta* $Q(y) = c_0 P(y) + c_1$, $R(y) = c_2 P(y) + c_3$ *(con* c_0, c_1, c_2, c_3 *costanti); in questo caso si hanno due funzioni trasformanti* $v(y)$ *(eventualmente coincidenti) date dalla* (7,1) *con* μ *radice dell'equazione* $\mu^2 + c_0\mu + c_2 = 0$.

Il quinto tipo si ha quando $P(y)$ *non è costante,* $Q(y)$ *non è del tipo* $c_0 P(y) + c_1$ *e risulta* $R(y) = -c_0^2 P(y) + c_0 Q(y) + c_1$ *(con* c_0, c_1 *costanti); in questo caso esiste una sola funzione trasformante* $v(y)$ *data dalla* (7,1) *con* $\mu = -c_0$.

È da notare che la (7,4) si può riguardare come una combinazione lineare (a coefficienti costanti) di due equazioni dei tipi (5,4), (6,1) già incontrati; ma, soltanto se si verifica una delle tre particolarità sopraddette, tale combinazione lineare gode ancora di proprietà I_y.

Vale la pena di aggiungere qualche parola sul terzo tipo ora incontrato. Posto $P(y) = c_0$, $Q(y) = c_1$, $R(y) = c_2$, necessariamente con $c_0 \neq 0$, dalle (7,3) si ricava

$$B = c_0\beta^2, \quad B_1 = \frac{1}{2}c_0\beta(\beta' + 2\beta_1) - \frac{1}{2}c_1\beta, \quad B_2 = c_0(\beta\beta_1' + \beta_1^2) - c_1\beta_1 + c_2,$$

dimodoché, scrivendo $A(x)$ in luogo di $c_0 A(x)$, $\alpha(x)$ in luogo di $\alpha(x) - \frac{1}{2}c_1 A(x)$, $A_1(x)$ in luogo di $A_1(x) + c_2 A(x)$, la (7,4) assume la forma:

$$u_{xx} + A(x)\beta^2(y)u_{yy} + 2\beta(y)\left\{A(x)\left[\frac{1}{2}\beta'(y) + \beta_1(y)\right] + \alpha(x)\right\}u_y + \\ + \{A(x)[\beta(y)\beta_1'(y) + \beta_1^2(y)] + 2\alpha(x)\beta_1(y) + A_1(x)\}u = f(x, y), \tag{7,5}$$

con $A(x)$, $\alpha(x)$ linearmente indipendenti e $\beta(y)$ non identicamente nulla. Ripetiamo che quest'equazione (7,5) gode di ∞^1 proprietà I_y con le funzioni trasformanti date da (7,1), ove μ è un parametro arbitrario.

8. Studio delle equazioni non paraboliche. (Caso II_2). - Fatta la posizione $c = A(x)B(y) + C(x)D(y)$, dovremo supporre che $A(x)$, $C(x)$ *siano linearmente indipendenti e che lo stesso accada per* $B(y)$, $D(y)$ (altrimenti si ricadrebbe nel caso II_1). Il coefficiente q avrà allora la forma $q = A(x)[B(y)\varphi(y) + B'(y)] + C(x)[D(y)\varphi(y) + D'(y)] + \alpha(x)\beta(y)$ *con* $\alpha(x)$, $\beta(y)$ *non identicamente nulle* (per non ricadere nel caso I_2). Sostituendo in (4,4), si scorge immediatamente che il coefficiente r deve essere del tipo $r = A(x)B_1(y) + C(x)D_1(y) + 2\alpha(x)\beta_1(y) + A_1(x)$, dimodochè la (4,4) si scrive:

$$A(x) \cdot \mathfrak{B}[v(y)] + C(x) \cdot \mathfrak{D}[v(y)] = 2\alpha(x) \cdot \mathfrak{E}[v(y)] + [\tau(x) - A_1(x)]v(y), \tag{8,1}$$

ove per brevità si è posto:

$$\begin{cases} \mathfrak{B}[v(y)] = Bv'' - 2B\varphi v' - (2B\varphi' + 2B'\varphi + B'' - B_1)v, \\ \mathfrak{D}[v(y)] = Dv'' - 2D\varphi v' - (2D\varphi' + 2D'\varphi + D'' - D_1)v, \quad \mathfrak{E}[v(y)] = (\beta v)' - \beta_1 v. \end{cases} \tag{8,2}$$

Supponiamo dapprima che *le tre funzioni* $A(x)$, $C(x)$, $\alpha(x)$ *siano linearmente indipendenti.* Si vede allora facilmente che la (8,1) può essere soddisfatta soltanto se esistono tre costanti λ, μ, ν tali da aversi:

$$\mathfrak{B}[v(y)] = \lambda v(y), \qquad \mathfrak{D}[v(y)] = \mu v(y), \qquad \mathfrak{E}[v(y)] = \nu v(y), \tag{8,3}$$

risultando poi di conseguenza $\tau(x) = A_1(x) + \lambda A(x) + \mu C(x) - 2\nu\alpha(x)$. Dalla terza delle (8,3) si trae:

$$v(y) = \frac{1}{\beta(y)} \exp\left(\nu \int \frac{dy}{\beta(y)} + \int \frac{\beta_1(y)}{\beta(y)}\, dy\right), \tag{8,4}$$

e sostituendo nelle altre due si ottengono le due seguenti condizioni per i parametri costanti λ, μ, ν:

$$\begin{cases} \nu^2 + P(y)\nu + Q(y) - \dfrac{\beta^2(y)}{B(y)}[2B'(y)\varphi(y) + B''(y) - B_1(y) + \lambda] = 0, \\ \nu^2 + P(y)\nu + Q(y) - \dfrac{\beta^2(y)}{D(y)}[2D'(y)\varphi(y) + D''(y) - D_1(y) + \mu] = 0, \end{cases} \tag{8,5}$$

ove si è posto

$$\begin{cases} P(y) = -3\beta' + 2\beta_1 - 2\beta\varphi, \\ Q(y) = 2\beta'^2 - \beta\beta'' + \beta_1^2 - 3\beta'\beta_1 + \beta\beta_1' + 2\beta(\beta' - \beta_1)\varphi - 2\beta^2\varphi'. \end{cases} \tag{8,6}$$

Le (8,5) sono compatibili soltanto se

$$(2B'\varphi + B'' - B_1 + \lambda) / B = (2D'\varphi + D'' - D_1 + \mu) / D;$$

da questo segue che le funzioni $B_1(y)$, $D_1(y)$ devono essere della forma:

$$\begin{cases} B_1(y) = B(y)\psi(y) + 2B'(y)\varphi(y) + B''(y) + h, \\ D_1(y) = D(y)\psi(y) + 2D'(y)\varphi(y) + D''(y) + k, \end{cases} \tag{8,7}$$

(con h, k costanti) e ciò ci permette di trasformare le (8,5) nelle:

$$\nu^2 + P(y)\nu + Q(y) + \beta^2(y)\left[\psi(y) + \frac{h-\lambda}{B(y)}\right] = 0,$$

$$\nu^2 + P(y)\nu + Q(y) + \beta^2(y)\left[\psi(y) + \frac{k-\mu}{D(y)}\right] = 0.$$

Da queste si trae $(k-\mu)B(y) = (h-\lambda)D(y)$ onde, per l'indipendenza lineare di $B(y)$, $D(y)$, si deve necessariamente assumere $\lambda = h$, $\mu = k$, rimanendo poi per ν l'unica condizione:

$$\nu^2 + P(y)\nu + Q(y) + \beta^2(y)\psi(y) = 0.$$

Se $P(y)$ é costante $(= c_0)$, necessariamente $Q(y)$ deve essere del tipo $Q(y) = -\beta^2(y)\psi(y) + c_1$ (con c_1 costante) ed allora si hanno come possibili valori di ν le due radici (eventualmente coincidenti) dell'equazione $\nu^2 + c_0\nu + c_1 = 0$. Se invece $P(y)$ non é costante, $Q(y)$ deve essere della forma $Q(y) = -\beta^2(y)\psi(y) + c_0P(y) - c_0^2$ (con c_0 costante) ed allora l'unica possibile scelta di ν é $\nu = -c_0$.

Tenendo conto delle espressioni di c, q, r e delle posizioni (8,7) e scrivendo semplicemente $A_1(x)$ in luogo di $A_1(x) + hA(x) + kC(x)$, possiamo enunciare quanto segue: *esistono un sesto e settimo tipo di equazioni non paraboliche che godono di proprietà I_y; esse hanno tutte la forma:*

$$(8,8)\qquad u_{xx} + A(x)\{[B(y)u]_{yy} + 2\varphi(y)[B(y)u]_y + \psi(y)B(y)u\} + \\ + C(x)\{[D(y)u]_{yy} + 2\varphi(y)[D(y)u]_y + \psi(y)D(y)u\} + 2\alpha(x)\{\beta(y)u_y + \beta_1(y)u\} + \\ + A_1(x)u = f(x, y),$$

con $A(x)$, $C(x)$, $\alpha(x)$ e $B(y)$, $D(y)$ linearmente indipendenti e $\beta(y)$ non identicamente nulla.

Il sesto tipo si ha quando, calcolate le funzioni $P(y)$ e $Q(y)$ secondo le (8,6), *risulta $P(y) = c_0$ e $Q(y) = -\beta^2(y)\psi(y) + c_1$ (con c_0 e c_1 costanti); in questo caso si hanno due funzioni trasformanti $v(y)$ (eventualmente coincidenti) date dalla* (8,4) *con ν radice dell'equazione $\nu^2 + c_0\nu + c_1 = 0$.*

Il settimo tipo si ha quando $P(y)$ non é costante e $Q(y) = -\beta^2(y)\psi(y) + c_0P(y) - c_0^2$ (con c_0 costante); in questo caso si ha una sola funzione trasformante $v(y)$ data da (8,4) *con $\nu = -c_0$* [10].

Ritorniamo ora alla (8,1) ed esaminiamo l'altro caso, supponendo che *la funzione $\alpha(x)$ sia una combinazione lineare delle due funzioni $A(x)$, $C(x)$.* Posto $\alpha(x) = hA(x) + kC(x)$, con h, k costanti non entrambe nulle, il coefficiente q

---

[10] Si noti che la (8,8) può riguardarsi come una combinazione lineare di un'equazione del tipo (5,4) con due equazioni del tipo (6,1); però soltanto nei due casi particolari sopraddetti essa gode ancora di proprietà I_y.

assume l'espressione $q = A(x)[B(y)\varphi(y) + B'(y) + h\beta(y)] + C(x)[D(y)\varphi(y) + D'(y) + k\beta(y)]$; noi scriveremo più semplicemente $q = A(x)B_1(y) + C(x)D_1(y)$, tenendo però presente che la condizione: $\beta(y)$ non identicamente nulla, si traduce nell'analoga condizione per la funzione:

$$\gamma(y) = B(y)[D'(y) - D_1(y)] - D(y)[B'(y) - B_1(y)]. \tag{8,9}$$

Sostituendo in (4,4) si vede subito che il coefficiente r deve essere della forma $r = A(x)B_2(y) + C(x)D_2(y) + A_1(x)$ e, con questa nuova posizione, la (4,4) diventa:

$$A(x)\{[B(y)v(y)]'' - 2[B_1(y)v(y)]' + B_2(y)v(y)\} + \\ + C(x)\{[D(y)v(y)]'' - 2[D_1(y)v(y)]' + D_2(y)v(y)\} = [\tau(x) - A_1(x)]v(y),$$

e da questa, in virtù dell'indipendenza lineare di $A(x)$, $C(x)$, si deduce che devono esistere due costanti λ, μ in guisa tale che:

$$(Bv)'' - 2(B_1v)' + B_2v = \lambda v, \qquad (Dv)'' - 2(D_1v)' + D_2v = \mu v, \tag{8,10}$$

risultando poi $\tau(x) = A_1(x) + \lambda A(x) + \mu C(x)$. Lo studio del sistema (8,10) non é semplice e non vale la pena di esporlo qui in tutti i particolari; ci limiteremo pertanto a provare che al massimo possono esistere tre coppie (λ, μ) in corrispondenza alle quali detto sistema risulta compatibile. Ed infatti dalle (8,10) si traggono le due conseguenze:

$$\left\{\begin{aligned} 2\frac{v'}{v} &= -\lambda\frac{D}{\gamma} + \mu\frac{B}{\gamma} - \frac{B(D'' - 2D_1' + D_2) - D(B'' - 2B_1' + B_2)}{\gamma}, \\ \frac{v''}{v} &= \lambda\frac{D' - D_1}{\gamma} - \mu\frac{B' - B_1}{\gamma} + \\ &\quad + \frac{(B' - B_1)(D'' - 2D_1' + D_2) - (D' - D_1)(B'' - 2B_1' + B_2)}{\gamma}. \end{aligned}\right. \tag{8,11}$$

la prima delle quali individua univocamente v in funzione di y e dei parametri λ, μ.

Sostituendo nella seconda si trova per tali parametri una condizione del tipo

$$[\lambda D(y) - \mu B(y)]^2 + \lambda P(y) + \mu Q(y) + R(y) = 0, \tag{8,12}$$

ove $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ sono tre determinate funzioni di cui é inutile riportare l'espressione.

Pensando λ, μ come coordinate cartesiane in un piano, la (8,12) rappresenta una famiglia ∞^1 di parabole (col parametro y) e perciò si può dire che i nostri parametri λ, μ vanno determinati in modo da fornire le coordinate di un punto base di tale famiglia. Ma questi punti base, se esistono sono certamente in numero finito, perché nel caso contrario le parabole della famiglia dovrebbero tutte spezzarsi in due rette (parallele) di cui una almeno fissa e ciò é impossibile giacché, in virtù della indipendenza lineare delle due funzioni $B(y)$, $D(y)$, le parabole toccano la retta all'infinito in un punto variabile con y. E per la stessa ragione é ovvio che i punti base cercati possono al massimo essere tre.

Concludendo: *esiste un ottavo tipo di equazioni non paraboliche che godono di proprietà I_y; esse hanno la forma:*

$$(8,13)\qquad u_{xx} + [A(x)B(y) + C(x)D(y)]u_{yy} + 2[A(x)B_1(y) + C(x)D_1(y)]u_y + \\ + [A(x)B_2(y) + C(x)D_2(y) + A_1(x)]u = f(x, y),$$

con $A(x)$, $C(x)$ e $B(y)$, $D(y)$ linearmente indipendenti e $\gamma(y) = B(y)[D'(y) - D_1(y)] - - D(y)[B'(y) - B_1(y)]$ non identicamente nulla ([11]). *Però tali proprietà si hanno soltanto se la famiglia di parabole rappresentata dall'equazione* (8,12) [*ottenuta eliminando v fra le due equazioni* (8,10)] *ammette dei punti base; tali punti base possono essere al massimo tre e ciascuno dà luogo ad una proprietà I_y.*

Possiamo aggiungere che possono effettivamente esistere tre funzioni trasformanti come mostra il seguente semplice esempio: si ponga nella (8,13):

$$B(y) = y,\quad D(y) = 1,\quad B_1(y) = 1 - \frac{y}{2},\quad D_1(y) = 0,\quad B_2(y) = -1,\quad D_2(y) = 0;$$

si troverà la famiglia di parabole $(\lambda - y\mu)^2 - \lambda - y^2\mu = 0$ coi tre punti base $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ a cui corrispondono le tre funzioni trasformanti 1, y, e^{-y}.

9. **Studio delle equazioni non paraboliche** (Caso II_3). - In questo caso si suppone che il coefficiente c non sia della forma $A(x)B(y) + C(x)D(y)$ e che per il coefficiente q si possa porre $q = c\varphi(y) + c_y + \alpha(x)\beta(y)$ con $\alpha(x)$, $\beta(y)$ non identicamente nulle (per non ricadere nel caso I_2). Sostituendo in (4,4) si vede subito che il coefficiente r deve essere del tipo $r = c_{yy} + 2c_y\varphi(y) + + c\varphi_1(y) + 2\alpha(x)\beta_1(y) + \alpha_1(x)$ e con ciò la stessa (4,4) diventa

$$(9,1)\qquad c \cdot \{ v''(y) - 2[\varphi(y)v(y)]' + \varphi_1(y)v(y) \} = \\ = 2\alpha(x) \{ [\beta(y)v(y)]' - \beta_1(y)v(y) \} + [\tau(x) - \alpha_1(x)]v(y).$$

Per l'ipotesi fatta su c, questa può sussistere soltanto se:

$$(9,2)\qquad v''(y) - 2[\varphi(y)v(y)]' + \varphi_1(y)v(y) = 0;$$

dopo ciò, dalla (9,1) segue ancora che deve esistere una costante λ tale che si possa porre:

$$[\beta(y)v(y)]' - \beta_1(y)v(y) = \lambda v(y),\quad \tau(x) = \alpha_1(x) - 2\lambda\alpha(x).$$

Dalla prima di queste si ricava

$$(9,3)\qquad v(y) = \frac{1}{\beta(y)} \exp\left(\lambda \int \frac{dy}{\beta(y)} + \int \frac{\beta_1(y)}{\beta(y)}\, dy\right),$$

([11]) Si noti che la (8,13) é una combinazione lineare di due equazioni del tipo (6,1).

e sostituendo nella (9,2) si ottiene per il parametro λ la condizione:

$$\lambda^2 + \lambda P(y) + Q(y) = 0, \tag{9,4}$$

ove si é posto:

$$P(y) = -3\beta' + 2\beta_1 - 2\beta\varphi, \quad Q(y) = 2\beta'^2 - \beta\beta'' + \beta_1^2 - \\ - 3\beta'\beta_1 + \beta\beta_1' + 2\beta(\beta' - \beta_1)\varphi - 2\beta^2\varphi' + \beta^2\varphi_1. \tag{9,5}$$

Se $P(y)$ é costante ($= c_0$), anche $Q(y)$ deve essere costante ($= c_1$) ed allora dalla (9,4) segue che sono possibili per λ soltanto due valori (eventualmente coincidenti): le due radici dell'equazione $\lambda^2 + c_0\lambda + c_1 = 0$. Se $P(y)$ non é costante, $Q(y)$ deve essere del tipo $Q(y) = c_0 P(y) - c_0^2$ (con c_0 costante) ed allora é chiaro che dalla (9,4) segue $\lambda = -c_0$.

Concludendo: *esistono un nono e decimo tipo di equazioni non paraboliche che godono di proprietà I_y; esse hanno la forma:*

$$u_{xx} + [c(x, y)u]_{yy} + 2\varphi(y)[c(x, y)u]_y + \varphi_1(y)c(x, y)u + \\ + 2\alpha(x)[\beta(y)u_y + \beta_1(y)u] + \alpha_1(x)u = f(x, y), \tag{9,6}$$

ove $c(x, y)$ non é della forma $A(x)B(y) + C(x)D(y)$ e $\alpha(x)$, $\beta(y)$ non sono identicamente nulle [12].

Il nono tipo si ha quando, introdotte le funzioni $P(y)$, $Q(y)$ secondo le (9,5) *risulta $P(y) = c_0$, $Q(y) = c_1$ (con c_0, c_1 costanti); si hanno allora due funzioni trasformanti (eventualmente coincidenti) date da* (9,3) *con λ radice dell'equazione $\lambda^2 + c_0\lambda + c_1 = 0$.*

Il decimo tipo si ha quando $P(y)$ non é costante e $Q(y) = c_0 P(y) - c_0^2$ (con c_0 costante); si ha allora un'unica funzione trasformante data da (9,3) *con $\lambda = -c_0$.*

10. **Studio delle equazioni non paraboliche** (Caso III). - In questo caso si suppone che il coefficiente q non sia della forma $c\varphi(y) + c_y + \alpha(x)\beta(y)$; in virtù di quest'ipotesi la (4,4) esige che il coefficiente r sia della forma:

$$r = c\varphi_0(y) + 2(c_y - q)\varphi(y) - c_{yy} + 2q_y + A_1(x),$$

con la funzione $\varphi(y)$ univocamente determinata. Sostituendo in (4,4) si ottiene:

$$c \cdot [v''(y) + \varphi_0(y)v(y)] + 2(c_y - q)[v'(y) + \varphi(y)v(y)] = [\tau(x) - A_1(x)]v(y),$$

e, per l'ipotesi fatta su q, questa può essere soddisfatta soltanto se:

$$v'(y) + \varphi(y)v(y) = 0, \tag{10,1}$$

e di conseguenza

$$c \cdot [v''(y) + \varphi_0(y)v(y)] = [\tau(x) - A_1(x)]v(y). \tag{10,2}$$

---

[12] La (9,6) é una combinazione lineare di equazioni dei tipi (5,4) e (6,2).

La (10,1) individua in modo unico la funzione trasformante $v(y)$ e sostituendo in (10,2) si ottiene

$$c \cdot [\varphi^2(y) - \varphi'(y) + \varphi_0(y)] = \tau(x) - A_1(x). \tag{10,3}$$

Se risulta $\varphi^2 - \varphi' + \varphi_0 \equiv 0$, la (10,3) impone soltanto di scegliere $\tau(x) = A_1(x)$. Se invece $\varphi^2 - \varphi' + \varphi_0$ non é identicamente nulla, la (10,3) richiede che il coefficiente c sia della forma $A(x)B(y)$ [con $A(x)$, $B(y)$ non identicamente nulle], dimodoché dalla (10,3) si trae che il prodotto $B(y)[\varphi^2(y) - \varphi'(y) + \varphi_0(y)]$ deve essere costante ($= c_0$) ed inoltre che si deve assumere $\tau(x) = A_1(x) + c_0 A(x)$.

Per enunciare questi risultati nel modo più rapido conviene introdurre, in luogo del coefficiente q, la funzione Q definita da $Q = q + \frac{1}{2} c\varphi(y) - c_y$, osservando che l'ipotesi fatta su q si traduce nel fatto che Q non deve essere del tipo $c\psi(y) + \alpha(x)\beta(y)$. Con questa posizione si ottiene $r = c[\varphi^2(y) - \varphi'(y) + \varphi_0(y)] - c_y\varphi(y) + c_{yy} - 2Q\varphi(y) + 2Q_y + A_1(x)$, vale a dire $r = -c_y\varphi(y) + c_{yy} - 2Q\varphi(y) + 2Q_y + A_1(x)$ nella prima delle due eventualità sopra menzionate, e lo stesso nella seconda quando si intenda di aver scritto $A_1(x)$ in luogo di $c_0 A(x) + A_1(x)$.

Possiamo quindi enunciare il teorema: *esiste un undicesimo tipo di equazioni non paraboliche che godono di proprietà I_y; esse hanno la forma:*

$$\begin{aligned} u_{xx} &+ [c(x, y)u]_{yy} - \varphi(y)[c(x, y)u]_y + \\ &+ [2Q(x, y)u]_y - 2\varphi(y)Q(x, y)u + A_1(x)u = f(x, y), \end{aligned} \tag{10,4}$$

con $c(x, y)$ non identicamente nulla e $Q(x, y)$ non esprimibile sotto la forma $c\psi(y) + \alpha(x)\beta(y)$. Esse ammettono una sola funzione trasformante $v(y)$ definita dalla (10,1).

Si noti che la (10,4) è una combinazione lineare di due equazioni, una del tipo (5,5) e l'altra del tipo (6,1) o (6,2) secondoché $c(x, y)$ è della forma $A(x)\, B(y)$ oppure no.

11. Riassunto dei risultati ottenuti e possibili applicazioni del metodo delle trasformate parziali. - Voglio qui riunire, in modo più espressivo, i risultati della discussione svolta. Da quanto si è detto al n. 2 si trae il seguente primo teorema:

I. - *Tutte le equazioni* (1,1) *con il coefficiente a identicamente nullo godono di proprietà I_y e le funzioni trasformanti $v(x, y)$ sono le soluzioni dell'equazione a derivate parziali* (2,8).

Fra le equazioni con il coefficiente a non identicamente nullo, ci siamo limitati a considerare quella per le quali è sempre $a \neq 0$ ed inoltre sono verificate le ipotesi enunciate ai nn. 2, 4 ([13]). Per tali equazioni è possibile, senza alterare la natura del problema postoci, adottare la forma canonica

$$u_{xx} + c(x, y)u_{yy} + 2q(x, y)u_y + r(x, y)u = f(x, y), \tag{1}$$

e limitarsi alla ricerca delle funzioni trasformanti che dipendono dalla sola y [cfr. n. 4].

Con riferimento all'equazione (1) si ricava dalla discussione del n. 5 il seguente teorema:

II. - *Fra le equazioni* (1) *che sono di tipo parabolico* ($c \equiv 0$), *godono di proprietà* I_y *tutte e sole quelle che sono della forma* [cfr. con (5,5)]:

$$u_{xx} + 2[q(x, y)u]_y + 2[\varphi(y)q(x, y) + A_1(x)]u = f(x, y). \tag{2}$$

Se la funzione $q(x, y)$ *non è del tipo* $A(x)B(y)$, *si ha una sola proprietà* I_y. *Se* $q(x, y) = A(x)B(y)$ *e non identicamente nulla. si hanno* ∞^1 *proprietà* I_y [cfr. con (5,4)].

Se $q(x, y) \equiv 0$, *si hanno infinite proprietà* I_y, *con scelta arbitraria della funzione trasformante* $v(y)$ [cfr. con (5,2)].

Dai nn. 6, 7, 8, 9, 10 si ricava questo terzo teorema:

III. - *Fra le equazioni* (1) *che non sono paraboliche* ($c \neq 0$) *e che godono di proprietà* I_y *vi sono intanto quelle della forma* [cfr, con (6,2)]:

$$u_{xx} + [c(x, y)u]_{yy} + 2\varphi(y)[c(x, y)u]_y + [\varphi_1(y)c(x, y) + A_1(x)]u = f(x, y). \tag{3}$$

Se la funzione $c(x, y)$ *non è del tipo* $A(x) \cdot B(y)$ *si hanno* ∞^1 *proprietà* I_y. *Se* $c(x, y) = A(x)B(y)$ *si hanno* ∞^2 *proprietà* I_y [cfr. con (6,1)].

Oltre alla (3) *godono ancora di proprietà* I_y *altre equazioni che si possono inquadrare nel modo seguente*:

a) *certe particolari combinazioni lineari a coefficienti costanti di un'equazione* (2) *con un'equazione* (3) [cfr. con (7,4), (9,6), (10,4) assieme alle particolarità ivi descritte]; *si hanno allora al più due proprietà* I_y, *tranne in un caso* [cfr. con (7,5)] *nel quale tali proprietà sono* ∞^1;

b) *certe particolari combinazioni lineari a coefficienti costanti di due distinte equazioni* (3) [cfr. con (8,13) assieme alle particolarità ivi descritte]; *si hanno allora al più tre proprietà* I_y;

c) *certe particolari combinazioni lineari a coefficienti costanti di un'equazione* (2) *con due distinte equazioni* (3) [cfr. con (8,8) assieme alle particolarità ivi descritte]; *si hanno allora al più due proprietà* I_y.

Come si è detto al n. 1, fra le equazioni individuate dai teor. I, II, III possono essere trattate col metodo delle trasformate parziali soltanto quelle

---

([13]) Nei casi in cui queste ipotesi non fossero soddisfatte, non si potranno in generale applicare i risultati qui enunciati. Conviene allora, caso per caso, procedere ad uno studio diretto del sistema (2,7).

che godono di infinite proprietà I_y; dunque soltanto quelle del teor. I e quelle dei tipi (5,2), (5,4), (6,1), (6,2), (7,5). Ma questa sola condizione non basta; ne occorrono altre e fra queste ci limitiamo a segnalarne una. È ovviamente necessario che dall'insieme delle infinite funzioni trasformanti sia possibile estrarre un *sistema completo* di funzioni. Questa condizione esclude la (6,2) perchè, come si è visto, le funzioni trasformanti $v(y)$ relative a tali equazioni sono gli integrali di $v'' - 2(\varphi v)' + \varphi_4 v = 0$ (ove non figura alcun parametro) e quindi sono del tipo $v_1(y) + \lambda v_2(y)$, con λ costante arbitraria; è chiaro che con queste funzioni non si può formare alcun sistema completo. Possiamo perciò concludere:

IV. – *Vi sono soltanto cinque tipi di equazioni per le quali appare possibile l'applicazione del metodo delle trasformate parziali; si tratta delle equazioni di cui al teor. I e di quelle della forma* (5,2), (5,4), (6,1), (7,5).

Come si è già detto al n. 1, lo studio di queste possibilità sarà svolto in un lavoro successivo.

BIBLIOGRAFIA

G. ASCOLI: [1] *Sopra i sistemi lineari isotropi e le loro proprietà integrali*, « Commentationes Pont. Acad. Scient. », vol. VII, n. 10, p. 207-281 (1943).

A. GHIZZETTI: [1] *Sul metodo della trasformazione parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito*, « Rendiconti di Mat. e delle sue appl. », Roma, vol. VI, p. 1-47 (1947).

[2] *Applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace al problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = F$ in n variabili*, « Rendiconti del Sem. Mat. dell'Un. di Padova », vol. XVII, p. 39-74 (1948).

M. PICONE: [1] *Formule risolutive e condizioni di compatibilità per alcuni problemi di propagazione*, « Memorie R. Accad. d'Italia », vol. V, n. 14 (1934).

[2] *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali in fisica matematica*, « Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa », s. II, vol. V, p. 213-288 (1936).

[3] *Formule risolutive, teoremi di unicità e di esistenza nei problemi dinamici con assegnati spostamento e atto di moto iniziali*, « Rendiconti del Sem. Mat. dell'Un. di Roma », s. IV, vol. 1, p. 192-232 (1937).

[4] *Nuovi metodi di indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali*, « Rendiconti del Sem. Mat. e Fis. di Milano », vol. XIII, p. 66-90 (1939).