Problemi ellittici in un angolo (*).

GUIDO TROMBETTI (Napoli)

Summary. — *This paper is concerned with boundary value problems for linear partial differential equations of elliptic type in a plane sector; in the first part of the paper Sobolev weight spaces have been studied and embedding and trace theorems have been proved; in the second part it is proved that problem is index type.*

Detto A l'angolo aperto di R^2 con vertice nell'origine e delimitato dalle semirette σ_1 e σ_2 , consideriamo il problema:

$$\begin{aligned} Au &= f && \text{in } A, \\ B_{jk}u &= g_{jk} && \text{su } \sigma_k, \quad j = 1, \dots, m; \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

dove A è un operatore differenziale lineare di ordine $2m$ propriamente ellittico in $\bar{A}$ ed all'infinito, i B_{jk} sono operatori differenziali di frontiera su σ_k verificanti la condizione complementare rispetto ad A su $\bar{\sigma}_k$ ed all'infinito.

A. AVANTAGGIATI e M. TROISI in [1], [2], [3] hanno studiato tale problema in spazi di Sobolev con doppio peso $W_{s_1, s_2}^r(A)$, dove i pesi hanno il ruolo di prescrivere il comportamento nell'origine ed all'infinito delle funzioni di $W_{s_1, s_2}^r(A)$.

Tali autori hanno dimostrato che, sotto opportune ipotesi ed esclusi certi valori eccezionali di $s_i - r + 1$, il problema in questi spazi è ad indice.

Va rilevato che gli spazi $W_{s_1, s_2}^r(A)$ hanno la proprietà che le eventuali tracce nell'origine di funzioni ad essi appartenenti e delle loro derivate si annullano.

Ciò comporta che tra le condizioni di compatibilità per il problema vi sono quelle che prescrivono ai termini noti ed alle loro derivate fino a quelle di un certo ordine di essere dotati di tracce nulle nell'origine.

Per svincolarsi da tali limitazioni i suddetti autori hanno introdotto un'altra classe di spazi denotati con $W_{s_1, s_2}^{*r}(A)$ a cui appartengono anche funzioni con le eventuali tracce nell'origine non nulle.

Hanno dimostrato che se f e g_{jk} sono prese in opportuni spazi funzionali ed inoltre verificano un numero finito di condizioni di compatibilità nell'origine il problema in $W_{s_1, s_2}^{*r}(A)$ si può ricondurre ad un altro in $W_{s_1, s_2}^r(A)$.

Per la risolubilità di quest'ultimo problema sarà poi necessario che siano soddisfatte altre condizioni di compatibilità in numero finito. Pertanto il numero totale

(*) Entrata in Redazione il 14 agosto 1974.

delle condizioni di compatibilità necessarie e sufficienti per la risolubilità del problema in $W_{s_1, s_2}^{*r}(\mathcal{A})$ è finito ed il procedimento porta a stabilire che la eventuale soluzione dipende da un numero finito di costanti arbitrarie.

In questo lavoro mi propongo di riprendere lo studio del problema in un'altra classe di spazi di Sobolev denotati con $U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$ ($r \in \mathbb{N}$, $s_1 \geq 0$) del tipo degli spazi $W_{s_1, s_2}^{*r}(\mathcal{A})$ nel caso in cui $s_1 > 0$, per giungere ad ottenere dei risultati che siano svincolati dal problema in $W_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$ studiato in [3], e in cui sia preso anche in considerazione il caso $s_1 = 0$ tralasciato in [3].

Ciò richiede un preliminare studio degli spazi $U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$ che implichi anche un ulteriore approfondimento degli spazi $W_{s_1, s_2}^{*r}(\mathcal{A})$ maggiore di quello ottenuto in [1] (in cui ad es. manca una caratterizzazione dei corrispondenti spazi di tracce).

Stabilisco per tali spazi dei teoremi di immersione, di compattezza, di densità e di tracce sui lati e nel vertice di $\mathcal{A}$.

Usufruendo di tale caratterizzazione degli spazi $U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$ e dei corrispondenti spazi di tracce e poggiando sui risultati di [3] relativi al problema posto in $W_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$, stabilisco delle limitazioni a priori per il problema sopra citato e (nel caso $s_1 > 0$) per il suo aggiunto funzionale.

Da tali limitazioni si deduce che l'operatore associato al problema nel caso $s_1 > 0$ è ad indice, e nel caso $s_1 = 0$ ha nucleo di dimensione finita e codominio chiuso.

È da rilevare che questi spazi sono tali che se $u \in U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$ per ogni $a \in \mathbb{R}_+$ si ha:

$$\sum_{|\alpha| \leq r-2} \int_{\mathcal{A} \cap \{|x| \leq a\}} |\partial^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha| = r-1} \int_{\mathcal{A} \cap \{|x| \leq a\}} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha| = r} \int_{\mathcal{A} \cap \{|x| \leq a\}} |x|^{2s_1} |\partial^\alpha u|^2 dx \leq +\infty.$$

Il comportamento all'infinito è come in $W_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$.

La formula di maggiorazione per le soluzioni del problema a cui pervengo è del tipo:

$$\|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})} \leq c \left(\|Au\|_{U_{s_1, s_2}^{r-2m}(\mathcal{A})} + \sum_{j,k} \|g_{jk}\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} + \|u\|_{H(\mathcal{A})} \right)$$

dove $H(\mathcal{A})$ è tale che l'iniezione di $U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$ in $H(\mathcal{A})$ è compatta.

Essa è valida, esclusi valori eccezionali di $s_i - r + 1$, se $s_1 \in [0, 1[$.

Analoga limitazione si dimostra se $s_1 \in (]0, \frac{3}{2}[-\{1\})$ per le eventuali soluzioni del problema aggiunto funzionale.

In una prima parte del lavoro, n. 1-7, approfondisco lo studio degli spazi $U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$.

Nel n. 8 enuncio le ipotesi per il problema ed i risultati che dimostro nel n. 9.

Nel n. 10 stabilisco i risultati per il problema aggiunto.

1. - Notazioni e lemmi preliminari.

Sia $\mathcal{A}$ l'angolo aperto di $\mathbb{R}^2$ con vertice nell'origine e delimitato dalle semirette σ_1 e σ_2 di anomalia θ_1 e θ_2 con:

$$-\pi/2 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{3}{2}\pi.$$

Detto $x = (x_1, x_2)$ il generico elemento di R^2 porremo:

$$A_a = \{x \in A: |x| < a\}$$

con $a \in R_+$ e $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Se $u(x)$ è una funzione definita in A porremo:

$$u_\pi(\varrho, \theta) = u(\varrho \cos \theta, \varrho \sin \theta)$$

e se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ è una coppia di interi positivi o nulli porremo:

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \quad \text{ove } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Porremo ancora $\forall k \in N$:

$$|\partial^k u|^2 = \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u|^2.$$

Con il simbolo x^α ove $x \in R^2$ ed $\alpha \in N^2$ si intenderà:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$

Detta $g(\varrho)$ una funzione della sola variabile ϱ si porrà:

$$g^{(i)}(\varrho) = \frac{d^i g}{d\varrho^i}.$$

Diremo che $f(x) \in L^\infty(\Omega)$ se e solo se $f(x)$ è misurabile ed esiste $K \in R_+$ tale che riesca

$$|f(x)| \leq K \quad \text{quasi ovunque in } \Omega;$$

diremo che $f(x) \in L_\alpha^\infty(\Omega)$ se e solo se $|x|^\alpha f(x) \in L^\infty(\Omega)$.

LEMMA 1.1. - Se $a \in R_+$, $\beta > -\frac{1}{2}$ e $\gamma \in R$ riesce:

$$\begin{aligned} (1.1) \quad \int_0^a \varrho^{2\beta} |g(\varrho)|^2 d\varrho &\leq c \left(\int_0^{2a} \varrho^{2(\beta+1)} |g'(\varrho)|^2 d\varrho + \int_a^{2a} |g(\varrho)|^2 d\varrho \right) \leq \\ &\leq c_\gamma \left(\int_0^{2a} \varrho^{2(\beta+1)} |g'(\varrho)|^2 d\varrho + \int_0^{2a} \varrho^{2\gamma} |g(\varrho)|^2 d\varrho \right) \end{aligned}$$

per ogni funzione g per cui abbiano senso tali integrali.

Sia $\zeta \in \mathcal{D}([0, +\infty[)$ tale che:

$$\zeta \begin{cases} = 1 & \varrho \leq a, \\ = 0 & \varrho \geq 2a. \end{cases}$$

Posto:

$$f(\varrho) = g(\varrho) \cdot \zeta(\varrho)$$

riesce:

$$\int_0^a |\varrho^{2\beta} g(\varrho)|^2 d\varrho \leq \int_0^\infty |\varrho^{2\beta} f(\varrho)|^2 d\varrho = \int_0^\infty |\varrho^{2\beta}| \left| \int_\varrho^\infty f'(t) dt \right|^2 d\varrho.$$

Applicando il Lemma 2.1, pag. 286 di [6] si ottiene:

$$\int_0^a |\varrho^{2\beta} g(\varrho)|^2 d\varrho \leq c \int_0^\infty \varrho^{2(\beta+1)} |f'(\varrho)|^2 d\varrho \leq c \left(\int_0^{2a} \varrho^{2(\beta+1)} |g'(\varrho)|^2 d\varrho + \int_a^{2a} |g(\varrho)|^2 d\varrho \right).$$

Osservando poi che:

$$\int_a^{2a} |g(\varrho)|^2 d\varrho \leq c_\gamma \int_a^{2a} \varrho^{2\gamma} |g(\varrho)|^2 d\varrho \leq c_\gamma \int_0^{2a} \varrho^{2\gamma} |g(\varrho)|^2 d\varrho$$

segue l'asserto.

LEMMA 1.2. — Se riesce $\beta < -\frac{1}{2}$ e $g(0) = 0$ si ha:

$$(1.1') \quad \int_0^\infty \varrho^{2\beta} |g(\varrho)|^2 d\varrho \leq c \int_0^\infty \varrho^{2(\beta+1)} |g'(\varrho)|^2 d\varrho$$

per tutte le funzioni g per cui hanno senso tali integrali.

Poichè:

$$\int_0^\infty \varrho^{2\beta} |g(\varrho)|^2 d\varrho = \int_0^\infty |\varrho^{2\beta}| \left| \int_0^\varrho g'(t) dt \right|^2 d\varrho$$

applicando il Lemma 2.1, pag. 286 di [6] si ha l'asserto.

LEMMA 1.3. — Se $a \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_0 \in \bar{\mathbb{R}}_+$, $\alpha < \frac{1}{2}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ $\exists c$ dipendente da λ_0 tale che per $0 < \lambda < \lambda_0$ riesce

$$(1.2) \quad |g(\lambda)|^2 \leq c \left(\int_\lambda^{\lambda+a} \varrho^{2\alpha} |g'(\varrho)|^2 d\varrho + \int_\lambda^{\lambda+a} |g(\varrho)|^2 d\varrho \right) \leq c_\gamma \left(\int_\lambda^{\lambda+2a} \varrho^{2\alpha} |g'(\varrho)|^2 d\varrho + \int_\lambda^{\lambda+2a} \varrho^{2\gamma} |g(\varrho)|^2 d\varrho \right)$$

per tutte le funzioni g per cui hanno senso tali integrali.

Osserviamo che:

$$|g(\lambda)|^2 = \left| -\int_{\lambda}^{\varrho} g'(t) dt + g(\varrho) \right|^2 \leq 2|g(\varrho)|^2 + 2 \left| \int_{\lambda}^{\varrho} g'(t) dt \right|^2.$$

Applicando la disuguaglianza di Schwartz-Holder si ricava:

$$\left| \int_{\lambda}^{\varrho} g'(t) dt \right|^2 \leq \int_{\lambda}^{\varrho} t^{-2\alpha} dt \cdot \int_{\lambda}^{\varrho} t^{2\alpha} |g'(t)|^2 dt = \frac{\varrho^{1-2\alpha} - \lambda^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \int_{\lambda}^{\varrho} t^{2\alpha} |g'(t)|^2 dt \leq \frac{\varrho^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \int_{\lambda}^{\varrho} t^{2\alpha} |g'(t)|^2 dt$$

se $\varrho \geq \lambda$.

Quindi:

$$|g(\lambda)|^2 \leq 2|g(\varrho)|^2 + \frac{2}{1-2\alpha} \cdot \varrho^{1-2\alpha} \int_{\lambda}^{\varrho} t^{2\alpha} |g'(t)|^2 dt.$$

Integrando tra λ e $\lambda+a$ in $d\varrho$ ed osservando che per la formula di Dirichlet si ha:

$$\int_{\lambda}^{\lambda+a} \left[\varrho^{1-2\alpha} \int_{\lambda}^{\varrho} t^{2\alpha} |g'(t)|^2 dt \right] d\varrho = \int_{\lambda}^{\lambda+a} \left(\int_{\lambda}^{\lambda+a} \int_{\lambda}^{\varrho} t^{2\alpha} |g'(t)|^2 \varrho^{1-2\alpha} d\varrho \right) dt \leq \int_{\lambda}^{\lambda+a} \varrho^{1-2\alpha} \int_{\lambda}^{\varrho} t^{2\alpha} |g'(t)|^2 dt \leq \int_{\lambda}^{\lambda+a} \varrho^{1-2\alpha} \int_{\lambda}^{\varrho} t^{2\alpha} |g'(t)|^2 dt$$

segue l'asserto.

La seconda parte della (1.2) è banale se $\lambda > 0$; segue dalla (1.1) se $\lambda = 0$.

LEMMA 1.4. — Se $a \in R_+$, $\gamma \in R$, $\beta > -1$ vale:

$$(1.3) \quad \int_{A_a} |x|^{2\beta} |u|^2 dx \leq c \left(\int_{A_{2a}} |x|^{2(\beta+1)} |\partial u|^2 dx + \int_{A_{2a}-A_a} |u|^2 dx \right) = c_{\gamma} \left(\int_{A_{2a}} |x|^{2(\beta+1)} |\partial u|^2 dx + \int_{A_{2a}} |x|^{2\gamma} |u|^2 dx \right)$$

per tutte le funzioni u per cui hanno senso tali integrali.

Riesce:

$$\int_{A_a} |x|^{2\beta} |u|^2 dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^a \varrho^{2\beta+1} |u_{\pi}(\varrho, \theta)|^2 d\varrho.$$

Applicando la (1.1) si ricava:

$$\int_{A_a} |x|^{2\beta} |u|^2 dx \leq c \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{2a} \varrho^{2\beta+3} |\partial_{\varrho} u_{\pi}(\varrho, \theta)|^2 d\varrho + \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_a^{2a} |u_{\pi}(\varrho, \theta)|^2 d\varrho \right).$$

Dal fatto che:

$$\partial_{\varrho} u_{\pi}(\varrho, \theta) = (\partial_{x_1} u \cdot \cos \theta + \partial_{x_2} u \cdot \sin \theta)_{\pi}$$

segue l'asserto.

LEMMA 1.5. — *Se $\beta < -1$ e $u(0) = 0$ vale:*

$$(1.3') \quad \int_A |x|^{2\beta} |u|^2 dx \leq c \int_A |x|^{2(\beta+1)} |\partial u|^2 dx$$

per le funzioni per cui hanno senso tali integrali.

Osservando che:

$$\int_A |x|^{2\beta} |u|^2 dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{\infty} \varrho^{2\beta+1} |u_{\pi}(\varrho, \theta)|^2 d\varrho$$

ed applicando la (1.1') segue l'asserto.

LEMMA 1.6. — *$\forall \alpha \in R$, $a \in R_+$, $\theta_0 \in [\theta_1, \theta_2]$ vale la disuguaglianza:*

$$(1.4) \quad \int_{A_a} |x|^{2\alpha} |u|^2 dx \leq c \left(\int_{A_a} |x|^{2(\alpha+1)} |\partial u|^2 dx + \int_0^a \varrho^{2\alpha+1} |u_{\pi}(\varrho, \theta_0)|^2 d\varrho \right)$$

per le funzioni per cui hanno senso tali integrali.

Si ha:

$$|u_{\pi}(\varrho, \theta)|^2 = \left| \int_{\theta_0}^{\theta} \partial_{\tau} u_{\pi}(\varrho, \tau) d\tau + u_{\pi}(\varrho, \theta_0) \right|^2 \leq c \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} |\partial_{\tau} u_{\pi}(\varrho, \tau)|^2 d\tau + |u_{\pi}(\varrho, \theta_0)|^2 \right];$$

tenuto conto che:

$$\partial_{\theta} u(\varrho \cos \theta, \varrho \sin \theta) = (-\varrho \sin \theta \partial_{x_1} u + \varrho \cos \theta \partial_{x_2} u)_{\pi}$$

si ha:

$$|u_{\pi}(\varrho, \theta)|^2 \leq c \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho^2 |(\partial u)_{\pi}|^2 d\tau + |u_{\pi}(\varrho, \theta_0)|^2 \right).$$

Moltiplicando per $\varrho^{2\alpha+1}$ ambo i membri ed integrando tra 0 ed a in $d\varrho$ e poi tra θ_1 e θ_2 in $d\theta$ segue la (1.4).

LEMMA 1.7. — *$\forall \alpha \in R$, $\forall a \in R_+$, $\forall \varepsilon \in R_+$, riesce con $\theta_0 \in [\theta_1, \theta_2]$:*

$$(1.5) \quad \int_0^a \varrho^{2\alpha+1} |u_{\pi}(\varrho, \theta_0)|^2 d\varrho \leq \varepsilon \int_{A_a} |x|^{2(\alpha+1)} |\partial u|^2 dx + c(\varepsilon) \int_{A_a} |x|^{2\alpha} |u|^2 dx;$$

se $\alpha \in]-1, +\infty[$ e $\gamma \in R$ si ha:

$$(1.5') \quad \int_0^a \varrho^{2\alpha+1} |u_\pi(\varrho, \theta_0)|^2 \leq c_\gamma \left(\int_{A_{2a}} |x|^{2(\alpha+1)} |\partial u|^2 dx + \int_{A_{2a}} |x|^{2\gamma} |u|^2 dx \right)$$

per le funzioni per cui hanno senso tali integrali.

Si osservi che:

$$z\bar{w} + w\bar{z} = 2 \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot w) \leq 2|z| \cdot |w| \leq \varepsilon^2 |z|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |w|^2.$$

Quindi:

$$\partial_\theta |u_\pi|^2 = \partial_\theta (u_\pi \cdot \bar{u}_\pi) \leq \varepsilon^2 |\partial_\theta u_\pi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |u_\pi|^2.$$

Da qui:

$$\begin{aligned} |u_\pi(\varrho, \theta_0)|^2 &= - \int_{\theta_0}^{\theta} \partial_\tau |u_\pi(\varrho, \tau)|^2 d\tau + |u_\pi(\varrho, \theta)|^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\partial_\tau u_\pi|^2 d\tau + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |u_\pi|^2 d\tau + |u_\pi(\varrho, \theta)|^2 \\ &\leq 2\varepsilon^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho^2 (|(\partial_{x_1} u)_\pi|^2 + |(\partial_{x_2} u)_\pi|^2) d\tau + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |u_\pi|^2 d\tau + |u_\pi(\varrho, \theta)|^2. \end{aligned}$$

Moltiplicando per $\varrho^{2\alpha+1}$, integrando tra 0 ed a in $d\varrho$ e poi tra θ_1 e θ_2 in $d\theta$ segue la (1.5).

La (1.5') segue immediatamente dalla (1.3) e (1.5).

LEMMA 1.8. - Se $\alpha \in]-\infty, \frac{1}{2}[$, $a \in R_+$, vale la seguente disuguaglianza:

$$(1.6) \quad |u(t_1, t_2)|^2 \leq c \sum_{|\beta| \leq 2} \int_{A_2(\sigma+a)} |x|^{2(\alpha+\frac{1}{2})} |\partial^\beta u|^2 dx$$

con $\sigma = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \leq \sigma_0 \in \bar{R}_+$ e c dipendente da σ_0 e per tutte le funzioni per cui abbiano senso tali integrali.

Basta provare la (1.6) per $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Dalla (1.2) segue:

$$\begin{aligned} |u(t_1, t_2)|^2 &= |u_\pi(\sigma, \theta_0)|^2 \leq c \left(\int_\sigma^{\sigma+a} \varrho^{2\alpha} |\partial_\varrho u_\pi(\varrho, \theta_0)|^2 d\varrho + \int_\sigma^{\sigma+a} \varrho^{2\alpha} |u_\pi(\varrho, \theta_0)|^2 d\varrho \right) \leq \\ &\leq c \left(\int_0^{\sigma+a} \varrho^{2\alpha} |\partial_\varrho u_\pi(\varrho, \theta_0)|^2 d\varrho + \int_0^{\sigma+a} \varrho^{2\alpha} |u_\pi(\varrho, \theta_0)|^2 d\varrho \right). \end{aligned}$$

Applicando, allora, la (1.5') si ottiene:

$$|u(t_1, t_2)|^2 \leq c \left(\int_{A_2(\sigma+a)} |x|^{2(\alpha+\frac{1}{2})} |\partial^2 u|^2 dx + \int_{A_2(\sigma+a)} |x|^{2(\alpha+\frac{1}{2})} |\partial u|^2 dx + \int_{A_2(\sigma+a)} |x|^{2(\alpha+\frac{1}{2})} |u|^2 dx \right),$$

quindi la (1.6).

LEMMA 1.9. — Se $s < 1$ vale $\forall \varepsilon \in]0, 1]$ con $a \in R_+$:

$$(1.7) \quad |u(0, 0)|^2 \leq \varepsilon \left(\int_{A_a} |x|^{2s} |\partial^2 u|^2 dx + \int_{A_a} |x|^{2(s-1)} |\partial u|^2 dx \right) + c(\varepsilon) \int_{A_a} |x|^{2s} |u|^2 dx.$$

Posto $\frac{1}{2} + \alpha = s$, dalla (1.6) con $t_1 = t_2 = 0$ si ricava con $v(x) = u(\varepsilon x)$:

$$|v(0, 0)| \leq c \left(\int_{A_a} |x|^{2s} |\partial^2 v|^2 dx + \int_{A_a} |x|^{2(s-1)} |\partial v|^2 dx + \int_{A_a} |x|^{2s} |v|^2 dx \right).$$

Posto:

$$\varepsilon x = (\varepsilon x_1, \varepsilon x_2) = (t_1, t_2) = t$$

si ricava:

$$|u(0, 0)|^2 \leq c \left(\int_{|t| \leq \varepsilon a} \left| \frac{t}{\varepsilon} \right|^{2s} \cdot \varepsilon^4 |\partial^2 u|^2 \varepsilon^{-2} dt + \int_{|t| \leq \varepsilon a} \left| \frac{t}{\varepsilon} \right|^{2(s-1)} \varepsilon^2 |\partial u|^2 \varepsilon^{-2} dt + \int_{|t| \leq \varepsilon a} \left| \frac{t}{\varepsilon} \right|^{2s} |u|^2 \varepsilon^{-2} dt \right)$$

quindi la (1.7).

2. — Gli spazi $U_{s_1, s_2}^r(A)$ e $V_{s_1, s_2}^r(A)$.

Sia r un intero ≥ 2 ed s_1, s_2 due numeri reali con $s_1 \leq s_2$; poniamo per definizione ⁽¹⁾:

$$(2.1) \quad \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq r-2} \int_{A_2} |\partial^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha| = r-1} \sum_{|\beta| \leq 1} \int_{A_2} |x|^{2(s_1+|\beta|-1)} |\partial^{\alpha+\beta} u|^2 dx + \\ + \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{A-A_1} |x|^{2(s_2+|\alpha|-r)} |\partial^\alpha u|^2 dx.$$

Indicheremo con $U_{s_1, s_2}^r(A)$ lo spazio delle funzioni $u(x)$ tali che la norma (2.1) sia finita se $r \geq 2$, lo spazio $W_{s_1, s_2}^r(A)$ (cfr. [1]) se $r < 2$.

Supporremo da ora in poi, salvo esplicito avviso contrario, $r \geq 2$.

Indicheremo talvolta la seconda e terza sommatoria a destra della (2.1) rispettivamente con:

$$\sum_{|\alpha| = r-1} \|\partial^\alpha u\|_{W_{s_1}^1(A_2)}^2, \|u\|_{W_{s_2}^r(A-A_1)}^2.$$

⁽¹⁾ Con $\partial^\alpha u$ si intendono le derivate di u nel senso delle distribuzioni.

Detto r un intero ≥ 0 indicheremo con $V_{s_1, s_2}^r(A)$ lo spazio delle funzioni $u(x)$ tali che sia finita la norma:

$$(2.2) \quad \|u\|_{V_{s_1, s_2}^r(A)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{A_2} |x|^{2s_1} |\partial^\alpha u|^2 dx + \\ + \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{A-A_1} |x|^{2(s_2+|\alpha|-r)} |\partial^\alpha u|^2 dx = \|u\|_{W_{2, |\alpha|}^{s_1}(A_2)}^2 + \|u\|_{W_{s_2}^r(A-A_1)}^2,$$

(per la definizione di $W_{2, |\alpha|}^{s_1}(A_2)$ cfr. [6], cap. 6).

Valgono i seguenti lemmi di inclusione:

LEMMA 2.1. — Se $s_1 \leq 2 \leq r$

$$W_{s_1, s_2}^r(A) \subset U_{s_1, s_2}^r(A)$$

algebricamente e topologicamente ⁽¹⁾.

Basta osservare che:

$$s_1 + |\alpha| - r \leq 0 \quad \text{per } |\alpha| \leq r - 2.$$

LEMMA 2.2. — $\forall s_1 \geq 0$ si ha:

$$U_{s_1, s_2}^r(A) \subset V_{s_1, s_2}^r(A)$$

algebricamente e topologicamente.

La dimostrazione è evidente.

LEMMA 2.3. — Se riesce $0 < s_1 \leq 1$ si ha:

$$U_{s_1, s_2}^r(A) \simeq V_{s_1, s_2}^r(A)$$

intendendo con tale simbolo che tali spazi sono isomorfi algebricamente e topologicamente.

In virtù del Lemma 2.2 basterà dimostrare che riesce:

$$V_{s_1, s_2}^r(A) \subset U_{s_1, s_2}^r(A);$$

per la (1.3) si ha:

$$\sum_{|\alpha| \leq r-2} \int_{A_1} |\partial^\alpha u|^2 dx \leq c \left(\sum_{|\alpha| \leq r-1} \int_{A_1} |x|^2 |\partial^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha| \leq r-2} \int_{A_2} |x|^2 |\partial^\alpha u|^2 dx \right) \leq \\ \leq c' \left(\sum_{|\alpha| \leq r-1} \int_{A_2} |x|^{2s_1} |\partial^\alpha u|^2 dx \right) \leq c'' \|u\|_{V_{s_1, s_2}^r(A)}^2.$$

D'altro canto riesce:

$$\sum_{|\alpha| = r-1} \|\partial^\alpha u\|_{W_{s_1}^1(A_1)}^2 \leq c \|u\|_{V_{s_1, s_2}^r(A)}^2,$$

⁽¹⁾ Ricordiamo che: $\|u\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq r} \left(\int_A |x|^{2(s_1+|\alpha|-r)} |\partial^\alpha u|^2 dx + \int_A |x|^{2(s_2+|\alpha|-r)} |\partial^\alpha u|^2 dx \right).$

poichè per la (1.3) si ha:

$$\int_{A_1} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dx \leq c \left(\int_{A_2} |x|^{2s_1} |\partial^r u|^2 dx + \int_{A_2} |x|^{2s_1} |\partial^{r-1} u|^2 dx \right).$$

In definitiva, quindi:

$$\|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c \|u\|_{V_{s_1, s_2}^r(A)}$$

cioè l'asserto.

LEMMA 2.4. — Se $s_1 \geq 0$, $\mathcal{D}(\bar{A})$ è denso in $V_{s_1, s_2}^r(A)$.

Sia $u \in V_{s_1, s_2}^r(A)$.

Siano $\zeta_1(x)$ e $\zeta_2(x)$ due funzioni di classe $C^\infty(\bar{A})$ tali che:

$$\begin{aligned} \zeta_1(x) &= 0 & \text{per } |x| \geq \frac{3}{2}, \\ \zeta_2(x) &= 0 & \text{per } |x| \leq 1, \\ \zeta_1(x) + \zeta_2(x) &= 1 & \text{in } \bar{A}. \end{aligned}$$

Si ha:

$$\zeta_1 u \in W_{2, |x|^{2s_1}}^r(A_2), \quad \zeta_2 u \in W_{s_1, s_2}^r(A).$$

Per il Teor. 2.1, pag. 284 di [6] esiste una successione $v_n \in \mathcal{D}(\bar{A}_2)$ che converge a $\zeta_1 u$ in $W_{2, |x|^{2s_1}}^r(A_2)$.

Sia u_n^1 il prolungamento di v_n con valori nulli $|x| \geq 2$.

Analogamente esiste per il Teor. 8.1 di [1] una successione di funzioni $u_n^2 \in \mathcal{D}(\bar{A} - \{0\})$, nulle in un intorno dell'origine, che converge a $\zeta_2 u$ in $W_{s_1, s_2}^r(A)$.

Posto:

$$u_n = u_n^1 + u_n^2$$

si ha:

$$\|u - u_n\|_{V_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c \left(\|u_n^1 - \zeta_1 u\|_{W_{2, |x|^{2s_1}}^r(A_2)} + \|u - \zeta_2 u\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} \right)$$

e facendo divergere n segue l'asserto.

Poniamo:

$$[s_1] = \begin{cases} \text{al più grande intero minore od uguale ad } s_1 \text{ se } s_1 \geq 0, \\ 0 \text{ se } s_1 < 0. \end{cases}$$

TEOREMA 2.1. — Assegnati r, s_1, s_2 sussiste l'inclusione algebrica e topologica:

$$U_{s_1, s_2}^r(A) \subset C^r(\bar{A}_a) \quad \forall a \in R_+$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} \nu &= r-2 - [s_1] && \text{per } s_1 < 2 \text{ ed } r \geq 2 + [s_1], \\ \nu &= r-4 && \text{per } s_1 \geq 2 \text{ ed } r \geq 4. \end{aligned}$$

Se $s_1 \leq 0$ l'asserto segue banalmente da noti risultati di Sobolev, quando si osservi che:

$$U_{s_1, s_2}^r(A) \subset W^r(A_a).$$

Sia $s_1 \in]0, 1[$; in virtù de Lemmi 2.3 e 2.4 basterà dimostrare che:

$$\sum_{|\alpha| \leq r-2} \max_{\bar{A}_a} |\partial^\alpha u(x)| \leq c \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\bar{A}).$$

Dalla (1.6) segue che essendo $\sigma \leq a$:

$$|\partial^\alpha u(x)|^2 \leq c \sum_{|\beta| \leq 2} \int_{A_{4a}} |x|^{2s_1} |\partial^{\alpha+\beta} u|^2 dx \leq c' \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)}.$$

Sia $s_1 \in [1, 2[$; riesce $\nu = r-3$.

Si ha facilmente che:

$$U_{s_1, s_2}^r(A) \subset W_{2, |x|^{2(s_1-1)}}^{r-1}(A_a).$$

dove $W_{2, |x|^{2(s_1-1)}}^{r-1}(A_a)$ denotano gli spazi definiti al Cap. 6 di [6].

D'altro canto essendo $s_1-1 \geq 0$, per il Teor. 2.1, pag. 284 di [6], $\mathcal{D}(\bar{A}_a)$ è denso su $W_{2, |x|^{2(s_1-1)}}^{r-1}(A_a)$.

Applicando la (1.6) si ha allora per $|x| \leq r-3$:

$$\max_{\bar{A}_a} |\partial^\alpha u(x)|^2 \leq c \sum_{|\beta| \leq 2} \int_{A_{4a}} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^{\alpha+\beta} u|^2 dx \leq c' \|u\|_{W_{2, |x|^{2(s_1-1)}}^{r-1}(A_{4a})}^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\bar{A}_{4a}).$$

Se $s_1 \in [2, +\infty[$ l'asserto segue banalmente dal fatto che:

$$U_{s_1, s_2}^r(A) \subset W^{r-2}(A_a)$$

e dal teorema di Sobolev.

3. - Gli spazi $\mathring{U}_{s_1, s_2}^r(A)$.

Si pone per definizione:

$$\mathring{U}_{s_1, s_2}^r(A) = \{u \in U_{s_1, s_2}^r(A) : \partial^\gamma u(0, 0) = 0 \text{ per } |\gamma| \leq r\}$$

con

$$\nu \begin{cases} = r - 2 - [s_1] & \text{se } s_1 < 2, \\ = r - 4 & \text{se } s_1 \geq 2. \end{cases}$$

Vale il seguente

LEMMA 3.1. — Se $s_1 < 2 \leq r$, $s_1 + 1 \leq r$ e $s_1 \neq 1$

$$\tilde{U}_{s_1, s_2}^r(A) \simeq W_{s_1, s_2}^r(A).$$

In virtù del Lemma 2.1 e della proposizione 9.1 di [1] dobbiamo solo dimostrare che:

$$\tilde{U}_{s_1, s_2}^r(A) \subset W_{s_1, s_2}^r(A).$$

Osserviamo intanto che:

$$\|u\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)}^2 \leq 2 \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{A_1} |x|^{2(s_1 + |\alpha| - r)} |\partial^\alpha u|^2 dx + 2 \|u\|_{W_{s_2}^r(A - A_1)}^2.$$

Si ha intanto $\forall s_1$

$$\sum_{|\alpha| = r-1} \int_{A_1} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha| = r} \int_{A_1} |x|^{2s_1} |\partial^\alpha u|^2 dx \leq \sum_{|\alpha| = r-1} \|\partial^\alpha u\|_{W_{s_1}^1(A_2)}^2.$$

Sia $s_1 < 1$; restano da maggiorare i termini del tipo:

$$\int_{A_1} |x|^{2(s_1-k)} |\partial^\alpha u|^2 dx$$

con $|\alpha| = r - k$ e $k - 2 \geq 0$.

Poichè $s_1 - k < -1$, per il teorema 2.1 e applicando la (1.3') $k - 1$ volte si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{A_1} |x|^{2(s_1-k)} |\partial^\alpha u|^2 dx &\leq c \left(\int_{A_1} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dx + \int_{A-A_1} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dx \right) \leq : \\ &\leq c \left(\sum_{|\alpha| = r-1} \|\partial^\alpha u\|_{W_{s_1}^1(A_2)}^2 + \|u\|_{W_{s_2}^r(A-A_1)}^2 \right). \end{aligned}$$

Se poi $s_1 \in]1, 2[$ si applica la (1.3) alle derivate di ordine $r - 2$ e poi si procede come sopra.

4. — Spazi $U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)$, $U_{s_1, s_2}^{r-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$, $U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)$.

Assegnati $s_1 \leq s_2$ in R ed r intero positivo, indicheremo con $U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)$ lo spazio delle funzioni $g(\varrho)$ tali che sia finita la norma:

$$\begin{aligned} \|g\|_{U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)}^2 &= \sum_{i=0}^{r-2} \int_0^2 |g^{(i)}(\varrho)|^2 d\varrho + \int_0^2 \varrho^{2s_1-1} |g^{(r-1)}(\varrho)|^2 d\varrho + \\ &+ \int_{-\infty}^{\log 2} \int_{-\infty}^{\log 2} \frac{|e^{s_1 v} g^{(r-1)}(e^v) - e^{s_1 v'} g^{(r-1)}(e^{v'})|^2}{|y - y'|^2} dy dy' + \sum_{i=0}^{r-1} \int_1^{+\infty} \varrho^{2(s_2+i-r)+1} |g^{(i)}(\varrho)|^2 d\varrho \\ &+ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{|e^{s_2 v} g^{(r-1)}(e^v) - e^{s_2 v'} g^{(r-1)}(e^{v'})|^2}{|y - y'|^2} dy dy' \\ &= \|g\|_{W^{r-2}(]0,2[)}^2 + \|g^{(r-1)}\|_{W^{1-\frac{1}{2}}(]0,2[)}^2 + \|g\|_{W_{s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(]1,+\infty[)}^2. \end{aligned}$$

se $r \geq 2$; lo spazio $W_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)$ se $r < 2$ ⁽¹⁾.

Indicheremo, inoltre, con $U_{s_1, s_2}^{r-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$ lo spazio delle funzioni definite su σ_k tali che:

$$g_k(\varrho) = g(\varrho \cos \theta_k, \varrho \sin \theta_k) \in U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+).$$

Vale il seguente:

LEMMA 4.1. — Se $s_1 \leq \frac{3}{2}$ si ha:

$$W_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) \subset U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)$$

algebricamente e topologicamente.

Osserviamo che da $s_1 + i - r + \frac{1}{2} \leq 0$ segue:

$$\|g\|_{W^{r-2}(]0,2[)}^2 \leq c \sum_{i=0}^{r-2} \int_0^2 \varrho^{2(s_1+i-r)+1} |g^{(i)}(\varrho)|^2 d\varrho \leq c \|g\|_{W_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)}^2.$$

È d'altro canto immediato che:

$$\begin{aligned} \|g^{(r-1)}\|_{W^{1-\frac{1}{2}}(]0,2[)}^2 &\leq c \|g\|_{W_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)}^2; \\ \|g\|_{W_{s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(]1,+\infty[)}^2 &\leq c \|g\|_{W_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)}^2. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Ricordiamo che: $\|g\|_{W_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)}^2 = \|g\|_{W_{s_1+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)}^2 + \|g\|_{W_{s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)}^2$ dove:

$$\|g\|_{W_{s_1+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)}^2 = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{R_+} \varrho^{2(s_1+i-r+\frac{1}{2})} |g^{(i)}(\varrho)|^2 d\varrho + \int_R \int_R \frac{|e^{s_1 v} g^{(r-1)}(e^v) - e^{s_1 v'} g^{(r-1)}(e^{v'})|^2}{|y - y'|^2} dy dy'.$$

TEOREMA 4.1. — *Assegnati r, s_1, s_2 sussiste l'inclusione algebrica e topologica:*

$$U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) \subset C^v([0, a]) , \quad \forall a \in R_+$$

dove si è posto:

$$v \begin{cases} = r-2 & \text{se } s_1 < 1 \text{ ed } r \geq 2, \\ = r-3 & \text{se } s_1 \geq 1 \text{ ed } r \geq 3. \end{cases}$$

Sia $s_1 \leq \frac{1}{2}$. Riesce ovviamente:

$$U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) \subset W^{r-1}([0, a])$$

e quindi l'asserto segue dal già citato teorema di Sobolev.

Sia, adesso, $\frac{1}{2} < s_1 < 1$.

Riesce, facilmente:

$$U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) \subset W_{2, \varrho^{s_1-\frac{1}{2}}}^{r-1}([0, a]) .$$

D'altro canto per il Teor. 2.1, pag. 284 di [6] $C^\infty([0, a])$ è denso su $W_{2, \varrho^{s_1-\frac{1}{2}}}^{r-1}([0, a])$.

Applicando il Lemma 1.3 si ha:

$$\max_{\varrho \in [0, a]} |g^{(i)}(\varrho)|^2 \leq c \sum_{\gamma \leq 1} \int_0^{3a} \varrho^{2(s_1-\frac{1}{2})} |g^{(i+\gamma)}(\varrho)|^2 d\varrho \leq c \|g\|_{W_{2, \varrho^{s_1-\frac{1}{2}}}^{r-1}([0, 3a])}^2, \quad \forall g \in C^\infty([0, 3a]) .$$

Se $s_1 > 1$ l'asserto segue dal fatto che:

$$U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) \subset W^{r-2}([0, a]) .$$

Poniamo per definizione:

$$\tilde{U}_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) = \{g \in U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) : g^{(i)}(0) = 0 \text{ per } i \leq v\}$$

con $v = r-2$ se $s_1 < 1$, $v = r-3$ se $s_1 \geq 1$.

LEMMA 4.2. — *Se riesce $s_1 \leq \frac{3}{2}$, $s_1 \neq 1$, $s_1 + 1 \leq r$, si ha:*

$$\tilde{U}_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) \simeq W_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) .$$

In virtù del Lemma 4.1 e della Proposizione 9.1 di [1] basta provare che è:

$$\tilde{U}_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) \subset W_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) .$$

Sia $s_1 < 1$.

$$\|g\|_{W_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)} = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{r-1} \int_{R_+} \varrho^{2(s_k+i-r)+1} |g^{(i)}(\varrho)|^2 d\varrho \\ + \sum_{k=1}^2 \int_R \int_R \frac{|e^{s_k y} g^{(r-1)}(e^y) - e^{s_k y'} g^{(r-1)}(e^{y'})|^2}{|y - y'|^2} dy dy'.$$

Il secondo termine si maggiora procedendo come nel Lemma 9.2 di [1].

Consideriamo $i = (r-1) - k$ con $k \geq 1$.

Poichè:

$$g^{(i)}(0) = 0$$

e poichè:

$$s_1 - k - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \quad \text{per } s_1 < 1$$

si ha in virtù della (1.1'):

$$\int_0^1 \varrho^{2(s_1-k-\frac{1}{2})} |g^{(r-1-k)}(\varrho)|^2 d\varrho \leq \int_0^{+\infty} \varrho^{2s_1-1} |g^{(r-1)}(\varrho)|^2 d\varrho,$$

quindi l'asserto.

Se $s_1 \in]1, \frac{3}{2}[$ si ha $g^{(i)}(0) = 0$ per $i \leq r-3$.

Consideriamo:

$$\int_0^1 \varrho^{2(s_1-\frac{3}{2})} |g^{(r-2)}(\varrho)|^2 d\varrho$$

poichè: $s_1 - \frac{3}{2} > -\frac{1}{2}$ per $s_1 > 1$ si può applicare la (1.1) e questo termine si maggiora con:

$$\int_0^2 \varrho^{2(s_1-\frac{1}{2})} |g^{(r-1)}(\varrho)|^2 d\varrho + \int_0^2 |g^{(r-2)}(\varrho)|^2 d\varrho.$$

Consideriamo:

$$i = (r-1) - k, \quad k \geq 2;$$

poichè è: $g^{(i)}(0) = 0$ e $s_1 - k - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ per $s_1 < 2$ si ha applicando la (1.1'):

$$\int_0^1 \varrho^{2(s_1-k-\frac{1}{2})} |g^{(r-1-k)}(\varrho)|^2 d\varrho \leq \int_0^{+\infty} \varrho^{2(s_1-\frac{1}{2})} |g^{(r-2)}(\varrho)|^2 d\varrho$$

e da qui l'asserto.

5. — Teoremi di densità e di tracce.

Assegnato un intero ν consideriamo l'insieme di funzioni $R_\nu(\bar{A})$ così definito:

$$u \in R_\nu(\bar{A}) \Leftrightarrow \exists v \in \mathcal{D}(\bar{A} - \{0\})$$

ed esiste un polinomio $Q_\nu(x)$ di grado minore od uguale a ν tale che sia:

$$u(x) = v(x) + \chi(x)Q_\nu(x)$$

dove $\chi(x)$ è un'assegnata funzione di classe $\mathcal{D}(\bar{A})$ tale che riesca:

$$\chi(x) \begin{cases} = 1 & |x| \leq 1, \\ = 0 & |x| \geq 2. \end{cases}$$

È ovvio che:

$$R_\nu(\bar{A}) \subset \mathcal{D}(\bar{A})$$

e che si ha:

$$\nu' < \nu'' \Rightarrow R_{\nu'}(\bar{A}) \subset R_{\nu''}(\bar{A}).$$

Vale il seguente teorema di densità:

TEOREMA 5.1. — *Se è $s_1 < 2$, $s_1 + 1 \leq r$ ed $s_1 \neq 1$, $R_\nu(\bar{A})$ è denso su $U_{s_1, s_2}^r(A)$, dove $\nu = r - 2 - [s_1]$.*

È ovvio che

$$R_\nu(\bar{A}) \subset U_{s_1, s_2}^r(A).$$

Assegnato inoltre $u \in U_{s_1, s_2}^r(A)$ poniamo:

$$u^{(Q_\nu)} = u - \chi \sum_{|\gamma| \leq \nu} \frac{\partial^\gamma u(0, 0)}{\gamma!} x^\gamma.$$

Riesce in virtù del Lemma 3.1 $u^{(Q_\nu)} \in W_{s_1, s_2}^r(A)$.

Esisterà allora, per il Teorema 8.1 di [1] una successione $\{u_n\}$ di elementi di $\mathcal{D}(\bar{A} - \{0\})$ tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^{(Q_\nu)}\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} = 0.$$

Quindi per il Lemma 2.1 si avrà anche:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^{(Q_\nu)}\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} = 0.$$

Allora

$$\left\{ u_n + \chi \sum_{|\gamma| \leq \nu} \frac{\partial^\gamma u(0, 0)}{\gamma!} x^\gamma \right\}$$

approssima $u(x)$ in $U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$.

Assegnato ancora un intero ν indichiamo adesso con $R_\nu([0, +\infty[)$ l'insieme di funzioni così definito:

$$g(\varrho) \in R_\nu([0, +\infty[) \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{D}(R_+)$$

ed esiste un polinomio $Q_\nu(\varrho)$ di grado minore od uguale a ν tale che sia:

$$g(\varrho) = f + \chi(\varrho) Q_\nu(\varrho)$$

dove $\chi(\varrho)$ è un'assegnata funzione di classe $\mathcal{D}([0, +\infty[)$ e tale che:

$$\chi(\varrho) \begin{cases} = 1 & \varrho \leq 1, \\ = 0 & \varrho \geq 2. \end{cases}$$

È ovvio che riesce:

$$R_\nu([0, +\infty[) \subset \mathcal{D}([0, +\infty[)$$

e che per $\nu' < \nu''$ si ha:

$$R_{\nu'}([0, +\infty[) \subset R_{\nu''}([0, +\infty[).$$

Vale il seguente teorema la cui dimostrazione è analoga a quella del Teorema 5.1.

TEOREMA 5.2. — Se $s_1 \leq \frac{3}{2}$, $s_1 + 1 \leq r$ e $s_1 \neq 1$, $R_\nu([0, +\infty[)$ è denso su $U_{s_1 + \frac{1}{2}, s_2 + \frac{1}{2}}^{r - \frac{1}{2}}(R_+)$ dove $\nu = r - 2$ per $s_1 < 1$, $\nu = r - 3$ per $s_1 > 1$.

Detta ν_k la normale a σ_k orientata verso l'interno di $\mathcal{A}$ porremo:

$$\gamma_{jk} u = \partial^j u / \partial \nu_{k/\sigma_k}^{j_k} \quad u \in R_\nu(\bar{\mathcal{A}}).$$

Vale il seguente teorema di tracce:

TEOREMA 5.3. — Siano $s_1 \in [0, \frac{3}{2}[$, $s_1 \neq 1$, $s_1 + 1 \leq r$, $s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \leq s_2$, $r \geq 2$. L'applicazione che ad u associa $\{\gamma_{jk} u\}$ $k = 1, 2$, $j = 0, 1, \dots, r - 1$ definita su $R_\nu(\bar{\mathcal{A}})$ si prolunga per continuità in un'applicazione lineare e continua da $U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$ in

$$\prod_{k=1,2} \prod_{j=0, \dots, r-1} U_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k).$$

Il codominio di tale applicazione è la classe dei vettori $\{g_{jk}\} \in \prod_{k=1,2} \prod_{j=0..r-1} U_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$ tali che esista un polinomio $Q_\nu(x)$ di grado $\nu = r - 2 - [s_1]$ per cui si abbia:

$$(5.1) \quad \partial_\rho^i((\gamma_{jk} Q_\nu)_k)(0) = (\partial_\rho^i(g_{jk})_k)(0) \quad i \leq \nu - j.$$

Sia dato $u \in R_\nu(\bar{A})$ e sia:

$$u^{(Q_\nu)} = u - \chi \sum_{|\alpha| \leq \nu} \frac{\partial^\alpha u(0, 0)}{\alpha!} x^\alpha.$$

Si ha ovviamente:

$$u^{(Q_\nu)} \in W_{s_1, s_2}^r(A)$$

per il Lemma 3.1.

Dal Teorema 8.5 di [1], dal Teorema 2.1 e dal Lemma 3.1 segue:

$$\begin{aligned} \|\gamma_{jk} u^{(Q_\nu)}\|_{W_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} &\leq c_1 \|u^{(Q_\nu)}\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c_2 \|u^{(Q_\nu)}\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \\ &\leq c_3 \left(\|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} + \sum_{|\alpha| \leq \nu} |\partial^\alpha u(0, 0)| \right) \leq c_4 \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)}; \end{aligned}$$

d'altro canto per il Lemma 4.1:

$$\begin{aligned} \|\gamma_{jk} u\|_{U_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} &\leq c \left(\|\gamma_{jk} u^{(Q_\nu)}\|_{U_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} + \sum_{|\alpha| \leq \nu} |\partial^\alpha u(0, 0)| \right) \leq \\ &\leq c_1 \left(\|\gamma_{jk} u^{(Q_\nu)}\|_{W_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} + \sum_{|\alpha| \leq \nu} |\partial^\alpha u(0, 0)| \right) \leq c_2 \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)}. \end{aligned}$$

Dati inoltre $u \in U_{s_1, s_2}^r(A)$ e $\{g_{jk}\} \in \prod_{k=1,2} \prod_{j=0}^{r-1} U_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$ tali che $\gamma_{jk} u = g_{jk}$, risulta $u^{(Q_\nu)} \in W_{s_1, s_2}^r(A)$ e quindi: $\gamma_{jk}(u^{(Q_\nu)}) \in W_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$. Da qui:

$$\partial_\rho^i(g_{jk})(0) = \partial_\rho^i((\gamma_{jk} Q_\nu)_k)(0) \quad \text{per } i \leq \nu - j.$$

Sia adesso $\{g_{jk}\}$ un vettore appartenente a $\prod_{k=1,2} \prod_{j=0..r-1} U_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$ tale che esista un polinomio $Q_\nu(x)$ verificante le (5.1); poniamo:

$$\varphi_{jk} = g_{jk} - \gamma_{jk}(\chi Q_\nu)$$

riesce, in virtù del Lemma 4.2 $\varphi_{jk} \in W_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$; quindi per il Teorema 8.5 di [1] esiste una $u \in W_{s_1, s_2}^r(A)$ tale che:

$$\begin{aligned} \gamma_{jk} u / \sigma_k &= \varphi_{jk}, \\ \|u\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} &\leq c \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{r-1} \|\varphi_{jk}\|_{W_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)}. \end{aligned}$$

Sfruttando il Teorema 4.1 ed il Lemma 4.2 si ha:

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} &\leq c_1 \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{r-1} \|\varphi_{jk}\|_{U_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} \leq \\ &\leq c_2 \left(\sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{r-1} \left(\|g_{jk}\|_{U_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} + \sum_{i=0}^{r-j} |\partial^i((g_{jk})_k)(0)| \right) \right) \leq c_3 \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{r-1} \|g_{jk}\|_{U_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)}. \end{aligned}$$

Posto:

$$v = u + \chi Q_\nu$$

riesce:

$$\gamma_{jk} v = g_{jk}$$

e quindi per il Lemma 4.1:

$$\begin{aligned} \|v\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} &\leq c(\|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} + \|\chi Q_\nu\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)}) \leq \\ &\leq c'(\|u\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} + \|\chi Q_\nu\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)}) \leq c'' \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{r-1} \|g_{jk}\|_{U_{s_1, s_2}^{r-j-\frac{1}{2}}(\sigma_k)}. \end{aligned}$$

Si è tenuto conto più volte nel corso di tale dimostrazione che i coefficienti di $Q_\nu(x)$ possono esprimersi mediante le quantità $(\partial_\alpha^i(g_{jk})_k)(0)$ in virtù delle (5.1).

NOTA. — Esplicitiamo le condizioni (5.1) nel caso particolare in cui A è un angolo retto e $\nu = r - 2$.

Sia σ_1 l'asse delle x ; σ_2 l'asse delle y .

Posto:

$$Q_\nu(x, y) = \sum_{n=0}^{r-2} \sum_{|\alpha|=n} a_{\alpha_1, \alpha_2} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$$

si trova con facili calcoli:

$$\begin{aligned} \partial_x^i(\partial_y^j Q_\nu(x, y))/\sigma_1(0) &= j! i! a_{i, j} = (\partial_x^i g_{j,1})(0), \\ \partial_y^i(\partial_x^j Q_\nu(x, y))/\sigma_2(0) &= j! i! a_{j, i} = (\partial_y^i g_{j,2})(0). \end{aligned}$$

Quindi in definitiva dovrà aversi:

$$(\partial_x^i g_{j,1})(0) = (\partial_y^j g_{i,2})(0), \quad i + j \leq r - 2.$$

Le $g_{r-1, k}$ soddisfano alle condizioni naturali derivanti dalla appartenenza a $W_{s_1, s_2}^{1-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$ (cfr. anche [4]).

6. — Alcuni lemmi di inclusione.

LEMMA 6.1. — Sia $s_1, s_2 \in R$; riesce:

$$(6.1) \quad u \in U_{s_1, s_2}^{r+|\alpha|}(A) \Rightarrow \partial^\alpha u \in U_{s_1, s_2}^r(A),$$

$$(6.2) \quad \|\partial^\alpha u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c \|u\|_{U_{s_1, s_2}^{r+|\alpha|}(A)}.$$

Supponiamo $r \geq 2$; si ha:

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha u\|_{U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})} &= \sum_{|\gamma| \leq r-2} \int_{\mathcal{A}_2} |\partial^{\gamma+\alpha} u|^2 dx + \sum_{|\beta|=r-1} \sum_{|\gamma| \leq 1} \int_{\mathcal{A}_2} |x|^{2(s_1+|\gamma|-1)} |\partial^{\gamma+\alpha+\beta} u|^2 dx + \\ &+ \sum_{|\gamma| \leq r} \int_{\mathcal{A}-\mathcal{A}_1} |x|^{2(s_2+|\gamma|-r)} |\partial^{\gamma+\alpha} u|^2 dx \leq \|u\|_{U_{s_1, s_2}^{r+|\alpha|}(\mathcal{A})}. \end{aligned}$$

LEMMA 6.2. — Se $s_1, s_2, t_1, t_2 \in R$ ed è:

$$s_1 \leq t_1, \quad s_2 \geq t_2$$

riesce:

$$(6.3) \quad \|u\|_{U_{t_1, t_2}^r(\mathcal{A})} \leq c \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})}$$

cioè:

$$U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A}) \subset U_{t_1, t_2}^r(\mathcal{A}).$$

La dimostrazione di ciò è immediata.

LEMMA 6.3. — Assegnati $k, r \in N$, $s_1 \in R_+$ per ogni $\alpha \leq 1$ se $k=1$ e per ogni $\alpha \in R$ se $k \geq 2$, per ogni $t \geq 0$ riesce:

$$U_{s_1+\alpha, s_2+k+t}^{r+k}(\mathcal{A}) \subset U_{s_1, s_2}^r(\mathcal{A})$$

algebricamente e topologicamente.

Se $k=1$ basta osservare che per il Lemma 1.4:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_1} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dx &\leq c \left(\int_{\mathcal{A}_2} |x|^{2s_1} |\partial^r u|^2 dx + \right. \\ &\left. + \int_{\mathcal{A}_2} |\partial^{r-1} u|^2 dx \right) \leq c' \left(\int_{\mathcal{A}_2} |x|^{2(s_1+\alpha-1)} |\partial^r u|^2 dx + \int_{\mathcal{A}_2} |\partial^{r-1} u|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Se $k \geq 2$ basta osservare che per il Lemma 1.4 si ha:

$$\int_{\mathcal{A}_1} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dx \leq c \left(\int_{\mathcal{A}_2} |x|^{2s_1} |\partial^r u|^2 dx + \int_{\mathcal{A}_2} |\partial^{r-1} u|^2 dx \right) \leq c' \|u\|_{W^{r+k-2}(\mathcal{A}_2)} \leq c' \|u\|_{U_{s_1, s_2}^{r+k}(\mathcal{A})}.$$

LEMMA 6.4. — Assegnati $r, k \in N$, $s_1, s_2 \in R$ si ha:

$$g \in U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r+k-\frac{1}{2}}(R_+) \Rightarrow \partial^k g \in U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)$$

ed inoltre:

$$\|\partial^k g\|_{U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)} \leq c \|g\|_{U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r+k-\frac{1}{2}}(R_+)}.$$

Basta osservare che:

$$\sum_{i=0}^{r-2} \int_0^2 |g^{(i+k)}|^2 d\varrho \leq \sum_{i=0}^{r+k-2} \int_0^2 |g^{(i)}|^2 d\varrho$$

e che:

$$\sum_{i=0}^{r-1} \int_1^{+\infty} \varrho^{2(s_2+i+k-(r+k-1)-\frac{1}{2})} |g^{(i+k)}|^2 d\varrho \leq \sum_{j=0}^{r+k-1} \int_1^{+\infty} \varrho^{2(s_2+j-(r+k-1)-\frac{1}{2})} |\partial^j g|^2 d\varrho.$$

LEMMA 6.5. — *Assegnati $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ se riesce $s_1 \leq t_1$ ed $s_2 \geq t_2$ si ha:*

$$U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) \subset U_{t_1+\frac{1}{2}, t_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)$$

algebricamente e topologicamente.

Procedendo come nella dimostrazione della (9.4) di [1] si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\log 2} \int_{-\infty}^{\log 2} \frac{|e^{t_1 \nu} g^{(r-1)}(e^\nu) - e^{t_1 \nu'} g^{(r-1)}(e^{\nu'})|^2}{|y - y'|^2} dy dy' \\ & \leq c \left(\int_{-\infty}^{\log 2} \int_{-\infty}^{\log 2} \frac{|e^{s_1 \nu} g^{(r-1)}(e^\nu) - e^{s_1 \nu'} g^{(r-1)}(e^{\nu'})|^2}{|y - y'|^2} dy dy' + \int_{-\infty}^{\log 2} |e^{s_1 \nu} g(e^\nu)|^2 dy \right). \end{aligned}$$

Usando la (9.3) di [1] unitamente a quest'ultima disuguaglianza si ricava la tesi.

LEMMA 6.5. — *Assegnati $r \in \mathbb{N}$, $s_1 \in \mathbb{R}_+$, $s_2 \geq s_1$ riesce:*

$$U_{s_1+1+\frac{1}{2}, s_2+1+\frac{1}{2}}^{r+1-\frac{1}{2}}(R_+) \subset U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)$$

algebricamente e topologicamente.

Per semplicità ci limiteremo a considerare il caso $s_1 \in]0, \frac{1}{2}[$, $r \geq 2$.

Sia $g \in U_{s_1+1+\frac{1}{2}, s_2+1+\frac{1}{2}}^{r+1-\frac{1}{2}}(R_+)$.

Poniamo:

$$g^{(q_r)} = g - \chi \sum_{\gamma \leq r-2} \frac{\partial^\gamma g(0)}{\gamma!} \varrho^\gamma$$

con

$$\chi(\varrho) \begin{cases} = 1 & \text{se } \varrho \leq 1, \\ = 0 & \text{se } \varrho \geq 2, \end{cases} \quad \text{e } \chi \in \mathcal{D}([0, +\infty[),$$

(osserva che g è dotata di tracce con le sue derivate fino all'ordine $r-2$ poichè è $1 < s_1 + 1 < \frac{3}{2}$).

In virtù del Lemma 4.2 riesce:

$$g^{(Q_r)} \in W_{s_1+1+\frac{1}{2}, s_2+1+\frac{1}{2}}^{r+1-\frac{1}{2}}(R_+) \subset W_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+) \simeq \mathcal{U}_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+).$$

Quindi per il Lemma 4.2 ed il Teorema 4.1:

$$\begin{aligned} \|g\|_{U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)} &\leq \|g^{(Q_r)}\|_{U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)} + \\ &+ c \sum_{\gamma \leq r-2} |\partial^\gamma g(0)| \leq c_1 \left(\|g^{(Q_r)}\|_{U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r+1-\frac{1}{2}}(R_+)} + \sum_{\gamma \leq r-2} |\partial^\gamma g(0)| \right) \leq c_2 \|g\|_{U_{s_1+1+\frac{1}{2}, s_2+1+\frac{1}{2}}^{r+1-\frac{1}{2}}(R_+)} . \end{aligned}$$

7. - Alcuni lemmi di immersione compatta.

LEMMA 7.1. - *Siano dati $r \in N_0$, $s_1 \in R_+$, $s_2 \in R$, $\varepsilon \in R_+$, con le ulteriori condizioni: $s_1 \leq s_2$, $s_1 < \varepsilon + 1$, $s_1 \leq 2$, $s_1 \neq \varepsilon$ se $r \geq 1$; allora l'immersione di $U_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}^{r+1}(A)$ in $U_{s_1, s_2}^r(A)$ è compatta.*

Se $r = 0$ l'asserto segue dal Teorema 8.8 di [1].

Se $s_1 > \varepsilon$ si ha:

$$U_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}^2(A) \simeq W_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}^2(A)$$

per cui nel caso $r = 1$ e $s_1 > \varepsilon$ la tesi segue ancora dal Teor. 8.8 di [1].

Che sia $U_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}^{r+1}(A) \subset U_{s_1, s_2}^r(A)$ segue dai Lemmi 6.2 e 6.3.

Sia adesso $\{u_n\}$ una successione limitata in $U_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}^{r+1}(A)$ poniamo:

$$u_n^{(Q_r)} = u_n - \chi(x) \sum_{|\gamma| \leq r} \frac{\partial^\gamma u_n(0, 0)}{\gamma!} x^\gamma$$

con $\chi(x) \in \mathcal{D}(\bar{A})$ e tale che sia:

$$\chi(x) \begin{cases} = 1 & \text{se } |x| \leq 1, \\ = 0 & \text{se } |x| \geq 2, \end{cases}$$

e con $v = r - 1 - [s_1 + 1 - \varepsilon]$.

Per il Lemma 3.1 riuscirà $\{u_n^{(Q_r)}\}$ limitata in $W_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}^{r+1}(A)$; quindi per il Teor. 8.8 di [1] da tale successione se ne potrà estrarre un'altra convergente in $W_{s_1, s_2}^r(A)$ che denoteremo ancora con lo stesso simbolo.

Esisterà, quindi, $u \in W_{s_1, s_2}^r(A)$ tale che riesca:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^{(Q_r)} - u\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} = 0.$$

Osserviamo che, in virtù del Teor. 2.1, riesce:

$$\left| \frac{\partial^\gamma u_n(0, 0)}{\gamma!} \right| \leq c \|u_n\|_{U_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}^{r+1}(A)} \leq c \cdot k$$

quindi dalla successione $\{(\partial^\gamma u_n(0, 0))/\gamma!\}$ se ne potrà estrarre un'altra convergente al numero C_γ .

Allora, tenendo presente il Lemma 2.1, si avrà:

$$\begin{aligned} \|u_n - \chi \sum_{|\gamma| \leq \nu} C_\gamma x^\gamma - u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \\ = \left\| u_n - \chi \sum_{|\gamma| \leq \nu} C_\gamma x^\gamma - u + \chi \sum_{|\gamma| \leq \nu} \frac{\partial^\gamma u_n(0, 0)}{\gamma!} x^\gamma - \chi \sum_{|\gamma| \leq \nu} \frac{\partial^\gamma u_n(0, 0)}{\gamma!} x^\gamma \right\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \\ \leq \|u_n^{(Q_\nu)} - u\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} + c \sum_{|\gamma| \leq \nu} \left| \frac{\partial^\gamma u_n(0, 0)}{\gamma!} - C_\gamma \right| \end{aligned}$$

e da qui l'asserto.

LEMMA 7.2. — *Siano assegnati $r \in N$, $s_1, \varepsilon \in R_+$, $s_2 \in R$ in modo tale che sia: $s_1 \leq s_2$, $s_1 \leq \frac{3}{2}$, $s_1 + 1 - \varepsilon \leq \frac{3}{2}$, $s_1 \neq \varepsilon$; si ha allora che l'immersione di $U_{s_1+1-\varepsilon+\frac{1}{2}, s_2+1+\varepsilon+\frac{1}{2}}^{r+1-\frac{1}{2}}(R_+)$ in $U_{s_1+\frac{1}{2}, s_2+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}}(R_+)$ è compatta.*

Dimostrazione analoga alla precedente.

DEFINIZIONE 7.1. — $\forall (\alpha, \beta) \in R^2$ poniamo:

$$\|u\|_{\mathfrak{L}_{\alpha, \beta}^2}^2 = \int_{A_1} |x|^{2\alpha} |u|^2 dx + \int_{A-A_1} |x|^{2\beta} |u|^2 dx.$$

LEMMA 7.3. — *Assegnati $s_1, s_2 \in R$, $s_1 \leq s_2$, $r \in N$, $r \geq 2$ con $s_1 \leq 1$ se $r = 2$, $\forall \varepsilon > 0$ l'immersione di $U_{s_1, s_2}^r(A)$ in $\mathfrak{L}_{0, s_2-r-\varepsilon}^2$ è compatta.*

Sia $\{u_n\}$ una successione di elementi di $U_{s_1, s_2}^r(A)$ tale che riesca:

$$(7.1) \quad \|u_n\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \leq M \quad \forall n \in N.$$

Si avrà in particolare

$$(7.2) \quad \|u_n\|_{W^1(A_1)} \leq M,$$

$$(7.3) \quad \|u\|_{W_{s_2}^r(A-A_1)} \leq M.$$

Poichè l'immersione di $W^1(A_2)$ in $L^2(A_2)$ è compatta, per la (7.2) da $\{u_n\}$ si potrà estrarre una successione $\{u'_n\}$ convergente ad u' in $L^2(A_2)$; cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u'_n - u'\|_{L^2(A_2)} = 0.$$

Siano $\zeta_1(x)$ e $\zeta_2(x)$ due funzioni di classe $\mathcal{D}(\bar{A})$ tali che sia:

$$\begin{aligned} \zeta_1(x) &= 0 && \text{per } |x| \geq 2, \\ \zeta_2(x) &= 0 && \text{per } |x| \leq 1, \\ \zeta_1(x) + \zeta_2(x) &= 1 && \forall x \in \bar{A}. \end{aligned}$$

Ovviamente in $L^2(A_2)\{\zeta_1 u'_n\}$ converge a $\zeta_1 u'$.

D'altro canto si ha:

$$\|\zeta_1 u'_n - \zeta_1 u'\|_{L^2_{0,s_2-r-\varepsilon}} \leq c \|\zeta_1 u'_n - \zeta_1 u'\|_{L^2(A_2)}$$

e quindi $\{\zeta_1 u'_n\}$ converge a $\zeta_1 u'$ anche in $L^2_{0,s_2-r-\varepsilon}$.

D'altro canto per la (7.3):

$$\|\zeta_2 u'_n\|_{W^r_{s_2}(A)} \leq c \cdot M.$$

Inoltre per il Teorema 8.7 di [1] $W^r_{s_2}(A)$ si immerge in modo compatto in

$$L^2_{s_2-r,\varepsilon}(A) \simeq L^2_{s_2-r+\varepsilon}(A_1) \cap L^2_{s_2-r-\varepsilon}(A-A_1)$$

(cfr. 6.4 di [1] e per la definizione di $L^P_{s,\lambda}$ cfr. [1] paragrafo 6); quindi poichè:

$$\|\zeta_2 u'_n\|_{L^2_{0,s_2-r-\varepsilon}}^2(A) = \|\zeta_2 u'_n\|_{L^2_{s_2-r+\varepsilon}(A_1)}^2 + \|\zeta_2 u'_n\|_{L^2_{s_2-r-\varepsilon}(A-A_1)}^2,$$

dalla successione $\{u'_n\}$ se ne potrà estrarre un'altra $\{u''_n\}$ tale che $\zeta_2 u''_n$ converga a $\zeta_2 u''$ in $L^2_{0,s_2-r-\varepsilon}$.

In definitiva:

$$v_n = \zeta_1 u''_n + \zeta_2 u''_n \quad \text{converge a } \zeta_1 u' + \zeta_2 u'' \text{ in } L^2_{0,s_2-r-\varepsilon}.$$

8. – Ipotesi e risultati per il problema.

Sia dato un operatore differenziale lineare su A del tipo:

$$A = A(x, \partial) = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x) \partial^\mu$$

e per $k = 1, 2$ sia dato su σ_k un sistema di m operatori differenziali lineari di frontiera del tipo:

$$B_{jk} = B_{jk}(x, \partial) = \sum_{|\mu| \leq m_{jk}} b_{jk\mu}(x) \partial^\mu, \quad j = 1, \dots, m.$$

Supporremo che

$$b_{jk\mu} = \mathring{b}_{jk\mu} / \sigma_k$$

intendendo con ciò che i $b_{jk\mu}$ siano tracce su σ_k (nel senso del Teorema 5.3) di funzioni $\mathring{b}_{jk\mu}$ appartenenti ad opportuni spazi funzionali.

Facciamo le seguenti ipotesi:

H_1) i coefficienti $a_\mu(x)$ con $|\mu| = 2m$ e $\mathring{b}_{jk\mu}(x)$ $|\mu| = m_{jk}$ siano di classe $C^0(\bar{A})$ e convergenti all'infinito;

H_2) A è propriamente ellittico in $\bar{A}$ ed all' ∞ e, per ogni $k \in \{1, 2\}$ gli operatori $B_{1k}, \dots, B_{mk}$ verificano la condizione complementare rispetto ad A su σ_k ed all' ∞ ; indicato con $A' = A'(x, \partial)$ e $B'_{jk} = B'_{jk}(x, \partial)$ le parti dominanti degli operatori A e B_{jk} , sia Σ_1 il sottoinsieme discreto e numerabile di R definito dal Teorema 1.1 di [2] relativamente agli operatori a coefficienti costanti:

$$A'(0, \partial), \quad B'_{jk}(0, \partial), \quad k = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

sia ancora Σ_2 il sottoinsieme discreto e numerabile di R definito dal Teorema 1.1 di [2] relativamente agli operatori a coefficienti costanti:

$$\sum_{|\mu| = 2m} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} a_\mu(x) \right) \partial^\mu, \quad \sum_{|\mu| = m_{jk}} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} b_{jk\mu}(x) \right) \partial^\mu \quad k = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Assegniamo $r \in N$, $r \geq \sup \{2m, m_{jk} + \frac{1}{2}\}$, $s_1 \in ([0, \frac{3}{2}[- \{1\})$, $s_2 \in R$, $s_1 \leq s_2$ e supponiamo ancora che:

$$H_3) \quad \partial^\alpha a_\mu \in L^\infty(A_2) \quad \text{per} \quad \begin{cases} |\mu| = 2m, & |\alpha| \leq r - 2m, \\ |\mu| \leq 2m - 1, & |\alpha| \leq r - 2m + 1, \end{cases}$$

$$\partial^\alpha \mathring{b}_{jk\mu} \in L^\infty(A_2) \quad \text{per} \quad \begin{cases} |\mu| = m_{jk}, & |\alpha| \leq r - m_{jk}, \\ |\mu| \leq m_{jk} - 1, & |\alpha| \leq r - m_{jk} + 1, \end{cases}$$

se $s_1 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \partial^\alpha a_\mu = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} |\mu| = 2m, & 0 < |\alpha| \leq r - 2m - 1 \\ |\mu| \leq 2m - 1, & 0 \leq |\alpha| \leq r - 2m - 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \partial^\alpha \mathring{b}_{jk\mu} = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} |\mu| = m_{jk}, & 0 < |\alpha| \leq r - m_{jk} - 1 \\ |\mu| \leq m_{jk} - 1, & 0 \leq |\alpha| \leq r - m_{jk} - 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
H_3) \quad & |x|^{2m-|\mu|+|\alpha|} \partial^\alpha a_\mu \in L^\infty(\mathcal{A}-\mathcal{A}_1) \quad \text{per} \quad \begin{cases} |\mu| = 2m, & |\alpha| \leq r-2m, \\ |\mu| \leq 2m-1, & |\alpha| \leq r-2m+1; \end{cases} \\
& |x|^{m_{jk}-|\mu|+|\alpha|} \partial^\alpha \hat{b}_{jk\mu} \in L^\infty(\mathcal{A}-\mathcal{A}_1) \quad \text{per} \quad \begin{cases} |\mu| = m_{jk}, & |\alpha| \leq r-m_{jk}, \\ |\mu| \leq m_{jk}-1, & |\alpha| \leq r-m_{jk}+1; \end{cases}
\end{aligned}$$

esiste inoltre un $\varepsilon \in [0, 1]$ tale che sia:

$$\begin{aligned}
& |x|^{2m-|\mu|+\varepsilon} a_\mu \in L^\infty(\mathcal{A}-\mathcal{A}_1) \quad \text{per} \quad |\mu| \leq 2m-1, \\
& |x|^{m_{jk}-|\mu|+\varepsilon} \hat{b}_{jk\mu} \in L^\infty(\mathcal{A}-\mathcal{A}_1) \quad \text{per} \quad |\mu| \leq m_{jk}-1; \\
H_4) \quad & \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |x|^{|\alpha|} \partial^\alpha a_\mu(x) = \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |x|^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{b}_{jk\mu}(x) = 0 \\
& \text{per} \quad \begin{cases} |\mu| = 2m, & 0 < |\alpha| \leq r-2m, \\ |\mu| = m_{jk}, & 0 < |\alpha| \leq r-m_{jk}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Poniamo:

$$E_{r,s_1,s_2}(\mathcal{A}) = W_{s_1,s_2}^{r-2m}(\mathcal{A}) \times \prod_{k=1}^2 \prod_{j=1}^m W_{s_1,s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k).$$

In forza delle ipotesi $H_3)$ e $H_3^0)$ si verifica facilmente che l'operatore:

$$\mathcal{A}: u \rightarrow (Au, B_{11}u/\sigma_1, \dots, B_{m_2}u/\sigma_2)$$

che va da $W_{s_1,s_2}^r(\mathcal{A})$ in $E_{r,s_1,s_2}(\mathcal{A})$ è lineare e continuo (cfr. anche [3]).

Poniamo ancora:

$$G_{r,s_1,s_2}(\mathcal{A}) = U_{s_1,s_2}^{r-2m}(\mathcal{A}) \times \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^2 U_{s_1,s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k);$$

si verifica che:

LEMMA 8.1. — *Nelle ipotesi $H_3)$ e $H_3^0)$ l'operatore $\mathcal{A}$ che va da $U_{s_1,s_2}^r(\mathcal{A})$ in $G_{r,s_1,s_2}(\mathcal{A})$ è lineare e continuo.*

Se $s_1 > 0$ la verifica è immediata. Sia $s_1 = 0$.

Consideriamo, con $|\beta| = r-2m-1$

$$\int_{\mathcal{A}_1} |x|^{-2} |\partial^\beta(a_\mu \partial^\mu u)|^2 dx = \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \int_{\mathcal{A}_1} |x|^{-2} |\partial^{\beta-\alpha} a_\mu \cdot \partial^{\mu+\alpha} u|^2 dx.$$

Se $|\mu| + |\alpha| = r - 1$ questo termine si maggiora con

$$K \int_{A_1} |x|^{-2} |\partial^{r-1} u|^2 dx.$$

(Perchè ciò accada deve essere $|\beta| - |\alpha| = 0$ e $|\mu| = 2m$).

Sia $|\mu| + |\alpha| < r - 1$. Per il Teorema 2.1 $\partial^{\mu+\alpha} u$ ha la traccia nell'origine.

Posto

$$v(x) = \partial^{\beta-\alpha} a_\mu \cdot \partial^{\mu+\alpha} u,$$

si ha in forza dell'ipotesi H_3):

$$v(0) = 0.$$

Dal Lemma 1.5 si ha:

$$\begin{aligned} \int_{A_1} |x|^{-2} |\partial^{\beta-\alpha} a_\mu \cdot \partial^{\mu+\alpha} u|^2 dx &\leq c \int_{A_1} |x|^{-2-\varepsilon} |\partial^{\beta-\alpha} a_\mu \cdot \partial^{\mu+\alpha} u|^2 dx \leq \\ &\leq c' \left(\int_A |x|^{-\varepsilon} |\partial^k a_\mu|^2 \cdot |\partial^{\mu+\alpha} u|^2 dx + \int_A |x|^{-\varepsilon} |\partial^{\beta-\alpha} a_\mu|^2 \cdot |\partial^{k'} u|^2 dx \right) \end{aligned}$$

con $k = |\beta - \alpha| + 1$ e $k' = |\mu + \alpha| + 1$.

Adoperando l'ipotesi H_3^e per maggiorare questi ultimi integrali in $A - A_1$ ed applicando il Lemma 1.4 a

$$\int_{A_1} |x|^{-\varepsilon} |\partial^{\mu+\alpha} u|^2 dx$$

e se necessario a

$$\int_{A_1} |x|^{-\varepsilon} |\partial^{k'} u|^2 dx$$

si ha l'asserto.

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 8.1. — *Nelle ipotesi poste, ma con $s_1 \in [0, 1[$, $s_1 - r + 1 \notin \Sigma_1$, $s_2 - r + 1 \notin \Sigma_2$ vale la seguente formula di maggiorazione, con ε definito dall'ipotesi H_3^e):*

$$(8.1) \quad \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c \left(\|Au\|_{G_{r, s_1, s_2}(A)} + \|u\|_{L_{0, s_2-r-\varepsilon}^2(A)} \right).$$

La dimostrazione di questo teorema sarà data al numero seguente.

Osserviamo intanto che dal Teorema 8.1, dal Lemma 7.3, e dal Lemma 5.1 pag. 171 di [5] si ha il seguente:

COROLLARIO 8.1. — *Nelle ipotesi del Teorema 8.1 con $\varepsilon > 0$ l'immagine dell'operatore $\mathcal{A}$ in $G_{r, s_1, s_2}(A)$ è chiusa ed il suo nucleo è di dimensione finita.*

9. - Dimostrazione del teorema 8.1.

LEMMA 9.1. - *Fissati* $r \in N$, $r \geq 2$, $s_1 \in [0, 1[$, $s_2 \leq s_1$, *si ha per* $|\alpha| \leq r - 2$ *e* $\lambda \in]0, 1[$:

$$(9.1) \quad |\partial^\alpha u(0, 0)| \leq \lambda \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A_1)} + c(\lambda) \|u\|_{L^2(A_1)}.$$

I) Sia $|\alpha| \leq r - 4$.

La (1.6) scritta per $t = (0, 0)$ unitamente all'ipotesi $s_1 \geq 0$ ed alle note formule di Erling da:

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha u(0, 0)|^2 &\leq c \sum_{|\beta| \leq r-2} \int_{A_1} |x|^{2s_1} |\partial^\beta u|^2 dx \leq c_1 \|u\|_{W^{r-2}(A_1)}^2 \leq c_1 \left(\lambda \int_{A_1} |\partial^{r-1} u|^2 dx + c(\lambda) \|u\|_{L^2(A_1)}^2 \right) \leq \\ &\leq c_2 \cdot \lambda \int_{A_2} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dx + c'(\lambda) \|u\|_{L^2(A_1)}^2 \leq c_2 \cdot \lambda \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A_1)}^2 + c'(\lambda) \|u\|_{L^2(A_1)}^2. \end{aligned}$$

II) Sia $|\alpha| = r - 3$.

Scritta la (1.6) per $t = (0, 0)$, $\alpha + \frac{1}{2} = s_1$ e $v(x) = u(\varepsilon x)$ si ha:

$$|\partial^{r-3} v(0, 0)|^2 \leq c \left(\int_{A_1} |x|^{2s_1} |\partial^{r-3} v|^2 dx + \int_{A_1} |x|^{2s_1} |\partial^{r-2} v|^2 dx + \int_{A_1} |x|^{2s_1} |\partial^{r-1} v|^2 dx \right).$$

Osservando che:

$$\partial_{x_i}^k v(x) = \partial_{t_i}^k u \cdot \varepsilon^k$$

si ha, effettuando il cambiamento di variabili $\varepsilon x = t$ e ricordando che $s_1 - 1 < 0 \leq s_1$:

$$\begin{aligned} |\partial^{r-3} u(0, 0)|^2 &\leq \varepsilon^{-2(s_1+1)} \int_{A_1} |\partial^{r-3} u|^2 dt + \varepsilon^{-2s_1} \int_{A_1} |\partial^{r-2} u|^2 dt + \varepsilon^{-2(s_1-1)} \int_{A_1} |t|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dt \leq \\ &\leq \varepsilon^{-2(s_1+1)} \left(\int_{A_1} (|\partial^{r-3} u|^2 + |\partial^{r-2} u|^2) dt \right) + \varepsilon^{-2(s_1-1)} \int_{A_1} |t|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dt \end{aligned}$$

dove si è scelto $0 < \varepsilon < k < 1$ con k da fissarsi opportunamente.

Applicando ai primi due integrali la disuguaglianza di Erling con $\lambda = \varepsilon^{2(s_1+1)+1}$ si ha:

$$\begin{aligned} |\partial^{r-3} u(0, 0)|^2 &\leq \varepsilon \left(\int_{A_1} |\partial^{r-2} u|^2 dx + \int_{A_1} |\partial^{r-1} u|^2 dx \right) + c(\varepsilon) \|u\|_{L^2(A_1)}^2 + \varepsilon^{-2(s_1-1)} \int_{A_1} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dx \leq \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{W^{r-2}(A_1)}^2 + (\varepsilon + \varepsilon^{-2(s_1-1)}) \int_{A_1} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dx + c(\varepsilon) \|u\|_{L^2(A_1)}^2 \end{aligned}$$

e da qui la (9.1) con $\lambda < 1$.

III) Sia $|\alpha| = r - 2$.

Applichiamo la (1.7); si ha:

$$|\partial^{r-2}u(0, 0)|^2 \leq \varepsilon \left(\int_{A_1} |x|^{2s_1} |\partial^r u|^2 dx + \int_{A_1} |x|^{2(s_1-1)} |\partial^{r-1} u|^2 dx \right) + c(\varepsilon) \int_{A_1} |x|^{2s_1} |\partial^{r-2} u|^2 dx .$$

Osservando che il terzo integrale si maggiora con:

$$\int_{A_1} |\partial^{r-2} u|^2 dx$$

ed applicando la disuguaglianza di Erling con $\lambda = \varepsilon/c(\varepsilon)$ si ricava l'asserto.

LEMMA 9.2. — *Nelle ipotesi enunciate al n. 8 si ha per ogni $u \in W_{s_1, s_2}^r(A)$:*

$$(9.2) \quad \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c \left(\|\mathcal{A}u\|_{G_{r, s_1, s_2}(A)} + \|u\|_{L_{0, s_2-r-\varepsilon}^2(A)} \right)$$

con ε definito dall'ipotesi H_3^e .

Siano $\zeta_1(x)$ e $\zeta_2(x)$ due funzioni di classe $\mathcal{D}(\bar{A})$ tali che:

$$\zeta_1(x) = 0 \quad \text{per } |x| \geq 2 ,$$

$$\zeta_2(x) = 0 \quad \text{per } |x| \leq 1 ,$$

$$\zeta_1(x) + \zeta_2(x) = 1 \quad \text{in } \bar{A} .$$

Posto:

$$u_1 = \zeta_1 \cdot u , \quad u_2 = \zeta_2 \cdot u$$

riesce:

$$u = u_1 + u_2 .$$

Per il Lemma 2.1, per la (1.14) di [3] e per la (6.4) di [1] si ha:

$$(9.3) \quad \|u_2\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c \|u_2\|_{W_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c \left(\|\mathcal{A}u_2\|_{E_{r, s_2, s_2}(A)} + \|u_2\|_{L_{s_1-r+\varepsilon, s_2-r-\varepsilon}^2(A)} \right) .$$

È quasi immediato che:

$$(9.4) \quad \|u_2\|_{L_{s_1-r+\varepsilon, s_2-r-\varepsilon}^2(A)} \leq c' \|u\|_{L_{0, s_2-r-\varepsilon}^2(A)} .$$

Riesce inoltre per il Lemma 3.1:

$$\begin{aligned}
 (9.5) \quad \|Au_2\|_{W_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} &\leq c \|Au_2\|_{U_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} \leq \\
 &\leq c \left(\|\zeta_2 Au\|_{U_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} + \left\| \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu \sum_{\alpha < \mu} \binom{\mu}{\alpha} \partial^{\mu-\alpha} \zeta_2 \partial^\alpha u \right\|_{U_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} \right) \leq \\
 &\leq c' \|Au\|_{U_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} + c'' \lambda \|u\|_{W^{r(A_2-A_1)}(A)} + c(\lambda) \|u\|_{L^2(A_2-A_1)} \leq \\
 &\leq c'' \left(\|Au\|_{U_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} + \lambda \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} + c(\lambda) \|u\|_{L_{0, s_2-r-l}^2} \right)
 \end{aligned}$$

dove si è applicata la disuguaglianza di Erling e si è tenuto conto che per $|\beta| > 0$ $\text{supp } \partial^\beta \zeta_2 \subset A_2 - A_1$, $\lambda \in]0, 1[$, $l \in R_+$.

Analogamente si ha per il Lemma 4.2:

$$\begin{aligned}
 (9.6) \quad \|B_{jk} u_2\|_{W_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}(\sigma_k)}(A)} &\leq c \cdot \|B_{jk} u_2\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}(\sigma_k)}(A)} \\
 &\leq c' \left(\|B_{jk} u\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}(\sigma_k)}(A)} + \left\| \sum_{|\mu| \leq m_{jk}} b_{jk\mu} \sum_{\alpha < \mu} \binom{\mu}{\alpha} \partial^{\mu-\alpha} \zeta_2 \partial^\alpha u \right\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}(\sigma_k)}(A)} \right).
 \end{aligned}$$

Per il Teorema 5.3 e dalle proprietà di $\zeta_2(x)$ si ha:

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{|\mu| \leq m_{jk}} b_{jk\mu} \sum_{\alpha < \mu} \binom{\mu}{\alpha} \partial^{\mu-\alpha} \zeta_2 \partial^\alpha u \right\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}(\sigma_k)}(A)} &\leq c \sum_{|\alpha| < m_{jk}} \|\partial^\alpha u\|_{W^{r-m_{jk}(A_2-A_1)}(A)} \\
 &\leq c' (\lambda \|u\|_{W^{r(A_2-A_1)}(A)} + c(\lambda) \|u\|_{L^2(A_2-A_1)}) \\
 &\leq c'' (\lambda \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} + c(\lambda) \|u\|_{L_{0, s_2-r-l}^2}) \\
 &\text{con } \lambda \in]0, 1[\text{ ed } l \in R_+.
 \end{aligned}$$

Da quest'ultima e dalle (9.3), (9.5), (9.6) segue:

$$(9.7) \quad \|u_2\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c \|Au\|_{G_{r, s_1, s_2}(A)} + c_1 \cdot \lambda \|u\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} + c_2 \|u\|_{L_{0, s_2-r-l}^2(A)}.$$

Per il Lemma 2.1, il Teorema 8.4 di [1] e per la (1.14) di [3] si ha per ogni $t_2 \geq s_1$:

$$(9.8) \quad \|u_1\|_{U_{s_1, s_2}^r(A)} \leq c \|u_1\|_{W_{s_1, t_2}^r(A)} \leq c \left(\|Au_1\|_{E_{r, s_1, s_2}(A)} + \|u_1\|_{L_{(s_1+t_2)/2-r, -(t_2-s_1)/2+\varepsilon}(A)}^2 \right).$$

Per i Teoremi 8.2 e 8.6 di [1] e la (1.14) di [3], fissato t_2 in modo che riesca:

$$t_2 - \varepsilon - r \geq s_1 + \varepsilon - r$$

si ha:

$$\begin{aligned}
 \|u_1\|_{L_{(s_1+t_2)/2-r, -(t_2-s_1)/2+\varepsilon}(A)}^2 &\leq c \|u_1\|_{W_{s_1+\varepsilon-r, t_2-\varepsilon-r}^0(A)} \leq c_1 \|u_1\|_{W_{s_1+\varepsilon, t_2-\varepsilon}^r(A)} \leq \\
 &\leq c \left(\|Au_1\|_{E_{r, s_1+\varepsilon, t_2-\varepsilon}(A)} + \|u_1\|_{L_{(s_1+t_2)/2-r, -(t_2-s_1)/2+2\varepsilon}(A)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Osserviamo ancora che per i Teoremi 8.4 e 8.2 di [1] riesce:

$$\|\mathcal{A}u_1\|_{E_{r,s_1+\varepsilon,t_2-\varepsilon}(A)} \leq c \|\mathcal{A}u_1\|_{E_{r,s_1+\varepsilon,t_2}(A)} \leq c' \|\mathcal{A}u_1\|_{E_{r,s_1,s_2}(A)}.$$

Iterando il procedimento si ha:

$$(9.9) \quad \|u_1\|_{U_{s_1,s_2}^r(A)} \leq c \left(\|\mathcal{A}u_1\|_{E_{r,s_1,s_2}(A)} + \|u_1\|_{\dot{W}_{s_1+k\varepsilon-r,t_2-k\varepsilon-r}(A)} \right),$$

dove k è tale che sia $s_1 + k\varepsilon - r \geq 0$; si ha quindi:

$$\|u_1\|_{W_{s_1+k\varepsilon-r,t_2-k\varepsilon-r}^0(A)} \leq c \|u\|_{L_{0,s_2-r-\varepsilon}(A)}.$$

Tenendo presente il Lemma 3.1 e maggiorando $\|\mathcal{A}u_1\|_{E_{r,s_1,s_2}(A)}$ come nelle (9.5) e (9.6) si è fatto per $\|\mathcal{A}_2u\|_{E_{r,s_1,s_2}(A)}$ si ha in definitiva:

$$(9.10) \quad \|u_1\|_{U_{s_1,s_2}^r(A)} \leq c \left(\|\mathcal{A}u\|_{G_{r,s_1,s_2}(A)} + \|u\|_{L_{0,s_2-r-\varepsilon}^2(A)} + c_1 \cdot \lambda \|u\|_{U_{s_1,s_2}^r(A)} \right)$$

con $\lambda \in]0, 1[$.

La (9.7) e la (9.10) danno la (9.2).

Poniamo, adesso, con $u \in U_{s_1,s_2}^r(A)$

$$u^{(Q_v)} = u - \chi(x) \sum_{|\alpha| \leq v} \frac{\partial^\alpha u(0,0)}{\alpha!} x^\alpha$$

dove $v = r - 2 - [s_1]$, $\chi(x) \in \mathcal{D}(\bar{A})$, $\chi(x) = 1$ per $|x| \leq 1$, $\chi(x) = 0$ per $|x| \geq 2$.

Notiamo che in forza del Lemma 3.1, nelle ipotesi del n. 8 si ha:

$$u^{(Q_v)} \in W_{s_1,s_2}^r(A).$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 8.1. — Osserviamo che — conservando le notazioni precedenti — si ha in forza del Lemma 9.1:

$$\|u\|_{U_{s_1,s_2}^r(A)} \leq \|u^{(Q_v)}\|_{W_{s_1,s_2}^r(A)} + c \sum_{|\alpha| \leq v} |\partial^\alpha u(0,0)| \leq \|u^{(Q_v)}\|_{W_{s_1,s_2}^r(A)} + \lambda \|u\|_{U_{s_1,s_2}^r(A)} + c(\lambda) \|u\|_{L^2(A_1)}$$

cioè:

$$\|u\|_{U_{s_1,s_2}^r(A)} \leq \frac{1}{1-\lambda} \|u^{(Q_v)}\|_{W_{s_1,s_2}^r(A)} + c'(\lambda) \|u\|_{L^2(A_1)}.$$

Da qui e dalla (9.2) segue:

$$(9.11) \quad \|u\|_{U_{s_1,s_2}^r(A)} \leq c \left(\|\mathcal{A}u^{(Q_v)}\|_{G_{r,s_1,s_2}(A)} + \|u^{(Q_v)}\|_{L_{0,s_2-r-\varepsilon}^2(A)} + \|u\|_{L^2(A_1)} \right).$$

Osserviamo che:

$$\|Au^{(Q_v)}\|_{U_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} \leq \|Au\|_{U_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} + \|A(\chi Q_v)\|_{U_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} \leq c \left(\|Au\|_{U_{s_1, s_2}^{r-2m}(A)} + \sum_{|\alpha| \leq \nu} |\partial^\alpha u(0, 0)| \right),$$

$$\|B_{jk} u^{(Q_v)}\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} \leq \|B_{jk} u\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} + \|B_{jk}(\chi Q_v)\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)},$$

ed in virtù del Teorema 5.3 che:

$$\|B_{jk}(\chi Q_v)\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} \leq c \sum_{|\mu| \leq m_{jk}} \|\mathring{b}_{jk\mu} \partial^\mu(\chi Q_v)\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}}(A)} \leq c' \sum_{|\alpha| \leq \nu} |\partial^\alpha u(0, 0)|.$$

Inoltre si ha:

$$\|u^{(Q_v)}\|_{L_{0, s_2-r-\varepsilon}^2(A)} \leq \|u\|_{L_{0, s_2-r-\varepsilon}^2(A)} + c \sum_{|\alpha| \leq \nu} |\partial^\alpha u(0, 0)|,$$

$$\|u\|_{L^2(A_1)} \leq \|u\|_{L_{0, s_2-r-\varepsilon}^2(A)}.$$

Da quest'ultima disuguaglianza, dalla (9.11) e dalla (9.1) segue la (8.1).

10. – Il problema aggiunto.

Indicato con $G'_{r, s_1, s_2}(A)$ e $(U_{s_1, s_2}^r(A))'$ i duali forti di $G_{r, s_1, s_2}(A)$ e $U_{s_1, s_2}^r(A)$, consideriamo l'operatore $\mathcal{A}^*$ aggiunto funzionale di $\mathcal{A}$, lineare e continuo da $G'_{r, s_1, s_2}(A)$ in $(U_{s_1, s_2}^r(A))'$, definito dalla relazione:

$$\langle v, \mathcal{A}u \rangle = \langle \mathcal{A}^*v, u \rangle.$$

$\forall u \in U_{s_1, s_2}^r(A)$ e $v \equiv (\vartheta, \vartheta_{11}, \dots, \vartheta_{m_2}) \in G'_{r, s_1, s_2}(A)$.

Supponiamo d'ora in poi che oltre alle ipotesi del n. 8 sia verificata la seguente:

H_4^s) esiste un $\varepsilon \geq 0$ tale che:

$$|x|^{2m-|\mu|+|\alpha|+\varepsilon} \partial^\alpha a_\mu \in L^\infty(A-A_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\mu| \leq 2m-1, \\ |\alpha| \leq r+1-2m, \end{array} \right.$$

$$|x|^{m_{jk}-|\mu|+|\alpha|+\varepsilon} \partial^\alpha \mathring{b}_{jk\mu} \in L^\infty(A-A_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\mu| \leq m_{jk}-1, \\ |\alpha| \leq r+1-m_{jk}. \end{array} \right.$$

Vale il seguente:

TEOREMA 10.1. — *Nelle ipotesi poste con $s_1 - r + 1 \notin \Sigma_1$, $s_2 - r + 1 \notin \Sigma_2$ con $r \neq 2m + 2$ e $r \neq m_{jk} + 2$ se $s_1 > 1$, con $s_1 \neq \varepsilon$, $s_1 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$ e con ε definito dall'ipotesi H_4^e), vale la seguente maggiorazione:*

$$(10.1) \quad \|v\|_{G'_{r,s_1,s_2}(A)} \leq k \left(\|\mathcal{A}^* v\|_{(U_{s_1,s_2}^r(A))'} + \|v\|_{G'_{r+1,s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(A)} \right)$$

$$\forall v \equiv (\vartheta, \vartheta_{11}, \dots, \vartheta_{m,2}) \in G'_{r,s_1,s_2}(A).$$

Sia $\vartheta \in (U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A))'$ ed $r \geq 2m + 2$.

Si ha $\forall u \in U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)$ con $v = r - 2m - 2 - [s_1]$:

$$\langle \vartheta, u - \chi(x) \sum_{|\gamma| \leq v} \frac{\partial^\gamma u(0,0)}{\gamma!} x^\gamma \rangle = \langle \vartheta, u \rangle - \sum_{|\gamma| \leq v} \frac{\partial^\gamma u(0,0)}{\gamma!} \langle \vartheta, \chi x^\gamma \rangle$$

dove $\chi(x)$ è la solita funzione di classe $\mathcal{D}(\bar{A})$.

Quindi:

$$(10.2) \quad \|\vartheta\|_{(U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A))'} = \sup_{u \in U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)} \frac{|\langle \vartheta, u \rangle|}{\|u\|_{U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)}} \\ \leq \sup_{u \in U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)} \frac{|\langle \vartheta, u^{(Q_v)} \rangle|}{\|u\|_{U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)}} + \sup_{u \in U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)} \sum_{|\gamma| \leq v} \left| \frac{\partial^\gamma u(0,0)}{\gamma!} \right| \frac{|\langle \vartheta, \chi x^\gamma \rangle|}{\|u\|_{U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)}}.$$

D'altro canto:

$$W_{s_1,s_2}^{r-2m}(A) \subset U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A) \Rightarrow (U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A))' \subset (W_{s_1,s_2}^{r-2m}(A))'$$

ed inoltre per il Lemma 3.1 riesce $u^{(Q_v)} \in W_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)$.

Quindi

$$(10.3) \quad |\langle \vartheta, u^{(Q_v)} \rangle| \leq c \|\vartheta\|_{(W_{s_1,s_2}^{r-2m}(A))'} \cdot \|u^{(Q_v)}\|_{W_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)} \leq k (\|\vartheta\|_{(W_{s_1,s_2}^{r-2m}(A))'} \cdot \|u\|_{U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)}).$$

D'altro canto per il Lemma 6.3 si ha:

$$|\langle \vartheta, \chi x^\gamma \rangle| \leq c \|\vartheta\|_{(U_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}^{r+1-2m}(A))'} \cdot \|\chi x^\gamma\|_{U_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}^{r+1-2m}(A)}.$$

Da qui, dalle (10.2) e (10.3) e dall'osservazione che:

$$\sum_{|\gamma| \leq v} \left| \frac{\partial^\gamma u(0,0)}{\gamma!} \right| \leq c \|u\|_{U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A)},$$

segue che:

$$(10.4) \quad \|\vartheta\|_{(U_{s_1,s_2}^{r-2m}(A))'} \leq k \left(\|\vartheta\|_{(W_{s_1,s_2}^{r-2m}(A))'} + \|\vartheta\|_{(U_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}^{r+1-2m}(A))'} \right).$$

Sia adesso $\vartheta_{jk} \in (U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k))'$. $\forall g \in U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)$ riesce:

$$\left\langle \vartheta_{jk}, g - \chi(\varrho) \sum_{\gamma \leq \nu} \frac{\partial^\gamma g(0)}{\gamma!} \varrho^\gamma \right\rangle = \langle \vartheta_{jk}, g \rangle - \sum_{\gamma \leq \nu} \frac{\partial^\gamma g(0)}{\gamma!} \langle \vartheta_{jk}, \chi(\varrho) \varrho^\gamma \rangle,$$

con

$$\nu = r - m_{jk} - 2 - [s_1] \quad \text{e} \quad \chi \in \mathcal{D}([0, +\infty[) \quad \text{con} \quad \chi \begin{cases} = 1 & \text{per } \varrho \leq 1 \\ = 0 & \text{per } \varrho \geq 2. \end{cases}$$

Si ha:

$$(10.5) \quad \|\vartheta_{jk}\|_{(U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k))'} \leq \sup_{g \in U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} \frac{|\langle \vartheta_{jk}, g^{(Q_\nu)} \rangle|}{\|g\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)}} + \sup_{g \in U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)} \sum_{\gamma \leq \nu} \left| \frac{\partial^\gamma g(0)}{\gamma!} \right| \frac{|\langle \vartheta_{jk}, \chi \cdot \varrho^\gamma \rangle|}{\|g\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)}}$$

ove si è posto:

$$g^{(Q_\nu)} = g - \chi \sum_{\gamma \leq \nu} \frac{\partial^\gamma g(0)}{\gamma!} \varrho^\gamma.$$

Si ha procedendo come nel caso precedente:

$$(10.6) \quad \frac{|\langle \vartheta_{jk}, g^{(Q_\nu)} \rangle|}{\|g\|_{U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)}} \leq k \cdot \|\vartheta_{jk}\|_{(W_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k))'}.$$

ed in virtù del Lemmi 6.5 e 6.6:

$$(10.7) \quad |\langle \vartheta_{jk}, \chi \varrho^\nu \rangle| \leq \|\vartheta_{jk}\|_{(U_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}^{r+1-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k))'} \cdot \|\chi \cdot \varrho^\nu\|_{U_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}^{r+1-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k)}.$$

In definitiva da (10.5), (10.6), (10.7) segue:

$$(10.8) \quad \|\vartheta_{jk}\|_{(U_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k))'} \leq c \left(\|\vartheta_{jk}\|_{(W_{s_1, s_2}^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k))'} + \|\vartheta_{jk}\|_{(U_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}^{r+1-m_{jk}-\frac{1}{2}}(\sigma_k))'} \right).$$

Dalla (10.4) e (10.8) segue ancora:

$$\|v\|_{G'_{r, s_1, s_2}(A)} \leq k \left(\|v\|_{E'_{r, s_1, s_2}(A)} + \|v\|_{G'_{r+1, s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}(A)} \right)$$

e tenendo conto della (1.16) di [3] si ha:

$$\|v\|_{G'_{r, s_1, s_2}(A)} \leq k' \left(\|\mathcal{A}^* v\|_{(W_{s_1, s_2}^r(A))'} + \|v\|_{E'_{r+1, s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}(A)} + \|v\|_{G'_{r+1, s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}(A)} \right).$$

D'altro canto poichè:

$$(W_{s_1, s_2}^r(A))' \supset (U_{s_1, s_2}^r(A))', \quad G_{r+1, s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}'(A) \subset E_{r+1, s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}'(B)$$

si ha la (10.1).

Dal Corollario 8.1, dal Teorema 10.1, dai Lemmi 7.1 e 7.2 e dal Lemma 5.1, pag. 171 di [5] segue il:

TEOREMA 10.2. - *Nelle ipotesi del Teorema 10.1 con $\varepsilon > 0$ e con $s_1 \in]0, 1[$ l'operatore A è ad indice.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. AVANTAGGIATI - M. TROISI, *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo, I*, Ann. di Mat. pura e appl., **95** (1973), pp. 361-408.
- [2] A. AVANTAGGIATI - M. TROISI, *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo, II*, Ann. di Mat. pura e appl., **97** (1973), pp. 207-252.
- [3] A. AVANTAGGIATI - M. TROISI, *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo III*, Ann. di Mat. pura e appl., **99** (1974), pp. 1-51.
- [4] P. GRISVARD, *Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone ou un polyèdre*, Boll. U.M.I., **5** (1972), pp. 132-164.
- [5] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, vol. 1, Dunod, Paris (1968).
- [6] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Editeurs, Paris; Acad. Editeurs, Prague (1967).