Sopra l'esistenza dell'estremo assoluto per una classe di integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica.

di NATALIA BERRUTI ONESTI (a Pavia) (*)

Sunto. - *Nel presente lavoro, riprendendo in esame gli integrali curvilinei dello spazio*

(I) $$\int_C F(x, y, z; x', y', z')\, ds$$

già considerati in precedenti ricerche dell'A., si dimostrano alcuni teoremi di esistenza del minimo (*assoluto*) *per gli integrali* (I). *A tali teoremi vengono premesse alcune considerazioni fondamentali riguardanti gli zeri della funzione F in relazione agli integrali $\mathfrak{J}_C$. Alcuni dei risultati ottenuti vengono illustrati con esempi.*

In una Memoria di alcuni anni fa ([1]), allo scopo di estendere agli integrali curvilinei dello spazio

(I) $$\mathfrak{J}_C = \int_C F(x, y, z;\ x', y', z')ds$$

(dove la funzione F è definita in ogni punto (x, y, z) di un campo A e per ogni terna di valori reali x', y', z' ([2])) alcuni teoremi noti per gli integrali curvilinei del piano

(II) $$\mathfrak{J}_C = \int_C F(x, y;\ x', y')ds;$$

abbiamo definito, per gli integrali (I), i concetti di *integrale quasi-regolare positivo, seminormale, normale e integrale regolare.* Le definizioni relative a tali integrali sono state date mediante la funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS, anzichè,

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Gruppo n. 19).

([1]) N. BERRUTI ONESTI, *A proposito di una classificazione di integrali curvilinei dello spazio nel Calcolo delle Variazioni*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. X, (1961), pp. 233-261.

([2]) Per le altre ipotesi sopra la funzione F, cfr. il n. 1, *a*). Rileviamo che nel presente lavoro ci riferiamo alle ipotesi della Memoria citata in ([1]), non ponendoci, pertanto, nelle condizioni formulate da altri Autori: cfr., per esempio, il lavoro (citato da altri Autori, e del quale finora non abbiamo potuto prendere visione) L. H. TURNER, *The direct methods in the calculus of variations*, Ph. D. dissertation, Purdue University, Lafayette, Indiana, 1957. D'altra parte alcune proprietà rilevate nel presente lavoro non sussistono nel caso in cui la funzione F non ammette finite le derivate parziali del primo ordine rispetto a x', y', z' (cfr. l'Osservazione del n. 3).

come nel caso piano [3], mediante la funzione F_1 [4], e la maggiore generalità che tali definizioni così formulate presentano rispetto a quelle equivalenti che, sotto ipotesi più restrittive, si possono dare mediante la F_1 [5], è stata posta in luce, con esempi, in una recente Nota [6].

Nel lavoro citato in [1] ci siamo limitati, per ragioni di spazio, ad aggiungere all'indagine svolta in merito ai concetti sopra ricordati, oltre a una condizione sufficiente affinchè un'estremaloide relativa agli integrali (I) sia un'estremale, un solo teorema di esistenza dell'estremo assoluto, nel quale l'integrale (I) viene supposto *quasi-regolare definito* (*positivo*).

Nel presente lavoro, riprendendo in esame gli integrali (I), dimostriamo alcuni teoremi di esistenza del minimo (assoluto) quando, in luogo della condizione sopra nominata, che $\mathfrak{J}_C$ sia *definito* (*positivo*), si suppone che $\mathfrak{J}_C$ sia *quasi-regolare semidefinito* (*positivo*), e che inoltre per gli *zeri* della funzione F [7] appartenenti al campo A siano verificate opportune condizioni [8].

Ricordate, nel § 1, alcune generalità riguardanti gli integrali (I), nel § 2 vengono svolte alcune considerazioni preliminari in merito agli *zeri* della funzione F. Tra queste presenta particolare rilievo quella che forma oggetto del n. 3, *b*), dalla quale, tenendo anche conto di quanto viene rilevato nel n. 3, *a*), si deduce (n. 4, *a*)) una proprietà di cui, sotto opportune condizioni [9], gode l'insieme chiuso Σ dei punti (x', y', z') della superficie

$$\Omega_1: \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

nei quali, in corrispondenza a un punto (x, y, z), è $F(x, y, z;\ x', y', z') = 0$. Tale proprietà è fondamentale per la dimostrazione dei lemmi dei nn. 9 e 11.

D'altra parte, in base a una osservazione contenuta nel n. 3, *c*) riguardante la figurativa della funzione F relativa a uno *zero* della F, si perviene, nel n. 4, *b*), a un risultato già ottenuto, in ipotesi più restrittive, nel lavoro citato in [1]. Inoltre, alla fine del n. 3, con semplici esempi si pone in evidenza come, nel caso in cui la funzione F non soddisfa alle ipotesi fatte, la proprietà rilevata nel n. 3, *c*) può non essere verificata.

---

[3] L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Due Volumi (N. Zanichelli, Bologna 1921-23). Cfr. Vol. I, Cap. V, § 2, n. 81, pag 224.

[4] Per quanto riguarda il modo in cui sono definite le funzioni $\mathcal{E}$ ed F_1 relative agli integrali (I), cfr. rispettivamente la (1) e la (4) del n. 1, *a*) del presente lavoro.

[5] Cfr. il n. 13 del lavoro citato in [1].

[6] N. BERRUTI ONESTI, *Ancora sopra una classificazione di integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni*, Rend. dell'Istituto Lombardo, Acc. di Scienze e Lettere, Vol. 99, (1965), pp. 457-485.

[7] Cfr. il n. 2 del § 1 del presente lavoro.

[8] Cfr. la [39] e la [60].

[9] Tali condizioni vengono indicate nel n. 3, *a*) e *b*), e ricordate nel n. 4, *a*). A questo proposito cfr. anche la [19].

Usufruendo delle considerazioni svolte nel § 2, nel § 3 dimostriamo alcuni teoremi di esistenza del minimo (assoluto) per gli integrali (I).

All'inizio del § 3 è premesso (n. 5) un lemma nel quale, pur estendendo agli integrali (I) un risultato già noto per gli integrali (II) ([10]), poichè ci poniamo in condizioni più ampie di quelle relative al caso piano (in cui si suppone che esistano continue le derivate parziali del secondo ordine della funzione F rispetto a x', y', z'), abbiamo dovuto seguire un nuovo procedimento. Peraltro, come rileviamo nelle ([31]) e ([34]), tale lemma, sotto ipotesi più restrittive, si può ottenere con una semplice estensione del procedimento seguito nel caso piano. Inoltre nel n. 6, mediante un esempio, poniamo in luce come, nelle ipotesi del n. 5, non è possibile usufruire di un ragionamento analogo a quello svolto nel luogo citato in ([10]).

In base al lemma del n. 5, nei nn. 7 e 8 dimostriamo due teoremi di esistenza del minimo (assoluto) per gli integrali (I). Mentre il n. 7 si ottiene quale immediata estensione di un teorema stabilito da L. TONELLI nel caso piano, nel teorema del n. 8 viene considerata, in merito agli zeri della funzione F, una nuova condizione, e nella dimostrazione, pur usufruendo di alcune considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso piano, abbiamo dovuto ricorrere a un nuovo procedimento. Da tale teorema, come osserviamo alla fine del n. 8, segue (come caso particolare) una nuova proposizione per gli integrali del piano (II). Nell'esempio del n. 8, inoltre, costruiamo una funzione per la quale le condizioni del teorema stesso sono verificate.

Per estendere (nn. 10 e 12) agli integrali $\mathfrak{I}^C$ dello spazio altri due teoremi di esistenza del minimo (assoluto) è stato necessario premettere i già citati lemmi dei nn. 9 e 11. Nella dimostrazione del n. 9, pur seguendo un procedimento analogo a quello usato nel caso piano (dove, in luogo dell'insieme Σ, interviene un arco di circonferenza $x'^2 + y'^2 = 1$ di lunghezza minore di π), si sono presentate nuove complicazioni, che hanno richiesto varie considerazioni, anche di natura geometrica, ed opportuni accorgimenti (cfr. in particolare, la ([51])).

Anche la dimostrazione dei teoremi dei nn. 10 e 12 e del lemma del n. 11, per quanto in essa si proceda in modo analogo al caso piano, ha richiesto opportune considerazioni.

Soggiungiamo che, tenendo presente la proprietà dell'insieme Σ rilevata nel n. 4, *a*), agli integrali (I) si possono estendere, con ulteriore indagine che, per ragioni di spazio, nel presente lavoro non effettuiamo, altri teoremi di esistenza del minimo (assoluto) relativi al caso piano ([11]). D'altra parte, usufruendo del lemma del n. 5, e con ulteriori, opportune considerazioni, si possono estendere agli integrali (I) altri risultati riguardanti l'esistenza del

---

([10]) Cfr. L. TONELLI, Opera citata in ([3]), Vol. I, Cap. VI, n. 86, *a*), p. 240.

([11]) Cfr. L TONELLI, Opera citata in ([3]), Vol. II, Cap. I, nn. 12-14, pp. 29-40.

minimo (assoluto) per gli integrali (II) [12]. Inoltre, con indagine ulteriore che pure, nel presente lavoro, non effettuiamo, si può ottenere una estensione, agli integrali $\mathfrak{I}_C$ dello spazio, di altri teoremi di esistenza del minimo (assoluto) noti per gli integrali (II) [12'].

Infine, tenendo presente quanto viene esposto nel n. 23 del Vol. II dell'Opera citata in [3], si possono, con facili considerazioni, estendere agli integrali (I) i risultati ottenuti nel luogo ora citato per il caso di campi illimitati.

§ 1. - **Generalità.**

1. ALCUNE DEFINIZIONI [13]. - *a*) Supposto che la funzione $F(x, y, z;\ x', y', z')$ sia definita e continua, assieme alle proprie derivate parziali del primo ordine rispetto a x', y', z', in ogni punto (x, y, z) di un campo A e per ogni terna di numeri reali non tutti nulli (x', y', z'), positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x', y', z', e tale che sia $F(x, y, z;\ 0, 0, 0) = 0$, considerata una curva ordinaria [14]

$$C: \qquad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \qquad (0 \leq s \leq L)$$

dove s è la lunghezza dell'arco rettificato, e considerata inoltre, in ogni punto (x, y, z) di A e per qualsiasi coppia di terne di numeri reali non tutti nulli (x', y', z'), $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$, la funzione (di WEIERSTRASS)

$$(1) \qquad \mathcal{E}(x, y, z;\ x', y', z';\ \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}') = F(x, y, z;\ \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}') - \\ - [\tilde{x}' F_{x'}(x, y, z;\ x', y', z') + \tilde{y}' F_{y'}(\ldots) + \tilde{z}' F_{z'}(\ldots)],$$

---

[12] Cfr., per es., L. TONELLI, *Sull'esistenza del minimo in problemi di Calcolo delle Variazioni*, Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, I, (1932), pp. 89-99; e *Sulle estremali complete*, Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, V, (1936), pp. 159-168. Cfr. anche Opera citata in [3], Vol. II, n. 26, p. 78.

[12'] Cfr., per es., L. TONELLI, Opera citata in [3], Vol. II, Cap. I, nn. 15-22 e n. 24; e A. DEL CHIARO, *Sull'esistenza del minimo in problemi di Calcolo delle Variazioni*, Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, III, (1934), pp. 63-83.

[13] Ci limitiamo a ricordare soltanto alcune definizioni, mentre per altre generalità rimandiamo al § 1 del lavoro citato in [1].

[14] Ricordiamo che si dice curva ordinaria C ogni curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

tale che le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ siano assolutamente continue nell'intervallo (t_0, t_1), ed ogni punto $(x(t), y(t), z(t))$ appartenga al campo A.

l'integrale

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{J}_C = \int_C F(x, y, z;\ x', y', z')ds$$

si dice

1°) *quasi-regolare positivo*, se è

$$\text{(2)} \qquad \mathcal{E}(x, y, z;\ x', y', z';\ \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}') \geq 0$$

in ogni punto (x, y, z) di A e per tutte le terne normalizzate (x', y', z'), $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ (15);

2°) *quasi-regolare positivo seminormale*, se è *quasi-regolare positivo*, e in corrispondenza a ciascun punto (x, y, z) di A esiste almeno una terna normalizzata (x_0', y_0', z_0'), tale che risulti

$$\text{(3)} \qquad \mathcal{E}(x, y, z;\ x_0', y_0', z_0';\ \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}') > 0$$

per qualsiasi terna normalizzata $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ distinta da (x_0', y_0', z_0');

3°) *semidefinito positivo*, quando in ogni punto (x, y, z) di A e per ogni terna normalizzata (x', y', z') è $F(x, y, z;\ x', y', z') \geq 0$ (16).

b) Supposto che per la funzione F siano verificate le ipotesi ricordate all'inizio del precedente capoverso, e che, inoltre, in ogni punto (x, y, z) di A e per ogni terna di numeri reali non tutti nulli (x', y', z') esistano finite e continue le derivate parziali del secondo ordine della funzione F rispetto a x', y', z', si definisce la funzione F_1 nel seguente modo

$$\text{(4)} \quad F_1(x, y, z;\ x', y', z') = \frac{1}{z'^2}\begin{vmatrix} F_{x'x'} & F_{x'y'} \\ F_{y'x'} & F_{y'y'} \end{vmatrix} = \frac{1}{x'^2}\begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} = \frac{1}{y'^2}\begin{vmatrix} F_{z'z'} & F_{z'x'} \\ F_{x'z'} & F_{x'x'} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{x'y'}\begin{vmatrix} F_{z'z'} & F_{z'x'} \\ F_{z'y'} & F_{x'y'} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y'z'}\begin{vmatrix} F_{x'x'} & F_{x'y'} \\ F_{x'z'} & F_{y'z'} \end{vmatrix} = -\frac{1}{z'x'}\begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{y'x'} & F_{z'x'} \end{vmatrix}.$$

Tale funzione, in virtù delle ipotesi fatte, risulta definita e continua in ogni punto (x, y, z) di A e per ogni terna di numeri reali non tutti nulli (x', y', z'), e positivamente omogenea di grado -4 rispetto a x', y', z'.

---

(15) Come è noto, si dice normalizzata ogni terna di numeri reali (x', y', z') per cui è $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$.

(16) Sia dalle definizioni ora ricordate, sia da quelle di integrale $\mathfrak{J}_C$ *quasi regolare positivo normale*, *regolare positivo*, e *definito positivo* si ottengono, come è noto, quelle analoghe per i corrispondenti integrali $\mathfrak{J}_C$ *negativi*, per i quali valgono considerazioni analoghe a quelle svolte in seguito.

2. ZERI DELLA FUNZIONE F. - Un punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ di A si dice *zero* della funzione F, se per una o più terne normalizzate (x', y', z') è $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z')=0$. Se nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ di A è $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z')=0$ per tutte le terne normalizzate (x', y', z'), il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ si dice *zero totale*; se invece è $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z')=0$ non per tutte le terne normalizzate (x', y', z'), allora il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ si dice *zero parziale*.

Considerata la superficie sferica

$$\Omega_1: \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

è ovvio che per ogni *zero* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ della funzione F, l'insieme dei punti (x', y', z') di Ω_1 nei quali è $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z') = 0$, è, in virtù della continuità della funzione F, un insieme chiuso.

§ 2. - Considerazioni preliminari riguardanti gli integrali $\mathfrak{J}_C$.

3. GLI ZERI DELLA FUNZIONE F IN RELAZIONE ALL'INTEGRALE $\mathfrak{J}_C$ ([17]). - *a)* È evidente che, se $\mathfrak{J}_C$ è *quasi-regolare positivo seminormale*, la funzione F non può avere alcun *zero totale* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; infatti in questo caso dovrebbe essere $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z') = F_{x'}(...) = F_{y'}(...) = F_{z'}(...) = 0$ per qualunque terna normalizzata (x', y', z').

Anzi, nel caso in cui $\mathfrak{J}_C$ è del tipo ora nominato, non può neppure esservi alcuna coppia di terne normalizzate $(x_1', y_1' z_1')$, (x_2', y_2', z_2') distinte, per le quali è contemporaneamente

$$x_2' = - x_1', \quad y_2' = - y_1', \quad z_2' = - z_1', \tag{5}$$

tali che sia

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x_1', y_1', z_1') = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x_2', y_2', z_2') = 0. \tag{6}$$

Infatti in questo caso si avrebbe, come si può verificare facilmente ([18]),

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z'; x_1', y_1', z_1') = 0 \\ \mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z'; x_2', y_2', z_2') = 0 \end{cases} \tag{7}$$

([17]) Qui e nel seguito del presente lavoro si intende che per la funzione F sono soddisfatte le ipotesi ricordate all'inizio del n. 1, *a)*, salvo esplicito avviso in caso diverso.

([18]) Per verificare che dalle (6) seguono le (7), basta tenere conto di quanto viene rilevato nel lavoro citato in ([1]) (cfr. § 2, n. 5, pag. 242); oppure, più direttamente, basta per tutte le terne normalizzate (x', y', z'), e ciò è in contrasto con la condizione che $\mathfrak{J}_C$ sia *quasi-regolare positivo seminormale* [19].

b) Inoltre rileviamo che, *supposto che $\mathfrak{J}_C$ sia quasi-regolare positivo semidefinito* [20], *se per uno zero $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ della funzione F si ha, in due punti distinti $\bar{P}_1' \equiv (\bar{x}_1', \bar{y}_1', \bar{z}_1')$, $\bar{P}_2' \equiv (\bar{x}_2', \bar{y}_2', \bar{z}_2')$ della superficie Ω_1 non diametralmente opposti*

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{x}_1', \bar{y}_1', \bar{z}_1') = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{x}_2', \bar{y}_2', \bar{z}_2') = 0, \tag{8}$$

---

osservare che, sotto la sola ipotesi che $\mathfrak{J}_C$ sia *quasi-regolare positivo*, essendo, per qualunque terna normalizzata (x', y', z'),

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z';\ x'_1, y'_1, z'_1) = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x'_1, y'_1, z'_1) - \\ - [x'_1 F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z') + y'_1 F_{y'}(\ldots) + z'_1 F_{z'}(\ldots)],$$

e anche, poichè valgono le (5),

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z';\ x'_2, y'_2, z'_2) = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x'_2, y'_2, z'_2) + \\ + x'_1 F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z') + y'_1 F_{y'}(\ldots) + z'_1 F_{z'}(\ldots),$$

si ha, tenendo conto delle (6),

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z';\ x'_1, y'_1, z'_1) + \mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z';\ x'_2, y'_2, z'_2) = 0,$$

da cui, tenendo presente la (2), seguono le (7).

[19] Le proprietà ora rilevate sussistono anche se, pur *non essendo $\mathfrak{J}_C$ quasi-regolare positivo seminormale*, in ogni *zero* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ della funzione F si ha

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z';\ \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}') \geq 0$$

per tutte le terne normalizzate (x', y', z'), $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$, e in corrispondenza a $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ esiste almeno una terna normalizzata (x'_0, y'_0, z'_0) tale che sia

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x'_0, y'_0, z'_0;\ x', y', z') > 0$$

per tutte le terne normalizzate (x', y', z') distinte da (x'_0, y'_0, z'_0); vale a dire per le proprietà in questione è sufficiente che le (2) e (3) siano verificate soltanto per lo *zero* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Analoga osservazione vale per le considerazioni che seguono nel presente paragrafo.

[20] In questo caso $\mathfrak{J}_C$ è *semidefinito positivo*, come si verifica facilmente in modo analogo a quello seguito nel caso piano, dove è stato fatto uso della funzione F_1 relativa agli integrali (II).

Infatti, essendo $\mathfrak{J}_C$ *quasi-regolare positivo*, per qualunque coppia di terne normalizzate (x', y', z'), $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ è

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z') \geq x' F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}') + y' F_{y'}(\ldots) + z' F_{z'}(\ldots).$$

Allora, poichè l'ordinata dell'iperpiano tangente alla figurativa nel punto corrispondente a una qualsiasi terna normalizzata $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ è positiva o nulla in infiniti punti (x', y', z') della superficie Ω_1, ed essendo $\mathfrak{J}_C$ *semidefinito*, dalla disuguaglianza ora scritta segue che deve essere $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z') \geq 0$ per tutte le terne normalizzate (x', y', z').

risulta

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z') = 0 \tag{9}$$

in tutti i punti (x', y', z') *dell'arco* Γ' *di cerchio massimo* [21] *della superficie* Ω_1 *avente estremi in* $\bar{P}_1'$ *e* $\bar{P}_2'$, *e lunghezza minore di* π.

Infatti, se $\bar{\rho}$ è la distanza tra i punti $\bar{P}_1'$ e $\bar{P}_2'$, e $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sono i coseni direttori della retta $\bar{P}_1'\bar{P}_2'$, tenendo presente che ogni punto di Γ' ha coordinate

$$\left(\frac{\bar{x}_1' + \rho\cos\alpha}{\sqrt{(\bar{x}_1' + \rho\cos\alpha)^2 + (\bar{y}_1' + \rho\cos\beta)^2 + (\bar{z}_1' + \rho\cos\gamma)^2}},\ \frac{\bar{y}_1' + \rho\cos\beta}{\sqrt{\ldots\ldots}},\ \frac{\bar{z}_1' + \rho\cos\gamma}{\sqrt{\ldots\ldots}}\right),$$

con $0 \leq \rho \leq \bar{\rho}$, per ogni ρ di $(0, \bar{\rho})$ possiamo scrivere, in virtù della positiva omogeneità di grado 1 della funzione F rispetto a x', y', z',

$$F\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \frac{\bar{x}_1' + \rho\cos\alpha}{\sqrt{(\bar{x}_1' + \rho\cos\alpha)^2 + (\bar{y}_1' + \rho\cos\beta)^2 + (\bar{z}_1' + \rho\cos\gamma)^2}}, \frac{\bar{y}_1' + \rho\cos\beta}{\sqrt{\ldots\ldots}}, \frac{\bar{z}_1' + \rho\cos\gamma}{\sqrt{\ldots\ldots}}\right) = \frac{\varphi(\rho)}{\sqrt{\ldots\ldots}}, \tag{10}$$

dove abbiamo posto

$$\varphi(\rho) = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{x}_1' + \rho\cos\alpha,\ \bar{y}_1' + \rho\cos\beta,\ \bar{z}_1' + \rho\cos\gamma).$$

Si verifica facilmente che in tutto $(0, \bar{\rho})$ è $\varphi(\rho) = 0$.

Infatti, poichè, tenendo presente la (10) e per le ipotesi fatte sopra la funzione F, la funzione $\varphi(\rho)$ è continua assieme alla propria derivata prima in tutto $(0, \bar{\rho})$, ed è, tenendo conto della seconda delle (8), $\varphi(\bar{\rho}) = 0$, se per un valore ρ' interno a $(0, \bar{\rho})$ fosse $\varphi(\rho') > 0$, esisterebbe almeno un valore ρ'' di $(\rho', \bar{\rho})$ per il quale è

$$\varphi'(\rho'') = \cos\alpha\, F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{x}_1' + \rho''\cos\alpha,\ \bar{y}_1' + \rho''\cos\beta,\ \bar{z}_1' + \rho''\cos\gamma) + \\ + \cos\beta\, F_{y'}(\ldots) + \cos\gamma\, F_{z'}(\ldots) < 0. \tag{11}$$

Teniamo presente che dalla (2), scritta nella forma

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{x}_1', \bar{y}_1', \bar{z}_1') - [\bar{x}_1' F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z') + \bar{y}_1' F_{y'}(\ldots) + \bar{z}_1' F_{z'}(\ldots)] \geq 0,$$

---

[21] Qui e nel seguito del presente lavoro, per «cerchio massimo» di Ω_1 si intende la circonferenza comune a tale cerchio e alla superficie sferica Ω_1.

in virtù della prima delle (8) e della positiva omogeneità di grado zero delle funzioni $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$ rispetto a x', y', z', segue, per qualunque terna di numeri reali non tutti nulli (x', y', z'),

$$\bar{x}_1' F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z') + \bar{y}_1' F_{y'}(...) + \bar{z}_1' F_{z'}(...) \leq 0;$$

pertanto, ricordando la (11), risulta

$$(\bar{x}_1' + \rho'' \cos\alpha) F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}_1' + \rho'' \cos\alpha, \bar{y}_1' + \rho'' \cos\beta, \bar{z}_1' + \rho'' \cos\gamma) + \\ + (\bar{y}_1' + \rho'' \cos\beta) F_{y'}(...) + (\bar{z}_1' + \rho'' \cos\gamma) F_{z'}(...) < 0,$$

e quindi anche, poichè, in virtù della positiva omogeneità di grado 1 della funzione F rispetto a x', y', z', per qualunque terna di numeri reali non tutti nulli (x', y', z') è

$$(12) \qquad F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z') = x' F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z') + y' F_{y'}(...) + z' F_{z'}(...),$$

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}_1' + \rho'' \cos\alpha, \bar{y}_1' + \rho'' \cos\beta, \bar{z}_1' + \rho'' \cos\gamma) < 0,$$

in contrasto con la definizione di integrale $\mathfrak{J}_C$ *semidefinito positivo* [22].

c) Osserviamo infine che, *supposto ancora che $\mathfrak{J}_C$ sia quasi-regolare positivo semidefinito* [23], *se per due terne normalizzate distinte* (x_1', y_1', z_1'), (x_2', y_2', z_2') *soddisfacenti alle* (5) *valgono le* (6), *e quindi anche le* (7), *si ha*

$$(9) \qquad F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x', y', z') = 0$$

per tutte le terne normalizzate (x', y', z'); *vale a dire il punto* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ *è uno zero totale per la funzione* F.

---

[22] Se, nelle ipotesi del presente capoverso, non si suppone che $\mathfrak{J}_C$ sia *semidefinito*, la proprietà ora rilevata può non sussistere. Ricordiamo infatti l'esempio che forma oggetto del n. 2 della Nota citata in [6], in cui, essendo $\mathfrak{J}_C$ *quasi-regolare positivo seminormale*, la funzione F si annulla in tutti i punti (x', y', z') della superficie conica $x' = -\sqrt{y'^2 + z'^2}$, mentre in ogni punto interno a tale superficie è $F < 0$. Quindi, considerato l'arco Γ di cerchio massimo di Ω_1, di lunghezza minore di π, avente estremi in due punti qualsiasi distinti comuni a Ω_1 e alla superficie $x' = -\sqrt{y'^2 + z'^2}$, la funzione F è nulla negli estremi di Γ, mentre è $F < 0$ in tutti i punti interni a Γ.

Analogamente, nell'esempio di integrale $\mathfrak{J}_C$ *quasi-regolare positivo* che figura nel n. 3, *b*) della Nota sopra citata, considerato, per fissare le idee, l'arco Γ' di cerchio massimo di Ω_1, avente lunghezza minore di π ed estremi nei punti $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, la funzione F è nulla in tali estremi, mentre è $F < 0$ in tutti i punti (x', y', z') interni a Γ'.

[23] Cfr. la nota [20] del presente lavoro.

Per dimostrare l'asserto, verifichiamo dapprima che, poichè $\mathfrak{J}_C$ è *quasi-regolare positivo,* e sono soddisfatte le (6), e quindi anche le (7), per qualunque terna normalizzata (x', y', z') risulta, per fissare le idee,

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1', y_1', z_1';\ x', y', z') = 0 \quad (13)$$ [24].

A tale scopo, supponiamo che in un punto $P'^* \equiv (x'^*, y'^*, z'^*)$ della superficie Ω_1, distinto da $P_1' \equiv (x_1', y_1', z_1')$ e da $P_2' \equiv (x_2', y_2', z_2')$ sia

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1', y_1', z_1';\ x'^*, y'^*, z'^*) > 0. \quad (14)$$

Allora, se ρ^* è la distanza tra i punti P_1' e P'^*, e $\cos\alpha^*$, $\cos\beta^*$, $\cos\gamma^*$ sono i coseni direttori della retta $P_1'P'^*$, osserviamo, con considerazioni analoghe a quelle svolte nel precedente capoverso, che in ogni punto

$$\left(\frac{x_1' + \rho\cos\alpha^*}{\sqrt{(x_1 + \rho\cos\alpha^*)^2 + (y_1' + \rho\cos\beta^*)^2 + (z_1' + \rho\cos\gamma^*)^2}},\ \frac{y_1' + \rho\cos\beta^*}{\sqrt{\ldots\ldots}},\ \frac{z_1' + \rho\cos\gamma^*}{\sqrt{\ldots\ldots}}\right),\quad (0 \leq \rho \leq \rho^*)$$

dell'arco di cerchio massimo della superficie Ω_1 avente estremi nei punti P_1' e P'^*, e lunghezza minore di π, si ha

$$\mathcal{E}\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x_1', y_1', z_1'; \frac{x_1' + \rho\cos\alpha^*}{\sqrt{(x_1' + \rho\cos\alpha^*)^2 + (y_1' + \rho\cos\beta^*)^2 + (z_1' + \rho\cos\gamma^*)^2}}, \frac{y_1' + \rho\cos\beta^*}{\sqrt{\ldots\ldots}}, \frac{z_1' + \rho\cos\gamma^*}{\sqrt{\ldots\ldots}}\right) = \frac{\Psi(\rho)}{\sqrt{\ldots\ldots}}, \quad (15)$$

dove abbiamo posto

$$\Psi(\rho) = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1' + \rho\cos\alpha^*,\ y_1' + \rho\cos\beta^*,\ z_1' + \rho\cos\gamma^*) - \quad (16)$$
$$- [(x_1' + \rho\cos\alpha^*) F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1', y_1', z_1') +$$
$$+ (y_1' + \rho\cos\beta^*) F_{y'}(\ldots) + (z_1' + \rho\cos\gamma^*) F_{z'}(\ldots)].$$

Teniamo presente che, in virtù della prima delle (7) e della prima delle (6), e ricordando che le funzioni $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$ risultano positivamente omogenee di grado zero rispetto a x', y', z', per qualunque terna di numeri reali non tutti nulli (x', y', z') risulta

$$x_1' F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z') + y_1' F_{y'}(\ldots) + z_1' F_{z'}(\ldots) = 0. \quad (17)$$

---

[24] In modo del tutto analogo si può verificare che per qualunque terna normalizzata (x', y', z') si ha anche

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x'_2, y'_2, z'_2;\ x', y', z') = 0.$$

Allora, poichè, in virtù della (12), e tenendo presente la (16), è

$$\Psi(\rho) = (x_1' + \rho \cos \alpha^*) F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1' + \rho \cos \alpha^*,\ y_1' + \rho \cos \beta^*,\ z_1' + \cos \gamma^*) +$$

$$+ (y_1' + \rho \cos \beta^*) F_{y'}(...) + (z_1' + \rho \cos \gamma^*) F_{z'}(...) -$$

$$- [(x_1' + \rho \cos \alpha^*) F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1', y_1', z_1') +$$

$$+ (y_1' + \rho \cos \beta^*) F_{y'}(...) + (z_1' + \rho \cos \gamma^*) F_{z'}(...)],$$

usufruendo della (17) (per $x' = x_1' + \rho \cos \alpha^*$, $y' = y_1' + \rho \cos \beta^*$, $z' = z_1' + \rho \cos \gamma^*$, e, successivamente, per $x' = x_1'$, $y' = y_1'$, $z' = z_1'$), possiamo scrivere

$$\Psi(\rho) = \rho\, \Phi(\rho), \tag{18}$$

dove abbiamo posto, per brevità,

$$\Phi(\rho) = \cos \alpha^* F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1' + \rho \cos \alpha^*,\ y_1' + \rho \cos \beta^*,\ z_1' + \rho \cos \gamma^*) +$$

$$+ \cos \beta^* F_{y'}(...) + \cos \gamma^* F_{z'}(...) -$$

$$- [\cos \alpha^* F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1', y_1', z_1') + \cos \beta^* F_{y'}(...) + \cos \gamma^* F_{z'}(...)].$$

Allora, se vale la (14), tenendo presenti la (15) e la (18), ed essendo $\rho^* > 0$, deve essere $\Phi(\rho^*) > 0$; quindi, poichè è $\Phi(0) = 0$, e $\Phi(\rho)$ è continua in $(0, \rho^*)$, deve esistere almeno un valore ρ' interno a $(0, \rho^*)$, per il quale è

$$\Phi(\rho') < \Phi(\rho^*),$$

vale a dire

$$\cos \alpha^* F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1' + \rho' \cos \alpha^*,\ y_1' + \rho' \cos \beta^*,\ z_1' + \rho' \cos \gamma^*) + \tag{19}$$

$$+ \cos \beta^* F_{y'}(...) + \cos \gamma^* F_{z'}(...) <$$

$$< \cos \alpha^* F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1' + \rho^* \cos \alpha^*,\ y_1' + \rho^* \cos \beta^*,\ z_1' + \rho^* \cos \gamma^*) +$$

$$+ \cos \beta^* F_{y'}(...) + \cos \gamma^* F_{z'}(...),$$

e quindi anche, ricordando la (17) e la (12), e poichè è

$$x_1'+\rho^*\cos\alpha^*=x'^*,\quad y_1'+\rho^*\cos\beta^*=y'^*,\quad z_1'+\rho^*\cos\gamma^*=z'^*\ \text{(}^{25}\text{)},$$

$$F(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\ x_1'+\rho'\cos\alpha^*,\ y_1'+\rho'\cos\beta^*,\ z_1'+\rho'\cos\gamma^*)-$$
$$-[(x_1'+\rho'\cos\alpha^*)F_{x'}(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\ x'^*,y'^*,z'^*)+$$
$$+(y_1'+\rho'\cos\beta^*)F_{y'}(\dots)+(z_1'+\rho'\cos\gamma^*)F_{z'}(\dots)]<0,$$

in contrasto con la condizione che $\mathfrak{I}_C$ sia *quasi-regolare positivo.*

Dunque non può esistere alcun punto (x'^*, y'^*, z'^*) della superficie Ω_1 in cui vale la (14), e quindi, essendo $\mathfrak{I}_C$ *quasi-regolare positivo,* la (13) è soddisfatta in tutti i punti (x', y', z') della superficie Ω_1 ([26]).

([25]) La disuguaglianza che segue si ottiene dalla (19) moltiplicando ambo i membri per $\rho'>0$, aggiungendo poi al primo membro $x'_1F_{x'}(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\ x'_1+\rho'\cos\alpha^*,\ y'_1+\rho'\cos\beta^*,\ z'_1+\rho'\cos\gamma^*)+$ $+y'_1F_{y'}(\dots)+z'_1F_{z'}(\dots)$, e al secondo membro $x'_1F_{x'}(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\ x'^*,y'^*,z'^*)+y'_1F_{y'}(\dots)+z'_1F_{z'}(\dots)$ (somme che, in virtù della (17), sono entrambe nulle), e tenendo infine presente la (12).

([26]) Osserviamo che, supposto che $\mathfrak{I}_C$ sia *quasi-regolare positivo* e che valgano le (5) e le (6), e quindi anche le (7), se in un punto $\bar{P}'\equiv(\bar{x}',\bar{y}',\bar{z}')$ di Ω_1 distinto da P'_1 e da P'_2 è

$$\mathcal{E}(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\ x'_1,y'_1,z'_1;\ \bar{x}',\bar{y}',\bar{z}')=0,$$

in modo più semplice di quello esposto nel presente capoverso si verifica che la (13) è soddisfatta in tutti i punti (x', y', z') della semicirconferenza massima di Ω_1 avente estremi nei punti P'_1 e P'_2, e passante per $\bar{P}'$.

Infatti, considerando separatamente i due archi di cerchio massimo di Ω_1, di lunghezza minore di π, aventi estremi rispettivamente in P'_1, $\bar{P}'$, e in $\bar{P}'$, $\bar{P}'_2$, ricordando la (17), e tenendo presente che, in virtù della seconda delle (6) e delle (7), si ha, per tutte le terne di numeri reali non tutti nulli (x', y', z'),

$$x'_2F_{x'}(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\ x',y',z')+y'_2F_{y'}(\dots)+z'_2F_{z'}(\dots)=0,$$

basta procedere in modo analogo a quello seguito nel capoverso *b*) del presente numero, quando, in luogo della funzione $F(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\ x',y',z')$ si considera la funzione $\mathcal{E}(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\ x'_1,y'_1,z'_1;\ x',y',z')$.

Osserviamo inoltre che se, essendo verificate le condizioni della presente nota, esiste un punto $P_0'\equiv(x_0',y_0',z_0')$ di Ω_1 distinto da P_1' e P_2' in cui è

$$F(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\ x_0',y_0',z_0')=0,$$

si verifica facilmente, con considerazioni analoghe a quelle svolte nel precedente capoverso *b*), ed usufruendo della (17), che è

$$F(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\ x',y',z')=0$$

in tutti i punti (x', y', z') della semicirconferenza massima di Ω_1 avente estremi nei punti P_1' e P_2', e passante per P_0'.

Pertanto, essendo la (13) verificata per qualunque terna di numeri reali non tutti nulli (x', y', z'), la figurativa della funzione F relativa al punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ si riduce all'iperpiano

$$u = x' F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1', y_1', z_1') + y' F_{y'}(\ldots) + z' F_{z'}(\ldots),$$

e anche, poichè $\mathfrak{J}_C$ è *semidefinito*, all'iperpiano $u = 0$

Dunque la (9) è soddisfatta per tutte le terne di numeri reali non tutti nulli (x', y', z').

Osservazione - Rileviamo che se la funzione F non soddisfa alle ipotesi fatte, i risultati ottenuti nel presente numero possono non essere validi, come risulta dai semplici esempi che seguono.

α) Consideriamo, in ogni punto (x, y, z) e per ogni terna di numeri reali (x', y', z') la funzione continua

$$F(x, y, z;\ x', y', z') = \sqrt{y'^2 + z'^2},$$

la quale in qualunque punto dell'asse x' non ammette derivate parziali del primo ordine rispetto a y' e z'. D'altra parte è $F \geq 0$, e con facili calcoli si verifica che per qualsiasi terna normalizzata (x', y', z') in cui esistono finite le derivate parziali del primo ordine della funzione F rispetto a x', y', z', si ha, tenendo presente la (1),

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ x', y', z';\ \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}') \geq 0 \tag{2}$$

per tutte le terne normalizzate $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$.

Osserviamo che è

$$F(x, y, z;\ -1, 0, 0) = F(x, y, z;\ 1, 0, 0) = 0,$$

e che per qualunque terna normalizzata (x', y', z') in cui esistono finite le derivate parziali $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$ risulta

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ x', y', z';\ -1, 0, 0) = \mathcal{E}(x, y, z;\ x', y', z';\ 1, 0, 0) = 0;$$

vale a dire sono verificate le (6) e le (7) per due terne normalizzate distinte che soddisfano alle (5).

Peraltro in ogni punto (x', y', z') della superficie Ω_1 distinto sia da $(-1, 0, 0)$ che da $(1, 0, 0)$ è $F > 0$, e quindi la proprietà rilevata nel capoverso *c*) del presente numero non è verificata.

β) Per la funzione

$$F(x, y, z;\ x', y', z') = \sqrt{y'^2 + z'^2} - z'$$

valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nel capoverso precedente; osserviamo che in tutti i punti dell'arco di cerchio massimo di Ω_1 avente estremi nei punti $(-1, 0, 0)$ e $(1, 0, 0)$, e passante per il punto $(0, 0, 1)$ è $F = 0$, mentre si ha $F > 0$ in ogni punto (x', y', z') di Ω_1 non appartenente a tale arco.

4. ULTERIORI CONSIDERAZIONI SUGLI INTEGRALI $\mathfrak{J}_C$ QUASI-REGOLARI. – *a*) Per quanto abbiamo dimostrato nei capoversi *a*) e *b*) del precedente numero, risulta che *se* $\mathfrak{J}_C$ *è quasi-regolare positivo seminormale semidefinito, e, in corrispondenza al punto* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ *di* A, *esistono due punti* $\bar{P}' \equiv (\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ *e* $\bar{\bar{P}}' \equiv (\bar{\bar{x}}', \bar{\bar{y}}', \bar{\bar{z}}')$ *della superficie* Ω_1 *per i quali è*

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}') = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{\bar{x}}', \bar{\bar{y}}', \bar{\bar{z}}') = 0,$$

i due punti $\bar{P}'$ *e* $\bar{\bar{P}}'$ *non possono essere diametralmente opposti, ed inoltre in tutti i punti* (x', y', z') *dell'arco di cerchio massimo di* Ω_1 *di lunghezza minore di* π, *avente estremi nei punti* $\bar{P}'$ *e* $\bar{\bar{P}}'$, *si ha*

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z') = 0.$$

Allora possiamo concludere che, se $\mathfrak{J}_C$ è *quasi-regolare positivo seminormale semidefinito*, in corrispondenza ad ogni *zero* (x, y, z) della funzione F, esiste un insieme Σ di punti di Ω_1, chiuso e limitato da una curva chiusa continua (il quale quò eventualmente ridursi a un solo punto), in ogni punto (x', y', z') del quale è $F(x, y, z;\ x', y', z') = 0$.

L'insieme Σ è tale inoltre che:

1°) un qualunque cerchio massimo di Ω_1 ha in comune con Σ al più un solo arco di lunghezza minore di π (che può eventualmente ridursi a un punto) ([7]);

([27]) La proprietà 1°) segue immediatamente da quanto abbiamo rilevato nel n. 3, *b*). Segue anche che Σ è connesso, vale a dire, considerati due punti qualsiasi P', P'' di Σ, è sempre possibile congiungerli con un arco di curva continua avente estremi in P' e P'' e tutto costituito di punti di Σ (per es. con l'arco di cerchio massimo di Ω_1, di lunghezza minore di π, avente estremi in P' e P''). Inoltre Σ è semplicemente connesso, cioè, considerata una qualsiasi curva λ chiusa, continua, e tutta costituita di punti interni a Σ, tutti i punti di Ω_1 interni a λ (e che sono in quella parte di Ω_1, limitata da λ, che non contiene il contorno di Σ) sono interni a Σ.

2°) esiste almeno un cerchio massimo ω di Ω_1 non contenente alcun punto di Σ, tale che Σ è situato in uno soltanto dei due emisferi di Ω_1 limitati da ω [28].

---

[28] Ciò si prova con considerazioni, che ci limitiamo ad esporre in breve, le quali, pur richiedendo opportuni accorgimenti, sono di natura del tutto elementare.

Escluso il caso particolare in cui Σ si riduce a un arco di cerchio massimo (nel quale caso la 2°) è evidente), consideriamo un qualunque diametro d di Ω_1, osservando che la proiezione ortogonale di Σ sopra d è un segmento di lunghezza minore di 2. Se a tale proiezione non appartiene l'origine, la 2°) segue immediatamente; infatti, per es., il cerchio ω_0 sezione di Ω_1 con il piano passante per l'origine e perpendicolare al diametro d soddisfa la 2°). In caso contrario, supposto, per fissare le idee, che il diametro d appartenga all'asse x', e che, se a_1, a_2, con $a_1 < a_2$, sono i valori cui corrispondono gli estremi del segmento proiezione di Σ sopra d, sia $-1 < a_1 < a_2 \leq 1$, consideriamo la circonferenza γ_1 sezione di Ω_1 con il piano $x' = a_1$. Tenuto presente che, se è $a_1 < 0$, tale circonferenza, come segue da facili considerazioni, ha in comune con Σ un solo punto P_1', consideriamo, in questo caso, il cerchio massimo ω_1 sezione di Ω_1 con il piano passante per O e per la tangente in P'_1 a γ_1, rilevando che, come si verifica facilmente, l'emisfero di Ω_1 che si trova, rispetto a ω_1, dalla stessa parte in cui è γ_1, non contiene altri punti di Σ oltre a quelli che appartengono a ω_1, e che, inoltre, ω_1 ha in comune con Σ (in virtù della proprietà 1°)) un arco di cerchio massimo di Ω_1 di lunghezza minore di π (che può eventualmente ridursi a P_1'). Teniamo presente che, se $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ sono gli estremi di tale arco, e $P_1^* P_2^*$ sono quelli del diametro di Ω_1 parallelo alla corda $\overline{P}_1 \overline{P}_2$ (la quale, nel caso in cui $\overline{P}_1$ e $\overline{P}_2$ coincidono con P_1', si intende che coincida con la tangente in P_1' a ω_1), nei punti $(x', y' z')$ della semicirconferenza massima ω_1' di Ω_1 avente estremi in P_1^* e P_2^*, e non contenente P_1', è $F(x, y, z; x', y', z') > 0$, e quindi, in virtù della continuità della funzione F, i punti di ω'_1 hanno minima distanza positiva dai punti di Σ.

Allora, per ottenere il cerchio ω, basta fare ruotare ω_1 attorno al diametro $P_1^* P_2^*$ in modo che, dopo la rotazione, tutti i punti di ω_1 abbiano minima distanza positiva dai punti Σ.

Nel caso in cui, infine, è $a_1 = 0$, basta considerare, in luogo di ω_1, il cerchio sezione di Ω_1 con il piano $x' = 0$, e ripetere il ragionamento fatto sopra a proposito del cerchio ω_1.

È ovvio che se è $a_1 = -1$, e quindi $a_2 < 1$, il cerchio ω si determina con ragionamento del tutto analogo a quello svolto ora, considerando inizialmente, in luogo del piano $x' = a_1$, il piano $x' = a_2$.

Osserviamo che, se $\delta > 0$ è la minima distanza dei punti di ω da quelli di Σ, e $\overline{\alpha}$ è l'angolo, compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, per il quale è

$$\operatorname{sen} \frac{\overline{\alpha}}{2} = \frac{\delta}{2},$$

$\left(\text{dove, essendo } 0 < \delta \leq \sqrt{2}, \text{ si ha } 0 < \overline{\alpha} \leq \frac{\pi}{2}\right)$, indicato con α' l'angolo, compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, che una qualunque semiretta uscente da O e passante per un qualsiasi punto di Σ (orientata da O verso tale punto) forma con il piano cui appartiene il cerchio massimo ω, risulta

$$0 < \overline{\alpha} \leq \alpha' \leq \frac{\pi}{2}.$$

É utile osservare, per il seguito (cfr. la [51]), che la rotazione sopra nominata può essere effettuata in modo che, indicata con ω_1'' la semicirconferenza massima, avente estremi in $P_1^* P_2^*$, ottenuta da ω_1' mediante la suddetta rotazione, la minima distanza (positiva) dei *b*) Osserviamo inoltre che, da quanto abbiamo dimostrato nel capoverso *c*) del precedente numero, segue che, *se* $\mathfrak{J}_C$ *è quasi-regolare positivo, e per lo zero* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ *della funzione* F *è soddisfatta, per due terne normalizzate distinte soddisfacenti le* (5), *la condizione* (6), *la figurativa della funzione* F *relativa al punto* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ *è un iperpiano.*

Si ritrova così, nel caso particolare in cui la uguaglianza

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1', y_1', z_1') = -\ F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_2', y_2', z_2') \tag{20}$$

(dove è contemporaneamente $x_2' = -x_1'$, $y_2' = -y_1'$, $z_2' = -z_1'$) si riduce alla (6), e prescindendo dalla esistenza delle derivate parziali del secondo ordine della funzione F rispetto a x', y', z', il risultato che, usufruendo di tali derivate parziali, e supponendo appunto che valga la (20), è stato ottenuto nel n. 5 del § 2 della Memoria citata in [1]. Peraltro, ragionando in modo del tutto analogo a quello seguito nel n. 3, *c*) per verificare la (13), si dimostra che, se $\mathfrak{J}_C$ è *quasi-regolare positivo* , e vale la (20), per ogni terna normalizzata (x', y', z') è

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1', y_1', z_1';\ x', y', z') = 0 \ [29],$$

cioè la figurativa della funzione F relativa al punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è un iperpiano.

---

punti di ω_1'' da quelli di Σ risulti uguale alla minima distanza (positiva), pure da Σ, dei punti della semicirconferenza massima di Ω_1 avente gli stessi estremi P_1^* e P_2^* di ω_1'' e costituita dai punti diametralmente opposti a quelli di ω_1''. Inoltre, nel caso in cui, considerata la proiezione ortogonale di Σ sopra il diametro d, i valori a_1, a_2 sono entrambi interni a $(-1, 1)$, e pertanto, procedendo nel modo sopra esposto (quando, all'inizio, si considera prima il piano $x' = a_1$, poi il piano $x' = a_2$) si possono ottenere, effettuando la rotazione nel modo ora detto, due cerchi massimi distinti ω', ω'', si può convenire di scegliere, tra i due, quello per il quale il corrispondente angolo α è maggiore. Ed anche, nel caso particolare, sopra considerato, in cui la proiezione ortogonale di Σ sopra d non contiene l'origine, possiamo scegliere, come cerchio ω, il cerchio ω_0 sopra nominato.

Infine, nel caso particolare, considerato all'inizio della presente nota, in cui Σ si riduce ad un arco di cerchio massimo, possiamo convenire di scegliere, come cerchio ω, quello sezione di Ω_1 con il piano per O perpendicolare alla congiungente O con il punto di mezzo di tale arco.

[29] Per dimostrare tale uguaglianza si procede come nel capoverso *c*) del precedente numero, tenendo soltanto presente che, in luogo della (17) di tale capoverso *c*), si ha, in virtù della (17) della Memoria sopra citata, e per la positiva omogeneità di grado zero delle funzioni $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$ rispetto a x', y', z',

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x_1', y_1', z_1') = x_1' F_{x'}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ x', y', z') + y_1' F_{y'}(\ldots) + z_1' F_{z'}(\ldots)$$

per tutte le terne di valori reali non tutti nulli (x', y', z').

Vale a dire si perviene al risultato ottenuto nel § 2, n. 5 del lavoro sopra citato, senza fare uso, qui, delle derivate parziali del secondo ordine della funzione F rispetto a x', y', z' (30).

§ 3 - Esistenza dell'estremo assoluto di $\mathfrak{J}_C$.

5. LEMMA - *Se in corrispondenza a un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ del campo A esiste almeno una terna normalizzata (x_0', y_0', z_0') tale che per qualsiasi terna normalizzata (x', y', z') distinta da (x_0', y_0', z_0') sia*

$$\mathcal{E}(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0';\ x', y', z') > 0, \tag{21}$$

allora si possono determinare, in corrispondenza a P_0, quattro costanti H_0, M_0, N_0, R_0, con $R_0 > 0$, tali che sia

$$F(x, y, z;\ x', y', z') + H_0 x' + M_0 y' + N_0 z' > 0 \tag{22}$$

in tutti i punti (x, y, z) di A che appartengono alla sfera avente centro nel punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ e raggio R_0, e per tutte le terne normalizzate (x', y', z').

Per dimostrare l'asserto, consideriamo l'iperpiano

$$u = F_{x'}(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0')x' + F_{y'}(...)y' + F_{z'}(...)z' \tag{τ}$$

tangente alla figurativa $u = F(x_0, y_0, z_0;\ x', y', z')$ nel punto $P_0^* \equiv (x_0', y_0', z_0',\ F(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0'))$, osservando che tale iperpiano, in virtù della (21), ha in comune con la figurativa stessa soltanto i punti della generatrice passante per P_0^* (31). Consideriamo inoltre l'iperpiano

$$x_0'x' + y_0'y' + z_0'z' = 0, \tag{β}$$

(30) Si può fare un rilievo analogo a quello contenuto nell'Osservazione del precedente numero.

(31) Se è $F(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0') \neq 0$, si può procedere anche in modo analogo a quello seguito da L. TONELLI nel caso piano, dove, poichè si fa uso, anzichè della funzione $\mathcal{E}$ di Weierstrass, della funzione F_1 relativa al caso piano, si può senz'altro supporre che per i valori x_0, y_0, x_0', y_0' in questione, sia $F(x_0, y_0;\ x_0', y_0') \neq 0$ [Cfr. L. TONELLI, luogo citato in (10)]. Vale a dire, in questo caso si può considerare l'iperpiano

$$u = (1 - \lambda)F_{x'}(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0')x' + (1 - \lambda)F_{y'}(...)y' + (1 - \lambda)F_{z'}(...)z'$$

passante per l'intersezione degli iperpiani τ e $u = 0$, supponendo λ positivo se è $F(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0') > 0$, negativo se è $F(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0) < 0$, e in valore assoluto e indichiamo con τ' la parte dell'iperpiano τ costituita dai punti (x', y', z', u) di τ per i quali è $x_0'x' + y_0'y' + z_0'z' > 0$, e con τ'' la parte costituita dai rimanenti punti, vale a dire dai punti (x', y', z', u) di τ per i quali è $x_0'x' + y_0'y' + z_0'z' \leq 0$ [32].

Tenendo presente la (21), indichiamo con m il minimo positivo della funzione $\mathcal{E}(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0';\ x', y', z')$ nell'insieme di terne normalizzate (x', y', z') per ognuna delle quali il punto corrispondente sopra τ appartiene a τ''; e consideriamo l'iperpiano (passante per l'intersezione di τ con β)

$$u = [F_{x'}(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0') - \mu x_0']x' + [F_{y'}(...) - \mu y_0']y' + [F_{z'}(...) - \mu z_0']z',$$

dopo avere scelto μ positivo e sufficientemente piccolo, in modo che sia

$$-\frac{m}{2} \leq \mu(x_0'x' + y_0'y' + z_0'z') \leq 0$$

per tutte le terne normalizzate (x', y', z') sopra indicate, per ognuna delle quali, cioè, il punto di τ corrispondente appartiene a τ''.

Allora, tenendo presente l'espressione della funzione $\mathcal{E}$, si ha, per tali terne normalizzate $(x', y' z')$,

$$\text{(23)}\quad F(x_0, y_0, z_0;\ x', y', z') - [(F_{x'}(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0') - \mu x_0')x' + \\ + (F_{y'}(...) - \mu y_0')y' + (F_{z'}(...) - \mu z_0')z'] \geq \frac{m}{2} > 0.$$

D'altra parte, per tutte le terne normalizzate (x', y', z') per ognuna delle quali il punto corrispondente (x', y', z', u) di τ appartiene a τ' si ha, in virtù

---

sufficientemente piccolo in modo che per tutte le terne normalizzate (x', y', z') sia

$$F(x_0, y_0, z_0;\ x', y', z') - [(1-\lambda)F_{x'}(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0')x' + (1-\lambda)F_{y'}(.....)y' + (1-\lambda)F_{z'}(....)z'] > 0.$$

Tale procedimento però non è valido nel caso in cui è $F(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0') = 0$. La dimostrazione che esponiamo nel testo vale invece anche se è $F(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0') = 0$.

D'altra parte se, sotto ipotesi più restrittive, si usufruisce, anzichè della funzione $\mathcal{E}$ di Weierstrass, dalla funzione F_1 relativa agli integrali (I), si può senz'altro procedere nel modo ora esposto (cfr. l'Osservazione contenuta nel capoverso *a*) seguente, e, in particolare, la nota [34]).

[32] Poichè è $x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 = 1$, è evidente che il punto $P_0^* \equiv (x_0', y_0', z_0', F(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0'))$ appartiene a τ'; inoltre è ovvio che tutti i punti (x', y', z', u) di τ'' per i quali è $x_0'x' + y_0'y' + z_0'z' < 0$ sono situati, rispetto alla intersezione degli iperpiani τ e β, da parte opposta a quella di P_0^*.

della (21),

$$F(x_0, y_0, z_0; x', y', z') - [(F_{x'}(x_0, y_0, z_0; x_0', y_0', z_0') - \mu x_0')x' + \\ + (F_{y'}(...) - \mu y_0')y' + (F_{z'}(...) - \mu z_0')z'] \geq \\ \geq \mu(x_0'x' + y_0'y' + z_0'z') > 0.$$

Pertanto, tenendo presente anche la (23), e posto

$$H_0 = \mu x_0' - F_{x'}(x_0, y_0, z_0; x_0', y_0', z_0'),$$

$$M_0 = \mu y_0' - F_{y'}(...),$$

$$N_0 = \mu z_0' - F_{z'}(...),$$

risulta

$$F(x_0, y_0, z_0; x', y', z') + H_0 x' + M_0 y' + N_0 z' > 0 \tag{24}$$

per qualsiasi terna normalizzata (x', y', z').

Dunque, in virtù della continuità della funzione F, dalla (24) segue che, in corrispondenza al punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, si può determinare un numero positivo R_0, tale che la (22) sia soddisfatta in tutti i punti (x, y, z) di A appartenenti alla sfera avente centro nel punto P_0 e raggio R_0. Pertanto l'asserto è dimostrato.

OSSERVAZIONI - *a*) Supposto che nel punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di A e per ogni terna normalizzata (x', y', z') esistano finite e continue anche le derivate parziali del secondo ordine della funzione F rispetto a x', y', z', ***il risultato del presente numero è valido, se nel punto*** P_0 ***e per ogni terna normalizzata*** (x', y', z') ***è***

$$F_1 \geq 0, \quad F_{x'x'} \geq 0, \quad F_{y'y'} \geq 0, \quad F_{z'z'} \geq 0,$$

(***dove*** F_1 ***è la funzione definita dalla*** (4) ***del n.*** 1 ***del presente lavoro***) ***e, in corrispondenza al punto*** P_0, ***esiste almeno una terna normalizzata*** (x_0', y_0', z_0') ***in cui è***

$$F_1(x_0, y_0, z_0; x_0', y_0', z_0') > 0. \tag{25}$$

Infatti basta tenere presente che, in virtù delle ipotesi fatte e per quanto è stato dimostrato nel lavoro citato in (1) (33), in corrispondenza al punto P_0

(33) Cfr. § 3, n. 10, *a*) e § 2, n. 6.

esiste almeno una terna normalizzata (x_0', y_0', z_0') per la quale risulta

$$\mathcal{E}(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0';\ x', y', z') > 0$$

per qualsiasi terna normalizzata (x', y', z') distinta da (x_0', y_0', z_0'). Pertanto sono verificate le ipotesi del lemma sopra dimostrato [34].

b) Quanto è stato rilevato nel precedente capoverso sussiste anche se, *ferme restando le altre ipotesi dello stesso capoverso a*), *non esiste alcuna terna normalizzata* (x_0', y_0', z_0') *in cui è verificata la* (25), *purchè, in corrispondenza al punto* $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, *esista almeno una terna normalizzata* (x_0', y_0', z_0'), *tale che, in corrispondenza ad ogni terna normalizzata* (ξ, η, ζ) *per la quale non sia*

$$\xi x_0' + \eta y_0' + \zeta z_0' = 0$$

e non sia contemporaneamente nè $\xi = x_0'$, $\eta = y_0'$, $\zeta = z_0'$, *nè* $\xi = -x_0'$, $\eta = -y_0'$, $\zeta = -z_0'$, *sopra l'arco di cerchio massimo della superficie* Ω_1 *avente un estremo nel punto* (x_0', y_0', z_0') *e lunghezza minore di* π, *e sotteso da una corda di coseni direttori* ξ, η, ζ, *vi sia almeno un punto* $(x', y' z')$ *in cui, per i suddetti valori* $(x_0, y_0, z_0, \xi, \eta, \zeta)$ *almeno una delle tre espressioni*

$$F_{x'x'}\xi + F_{x'y'}\eta + F_{x'z'}\zeta$$

$$F_{y'x'}\xi + F_{y'y'}\eta + F_{y'z'}\zeta$$

$$F_{z'x'}\xi + F_{z'y'}\eta + F_{z'z'}\zeta$$

sia diversa da zero.

Basta infatti ricordare che, per le ipotesi fatte e per quanto è stato ottenuto nel lavoro citato in [1] (cfr. § 3, n. 10, *b*) e § 2, n. 6), in corrispondenza al punto P_0 esiste almeno una terna normalizzata (x_0', y_0', z_0') in cui è

$$\mathcal{E}(x_0, y_0, z_0;\ x_0', y_0', z_0';\ x', y', z') > 0$$

per tutte le terne normalizzate (x', y', z') distinte da (x_0', y_0', z_0'), e pertanto sono verificate le ipotesi del lemma precedentemente dimostrato.

---

[34] In questo caso, se è $F(x_0, y_0, z_0; x_0', y_0', z_0') = 0$, poichè, in virtù della (25) e della continuità della funzione F_1, è $F_1(x_0, y_0, z_0; x', y', z') > 0$ per tutte le terne normalizzate (x', y', z') appartenenti a un intorno sufficientemente piccolo del punto (x_0', y_0', z_0'), e poichè in tale intorno esiste, ancora in virtù della (25), almeno una terna normalizzata $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ in cui è $F(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0; x', y', z') \neq 0$, si può considerare, in luogo della terna normalizzata (x_0', y_0', z_0'), la terna $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$, e pertanto basta procedere nel modo indicato nella nota [31] del presente numero.

6. ESEMPIO - A complemento di quanto abbiamo dimostrato nel precedente numero e, in particolare, di quanto abbiamo rilevato all'inizio della nota [31], osserviamo che per la condizione espressa dalla (21) non sussiste una proprietà analoga a quella relativa alla (25) che abbiamo rilevato nella nota [34]. Vale a dire, non possiamo affermare che, in virtù della (21) e della continuità della funzione $\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}';\ x', y', z')$ rispetto alle variabili $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}', x', y', z'$, esiste un intorno ω_0 di (x_0', y_0', z_0') (sufficientemente piccolo) tale che per qualsiasi terna mormalizzata $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ appartenente a ω_0 sia

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}';\ x', y', z') > 0$$

per tutte le terne normalizzate (x', y', z') distinte da $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$. Ciò è posto in luce dal seguente esempio.

Consideriamo in ogni punto dello spazio (x, y, z) e per ogni terna di valori reali non tutti nulli (x', y', z') una funzione $F(x, y, z;\ x', y', z')$ definita nel seguente modo

$$F = \sqrt[6]{x'^6 + y'^6 + z'^6} + [\sqrt[6]{x'^6 + x'^4(y'^2 + z'^2) + y'^6 + z'^6} - \sqrt[6]{x'^6 + y'^6 + z'^6}]\,\mathrm{sen}^2\,\frac{y' + z'}{x'}$$

per ogni $x' \neq 0$, e per qualsiasi coppia di valori reali y', z';

$$F = \sqrt[6]{y'^6 + z'^6}$$

per $x' = 0$, e per qualsiasi coppia di valori reali y', z' non entrambi nulli. Sia inoltre, in ogni punto dello spazio (x, y, z), $F(x, y, z;\ 0, 0, 0) = 0$ [35].

Osserviamo che la funzione F ora definita è continua assieme alle proprie derivate parziali del primo ordine per ogni terna di valori reali non tutti nulli (x', y', z'), e positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x', y', z'.

Considerato il punto $P' \equiv (0, -1, 0)$, si ha, per ogni terna di valori reali non tutti nulli (x', y', z'), tali che il punto (x', y', z') sia distinto da P' e non sia contemporaneamente $x' = 0$, $y' = -k$, $z' = 0$ (con k positivo qualsiasi),

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ 0, -1, 0;\ x', y', z') =$$
$$= \sqrt[6]{x'^6 + y'^6 + z'^6} + [\sqrt[6]{x'^6 + x'^4(y'^2 + z'^2) + y'^6 + z'^6} - \sqrt[6]{x'^6 + y'^6 + z'^6}]\,\mathrm{sen}^2\,\frac{y' + z'}{x'} + y' > 0$$

---

[35] È evidente che le considerazioni del presente numero valgono anche quando, in luogo della funzione F ora definita, si considera una funzione $\varphi(x, y, z)F$, dove $\varphi(x, y, z)$ è una qualunque funzione positiva e continua in un campo A dello spazio (x, y, z), e F è la funzione ora definita. È quindi sottinteso, senza che, per brevità, si affermi ogni volta esplicitamente, che le considerazioni che vengono svolte nel presente esempio sono valide in ogni punto dello spazio (x, y, z).

per $x' \neq 0$, e

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ 0, -1, 0;\ x', y', z') = \sqrt[6]{y'^6 + z'^6} + y' > 0$$

per $x' = 0$. Pertanto l'iperpiano tangente alla figurativa nel punto corrispondente a P' ha in comune con la figurativa stessa soltanto la generatrice passante per il punto $(0, -1, 0, F(x, y, z;\ 0, -1, 0))$.

Consideriamo ora il punto $\bar{P}' \equiv (\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$, con

$$\bar{x}' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\left(2h + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}}, \quad \bar{y}' = \frac{-\left(2h + \frac{1}{2}\right)\pi}{\sqrt{1 + \left[\left(2h + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}}, \quad \bar{z}' = 0,$$

dove h è un qualunque intero positivo, osservando che il punto $\bar{P}'$, per h sufficientemente grande, è vicino quanto si vuole al punto P', e consideriamo, inoltre, il punto $\bar{\bar{P}}' \equiv (\bar{\bar{x}}', \bar{\bar{y}}', \bar{\bar{z}}')$, con

$$\bar{\bar{x}}' = \frac{1}{\sqrt{1 + [(2h + 1)\pi]^2}}, \quad \bar{\bar{y}}' = \frac{-(2h + 1)\pi}{\sqrt{1 + [(2h + 1)\pi]^2}}, \quad \bar{\bar{z}}' = 0.$$

Posto, per brevità,

$$\left(2h + \frac{1}{2}\right)\pi = B, \tag{26}$$

si ha

$$F(x, y, z;\ \bar{\bar{x}}', \bar{\bar{y}}', \bar{\bar{z}}') = \frac{\left[1 + \left(B + \frac{\pi}{2}\right)^6\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{1 + \left(B + \frac{\pi}{2}\right)^2}};$$

inoltre, tenendo presente che l'iperpiano α tangente alla figurativa nel punto $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}';\ F(x, y, z;\ \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'))$ ha equazione

$$u = \frac{(3 + 2B^2)x' - B(1 + 3B^4)y'}{3(1 + B^2 + B^6)^{\frac{5}{6}}},$$

si ha, indicando con $\bar{\bar{u}}_\alpha$ l'ordinata dell'iperpiano α corrispondente al punto $\bar{\bar{P}}'$,

$$\bar{\bar{u}}_\alpha = \frac{3 + 2B^2 + B(1 + 3B^4)\left(B + \frac{\pi}{2}\right)}{3(1 + B^2 + B^6)^{\frac{5}{6}} \sqrt{1 + \left(B + \frac{\pi}{2}\right)^2}}.$$

Allora, poichè, ricordando la (26), si verifica che per h sufficientemente grande è

$$F(x, y, z;\ \overline{\overline{x}}', \overline{\overline{y}}', \overline{\overline{z}}') < \overline{\overline{u}}_\alpha \ \text{(}^{36}\text{)},$$

si conclude che in ogni intorno del punto $(0, -1, 0)$ esistono infinite terne normalizzate $(\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$ tali che, in corrispondenza a ognuna di esse, esiste almeno una terna normalizzata $(\overline{\overline{x}}', \overline{\overline{y}}', \overline{\overline{z}}')$, distinta da $(\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$, per la quale risulta

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ \overline{x}', \overline{y}', \overline{z}';\ \overline{\overline{x}}', \overline{\overline{y}}', \overline{\overline{z}}') < 0 \ \text{(}^{37}\text{)}.$$

OSSERVAZIONE - È ovvio che, nel caso particolare in cui è $z = z' = 0$, l'esempio ora costruito, quando in luogo dei punti P', $\overline{P}'$, e $\overline{\overline{P}}'$ rispettivamente si considerano i punti $(0, -1)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\left[\left(2h+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}}, \dfrac{-\left(2h+\frac{1}{2}\right)\pi}{\sqrt{1+\left[\left(2h+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}}\right)$, e $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+[(2h+1)\pi]^2}}, \dfrac{-(2h+1)\pi}{\sqrt{1+[(2h+1)\pi]^2}}\right)$, pone in luce, in merito alla funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS relativa al caso piano, una proprietà analoga a quella rilevata all'inizio del presente numero riguardo alla funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS relativa agli integrali (I).

7. TEOREMA I. - *Se $\mathfrak{J}_C$ è un integrale quasi-regolare seminormale semidefinito positivo* ([38]), *e se gli zeri della funzione F sono, in ogni parte limitata del campo A, in numero finito, in ogni classe completa di curve ordinarie C*

([36]) Ciò si ottiene in modo del tutto elementare. Basta infatti verificare che è

$$3(1+B^2+B^6)^{\frac{5}{6}}\left[1+\left(B+\frac{\pi}{2}\right)^6\right]^{\frac{1}{6}} < 3+2B^2+B(1+3B^4)\left(B+\frac{\pi}{2}\right).$$

Elevando ambo i membri di tale disuguaglianza alla sesta potenza, si ottengono due polinomi in B di grado 36, i quali hanno identici i termini dal grado 36° fino al 33° incluso; allora, poichè, per h sufficientemente grande, B è grande ad arbitrio, basta constatare che la potenza B^{32} ha, nel primo membro, un coefficiente minore di quello del secondo membro.

([37]) Alla stessa conclusione si perviene considerando, in luogo del punto $\overline{\overline{P}}' \equiv (\overline{\overline{x}}', \overline{\overline{y}}', \overline{\overline{z}}')$, il punto $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$, con

$$\tilde{x}' = \frac{1}{\sqrt{1+[(2h+1)\pi]^2+\pi^2}}, \quad \tilde{y}' = \frac{-(2h+1)\pi}{\sqrt{1+[(2h+1)\pi]^2+\pi^2}}, \quad \tilde{z}' = \frac{\pi}{\sqrt{1+[(2h+1)\pi]^2+\pi^2}}.$$

([38]) Cfr. la ([20]).

tutte contenute in una parte limitata del campo A esiste il minimo (assoluto) di $\mathfrak{J}_C$ [39].

Tenendo conto del lemma del n. 5, per dimostrare l'asserto basta procedere in modo analogo a quello seguito da L. TONELLI nel caso piano [40]. Osserviamo infatti che, considerata una classe completa K di curve ordinarie C contenute in una parte limitata e chiusa A' del campo A, e indicati con P_i, $(i=1, 2, ..., n)$ gli zeri della F contenuti in A', in virtù delle ipotesi fatte e per il lemma sopra ricordato, in corrispondenza ad ogni zero P_i, $(i=1, 2, ..., n)$ è possibile determinare quattro costanti H_i, M_i, N_i, R_i, con $R_i > 0$, in modo che la funzione

$$F_i(x, y, z;\ x', y', z') = F(x, y, z;\ x', y', z') + H_i x' + M_i y' + N_i z'$$

sia maggiore di zero in tutti i punti (x, y, z) di A' appartenenti alla sfera di centro P_i e raggio R_i, e per tutte le terne normalizzate (x', y', z').

Allora, considerata una qualsiasi curva C della classe K, se δ è la minima distanza fra due qualsiasi dei punti P_i, $(i=1, 2, ..., n)$, indicando con R il minore dei numeri $\frac{\delta}{2}$ e R_i, $(i=1, 2, ..., n)$, con m^* il minimo positivo della funzione F nella parte A^* costituita dai punti di A' che non sono interni ad alcuna delle sfere di centro P_i, $(i=1, 2, ..., n)$ e raggio $\frac{R}{2}$ e per tutte le terne (x', y', z') normalizzate, con m_i, $(i=1, 2, ..., n)$ il minimo positivo della funzione F_i nella sfera di centro P_i e raggio R [41] e per tutte le terne normalizzate (x', y', z'), con m il minore dei numeri m_i, e con Θ il massimo modulo dei numeri H_i, M_i, N_i, $(i=1, 2, ..., n)$, procedendo in modo del tutto analogo a quello seguito nel luogo sopra citato, otteniamo, essendo L la lunghezza della curva C considerata,

$$L \leq \frac{1}{m^*}\mathfrak{J}_C + \frac{1}{m}\left[\left(1 + \frac{12\Theta n}{m^*}\right)\mathfrak{J}_C + 6\Theta R n\right].$$

Dunque, ricordando che il criterio di esistenza dell'estremo che interviene

---

(39) Alla ipotesi che $\mathfrak{J}_C$ sia *seminormale* può essere sostituita la condizione che, in corrispondenza a ogni *zero* (x_0, y_0, z_0) della F, esista almeno una terna normalizzata (x_0', y_0', z_0') tale che per tutte le terne normalizzate (x', y', z') distinte da (x_0', y_0', z_0') sia soddisfatta la (21). (Cfr. la (19)).

(40) Cfr. L. TONELLI, Opera citata in (3), Vol. II, Cap. I, § 3, n. 8, *a*), pag. 12.

(41) Si intende che, se non tutti i punti di tale sfera appartengono al campo A', m_i indica il minimo positivo della funzione F_i nella parte della sfera di centro P_i e raggio R che appartiene ad A'.

nel teorema citato in ([40]) si estende in forma del tutto analoga ([42]) al caso relativo agli integrali (I), l'asserto è provato.

OSSERVAZIONE - In analogia a quanto è stato rilevato da L. TONELLI ([43]), il teorema del presente numero è valido anche *se in ogni parte limitata e chiusa del campo A gli zeri della F, pur non essendo in numero finito, sono disposti sopra un numero finito di curve continue di classe 1* ([44]), *e su esse formano un insieme non denso* ([45]), *siano tali, cioè, che a ogni arco di una qualunque delle curve considerate appartiene sempre un arco che non contiene alcun zero della F.*

8. TEOREMA II. - Il teorema del precedente numero vale anche se, *ferme restando le altre ipotesi, si suppone che gli zeri della funzione F appartenenti ad una qualunque parte limitata e chiusa A' del campo A, pur non essendo in numero finito, costituiscano un insieme E (chiuso), il quale gode della seguente triplice proprietà:*

se a_1, b_1 sono due valori reali qualsiasi, con $a_1 < b_1$, tali che i piani $x = a_1$, $x = b_1$ abbiano punti in comune con A', nello strato costituito dai punti di A' per i quali è $a_1 \leq x \leq b_1$ è contenuto almeno uno strato costituito dai punti di A' per i quali è $a'_1 \leq x \leq b'_1$, dove a'_1, b'_1 sono due valori reali qualsiasi, con $a_1 < a'_1 < b'_1 < b_1$, al quale non appartengono punti di E; ed inoltre se a_2, b_2 $[a_3, b_3]$ sono due valori reali qualsiasi, con $a_2 < b_2$ $[a_3 < b_3]$, tali che i piani $y = a_2$, $y = b_2$ $[z = a_3, z = b_3]$ abbiano punti in comune con A', nello strato costituito dai punti di A' per i quali è $a_2 \leq y \leq b_2$ $[a_3 \leq z \leq b_3]$ è contenuto almeno uno strato costituito dai punti di A' per i quali è $a'_2 \leq y \leq b'_2$ $[a'_3 \leq z \leq b'_3]$, dove a'_2, b'_2 $[a'_3, b'_3]$ sono due valori reali qualsiasi, con $a_2 < a'_2 < b'_2 < b_2$ $[a_3 < a'_3 < b'_3 < b_3]$, al quale non appartengono punti di E ([46]).

Infatti, considerata una classe completa K di curve ordinarie C contenute nella parte limitata e chiusa A' del campo A, osserviamo che, per le ipotesi

([42]) Cfr. N. BERRUTI ONESTI, lavoro citato in ([1]), § 4, n. 15; in particolare cfr. la nota ([29]) di pag. 261.

([43]) Cfr. luogo cit. in ([40]), n. 8. *b*), pag. 15.

([44]) Vale a dire curve continue aventi in ogni punto tangente variabile in modo continuo.

([45]) Tale insieme, in virtù della continuità della funzione F, è chiuso.

([46]) Osserviamo che, se gli zeri della funzione F sono situati sopra un numero finito di curve di classe 1, e per l'insieme E di tali zeri è soddisfatta la proprietà ora enunciata, allora gli zeri della F costituiscono, sopra ognuna di tali curve, un insieme non denso, e pertanto è verificata la condizione rilevata nella precedente Osservazione.

La dimostrazione del teorema del presente numero, peraltro, procede prescindendo dalla considerazione delle curve sopra nominate. A questo proposito cfr. l'Osservazione I relativa all'esempio che segue nel presente numero.

fatte e in virtù del lemma del n. 5, in corrispondenza a ogni zero $\bar{P}$ della funzione F apppartenente ad A', è possibile determinare quattro costanti $\bar{H}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$, $\bar{R}$, con $\bar{R} > 0$, tali che la funzione

$$\bar{F}(x, y, z;\ x', y', z') = F(x, y, z;\ x', y', z') + \bar{H}x' + \bar{M}y' + \bar{N}z'$$

sia positiva in tutti i punti (x, y, z) di A' appartenenti alla sfera di centro $\bar{P}$ e raggio $\bar{R}$, e per tutte le terne normalizzate (x', y', z').

Indicato con W il cubo di centro $\bar{P}$, avente gli spigoli paralleli agli assi x, y, z, e la cui diagonale ha lunghezza $\bar{R}$, tenendo presente che l'insieme E è chiuso, dall'insieme dei cubi W possiamo estrarre un numero finito di cubi $W_1, W_2, \ldots, W_n$, tali che ogni punto di E risulti interno ad almeno uno di questi. Sia P_i il centro di W_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, e H_i, M_i, N_i, R_i i numeri corrispondenti a P_i, tali cioè che la funzione

$$F_i(x, y, z;\ x', y', z') = F(x, y, z;\ x', y', z') + H_i x' + M_i y' + N_i z'$$

sia positiva in tutti i punti di A' appartenenti alla sfera di centro P_i e raggio R_i (e quindi anche in tutti i punti di A' appartenenti a W_i), e per tutte le terne normalizzate (x', y', z'). Ora, indicato con R' il minore dei numeri $R_1, R_2, \ldots, R_n$, verifichiamo che è possibile ricoprire l'insieme E con un numero finito di parallelepipedi a spigoli paralleli agli assi x, y, z, aventi ognuno diagonale di lunghezza minore di $\frac{R'}{2}$, tali che a due a due non abbiano punti in comune (nè interni nè del contorno), e tali inoltre che nessun punto di E appartenga al contorno di alcuno di essi.

Infatti consideriamo un cubo W^* a spigoli paralleli agli assi x, y, z, contenente come punti interni tutti i punti di E, e sia l la lunghezza dei suoi spigoli. Se q è il minimo intero positivo per il quale è $\frac{l}{q} < \frac{R'}{4\sqrt{3}}$, dividiamo dapprima ogni spigolo parallelo all'asse x in q parti uguali mediante i piani $x = x_0$, $x = x_1, \ldots, x = x_q$ (essendo x_0 e x_q, con $x_0 < x_q$, rispettivamente la prima coordinata del primo e secondo estremo di ognuno degli spigoli di W^* paralleli all'asse x), e, tenendo presente che in ogni strato σ_i, $(i = 1, 2, \ldots, q)$ costituito dai punti di W^* per i quali è $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ è contenuto almeno uno strato σ'_i costituito dai punti di W^* per i quali è $x'_i \leq x \leq x''_i$, con $x_{i-1} < x'_i < x''_i < x_i$, il quale non contiene punti di E, sopprimiamo i punti interni a σ'_i [47].

---

[47] Intendiamo scegliere uno qualsiasi degli strati σ_i' interni a σ_i. Naturalmente può avvenire che a qualcuno degli strati che, dopo tale operazione, sono rimasti (vale a dire gli

Procediamo quindi nello stesso modo considerando gli spigoli di W^* paralleli all'asse y e z rispettivamente. L'insieme dei punti di W^* che in tali operazioni non sono stati soppressi costituiscono un numero finito di parallelepipedi che soddisfano le proprietà sopra elencate [48]. Di tali parallelepipedi consideriamo soltanto quelli contenenti, come punto interno, almeno un punto di E, e siano questi $V_1, V_2, \ldots, V_m$.

Ora, se V_s è uno qualunque dei parallelepipedi $V_1. V_2, \ldots, V_m$, tra i cubi W_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, sia $W_{s'}$ quello di indice minimo che ha in comune con V_s almeno un punto. Allora, se $P_{s'}$ è il centro di $W_{s'}$, V_s risulta interno alla sfera di centro $P_{s'}$ e raggio $R_{s'}$, e quindi in tutti i punti (x, y, z) di A' appartenenti a V_s è

$$F(x, y, z;\ x', y', z') + H_{s'}x' + M_{s'}y' + N_{s'}z' > 0$$

per tutte le terne normalizzate (x', y', z').

Dunque, considerando, assieme a ogni V_r, $(r = 1, 2, \ldots, m)$ un parallelepipedo V_r^* avente gli spigoli interni a V_r e paralleli agli assi x, y, z, il quale sia concentrico a V_r e contenga come punti interni tutti i punti di E interni a V_r, possiamo ragionare in modo quasi identico a quello cui abbiamo accennato nella seconda parte della dimostrazione del teorema che forma oggetto del precedente n. 7, quando, in luogo delle coppie di sfere di centro P_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e raggio R e $\frac{R}{2}$ rispettivamente, si considerano le coppie V_r e V_r^*, $(r = 1, 2, \ldots, m)$, e così dimostrare l'asserto.

ESEMPIO - Alle ipotesi del presente numero soddisfa la funzione F che definiamo nel seguente modo.

Definita, in ogni punto (x, y, z), la funzione

$$\varphi(x, y, z) = 1 + \varphi_0(x) + \varphi_0(y) + \varphi_0(z),$$

dove è

$$\varphi_0(t) = t^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{t}, \quad \text{per} \quad t \neq 0,$$

$$\varphi_0(0) = 0,$$

---

strati costituiti dai punti (x, y, z) di W^* per i quali è verificata l'una o l'altra delle disuguaglianze $x_0 \leq x \leq x_1'$, $x_i'' \leq x \leq x'_{i+1}$, $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$. $x_q'' \leq x \leq x_q$) non appartenga alcun punto di E. A questo proposito cfr. quanto viene precisato in seguito in merito ai parallelepipedi $V_1, V_2, \ldots, V_m$.

(48) In particolare la lunghezza degli spigoli di ognuno di tali parallelepipedi è minore di $\frac{R'}{2\sqrt{3}}$, e quindi la lunghezza della diagonale è minore di $\frac{R'}{2}$.

consideriamo, in ogni punto (x, y, z) e per ogni terna di valori reali non tutti nulli x', y', z', la funzione

$$F(x, y, z;\; x', y', z') = \varphi(x, y, z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - x',$$

con

$$F(x, y, z;\; 0, 0, 0) = 0.$$

Osserviamo che la funzione F così definita soddisfa alle ipotesi ricordate all'inizio del n. 1, a) del presente lavoro, in ogni punto (x, y, z) e per ogni terna di valori reali (x', y', z') non tutti nulli si ha

$$F \geq 0,$$

e anche, tenendo presente la (4),

$$F_1 = \frac{\varphi^2(x, y, z)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2} > 0\,.$$

Rileviamo che in ogni punto (x, y, z) per il quale è contemporaneamente

$$x = \frac{1}{k'\pi}, \qquad y = \frac{1}{k''\pi}, \qquad z = \frac{1}{k'''\pi}, \tag{27}$$

dove k', k'', k''' possono assumere, indipendentemente l'uno dall'altro, qualunque valore intero (positivo o negativo), inoltre in ogni punto (x, y, z) le cui coordinate si ottengono dalle (27) sostituendo il valore zero nel secondo membro di una, o di due qualsiasi, oppure di tutte tre le (27) stesse, si ha

$$F = 0$$

per

$$x' = a, \quad y' = z' = 0, \tag{28}$$

dove a è un qualunque numero reale positivo, mentre è

$$F > 0$$

per ogni sestupla di valori reali $(x, y, z;\; x', y', z')$, con $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$, per la quale non sono contemporaneamente soddisfatte le (28) e l'una o l'altra delle condizioni sopra indicate per i punti (x, y, z).

Si verifica facilmente che gli zeri della funzione F considerata costituiscono un insieme di punti, appartenente al cubo a spigoli paralleli agli assi

x, y, z avente due vertici opposti nei punti $\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$, $\left(-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi}\right)$, per il quale è verificata la proprietà che, nelle ipotesi del presente numero, si è supposto essere soddisfatta per l'insieme E (49).

OSSERVAZIONE I. - Osserviamo che la funzione F ora definita soddisfa le ipotesi del presente numero, mentre non è immediato che sia verificata la condizione rilevata nella Osservazione del n. 7 del presente lavoro.

OSSERVAZIONE II. - Dal teorema del presente numero, nel caso particolare in cui è $z = z' = 0$, si ottiene un teorema di esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali (II) in condizioni diverse da quelle considerate nei teoremi citati in (40) e (43). Inoltre, sempre per $z = z' = 0$, l'esempio del presente numero fornisce un esempio relativo agli integrali curvilinei del piano.

9. LEMMA - *Sia Σ' un insieme chiuso di punti della superficie sferica Ω_1 per il quale sono verificate le condizioni* 1°) *e* 2°) *del n.* 4, *a*). *Considerata una qualsiasi curva Γ continua e rettificabile, sia L' la misura dello pseudoarco Γ' costituito da quei punti di tale curva nei quali la tangente a essa ha coseni direttori x', y', z', tali che il punto (x', y', z') non appartiene a Σ'. Allora si può determinare un numero non negativo $\Lambda < \frac{\pi}{2}$* (50), *in modo che se Δ è la distanza tra gli estremi della curva, la lunghezza L della curva Γ verifica la disuguaglianza*

$$L \leq \frac{2L' + \Delta}{\cos \Lambda}. \tag{29}$$

Per dimostrare l'asserto, osserviamo che, in virtù delle proprietà di cui gode Σ', indicato con Γ'' lo pseudoarco costituito dai punti di Γ nei quali la

(49) Osserviamo che gli zeri della funzione F appartengono alla superficie $1 + x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} + y^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{y} + z^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{z} = 0$, e sono disposti sopra i segmenti di retta

$$y = \frac{1}{h_1^* \pi}, \quad z = \frac{1}{k_1^* \pi} \qquad \left(-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}\right); \tag{a}$$

$$x = \frac{1}{h_2^* \pi}, \quad z = \frac{1}{k_2^* \pi} \qquad \left(-\frac{1}{\pi} \leq y \leq \frac{1}{\pi}\right); \tag{b}$$

$$x = \frac{1}{h_3^* \pi}, \quad y = \frac{1}{k_3^* \pi} \qquad \left(-\frac{1}{\pi} \leq z \leq \frac{1}{\pi}\right), \tag{c}$$

dove h_i^*, k_i^*, $(i = 1, 2, 3)$ sono tre coppie di interi qualsiasi (positivi o negativi), e sopra i segmenti di retta le cui equazioni sono ottenute dalle (a), (b), (c) rispettivamente, sostituendo il valore zero nel secondo membro di una qualsiasi o di entrambe le equazioni (a), (b), (c).

(50) Tale numero viene determinato nel corso della dimostrazione (cfr. la successiva (51)).

tangente ha coseni direttori x', y', z', tali che il punto (x', y', z') appartiene a Σ', e indicati con α, β, γ gli angoli, compresi tra 0 e π che la tangente (orientata) alla curva Γ in uno qualsiasi dei punti di Γ' forma rispettivamente con la direzione positiva degli assi x, y, z, possiamo determinare un numero non negativo $\Lambda < \frac{\pi}{2}$, tale che si possa supporre verificata almeno una delle tre disuguaglianze

$$(30) \qquad 0 \leq \alpha \leq \Lambda, \quad 0 \leq \beta \leq \Lambda, \quad 0 \leq \gamma \leq \Lambda \text{ [51]}.$$

---

[51] Al caso in cui, per fissare le idee, è soddisfatta la prima delle (30), possiamo ridurci con una opportuna rotazione degli assi x, y, z

Infatti, nel caso particolare in cui Σ' si riduce a un arco γ' di cerchio massimo di Ω_1 (di lunghezza minore di π), ricordando quanto abbiamo rilevato nelle ultime righe della [28], basta effettuare una rotazione degli assi x, y, z in modo che la direzione positiva dell'asse x coincida con quella della congiungente O con il punto di mezzo di γ' (orientata da O verso tale punto). Allora, indicata con Λ la metà della lunghezza di γ' $\left(\text{dove è } 0 \leq \Lambda < \frac{\pi}{2}\right)$, la prima delle (30) è soddisfatta.

Escluso questo caso particolare, osserviamo che, per quanto abbiamo rilevato nella [28], in corrispondenza a ogni diametro d della superficie sferica Ω_1 possiamo determinare un cerchio massimo di Ω_1, che, per fissare le idee, scegliamo nel modo indicato nella seconda parte della stessa [28], e che indichiamo con ω_d, e un numero positivo non superiore a $\frac{\pi}{2}$, che indichiamo con $\bar{\alpha}_d$, tali che ogni semiretta r uscente da O e passante per un punto qualsiasi (x', y', z') di Σ' (orientata da O verso tale punto) forma con il piano cui appartiene ω_d un angolo α' compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, per il quale è $0 < \bar{\alpha}_d \leq \alpha' \leq \frac{\pi}{2}$. Consideriamo il limite superiore $\bar{L}$ dell'insieme di numeri $\bar{\alpha}_d$, al variare del diametro d, rilevando che è $0 < \bar{L} \leq \frac{\pi}{2}$, e che esiste almeno un numero $\bar{\alpha}_{d'}$, appartenente a tale insieme, per il quale è $\frac{\bar{L}}{2} \leq \bar{\alpha}_{d'}$. Allora, considerato il cerchio massimo $\omega_{d'}$, cui corrisponde $\bar{\alpha}_{d'}$, e la normale al piano cui appartiene $\omega_{d'}$ (orientata verso la parte in cui si trova Σ'), la direzione positiva di ognuna delle semirette r sopra indicate forma con quella di detta normale un angolo α'', compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, per il quale risulta

$$(a') \qquad 0 \leq \alpha'' \leq \frac{\pi}{2} - \bar{\alpha}_{d'} \leq \frac{\pi - \bar{L}}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Ora osserviamo che, se

$$ax' + by' + cz' = 0$$

è l'equazione del piano cui appartiene $\omega_{d'}$, considerato, nello spazio (x, y, z), il piano

$$(b') \qquad ax + by + cz = 0$$

e le semirette t uscenti dall'origine e parallele ed equiverse alle tangenti a Γ nei punti di Γ'', poichè ognuna delle t ha coseni direttori x', y', z', tali che il punto (x', y', z') appartiene a Σ', con facili considerazioni si verifica che nessuna semiretta t appartiene al piano (b'), tutte le t sono situate, rispetto al piano (b'), da una stessa parte, e che, considerata la normale per O al piano (b') (orientata verso la parte in cui sono le semirette t), la direzione

Supposto, per fissare le idee, che sia soddisfatta la prima delle (30), procedendo in modo analogo a quello seguito nel caso piano [52], se x_1, x_2 sono le prime coordinate rispettivamente del primo e del secondo estremo della curva Γ, e L'' è la misura dello pseudoarco Γ'', si ha, tenendo presente che è $0 \leq \Lambda < \frac{\pi}{2}$,

$$x_2 - x_1 = \int_{\Gamma'} x' ds + \int_{\Gamma''} x' ds \geq - L' + L'' \cos \Lambda , \tag{31}$$

da cui, essendo $L' + L'' = L$ e $0 < \cos \Lambda \leq 1$, segue la (29) [53].

10. TEOREMA III. - In base al lemma del n. 9, possiamo dimostrare che

Se $\mathfrak{J}_C$ è un integrale quasi-regolare semidefinito positivo [54]***, e se in corrispondenza a ogni parte limitata e chiusa A' del campo A esiste un insieme chiuso Σ^* di punti della superficie sferica Ω_1 per il quale sono verificate le condizioni*** 1°) e 2°) ***del*** n. 4, *a*), ***ed è tale che tutte le terne normalizzate (x', y', z') per cui è $F(x, y, z; x', y', z') = 0$ in almeno un punto (x, y, z) di A' appartengono a Σ^*, allora in ogni classe completa di curve ordinarie C, tutte contenute in una parte limitata del campo A, esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_C$.***

---

positiva di ognuna delle semirette t forma con quella di tale normale un angolo α, compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, per il quale è, tenendo presente la (a'),

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \bar{\alpha}_{d'} \leq \frac{\pi - \bar{L}}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Allora, posto $\Lambda = \frac{\pi - \bar{L}}{2}$, se effettuiamo una rotazione degli assi x, y, z, in modo che la direzione positiva dell'asse x coincida con quella della normale al piano (b') (orientata nel modo indicato), la prima delle (30) risulta soddisfatta.

È evidente che se tale rotazione viene fatta in modo che la direzione positiva dell'asse y, o dell'asse z coincida con quella della normale al piano (b') (orientata nel modo detto), oppure, nel caso particolare considerato all'inizio della presente nota, con la congiungente O con il punto di mezzo di γ' (orientata da O verso tale punto), risulta rispettivamente soddisfatta la seconda, o la terza delle stesse (30).

[52] Cfr. L. TONELLI, Opera citata in [3], Vol II, Cap. I, n. 9, *a*), pag. 17.

[53] È ovvio che, supposto che sia verificata la prima delle (30), nel caso particolare in cui è $x_1 = x_2$, la (29) si riduce alla $L \leq \frac{2L'}{\cos \Lambda}$. D'altra parte, sempre supposto che sia soddisfatta la prima delle (30), se le tangenti a Γ nei punti di Γ'' risultano tutte parallele all'asse x, poichè, tenendo presente quanto abbiamo rilevato all'inizio della [54], risulta $\Lambda = 0$, si ottiene, in luogo della (29), $L \leq 2L' + \Delta$.

Analoga osservazione vale, in analoghi casi particolari, se è verificata la seconda, o la terza delle (30).

[54] Cfr. la [20].

Infatti, considerata una classe K completa di curve ordinarie C tutte contenute nella parte limitata e chiusa A' del campo A, sia Σ_0^* un insieme di punti chiuso della superficie Ω_1 per il quale sono soddisfatte le proprietà che, per ipotesi, si sono supposte verificate per l'insieme Σ^*, e contenente come punti interni tutti i punti di Σ^* [55].

Allora, in virtù di quanto abbiamo dimostrato nel precedente numero, possiamo determinare un numero non negativo $\Lambda_0^* < \frac{\pi}{2}$, tale che, considerata una qualunque curva C della classe K, se Δ^* è il limite superiore delle distanze tra due qualsiasi punti di A', e L^* è la misura dello pseudoarco costituito dai punti della curva C, nei quali la tangente ha coseni direttori x', y', z' tali che il punto (x', y', z') non sia interno a Σ_0^*, la lunghezza L della curva C soddisfa la disuguaglianza

$$L \leq \frac{2L^* + \Delta^*}{\cos \Lambda_0^*}.$$

Pertanto si può concludere ragionando in modo analogo a quello seguito da L. TONELLI [56], tenendo presente che, se m^* è il minimo positivo della funzione F nei punti (x, y, z) di A' e per ogni terna normalizzata (x', y', z') tale che il punto (x', y', z') non sia interno a Σ_0^*, dall'ultima disuguaglianza segue

$$L \leq \frac{\frac{2}{m^*}\mathfrak{I}_C + \Delta^*}{\cos \Lambda^*},$$

e ricordando, infine, quanto abbiamo rilevato alla fine della dimostrazione del n. 7.

ESEMPIO – Alle condizioni del presente numero soddisfa la funzione F definita, in ogni punto (x, y, z) e per ogni terna di numeri reali (x', y', z'), nel seguente modo

$$F = \psi(x, y, z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - x',$$

dove è

$$\psi(x, y, z) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2} - z$$

---

(55) Si potrebbe considerare, come insieme Σ_0^*, una calotta sferica di Ω_1 costruita nel modo indicato nel seguente n. 12 in merito alle U_r', $(r = 1, 2, \ldots, n)$. Peraltro, mentre nel luogo ora citato la costruzione delle U_r', $(r = 1, 2, \ldots, n)$ ha lo scopo di rendere più semplice la esposizione, in questo caso, poichè interviene un solo insieme Σ^*, possiamo considerare un qualunque insieme Σ_0^* soddisfacente le condizioni indicate nel testo.

(56) Cfr. Opera citata in (3), Vol. II, Cap. I, § 4, n. 11, *a*), pag. 27.

in tutti i punti (x, y, z) per i quali è

$$-\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad z < \sqrt{x^2+y^2}$$

e

$$\psi(x, y, z) = 1$$

in tutti i punti (x, y, z) per i quali è

$$-\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad z \geq \sqrt{x^2+y^2}. \tag{32}$$

È evidente infatti che in ogni punto (x, y, z) e per ogni terna di valori reali (x', y', z') non tutti nulli la funzione F soddisfa alle ipotesi indicate all'inizio del n. 1, a), ed è inoltre $F \geq 0$, e, ricordando la (4), $F_1 > 0$. Inoltre, ad ogni parte limitata A' dello spazio (x, y, z) contenente almeno un punto per cui valgono le (32) corrisponde, sopra Ω_1, il solo punto $(1, 0, 0)$ in cui è $F(x, y, z; 1, 0, 0) = 0$ in tutti i punti (x, y, z) di A' per i quali valgono le (32), mentre in ogni parte limitata dello spazio (x, y, z) non contenente punti per i quali sono verificate le (32) risulta $F > 0$ per tutte le terne normalizzate (x', y', z').

11. LEMMA - *Sia Σ_0 un insieme chiuso di punti della superficie sferica Ω_1 per il quale sono verificate le proprietà* 1°) *e* 2°) *del n.* 4, a), *e sia Λ_0, con $0 \leq \Lambda_0 < \frac{\pi}{2}$, il numero relativo a Σ_0, corrispondente al numero Λ determinato nel n.* 9 *del presente paragrafo e relativo a Σ'. Supponiamo che in tutti i punti (x, y, z) di A e per ogni terna normalizzata (x', y', z') sia $F \geq 0$, e sia $F \geq m_0 > 0$ in tutti i punti (x, y, z) di un parallelepipedo rettangolo V e in tutti i punti (x', y', z') di Ω_1 non interni a Σ_0.*

Allora, se le lunghezze a, b, c degli spigoli di V soddisfano la disuguaglianza

$$\sqrt{b^2+c^2} < \frac{a}{3} \cos \Lambda_0, \tag{33}$$

e C è una qualunque curva ordinaria tale che i suoi punti interni allo strato limitato dai piani cui appartengono le faccie di V perpendicolari agli spigoli di lunghezza a siano tutti interni a V, il numero N degli archi γ della C che hanno un estremo sopra una delle faccie di V perpendicolari agli spigoli di lunghezza a, e l'altro estremo sopra la faccia opposta, e tutti gli altri punti interni a V, soddisfa la disuguaglianza

$$N < \frac{3}{a m_0 \cos \Lambda_0} \mathfrak{I}_C + 1. \tag{34}$$

Infatti, procedendo in modo analogo a quello seguito nel caso piano ([57]), tenuto presente che, avendo ognuno degli archi γ lunghezza non inferiore ad a, il numero N è finito, consideriamo sulla curva C due archi γ qualsiasi, che indichiamo con γ_1 e γ_2, tali che, sopra la C, γ_1 preceda γ_2, e tra il secondo estremo di γ_1 e il primo di γ_2 non vi sia, sopra C, alcun arco γ. Osserviamo che il primo estremo di γ_1 e il secondo di γ_2 appartengono ad una stessa faccia di V perpendicolare agli spigoli di lunghezza a, mentre il secondo estremo di γ_1 e il primo di γ_2 appartengono alla faccia opposta.

Sia λ_i, $(i = 1, 2)$ la lunghezza di γ_i, λ'_i la misura dello pseudoarco costituito dai punti di γ_i nei quali la tangente a C ha coseni direttori (x', y', z') tali che il punto (x', y', z') non sia interno a Σ_0, e λ''_i quella del complementare di tale pseudoarco rispetto a γ_i. Allora, con considerazioni analoghe a quelle svolte nel n. 9, supposto, per fissare le idee, che sia soddisfatta la disuguaglianza corrispondente alla prima delle (30), e indicate con x'_i, x''_i $(i = 1, 2)$ rispettivamente la prima coordinata del primo e del secondo estremo di γ_i, risulta, tenendo presente la (31),

$$x''_1 - x'_1 \geq -\lambda'_1 + \lambda''_1 \cos \Lambda_0 ,$$

$$x''_2 - x'_2 \geq -\lambda'_2 + \lambda''_2 \cos \Lambda_0$$

da cui, sommando membro a membro, e poichè si ha

$$|x'_1 - x''_2| + |x''_1 - x'_2| \leq 2\sqrt{b^2 + c^2}$$

segue

$$(\lambda''_1 + \lambda''_2) \cos \Lambda_0 \leq \lambda'_1 + \lambda'_2 + 2\sqrt{b^2 + c^2},$$

e quindi anche, poichè è $\lambda'_1 + \lambda''_1 = \lambda_1$, $\lambda'_2 + \lambda''_2 = \lambda_2$, e $0 < \cos \Lambda_0 \leq 1$,

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq \frac{2}{\cos \Lambda_0} (\lambda'_1 + \lambda'_2 + \sqrt{b^2 + c^2}).$$

Allora, tenendo presente la (33), basta ripetere le considerazioni svolte nel luogo citato in ([57]), e la (34) risulta verificata ([58]).

([57]) Cfr. L. TONELLI, Opera citata in ([3]). Vol. II, Cap. I, n. 9. *c*), pag. 20.

([58]) È evidente che allo stesso risultato si perviene se, ferme restando le altre ipotesi del presente numero, si considera, in luogo del parallelepipedo V, un altro solido per il quale siano soddisfatte opportune condizioni. Si può considerare, per es., in luogo di V, un cilindro circolare retto il cui diametro di base δ e la cui altezza h soddisfino la disuguaglianza

$$\delta < \frac{h}{3} \cos \Lambda_0 ,$$

supponendo che per la curva C considerata siano verificate le condizioni indicate, quando, in luogo delle faccie di V perpendicolari allo spigolo di lunghezza a, si considerano i due cerchi base di tale cilindro.

12. TEOREMA IV. - In base al lemma del precedente numero e a quello del n. 9, possiamo dimostrare, a complemento di quanto abbiamo rilevato nell'Osservazione del n. 7, il seguente teorema

Se $\mathfrak{J}_C$ è un integrale quasi-regolare seminormale semidefinito positivo, e in ogni parte limitata e chiusa del campo A gli zeri della F costituiscono un un arco di curva di classe 2 ([59]), *aperto e privo di punti multipli, in ogni classe completa K di curve ordinarie C tutte contenute in una parte limitata del campo A esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_C$* ([60]).

Per dimostrare l'asserto, procediamo in modo analogo a quello seguito nel caso piano ([61]), supponendo anche qui, per semplicità di ragionamento, che, considerata una parte limitata e chiusa A' del campo A, l'arco di curva costituito dagli zeri della F appartenenti ad A' sia un segmento rettilineo parallelo all'asse x, che indichiamo con a'.

Ricordando quanto abbiamo rilevato nel n. 4, a) e nella ([51]) del n. 9, osserviamo che a ogni punto $P \equiv (x, y, z)$ di a' corrisponde un insieme chiuso Σ di punti (x', y', z') della superficie Ω_1 in cui è $F(x, y, z;\, x', y', z') = 0$, il quale gode delle proprietà indicate nel n. 4, a), e quindi anche un cerchio massimo ω di Ω_1 e un numero Λ, con $0 \leq \Lambda < \frac{\pi}{2}$, tali che, considerato il cono circolare retto ([62]) avente vertice nell'origine O, asse coincidente con la normale per O al piano cui appartiene ω, e apertura 2Λ, l'insieme Σ appartiene alla calotta sferica individuata dall'intersezione del cono con la superficie Ω_1. Tenendo inoltre presente che, al variare di P sopra a' con continuità, Σ varia, pure con continuità, sopra Ω_1, dividiamo il segmento a' in n parti uguali mediante i punti, che consideriamo secondo l'ordine in cui la coordinata x va crescendo, $P_0, P_1, \ldots, P_n$ (dove con P_0 e P_n indichiamo rispettivamente il primo e secondo estremo di a'), essendo n il minimo intero positivo tale che a tutti i punti (x, y, z) di ognuno dei segmenti $P_r P_{r+3}$, $(r = 0, 1, \ldots, n-3)$

([59]) Vale a dire una curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

di classe 1 (cfr. la ([44])), tale che per ogni t di (t_0, t_1) esistono continue le derivate $x''(t)$, $y''(t)$, $z''(t)$. Sopra tale curva, quindi, la flessione varia in modo continuo.

([60]) Analogamente a quanto abbiamo rilevato nella ([39]), osserviamo che alla condizione che $\mathfrak{J}_C$ sia *seminormale* può venire sostituita l'ipotesi che, in corrispondenza a ogni *zero* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ della F, esista almeno una terna normalizzata $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ tale che sia $\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\, \tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}';\, x', y', z') > 0$ per tutte le terne normalizzate (x', y', z') distinte da $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ (Cfr. la ([19])).

([61]) Cfr. L. TONELLI, Opera citata in ([3]), Vol. II, Cap. I, n. 10, pp. 21-27.

([62]) Di tale cono intendiamo considerare soltanto il semicono cui appartengono le semirette uscenti dall'origine e passanti per un qualsiasi punto di Σ.

corrisponda, nel senso sopra indicato, uno stesso insieme chiuso Σ_r di punti (x', y', z') di Ω_1, e quindi un numero Λ_r, con $0 \leq \Lambda_r < \frac{\pi}{2}$, e una calotta sferica U_r di Ω_1, alla quale appartiene Σ_r. Inoltre, se Λ' è un numero maggiore di tutti i numeri Λ_r, $(r = 0, 1, \ldots, n-3)$ e minore di $\frac{\pi}{2}$, consideriamo, in corrispondenza a ogni Σ_r, $(r = 0, 1, \ldots, n-3)$, la calotta sferica U'_r di Ω_1 avente lo stesso asse della U_r, e individuata dall'intersezione del cono circolare retto di vertice O e apertura $2\Lambda'$, osservando che tutti i punti di Σ_r risultano interni a U'_r.

Ora, se δ è la lunghezza comune dei segmenti $P_r P_{r+1}$, $(r=0, 1, \ldots, n-1)$ e x_0, x_n sono le prime coordinate rispettivamente dei punti P_0 e P_n, considerati i punti P'_0, P'_n, P''_0, P''_n che si trovano sopra la retta cui appartiene il segmento a' ed hanno come prima coordinata rispettivamente $x_0 - \delta$, $x_n + \delta$, $x_0 - 2\delta$, $x_n + 2\delta$, e un numero reale positivo h, con

$$h < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \cos \Lambda', \tag{35}$$

costruiamo, nello spazio (x, y, z), due parallelepipedi V e V' a spigoli paralleli agli assi coordinati e tali che le faccie perpendicolari all'asse x siano due quadrati i cui lati hanno lunghezza $\frac{h}{2}$ e h rispettivamente, ed aventi come centro rispettivamente, quelle di V i punti P'_0 e P'_n, e quelle di V' i punti P''_0 e P''_n. Inoltre per i punti P'_0, P_0, P_1, ..., P_n, P'_n conduciamo i piani perpendicolari all'asse x, i quali dividono V' in $n+4$ parallelepipedi (aventi lo spigolo parallelo all'asse x di lunghezza δ, e gli altri due spigoli di lunghezza h), che indichiamo con v''_0, v'_0, v_0, v_1, ..., v_n, v'_n.

Allora, ricordando i lemmi dei nn. 9 e 11, possiamo ripetere le considerazioni svolte nel teorema citato in ([61]), quando, in luogo dei rettangoli R, R', q''_0, q'_0, q'_n, q_r, $(r = 0, 1, \ldots, n)$, si considerino i parallelepipedi V, V', v''_0, v'_0, v'_n, v_r, $(r = 0, 1, \ldots, n)$, e si tenga presente la (35).

Si conclude che, considerata una classe completa K di curve ordinarie contenute in A', si può determinare un numero positivo m', non superiore al minimo positivo della funzione F nei punti di A' non interni a V e per ogni terna normalizzata (x', y', z'), tale che la lunghezza L di una qualunque curva C di K soddisfa la disuguaglianza

$$L < \frac{1}{\cos^2 \Lambda'} \left[\frac{(31 + 14n)h + 48(n+2)\delta}{m'h} \mathfrak{I}_C + 12(n+2)\delta \right] \text{([63])}. \tag{36}$$

([63]) Per ottenere la (36) basta ripetere il ragionameato svolto nel teorema citato in ([61]), considerando, in luogo dei lati paralleli all'asse y dei rettangoli sopra indicati, le faccie perpendicolari all'asse x dei corrispondenti parallelepipedi che abbiamo costruito, e in luogo

Dunque, in virtù del criterio di esistenza ricordato alla fine della dimostrazione del n. 7 del presente lavoro, l'asserto è dimostrato [64].

Osservazione – Il teorema del presente numero è valido anche nel caso in cui, ferme restando le altre ipotesi, *gli zeri della F costituiscono un numero finito di archi di curve di classe 2 privi di punti multipli, aventi a due a due al più un solo punto in comune, e tali da non formare alcuna curva chiusa.*

---

dei lati paralleli all'asse x degli stessi rettangoli, gli spigoli pure paralleli all'asse x di tali parallelepipedi.

Osserviamo che la disuguaglianza che, nel nostro caso, corrisponde alla (4) del teorema citato in [61], è, tenendo conto delle (29) e (35) del presente lavoro, e usando notazioni analoghe a quelle usate nel luogo sopra citato,

$$\lambda_\nu \leq \frac{1}{\cos \Lambda'} \left\{ 2\lambda'_\nu + \sqrt{9\delta^2 + h^2 + h^2} \right\} < \frac{1}{\cos \Lambda'} \left\{ \frac{2}{m_r} \mathfrak{J}_{\beta_\nu} + 4\delta \right\},$$

e quella corrispondente alla disuguaglianza che segue alla (5) del luogo citato in [61] è, sempre tenendo conto della (29) del presente lavoro,

$$\lambda_\nu \leq \frac{1}{\cos \Lambda'} \left\{ \frac{2}{m_r} \mathfrak{J}_{\beta_\nu} + h\sqrt{2} \right\},$$

da cui segue, in virtù della (35),

$$\lambda_\nu < \frac{2}{m_r \cos \Lambda'} \mathfrak{J}_{\beta_\nu} + \delta .$$

Allora, tenendo presenti le (33) e (34) dal precedente numero, e ancora ragionando come nel caso piano, si conclude che la lunghezza complessiva degli (eventuali) archi di una qualunque curva C di K che hanno almeno un punto interno a V risulta minore di $\frac{1}{\cos^2 \Lambda'} \left[\frac{(30 + 14n)h + 48(n+2)\delta}{m'h} \mathfrak{J}_C + 12(n+2)\delta \right]$, e quindi segue la (36).

[64] Si può fare una osservazione analoga a quella contenuta nella nota [58].