Equations Hammerstein intégrales et discrètes.

par DAN PETROVANU (Iasi)

Résumé. - *On étudie l'existence et l'unicité, dans certains espaces, des systèmes (E), (F) et (H), moyennant une variante du théorème du point fixe et des "conditions d'admissibilité". On étudie aussi la convergence de la méthode de la réduction.*

§ 0 - Introduction.

Nous nous proposons d'étudier des systèmes d'équations intégrales HAMMERSTEIN sur le demi-axe positif et certains systèmes discrets non-linéaires, qu'on devrait appeler systèmes HAMMERSTEIN discrets.

Les équations HAMMERSTEIN sur l'intervalle $[0, +\infty]$ ont été étudiées récemment dans les beaux travaux de M. G. KREIN et I. GOCHBERG (v. [10], [5]). Ces auteurs considèrent dans les ouvrages cités (ainsi que dans d'autres travaux, récemment parus) le cas où les noyaux dépendent seulement de la différence des arguments. Quant aux systèmes étudiés dans les § 3, 4, ils ont été plusieurs fois rencontrés, sous une forme particulière, par exemple dans [5].

Moyennant une variante convenable du théorème du point fixe, exposée dans le § 1, nous étudions les problèmes de l'existence, de l'unicité et de l'appartenance à certains espaces, de la solution des systèmes (E) du § 2, (F) du § 3 et (H) du § 4. On donne aussi des critères pour la convergence de la "méthode de la réduction".

L'idée de considérer l'opérateur de HAMMERSTEIN comme une superposition d'un opérateur de FREDHOLM et d'un opérateur de NIEMYTZKI a été plusieurs fois exploitée (v. [13], [8] etc.). En particulier, on peut prendre un opérateur de VOLTERRA au lieu d'un opérateur de FREDHOLM. Chez CORDUNEANU [2] on trouve l'idée de faire actionner l'opérateur HAMMERSTEIN d'un espace D à lui-même, en faisant actionner l'opérateur NIEMYTZKI de D à un autre espace B et l'opérateur VOLTERRA de B à D . Cette idée est le développement de certaines idées, utilisées pour le cas des systèmes différentiels ordinaires par MASSERA et SCHAEFFER (v. [12], [11]). Nous l'utilisons dans ce travail pour le cas des opérateurs HAMMERSTEIN (2.0), (3.0), (4.0). L'opérateur (2.0) est considéré sur des espaces de fonctions mesurables que nous allons préciser, les opérateurs (3.0) et (4.0) sur des espaces de suites complexes (ou de suites de vecteurs complexes.)

DÉFINITIONS ET NOTATIONS. - Nous disons qu'une paire d'espaces (P, R) est admissible par rapport à l'opérateur T , si T est défini sur P et T mène l'espace P dans R .

On désigne par R^+ le demi-axe réel positif $t \geq 0$.

Soit $g(t)$ une fonction mesurable sur R^+ , strictement positive et presque partout (p.p.) finie sur R^+ . On peut alors attacher à cette fonction l'espace de Banach M_g^+ , défini de la manière suivante: Les éléments de M_g^+ sont des fonctions-vecteurs $x(t)$, à valeurs complexes, mesurables sur R^+ et telles que pour tout $x(t) \in M_g^+$ il existe une constante $A > 0$ (dépendant de $x(t)$), de façon qu'on ait $\|x(t)\| \leq Ag(t)$, p.p. sur R^+ . Ici $\|\cdot\|$ est la norme matricielle d'un vecteur (par exemple, si $B = [b_{ij}]$ est une matrice, on pourrait prendre $\|B\| = \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|$). La norme dans M_g^+ est définie par

$$\|x(t)\|_{M_g^+} = \text{ess sup}_{t \in R^+} \frac{\|x(t)\|}{g(t)}$$

En particulier, pour $g(t) \equiv 1$, l'espace M_1^+ correspondant est l'espace L_∞^+ des fonctions p.p. bornées sur R^+ .

La notation L_p^+ a le sens habituel (nous ajoutons le signe $+$ à L_p , pour indiquer que les éléments de L_p sont définis sur le demi-axe positif. Généralement, nous indiquons par $\|\cdot\|_P$ la norme d'un élément de l'espace P .

Considérons maintenant l'espace s de toutes les suites $x = \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots\}$, dont les termes $x^{(k)}$, ($k = 1, 2, \dots$) sont des vecteurs complexes à n dimensions. Si $y = \{y^{(1)}, \dots, y^{(k)}, \dots\}$, on pose, comme d'habitude $x + y = \{x^{(1)} + y^{(1)}, \dots, x^{(k)} + y^{(k)}, \dots\}$ et $\lambda x = \{\lambda x^{(1)}, \dots, \lambda x^{(k)}, \dots\}$, avec λ complexe quelconque.

L'espace s est un F -espace (v. [3]) si on introduit la distance $\rho(x, y)$ entre deux éléments de s par

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|x^{(j)} - y^{(j)}\|}{1 + \|x^{(j)} - y^{(j)}\|}$$

Soit maintenant $g = \{g^{(1)}, \dots, g^{(k)}, \dots\}$ une suite de nombres réels, strictement positifs. On peut attacher à cette suite g l'espace de Banach s_g , défini comme il suit: Les éléments de s_g sont les éléments $x = \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots\}$ de s , pour lesquels il existe une constante A (dépendant de x), telle qu'on ait $\|x^{(k)}\| \leq Ag^{(k)}$, ($k = 1, 2, \dots$). Dans l'espace s_g on définit la norme par

$$\|x\|_{s_g} = \sup_k \frac{\|x^{(k)}\|}{g^{(k)}}$$

On voit immédiatement que s_g est un espace de BANACH. D'autre part, à $g = \{1, 1, \dots, 1, \dots\}$ correspond l'espace $s_1 = m =$ l'espace des suites bornées.

Nous considérons aussi l'espace l_p des suites $x = \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots\}$, pour lesquelles $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\|^p = \|x\|^p < \infty$. C'est un espace de BANACH.

Nous désignons par bv l'espace des suites à variation bornée, c'est-à-dire l'espace des suites $x = \{x^{(1)} \dots x^{(k)}, \dots\}$ pour lesquelles la norme $\|x\|_{bv} = \|x^{(1)}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ est finie. C'est un espace de BANACH.

Enfin, bv_0 est l'espace des suites $x = \{x^{(1)} \dots x^{(k)} \dots\}$ pour lesquelles $\lim_k \|x^{(k)}\| = 0$ et la norme $\|x\|_{bv_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ est finie.

En particulier, on peut prendre $n = 1$, c'est-à-dire on peut prendre les espaces s , s_g , l_p , bv , bv_0 dont les éléments sont des suites de nombres (c'est ce que nous faisons dans le § 3). Nous n'introduisons pas des notations supplémentaires, pour préciser si les éléments de l'espace considéré sont des suites de vecteurs, ou des suites de scalaires. Ceci résultera du contexte.

Remarquons que les espaces s_g , l_p , bv , bv_0 sont des sous-ensembles de l'espace s .

On démontre sans peine que la topologie de chacun de ces espaces est plus forte que celle de s .

§ 1 - Equations "Hammerstein" fonctionnelles.

Supposons que P et R soient des espaces de BANACH. Considérons alors l'équation

$$(A) \quad x = h + \mathcal{K} f(x) + \mathcal{L} F(x) = \mathcal{U}(x),$$

où $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ sont des opérateurs linéaires et continus, $\mathcal{K}: P \rightarrow R$ et $\mathcal{L}: P \rightarrow R$, tandis que f et F sont des opérateurs non-linéaires, $f: R \rightarrow P$; $F: R \rightarrow P$. Nous appelons (A) équation "Hammerstein" fonctionnelle (v. [8]).

Soit $\Sigma = \{z; z \in R; \|z\|_R \leq \rho\}$, ρ étant un nombre positif donné. Désignons par $\mathfrak{D}(f)$ et $\mathfrak{D}(F)$ les domaines de définition de f , respectivement F . On a alors le

THÉORÈME A: *Supposons:*

$$(\alpha) \quad \Sigma \subset \mathfrak{D}(f) \cap \mathfrak{D}(F)$$

(β) *L'opérateur f satisfait à la condition de Lipschitz sur Σ , c'est-à-dire*

$$(1.1) \quad \|f(x) - f(y)\|_P \leq \|f\|_{\rho} \|x - y\|_R,$$

pour tout $x, y \in \Sigma$. (Ici, on a posé $\|f\|_{\rho} = \sup_{x, y \in \Sigma} \frac{\|f(x) - f(y)\|_P}{\|x - y\|_R}$).

(γ) *L'opérateur F est complètement continu sur Σ (il mène tout ensemble borné de R en un ensemble compact de P).*

(δ) *On a, pour tout $x \in \Sigma$,*

$$(1.2) \quad \|F(x)\|_R \leq r.$$

(ε) *h est un élément donné de R .*

Alors, si on a

$$(1.3) \quad \|f\|_\rho < \|\mathcal{K}\|^{-1}$$

et

$$(1.4) \quad \|h\|_R + \|\mathcal{K}\| \cdot \|f(\theta)\|_P + r \|\mathcal{L}\| \leq \rho (1 - \|f\|_\rho \|\mathcal{K}\|),$$

(θ étant l'élément nul de R) *l'équation (A) admet au moins une solution dans Σ .*

DÉMONSTRATION. — On a d'abord

$$(1.5) \quad \|h + \mathcal{K}f(x) + \mathcal{L}F(x)\|_R \leq \\ \leq \|h\|_R + \|f\|_\rho \|\mathcal{K}\| \|x\|_R + \|\mathcal{K}\| \|f(\theta)\|_P + \|\mathcal{L}\| \|F(y)\|_P$$

pour tout $x, y \in \Sigma$.

En second lieu, les opérateurs $h + \mathcal{K}f(\cdot)$ et $\mathcal{K}f(\cdot)$ sont, en vertu de (1.3), tous les deux contractants sur Σ , car

$$\|\mathcal{K}f(x) - \mathcal{K}f(y)\|_R \leq \|\mathcal{K}\| \|f\|_\rho \|x - y\|_R,$$

pour tout $x, y \in \Sigma$.

Enfin, $\mathcal{L}F(\cdot)$ et $h + \mathcal{L}F(\cdot)$ sont des opérateurs complètement continus, car $\mathcal{L}$ est linéaire et continu, tandis que $F(\cdot)$ est complètement continu.

D'autre part, on obtient de (1.3), (1.4) et (1.5):

$$(1.6) \quad \|h + \mathcal{K}f(x) + \mathcal{L}F(y)\|_R \leq \rho,$$

pour tout $x, y \in \Sigma$.

Comme $\mathcal{H}(\cdot) = h + \mathcal{K}f(\cdot) + \mathcal{L}F(\cdot)$, où $h + \mathcal{K}f(\cdot)$ est contractant sur Σ et $\mathcal{L}F(\cdot)$ est complètement continu (ou bien, dans une deuxième version $\mathcal{K}f(\cdot)$ est contractant et $h + \mathcal{L}F(\cdot)$ est complètement continu) on a, en vertu de (1.6), la possibilité d'appliquer un théorème d'existence du à M. KRASNOSELSKI [9]. De ce dernier théorème, il résulte que l'équation (A) admet une solution (au moins) dans Σ (car Σ est convexe, bornée et fermée dans R).

Considérons maintenant le cas où $\mathcal{L}$ est l'opérateur nul. L'équation (A) devient alors

$$(B) \quad x = h + \mathcal{K}f(x).$$

On a alors la

PROPOSITION B: 1) Si $\Sigma \subset \mathfrak{D}(f)$ et si (β) et (ε) du Théorème A sont remplies, alors il existe une solution, unique dans (Σ) , de l'équation (B), dès que l'on a

$$(1.3) \quad \|f\|_{\rho} < \|\mathcal{K}\|^{-1}$$

et

$$(1.4^*) \quad \|h\|_R + \|\mathcal{K}\| \cdot \|f(\theta)\|_P \leq \rho (1 - \|f\|_{\rho} \|\mathcal{K}\|).$$

2) - En outre, si $\mathfrak{D}(f) = R$ et f satisfait à la condition (1.1) sur tout l'espace R , alors il existe une solution de l'équation (B), unique dans R , même en renonçant à (1.4*).

La Proposition B résulte du théorème de BANACH, en tenant compte de l'argumentation contenue dans la démonstration du Théorème A.

On peut aussi considérer le cas où R est l'opérateur nul. L'équation (A) devient

$$(C) \quad x = h + \mathcal{L}F(x)$$

et on a la

PROPOSITION C. - Si $\Sigma \subset \mathfrak{D}(F)$ et si (γ) , (δ) , (ε) du Théorème A sont remplies, alors l'équation (C) admet (au moins) une solution dans Σ , pourvu qu'on ait

$$(1.4^{**}) \quad \|h\|_R + r \|\mathcal{L}\| \leq \rho.$$

La Proposition B résulte du principe de SCHAUDER, compte tenant de la démonstration du Théorème A.

REMARQUE 1. - Au lieu de supposer, comme dans le Théorème A, que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ sont tous les deux du type $P \rightarrow R$, et f et F tous les deux du type $R \rightarrow P$, on pourrait supposer que $\mathcal{L}: Q \rightarrow R$, $F: R \rightarrow Q$, où Q est un troisième espace de Banach, qui peut différer de P et R . Evidemment, on obtient immédiatement un analogue plus général du Théorème A, qui permet un choix plus large des opérateurs $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, f , F .

LEMME D. - Si S est un « F -espace » (v. [3]) et $P \subset S$ et $R \subset S$ sont des variétés linéaires de S et des espaces de Banach, munis de topologies plus fortes que celle de S , alors, si $\mathcal{K}$ est un opérateur défini sur S , linéaire de S à S et continu dans la topologie de S , $\mathcal{K}$ résulte continu (et donc aussi borné) de P à R .

DÉMONSTRATION. - L'opérateur $\mathcal{K}$ est fermé.

En vérité, $x_n \xrightarrow{(P)} x$ implique $x_n \xrightarrow{(S)} x$, ce qui implique $\mathcal{K}x_n \xrightarrow{(S)} \mathcal{K}x$. D'autre part, $\mathcal{K}x_n \xrightarrow{(R)} g$ implique $\mathcal{K}x_n \xrightarrow{(S)} g$. Mais S est un espace métrique, donc $\mathcal{K}x = g$. Donc, $x_n \xrightarrow{(P)} x$ et $\mathcal{K}x_n \xrightarrow{(R)} g$ impliquent $\mathcal{K}x = g$, c'est-à-dire $\mathcal{K}$ est fermé. Selon le théorème du graphique fermé ([3], p. 57) il résulte que $\mathcal{K}$ est continu de P à R .

REMARQUE 2. - Si les espaces de BANACH P et R (dont il était question dans le Théorème A) sont des variétés linéaires d'un F -espace S , les topologies de P et R étant supposées plus fortes que celle de S , alors, pour que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ résultent linéaires et continus de P à R (comme dans les propositions A, B, C) il suffira que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ soient linéaires de S à S et continus dans la topologie de S .

§ 2. - Equations intégrales.

Dans ce paragraphe, nous nous occupons de l'étude des équations intégrales du type de HAMMERSTEIN sur un intervalle infini. Les résultats principaux sont les Théorèmes 3 et 4. Dans tout ce qui suit, les fonctions notées par $g(t)$ et $G(t)$ désignent des fonctions scalaires mesurables, strictement positives et p.p. finies sur R^+ .

Considérons l'opérateur

$$(2.0) \quad (\mathcal{B}y)(t) = \int_0^\infty b(t, s)y(s) ds,$$

où $b(t, s)$ est une fonction-matrice du type $(n \times n)$, mesurable par rapport à (t, s) pour $0 \leq s < +\infty$, $0 \leq t < \infty$. Par $y(s)$ on désigne une fonction-vecteur à n composantes. Nous établirons d'abord quelques conditions (suffisantes ou nécessaires) d'admissibilité de certaines paires d'espaces (v. Introduction), par rapport à l'opérateur $\mathcal{B}$.

THÉORÈME 1. - Si on a pour p fixé, $(1 \leq p < \infty)$

$$(2.1) \quad \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \|b(t, s)\| g(s) ds \right\}^p dt = k^p < \infty, \quad (k > 0)$$

alors

- i) La paire d'espaces (M_g^+, L_p^+) est admissible par rapport à $\mathcal{B}$.
- ii) L'opérateur $\mathcal{B}$ est linéaire et continu de M_g^+ à L_p^+ et $\|\mathcal{B}\| \leq k$.

DÉMONSTRATION - D'abord, pour tout $y \in M_g^+$,

$$(2.2) \quad \int_0^\infty \|\mathcal{B}y(t)\|^p dt \leq \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \|b(t, s)\| \cdot \|y(s)\| ds \right\}^p dt \leq k^p \|y\|_{M_g^+}^p < \infty,$$

ce qui montre qu'on a i). Ensuite, il résulte de (2.2):

$$(2.3) \quad \|\mathcal{B}y\|_{L_p^+} \leq k \|y\|_{M_g^+},$$

pour tout $y \in M_g^+$. C'est-à-dire $\mathcal{B}$ est borné et on a $\|\mathcal{B}\| \leq k$.

D'autre part, pour tout $t \in R^+$, pour λ_1, λ_2 nombres complexes quelconques, on a

$$\begin{aligned} \|b(t, s)[\lambda_1 y_1(s) + \lambda_2 y_2(s)]\| &\leq (|\lambda_1| \|y_1\|_{M_g^+} + \\ &+ |\lambda_2| \|y_2\|_{M_g^+}) \|b(t, s)\| g(s), \end{aligned}$$

pour p . tous les $s \in R^+$, quels que soient $y_1, y_2 \in M_g^+$. Donc, en vertu de (2.1), $\int_0^\infty \|b(t, s)(\lambda_1 y_1(s) + \lambda_2 y_2(s))\| ds$ est un élément de L_p^+ , c'est-à-dire cette dernière intégrale est (en tant que fonction de t), $p.p.$ finie sur R^+ . Par conséquent on a $\mathcal{B}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \mathcal{B}y_1 + \lambda_2 \mathcal{B}y_2$, c'est-à-dire $\mathcal{B}$ est linéaire. Comme il était déjà borné, il résulte continu.

COMMENTAIRE 1. - On peut se poser la question de savoir en quelle mesure la condition (2.1) est nécessaire pour assurer i) et ii).

Une réponse partielle est donnée par la

PROPOSITION 1. - Dans le cas $n = 1$ (c'est-à-dire $b(t, s)$ fonction scalaire de s et t , et M_g^+ et L_p^+ espaces dont les éléments sont des fonctions scalaires), si

$$\arg b(t, s) = \psi(s),$$

alors, pour que i) et ii) soient vraies, il est nécessaire que la condition (2.1) soit remplie.

D'abord, de i) et ii) il résulte l'existence d'une constante $c_1 > 0$, telle qu'on ait, pour tout $y \in M_g$,

$$(2.5) \quad \| \mathcal{B} y \|_{L^+}^p = \int_0^\infty \left| \int_0^\infty b(t, s) y(s) ds \right|^p dt \leq c_1 \| y \|_{M_g^+}^p.$$

Comme $g(t) \in M_g^+$, on obtient en particulier

$$(2.6) \quad \int_0^\infty \left| \int_0^\infty b(t, s) g(s) ds \right|^p dt \leq c_1,$$

donc $\int_0^\infty b(t, s) g(s) ds$ est une fonction *p.p.* finie sur R^+ . Par conséquent, $b(t, s)g(s)$ est finie pour *p.* tous les s et t ($s \in R^+$, $t \in R^+$) et donc, $b(t, s)$ l'est aussi. Soit

$$F(N) = \int_0^N \left| \int_0^\infty b(t, s) |g(s)| ds \right|^p dt.$$

Dire que (2.1) n'a pas lieu, revient (en tenant compte de la monotonie de $F(N)$) à affirmer que pour tout m naturel il existe (au moins) une valeur t_m de N , telle que

$$(2.7) \quad \int_0^{t_m} \left| \int_0^\infty b(t, s) |g(s)| ds \right|^p dt > m$$

Posons

$$(2.8) \quad b(t, s) = |b(t, s)| e^{i\psi(s)} \quad (0 \leq \psi(s) < 2\pi), \quad (0 \leq s < \infty),$$

pour toutes les valeurs de t et s pour lesquelles $b(t, s)$ est finie et ne s'annule pas. Posons encore

$$(2.9) \quad \varphi(s) = g(s) e^{-i\psi(s)} \quad (0 \leq s < \infty)$$

Evidemment, $\varphi(s) \in M_g^+$ et $\| \varphi \|_{M_g^+} = 1$.

Moyennant (2.7), (2.8), (2.9) on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_m} \left| \int_0^\infty b(t, s) |g(s)| ds \right|^p dt = \\ & = \int_0^{t_m} \left| \int_0^\infty b(t, s) \varphi(s) ds \right|^p dt > m = m \| \varphi \|_{M_g^+}^p \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec (2.5).

THÉOREME 2. - *S'il existe une constante $c_1 > 0$, telle que*

$$(2.10) \quad \int_0^\infty \|b(t, s)\| g(s) ds \leq c_1 G(t),$$

p.p. sur R^+ , alors

iii) *La paire (M_g^+, M_G^+) est admissible par rapport à $\mathcal{B}$.*

iv) *L'opérateur $\mathcal{B}$ est linéaire et continu de M_g^+ à M_G^+ .*

(En outre, on a $\|\mathcal{B}\| \leq c_1$).

DÉMONSTRATION: On a, en vertu de (2.10), pour tout $y \in M_g^+$

$$(2.11) \quad \|(\mathcal{B}y)(t)\| \leq \int_0^\infty \|b(t, s)\| \cdot \|y(s)\| ds \leq c_1 G(t) \|y\|_{M_g^+}$$

p.p. sur R^+ . Donc, on a iii). D'autre part, on obtient de (2.11) $\|\mathcal{B}y\|_{M_G^+} \leq c_1 \|y\|_{M_g^+}$, ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est borné de M_g^+ à M_G^+ et qu'on a

$$(2.12) \quad \|\mathcal{B}\| \leq c_1.$$

Ensuite, quels que soient $y_1, y_2 \in M_g^+$ et les nombres complexes λ_1, λ_2 , on a, moyennant (2.10):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|b(t, s)(\lambda_1 y_1(s) + \lambda_2 y_2(s))\| ds &\leq c_1 [|\lambda_1| \|y_1\|_{M_g^+} + \\ &+ |\lambda_2| \|y_2\|_{M_g^+}] G(t), \end{aligned}$$

p.p. sur R^+ . C'est-à-dire, l'intégrale dernière est convergente pour p. tous les $t \in R^+$, car $G(t)$ est p.p. finie.

Donc, $\mathcal{B}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \mathcal{B}y_1 + \lambda_2 \mathcal{B}y_2$ si $y_1, y_2 \in M_g^+$, c'est-à-dire $\mathcal{B}$ est linéaire de M_g^+ à M_G^+ . Comme il était déjà borné, $\mathcal{B}$ résulte continu de M_g^+ à M_G^+ .

COMMENTAIRE 2. - La proposition suivante donne un cas dans lequel on a une sorte de réciproque du Théorème 2.

PROPOSITION 2. - *Si $\arg b(t, s) = \psi(s)$ (c'est-à-dire l'argument de chaque élément de la matrice $b(t, s)$ dépend seulement de s), alors pour que iii) et iv) soient vraies, il est nécessaire que la condition (2.10) soit remplie.*

DÉMONSTRATION. - *Considérons d'abord le cas $n = 1$, c'est-à-dire le cas dans lequel $b(t, s)$ est une fonction scalaire.*

De iii) et iv) il résulte l'existence d'une constante $c > 0$, telle que

$$(2.13) \quad \| \mathfrak{B} y \|_{M_g^+} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in R^+} \left| \int_0^\infty b(t, s) y(s) ds \right| \leq c \| y \|_{M_g^+}$$

pour tout $y \in M_g^+$. Ceci est équivalent à

$$(2.14) \quad \left| \int_0^\infty b(t, s) y(s) ds \right| \leq c G(t) \| y \|_{M_g^+}$$

p.p. sur R^+ , pour tout $y \in M_g^+$. En particulier, on a

$$(2.15) \quad \left| \int_0^\infty b(t, s) g(s) ds \right| \leq c G(t),$$

p.p. sur R^+ , car $g(s) \in M_g^+$ et $\| g \|_{M_g^+} = 1$.

Donc, $\int_0^\infty b(t, s) g(s) ds$ est finie *p.p.* sur R^+ . Si (2.10) n'était pas remplie, alors pour tout m naturel il existerait un ensemble Δ_m de mesure positive, tel que

$$(2.16) \quad \int_0^\infty |b(t, s)| g(s) ds > m G(t)$$

pour tout $t \in \Delta_m$. Soit Δ_m^* l'ensemble des valeurs $t \in \Delta_m$, pour lesquelles $\int_0^\infty b(t, s) g(s) ds$ est finie. Evidemment, $\operatorname{mes}(\Delta_m^*) > 0$. Pour tout $t \in \Delta_m^*$, t fixé, $b(t, s)$ est finie pour *p.t.* les $s \in R^+$. Posons

$$b(t, s) = |b(t, s)| e^{i\psi(s)}$$

($0 \leq \psi(s) < 2\pi$) pour chaque $t \in \Delta_m^*$ et pour les valeurs de s pour lesquelles $b(t, s)$ est finie et différente de zéro. Posons encore

$$\varphi_m(s) = g(s) e^{-i\psi(s)}.$$

On obtient alors, moyennant (2.16),

$$\int_0^\infty |b(t, s)| g(s) ds = \left| \int_0^\infty b(t, s) \varphi_m(s) ds \right| > m G(t) = m G(t) \| \varphi_m \|_{M_g^+},$$

pour tout $t \in \Delta_m^*$ (car $\varphi_m \in M_g^+$ et sa norme est égale à un). Mais ceci est en contradiction avec (2.14), puisque $\operatorname{mes}(\Delta_m^*) > 0$.

Considérons maintenant le cas général $n > 1$. — On peut alors écrire $b(t, s) = \sum_{ij=1}^n b_{ij}(t, s)$, où $b_{ij}(t, s)$ est un noyau matriciel, dont tous les éléments sont nuls, excepté l'élément qui occupe la position (i, j) . En désignant par $\mathfrak{B}_{ij}$ l'opérateur correspondant à $b_{ij}(t, s)$, on ramène la démonstration du cas $n > 1$ au cas $n = 1$, car du fait que b_{ij} satisfont une relation du type (2.10) il résulte que b satisfait aussi une relation de ce type.

REMARQUE 1. — Les Proposition 1 et 2 restent visiblement valables si l'on pose la condition, un peu plus générale, $\arg b(t, s) = \psi(s)$ pour p.t. les $s \in R^+$. Cette dernière condition est aussi gênante, mais nous soulignons que les Propositions 1 et 2 ne seront pas appliquées au cours de ce travail. Elles ont été données seulement pour clarifier partiellement la portée des conditions intervenant dans les Théorèmes 1 et 2.

REMARQUE 2. — Les conditions d'admissibilité fournies par les Théorèmes 1 et 2 sont particulièrement favorables à l'application de la Proposition B, § 1. C'est parce qu'elles sont du type (M_g^+, R) et qu'il est très facile à trouver des conditions assurant en même temps l'admissibilité d'une paire (R, M_g^+) par rapport à $f(t, x(t))$ et la condition de LIPSCHITZ pour f . Les Théorème 3 et 4 sont des exemples édifiants, mais ils ne sont pas les seuls à attendre.

Dans tout ce qui suit, nous supposons la fonction matrice $b(t, s)$ mesurable de (t, s) pour $0 \leq s < \infty$; $0 \leq t < \infty$.

THÉOREME 3. — *Considérons le système*

$$(E) \quad x(t) = h(t) + \int_0^\infty b(t, s) f(s, x(s)) ds, \quad (0 \leq t < +\infty).$$

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:

— (α) Il existe une fonction $g(t)$ mesurable, positive, p.p. finie sur R^+ , telle que

$$(2.1) \quad \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \|b(t, s)\| g(s) ds \right\}^p dt = k^p < +\infty,$$

où p est un nombre donné, $1 \leq p < +\infty$.

— (β) La fonction-vecteur $f(s, z)$ est définie sur $R^+ \times \Sigma_s$ où

$$\Sigma_s = \{z; z \in L_p^+; \|z\|_{L_p^+} \leq \rho\},$$

et on peut trouver $c_1 > 0$ $c_2 > 0$ telles que

$$(2.17) \quad \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \leq c_1 g(s) \|x - y\|_{L_p^+}$$

et

$$(2.18) \quad \|f(s, 0)\| \leq c_2 g(s),$$

pour p.t. les $s \in R^+$

$$(\gamma) \quad h(t) \in L_p^+.$$

Alors 1. - Il existe une solution, unique dans Σ_3 de l'équation (E), dès que c_1, c_2 sont assez petites (au sens de (2.19), (2.20) de la démonstration).

2. - Le système "approximatif"

$$(E)_T \quad \begin{cases} x_T(t) = h(t) + \int_0^t b(t, s) f(s, x_T(s)) ds, & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ x_T(t) \equiv 0, & \text{pour } t > T \end{cases}$$

a aussi une solution unique $x_T(t)$ dans (Σ_3) .

3. - Cette dernière solution "approximative" $x_T(t)$ de (E) converge à la solution $x(t)$ de (E) , pour $T \rightarrow \infty$ dans la norme de L_p^+ , c'est-à-dire, on a $\lim_{T \rightarrow \infty} \|x(t) - x_T(t)\|_{L_p^+} = 0$.

DÉMONSTRATION: En vertu du théorème 1, l'opérateur $\mathfrak{B}$ est linéaire de M_g^+ à L_p^+ . D'autre part, $\|\mathfrak{B}\| \leq k$.

Moyennant (2.17) et (2.18) on a

$$\|f(s, x(s))\| \leq g(s) (c_2 + c_1 \rho)$$

p.p. sur R^+ , c'est-à-dire $f(s, x(s))$ est un opérateur de $\Sigma_3 \subset L_p^+$ à M_g^+ .

Observons que (2.17) est équivalent à

$$\|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|_{M_g^+} \leq c_1 \|x - y\|_{L_p^+},$$

pour tout $x, y \in \Sigma_3$. Donc, selon la Proposition B, il résulte qu'on a 1°, dès que

$$(2.19) \quad c_1 k < 1$$

$$(2.20) \quad \|h\|_{L_p^+} + k c_2 \leq \rho(1 - c_1 k)$$

car $\|\mathfrak{B}\| \leq k$, $\|f(\theta)\|_{M_g^+} \leq c_2$ et la norme lipschitzienne de f sur Σ_3 , $\|f\|_\rho$, est inférieure à c_1 .

L'affirmation 2° résulte moyennant une argumentation analogue.

Enfin, on a

$$\|x(t) - x_T(t)\| \leq c_1 \|x - x_T\|_{L_p^+} \cdot \int_0^\infty \|b(t, s)\| g(s) ds$$

p.p. sur $[0, T]$, et $\|x(t) - x_T(t)\| = \|x(t)\|$, pour $t > T$.

Donc,

$$\|x - x_T\|_{L_p^+}^p \leq c_1^p \|x - x_T\|_{L_p^+}^p \cdot k^p + \int_T^\infty \|x(t)\|^p dt,$$

c'est-à-dire

$$\|x - x_T\|_{L_p^+} \leq \frac{1}{(1 - (kc_1)^p)^{1/p}} \left\{ \int_T^\infty \|x(t)\|^p dt \right\}^{1/p}$$

De là, on obtient immédiatement 3°, car $x(t) \in L_p^+$.

REMARQUE 3. - Le système approximatif (E) peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} x_T(t) = k(t) + \int_0^T b(t, s) f(s, x_T(s)) ds, & \text{pour } t \in [0, T] \\ x_T(t) = 0, & \text{pour } t > T \end{cases}$$

où $k(t) = h(t) + \int_T^\infty b(t, s) f(s, 0) ds$.

THÉORÈME 4. - *Considérons le système*

$$(E) \quad x(t) = h(t) + \int_0^\infty b(t, s) f(s, x(s)) ds$$

et supposons que les conditions suivantes soient remplies:

— (α) *Il existe une fonction $g(t)$ mesurable, positive et *p.p.* finie sur R^+ , telle que*

$$(2.21) \quad \int_0^\infty \|b(t, s)\| g(s) ds \leq c_3$$

p.p. sur R^+ .

— (β) On peut trouver des constantes $c_4 > 0$, $c_5 > 0$, telles que

$$(2.22) \quad \|f(s, 0)\| \leq c_4 g(s)$$

et

$$(2.23) \quad \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \leq c_5 g(s) \|x(s) - y(s)\|_{M^+}$$

pour tout $x(s), y(s) \in \Sigma_4$, p.p. sur R^+ , où

$$\Sigma_4 = \{z(t); z(t) \in M^+; \|z(t)\|_{M^+} \leq \rho\}.$$

(γ) $h(t) \in M^+$, c'est-à-dire $\|h(t)\| \leq c_6$, p.p. sur R^+ .

Alors, il existe une solution de (E), unique dans Σ_4 , dès que $c_3 c_5 < 1$ et $c_6 + c_3 c_4 \leq \rho (1 - c_3 c_5)$.

(Si (2.23) a lieu pour tout $x, y \in M^+$, alors (E) a une solution unique dans M^+ , avec la seule condition restrictive $c_3 c_5 < 1$).

DÉMONSTRATION. — La condition (2.21) assure la linéarité et la continuité de $\mathfrak{B}$ de M_g^+ à M^+ . Ensuite, f remplit les conditions de la Proposition B (§1), comme il résulte de (2.22), (2.23). L'affirmation résulte alors de cette dernière proposition, en tenant compte de ce que $\|\mathfrak{B}\| \leq c_3$, $\|f\|_\rho \leq c_5$ et de (γ).

THÉORÈME (4 bis). — Si on ajoute aux conditions (α), (β), (γ) du Théorème 4 la condition (qui renforce (2.21))

(2.21 bis): L'intégrale $\int_0^\infty \|b(t, s)\| g(s) ds$ est convergente, uniformément par rapport à t sur R^+ , alors, en désignant par $x(t)$ la solution (unique dans Σ_4) de (E) avec T fixé, on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{ess sup}_{t \in [0, T]} \|x(t) - x(t)\| = 0.$$

DÉMONSTRATION. — D'abord, l'existence d'une solution, unique dans Σ_4 , du système approximatif $(E)_T$ résulte de la même manière que l'existence de la solution de (E), c'est-à-dire moyennant la Proposition B.

D'autre part, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut prendre, on vertu de (2.21) bis)

$$\int_T^\infty \|b(t, s)\| g(s) ds < \frac{1 - c_3 c_5}{c_5 \rho} \varepsilon,$$

pourvu que $T > T^*(\varepsilon)$.

On a maintenant, de (2.21), (2.22):

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(t)\| &\leq \int_0^T \|b(t, s)\| \cdot \|f(s, x(s)) - f(s, x_T(s))\| ds + \\ &+ \int_T^\infty \|b(t, s)\| \cdot \|f(s, x(s)) - f(s, x_T(s))\| ds \leq \\ &\leq c_3 c_5 \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|x(t) - x_T(t)\| + \{c_5 \int_T^\infty \|b(t, s)\| g(s) ds\} \operatorname{ess\,sup}_{t \in R^+} \|x(t)\| \\ &\leq c_3 c_5 \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|x(t) - x_T(t)\| + c_5 \rho \int_T^\infty \|b(t, s)\| g(s) ds \end{aligned}$$

p.p. sur $[0, T]$. Donc.

$$\|x(t) - x(t)\| \leq c_3 c_5 \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|x(t) - x_T(t)\| + (1 - c_3 c_5) \varepsilon$$

p.p. sur $[0, T]$, pourvu que $T > T^*(\varepsilon)$, c'est-à-dire

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|x(t) - x_T(t)\| < \varepsilon, \text{ pour } T > T^*(\varepsilon)$$

c.q.f.d.

Le théorème suivant doit être considéré comme un théorème d'existence et comportement des solutions des systèmes intégrales du type (E).

THÉORÈME 5. - *Considérons l'équation*

$$(E) \quad x(t) = h(t) + \int_0^\infty b(t, s) f(s, x(s)) ds,$$

$(0 \leq t < +\infty)$ et supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:

(α) La fonction vecteur $f(t, x)$ est définie sur $R_\infty^+ \{ \|x\| \leq \rho \}$ et on a

$$(2.24) \quad \|f(t, 0)\| \leq \mu \exp(-\alpha t)$$

p.p. sur R^+ et

$$(2.25) \quad \|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\| \leq \lambda \|x(t) - y(t)\|$$

p.p. sur R^+ , pour tout $x, y, (\|x\|, \|y\| \leq \rho)$.

— (β) La fonction-matrice $b(t, s)$ satisfait à

$$(2.26) \quad \|b(t, s)\| \leq N \exp [-\alpha t + \beta s]$$

avec $N > 0$ et $\alpha > \beta > 0$, pour p.t. les $t \in R^+$.

— (γ) $\|h(t)\| \leq H \exp (-\alpha t)$,

p.p. sur R^+ . Alors, il existe une solution unique de (E), satisfaisant à

$$(2.27) \quad \|x(t)\| \leq \rho \exp (-\alpha t),$$

p.p. sur R^+ , pourvu que les nombres λ , μ et H soient assez petits (v. (2.29) et (2.30)).

DÉMONSTRATION — Considérons l'espace M_g^+ , avec $g(t) = \exp (-\alpha t)$. On a [(2.24), (2.25) et (2.26)]:

$$(2.28) \quad \int_0^\infty \|b(t, s)\| g(s) ds \leq N \exp (-\alpha t) \int_0^\infty \exp (\beta - \alpha)s ds = \\ = \frac{N}{\alpha - \beta} \exp (-\alpha t),$$

p.p. sur R^+ . Donc, l'opérateur $\mathcal{B}$ est linéaire et continu de M_g^+ à M_g^+ (Th. 2, § 2) et $\|\mathcal{B}\| \leq N(\alpha - \beta)^{-1}$.

D'autre part [(2.24) et (2.25)], l'application $x(t) \rightarrow f(t, x(t))$ mène la sphère de rayon ρ de M_g^+ en M_g^+ . Enfin, on a [(2.24) et (2.25)]:

$$\|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\|_{M_g^+} \leq \lambda \|x(t) - y(t)\|_{M_g^+}$$

quels que soient $x(t), y(t) \in M_g^+$.

Selon la Proposition B, § 1, il existe donc une seule solution satisfaisant à (2.27), pourvu qu'on ait

$$(2.29) \quad \lambda N < 1$$

et

$$(2.30) \quad H + \frac{\mu N}{\alpha - \beta} \leq \rho \left(1 - \frac{\lambda N}{\alpha - \beta}\right).$$

REMARQUE 4. — Par l'application de la Proposition C § 1, on peut trouver des résultats concernant l'existence (sans unicité) des solutions du système (E). Nous n'insistons pas ici sur ce sujet.

§ 3. - Systèmes Hammerstein-Fredholm discrets.

Dans ce paragraphe, on étudie des systèmes à une infinité dénombrable d'inconnues, du type

$$(F) \quad x^{(k)} = h^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(k)} f^{(j)}(x),$$

$$(k = 1, 2, \dots), \quad x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots), \text{ où } c_j^{(k)}, h^{(k)},$$

($j, k = 1, 2, \dots$) sont des nombres complexes donnés et $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ les inconnues. Nous appelons (F) un système HAMMERSTEIN-FREDHOLM discret. Pour le système (F) (qui est un analogue discret du système (E), § 2) on peut trouver des analogues des théorèmes du § 2. A ce but, considérons l'opérateur (qui va jouer le rôle de $\mathcal{K}$ du § 1)

$$(3.0) \quad (\mathcal{C}y)^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(k)} y^{(j)}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Si $c_j^{(k)}$ et $y^{(j)}$ satisfont à certaines conditions, l'opérateur fait correspondre à une suite donnée $y = \{y^{(1)} \dots y^{(j)} \dots\}$ de nombres complexes, une autre suite

$$y = \{(\mathcal{C}y)^{(1)}, \dots (\mathcal{C}y)^{(k)}, \dots\}.$$

En vue d'appliquer les résultats généraux du § 1, nous chercherons à établir au préalable *des conditions assurant en même temps l'admissibilité par rapport à $\mathcal{C}$ d'une paire (P, R) d'espaces Banach de suites, et la linéarité et continuité de $\mathcal{C}$ de P à R.*

Aussi remarquons-nous que cette dernière question présente un certain intérêt en soi-même, car elle a des liaisons évidentes avec le problème de la sommabilité, notamment avec celui de la T -sommabilité. (Par exemple, le théorème de KOJIMA-SCHUR (v. [1]) fournit, dans une forme légèrement modifiée, une condition nécessaire et suffisante d'admissibilité de la paire d'espaces (c, c) , où c est l'espace des suites convergentes). Dans tout ce qui suit, $g = \{g^{(1)}, \dots, g^{(k)}, \dots\}$ et $G = \{G^{(1)}, \dots G^{(k)}, \dots\}$ désignent des suites à termes positifs. On peut parler alors (v. l'Introduction) des sous-espaces s_g , s_G de l'espace s de toutes les suites.

THÉOREME 1. - *Si l'on a, pour p fixé, $1 \leq p < \infty$,*

$$(3.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(k)}| g^{(j)} \right\}^p = M^p < \infty$$

alors

i) *La paire d'espaces (s_g, l_p) est admissible par rapport à l'opérateur $\mathcal{C}$.*

ii) L'opérateur $\mathcal{C}$ est linéaire et continu de s_g à l_p et $\|\mathcal{C}\| \leq M$.

DÉMONSTRATION. - On voit que, pour tout $y = \{y^{(1)}, \dots, y^{(k)}, \dots\}$ contenu dans s_g , on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\mathcal{C}y)^{(k)}|^p \leq M^p \|y\|_{s_g}^p,$$

ce qui démontre i). En outre, il en résulte $\|\mathcal{C}y\|_{l_p} \leq M \|y\|_{s_g}$, c'est-à-dire $\mathcal{C}$ est borné et $\|\mathcal{C}\| \leq M$. D'autre part, en vertu de (3.1) la série $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(k)} [\lambda_1 y_1^{(j)} + \lambda_2 y_2^{(j)}]$ résulte absolument convergente, quels que soient λ_1, λ_2 complexes et $y_1, y_2 \in s_g$. Ceci entraîne, évidemment, la linéarité de $\mathcal{C}$ de s_g à l_p .

PROPOSITION 1. - Si $\arg c_j^{(k)} = \psi(j)$, ($j = 1, 2, \dots$) ($0 \leq \psi(j) < 2\pi$) alors pour que i) et ii) soient remplies, il est nécessaire que (3.1) ait lieu.

D'abord, en vertu de i) et ii), on a

$$(3.2) \quad \|\mathcal{C}y\|_{l_p}^p \leq d_1 \|y\|_{s_g}^p,$$

pour tout $y \in s_g$. Si (3.1) n'est pas remplie, alors pour tout m naturel on pourra trouver t_m tel que

$$(3.3) \quad \sum_{k=1}^{t_m} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(k)}| g^{(j)} \right\}^p > m.$$

Soit maintenant

$$(3.4) \quad \varphi^{(j)} = g^{(j)} e^{-i\psi(j)},$$

où $0 \leq \psi(j) = \arg c_j^{(k)} < 2\pi$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{t_m} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(k)}| g^{(j)} \right\}^p = \sum_{k=1}^{t_m} \left| \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(k)} \varphi^{(j)} \right|^p > m$$

ce qui est en contradiction avec (3.2), car $\varphi = \{\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}, \dots\} \in s_g$ et $\|\varphi\|_{s_g} = 1$.

THÉORÈME 2. - La condition nécessaire et suffisante pour que

iii) La paire (s_g, s_g) soit admissible par rapport à $\mathcal{C}$,

iv) L'opérateur $\mathcal{C}$ soit linéaire et continu de s_g à s_g , est qu'il existe $d_2 > 0$, tel que

$$(3.5) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(k)}| g^{(j)} \leq d_2 G^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

DÉMONSTRATION. - De (3.0) et (3.5) on obtient

$$(3.6) \quad |(\mathcal{C}y)^{(k)}| \leq d_2 \|y\|_{s_g} G^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

pour tout $y \in s_g$ fixé. Donc iii) est remplie. En outre, on obtient de (3.6) $\|\mathcal{C}y\|_{s_g} \leq d_2 \|y\|_{s_g}$, c'est-à-dire $\mathcal{C}$ est borné et

$$(3.7) \quad \|\mathcal{C}\| \leq d_2.$$

D'autre part, en vertu de (3.5) il résulte que la série, (k fixé), $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(k)} [\lambda_1 y_1^{(j)} + \lambda_2 y_2^{(j)}]$ est absolument convergente, quels que soient λ_1, λ_2 complexes et $y_1, y_2 \in s_g$, ce qui entraîne la linéarité de $\mathcal{C}$ de s_g à s_g .

Réciproquement, si iii) et iv) sont remplies, on a

$$(3.8) \quad \|\mathcal{C}y\|_{s_g} = \sup_k \left| \frac{\sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(k)} y^{(j)}}{G^{(k)}} \right| \leq d_2 \|y\|_{s_g}$$

pour tout $y \in s_g$. Il résulte alors que (3.5) est remplie. Supposons le contraire. Alors, pour tout m naturel, il existerait (au moins) une valeur t_m de k , telle que

$$(3.9) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(t_m)}| g^{(j)} > G^{(t_m)}.$$

Posons alors, pour m naturel fixé:

$$c_j^{(t_m)} = |c_j^{(t_m)}| e^{i\psi_m(j)}, \quad (0 \leq \psi_m(j) < 2\pi)$$

$$\varphi_m^{(j)} = g^{(j)} e^{-i\psi_m(j)},$$

($j = 1, 2, \dots$). Evidemment, $\varphi_m = \{\varphi_m^{(1)}, \dots, \varphi_m^{(k)}, \dots\}$ est un élément de s_g et $\|\varphi_m\|_{s_g} = 1$, ($m = 1, 2, \dots$). Donc, à tout m naturel fixé, on peut faire correspondre $\varphi_m \in s_g$, tel que

$$(3.10) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(t_m)}| g^{(j)} = \left| \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(t_m)} \varphi_m^{(j)} \right| > m G^{(t_m)} = m G^{(t_m)} \|\varphi_m\|_{s_g}.$$

Mais (3.10) est en contradiction avec (3.8).

Les théorèmes 3 et 4 qui suivent donnent des critères d'admissibilité pour les paires (s_g, bv) et (s_g, bv_0) . Leur démonstrations sont analogues à celles des Th. 1 et 2, c'est pourquoi nous les omettons.

THÉOREME 3. - Si on a

$$(3.11) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(1)}| g^{(j)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(k+1)} - c_j^{(k)}| g^{(j)} = N < \infty$$

alors

v) La paire (s_g, bv) est admissible par rapport à $\mathcal{C}$ et

vi) $\mathcal{C}$ est linéaire et continu de s_g à bv .

En outre, $\|\mathcal{C}\| \leq N$.

THÉOREME 4. - Si on a

$$(3.12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(k+1)} - c_j^{(k)}| g^{(j)} = N_0 < \infty$$

et

$$(3.13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(k)}| g^{(j)} = 0,$$

alors

vii) La paire (s_g, bv_0) est admissible par rapport à $\mathcal{C}$.

viii) $\mathcal{C}$ est linéaire et continu de s_g à bv_0 . En outre $\|\mathcal{C}\| \leq N_0$.

Afin d'abréger l'exposition des résultats concernant le système (F), nous introduisons des notations supplémentaires.

Nous désignons par Q l'un des espaces l_p , bv ou bv_0 . Par la condition (C_{s_g}, Q) d'admissibilité de la paire d'espaces (s_g, Q) nous entendons la condition (3.1) si $Q = l_p$, la condition (3.11) si $Q = bv$ et les conditions (3.12) - (3.13) si $Q = bv_0$. On a alors le

THÉOREME 5. - Considérons le système

$$(F) \quad x^{(k)} = h^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(k)} f^{(j)}(x),$$

($k = 1, 2, \dots$), $x = \{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots\}$ et supposons que les hypothèses suivantes soient remplies:

(α) Il existe une suite à termes positifs $g = \{g^{(1)}, \dots, g^{(k)}, \dots\}$, telle que la condition (C_{s_g}, Q) soit remplie.

(β) La suite $f = \{f^{(1)}(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots\}$ est définie pour $x \in \Sigma_s = \{z: z \in Q; \|z\|_Q \leq \rho\}$ et on peut trouver $d_4 > 0$, $d_5 > 0$ telles que

$$(3.14) \quad |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq d_4 g^{(k)} \|x - y\|_Q$$

et

$$(3.15) \quad |f^{(k)}(\theta)| \leq d_5 g^{(k)}$$

($k = 1, 2, \dots$), quels que soient $x, y \in \Sigma_s$, $\theta = \{0, \dots, 0, \dots\}$.

(γ) La suite $h = \{h^{(1)}, \dots, h^{(s)}, \dots\}$ est un élément de Q .

Alors 1° - Il existe une solution, unique dans Σ_s , du système (F), dès que d_4 , d_5 et $\|h\|_Q$ sont assez petites (dans un sens qui est précisé dans la démonstration par (3.17-18), (3.19-20) et (3.21-22)),

2° - Le système à un nombre fini d'inconnues

$$(F) \quad \begin{cases} x_n^{(k)} = h_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(k)} f_n^{(j)}(x), & \text{pour } k \leq n \\ x_n^{(k)} = 0, & \text{pour } k > n \end{cases}$$

a une solution unique dans Σ_s , pour tout n naturel fixé.

3° - Si l'on désigne par x et x_n , respectivement, les solutions de (F) et (F)_n, on a :

$$(3.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|_Q = 0$$

DÉMONSTRATION. - L'affirmation 1° résulte immédiatement de la Proposition B, §1 (compte tenant du Th. 1, §3 dans le cas $Q = l_p$, du Th. 3, §3 dans le cas $Q = bv$ et du Th. 4, §3 dans le cas $Q = bv_0$). On n'a que prendre dans la Proposition B, §1, $P = s_g$ et $R = Q$ et constater que, pour pouvoir appliquer cette proposition, il suffit d'avoir :

Dans le cas $Q = l_p$:

$$(3.17) \quad d_4 M < 1$$

$$(3.18) \quad \|h\|_{l_p} + M d_5 \leq \rho (1 - d_4 M),$$

Dans le cas $Q = bv$:

$$(3.19) \quad d_4 N < 1$$

$$(3.20) \quad \|h\|_{bv} + N d_5 \leq \rho (1 - d_4 N),$$

Dans le cas $Q = bv_0$:

$$(3.21) \quad d_4 N_0 < 1$$

$$(3.22) \quad \|h\|_{bv_0} + N_0 d_5 \leq \rho (1 - d_4 N_0).$$

L'affirmation 2° résulte de la même manière.

Quant à l'affirmation 3°, nous devons considérer successivement les cas $Q = l_p$, bv , bv_0 .

Si $Q = l_p$, on a de (F) , $(F)_n$ et (3.14):

$$|x^{(k)} - x^{(k)}|_n \leq d_4 \|x - x\|_{l_p} \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(k)}| g^{(j)},$$

pour $1 \leq k \leq n$ et

$$|x^{(k)} - x^{(k)}|_n = |x^{(k)}| \quad \text{pour } k > n.$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^{(k)} - x^{(k)}|_n^p \leq d_4^p \|x - x\|_{l_p}^p \cdot M^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x^{(k)}|^p.$$

C'est-à-dire

$$(3.23) \quad \|x - x\|_{l_p} \leq d_6 \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} |x^{(k)}|^p \right\}^{1/p},$$

où $d_6 = 1/[1 - (d_4 M)^p]^{1/p}$. Le membre droit de (3.23) est maintenant, en vertu de $x \in l_p$, plus petit que tout $\varepsilon > 0$, à condition de prendre $n > n^*(\varepsilon)$.

Si $Q = bv$, on a de (F) , $(F)_n$ et (3.14):

$$|x^{(k)} - x^{(k)}|_n \leq d_4 \|x - x\|_{bv} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(k)}| g^{(j)} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n \quad \text{et}$$

$$|x^{(k)} - x^{(k)}|_n = |x^{(k)}| \quad \text{pour } k > n.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|x - x\|_{bv} &= |x^{(1)} - x^{(1)}|_n + \sum_{k=1}^n |x^{(k+1)} - x^{(k+1)}|_n + |x^{(k)} - x^{(k)}|_n + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} |x^{(k+1)} - x^{(k)} - x^{(k+1)} + x^{(k)}| \leq \\ &\leq d_4 N \|x - x\|_{bv} + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x^{(k+1)} - x^{(k)}|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu de (3.21) on a

$$(3.24) \quad \|x - x\|_{bv} \leq \frac{1}{d_4 N} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x^{(k+1)} - x^{(k)}|.$$

Donc $\lim_n \|x - x\|_{bv} = 0$ pour $n \rightarrow \infty$, car x est un élément de l'espace bv .

Si $Q = bv_0$, on trouve par le même raisonnement

$$(3.25) \quad \|x - x\|_{bv_0} \leq \frac{1}{d_4 N_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x^{(k+1)} - x^{(k)}|,$$

et l'affirmation 3° résulte, car $x \in bv_0$.

Le théorème suivant est un analogue discret du Th. 4, § 2.

THÉORÈME 6. — *Considérons le système (F) et supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*

— (α) *Il existe une suite à termes positifs $g = \{g^{(1)}, \dots, g^{(k)} \dots\}$ et une constante $d_6 > 0$, telles que*

$$(3.26) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |c_j^{(k)}| g^{(j)} \leq d_6, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(β). *Il existe $d_7 > 0$, $d_8 > 0$, telles que*

$$(3.27) \quad |f^{(k)}(0, \dots, 0, \dots)| \leq d_7 g^{(k)},$$

$$(3.28) \quad |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq d_8 g^{(k)} \|x - y\|_{s_1},$$

($k = 1, 2, \dots$) *quels que soient $x, y \in \Sigma_6$, où*

$$\Sigma_6 = \{z; z \in s_1; |z^{(k)}| \leq \rho; k = 1, 2, \dots\}$$

— (γ) *Il existe $d_9 > 0$, telle que*

$$(3.29) \quad |h^{(k)}| \leq d_9, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Alors (F) a une solution unique dans Σ_6 , à condition que

$$d_6 d_8 < 1 \text{ et } d_9 + d_6 d_7 \leq \rho (1 - d_6 d_8).$$

Pour démontrer ce théorème, on applique la Proposition B, § 1, pour la paire d'espaces $P = s_g$, $R = s_1$ = l'espace des suites bornées en tenant compte du Th. 2, § 3.

REMARQUE — Dans les hypothèses du Th. 6 ci-dessus, on peut démontrer un théorème d'approximation de la solution de (F) par la solution de (F), en ajoutant aux hypothèses déjà faites des conditions supplémentaires. Le Th. 4 bis, § 2 suggère comment on devrait procéder.

REMARQUE. - D'autres particularisations de s_g où de s_G dans la condition d'admissibilité (3.5) nous donnent la possibilité d'établir de nouveaux résultats. Par exemple, on peut trouver immédiatement un analogue discret du Th. 5, § 2.

§ 4. - Itérations non-linéaires.

Considérons le système

$$(H) \quad x^{(k)} = h^{(k)} + \sum_{j=1}^k A_j^{(k)} f^{(j)}(x^{(1)}, \dots, x^{(j)}),$$

($k = 1, 2, \dots$), où $A_j^{(k)}$ sont des matrices données complexes, constantes, du type $n \times n$, pour j et k fixés, ($j, k = 1, 2, \dots$) et $f^{(j)}(x^{(1)}, \dots, x^{(j)})$ ($j = 1, 2, \dots$) des fonctions-vecteurs données, à n dimensions, à valeurs complexes, dépendant des arguments vectoriels $x^{(1)}, \dots, x^{(j)}$. Enfin, $h^{(k)}$ désigne pour tout k fixé, ($k = 1, 2, \dots$), un vecteur complexe à n -dimensions et $x^{(k)}$, ($k = 1, 2, \dots$) sont les vecteurs inconnus.

Le système (H) représente dans le cas $A_k^{(k)} = 0$, ($k = 1, 2, \dots$) une *itération explicite* et dans le cas contraire une *itération implicite*. Si (H) est une itération explicite, il suffit de connaître le vecteur initial $x^{(1)}$ pour pouvoir trouver, moyennant (H), les vecteurs inconnus $x^{(k)}$, ($k = 1, 2, \dots$). La seule question qui intéresse alors c'est de savoir le comportement à l'infini de l'itération. Dans le cas d'une itération implicite, on doit se poser aussi le problème de l'existence de la solution de (H). Si $f^{(j)}$ dépendent seulement de $x^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots$) on obtient un système intervenant parfois dans la théorie du contrôle.

Si $f^{(j)}$ sont des fonctions linéaires de $x^{(1)} \dots x^{(j)}$, H devient une itération linéaire, d'un type qui a été étudié (en particulier, pour $A_k^{(k)} = 0$, v. [5]).

Nous attachons au système (H) l'opérateur

$$(4.0) \quad (\mathcal{A}y)^{(k)} = \sum_{j=1}^k A_j^{(k)} y^{(j)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Cet opérateur $\mathcal{A}$ fait correspondre à toute suite de vecteurs complexes $y = \{y^{(1)}, \dots, y^{(k)}, \dots\}$ une autre suite de vecteurs complexes, $\mathcal{A}y = \{(\mathcal{A}y)^{(1)}, \dots, (\mathcal{A}y)^{(k)}, \dots\}$. C'est-à-dire l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini sur l'espace s des suites de vecteurs complexes (v. § 0) et il mène cet espace en soi-même. Evidemment, il est un opérateur linéaire sur s . On démontre facilement que $\mathcal{A}$ est aussi un opérateur continu dans la topologie de s .

Par conséquent [v. Lemma D, § 1], si on prend pour P ou R l'un des espaces suivants contenus dans s

$$s, s_g, l_p, m = s_1, c, c_0, bv, bv_0, \text{ etc. } \dots,$$

dont la topologie d'espace de Banach est, comme on le sait, plus forte que celle de s , il résulte que si la paire (P, R) est admissible par rapport à $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est automatiquement linéaire et continu de P à R .

Dans tout ce qui suit nous désignons par $\|\cdot\|$ la norme matricielle d'une matrice (d'un vecteur) et par $g = \{g^{(1)}, \dots, g^{(k)}, \dots\}$ et $G = \{G^{(1)}, \dots, G^{(k)}, \dots\}$ des suites de nombres positifs.

On établit alors, comme dans le §3, les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. - *La condition nécessaire et suffisante pour que la paire d'espaces (s_g, s_G) soit admissible par rapport à l'opérateur $\mathcal{A}$ est qu'il existe un nombre $c_1 > 0$, tel qu'on ait*

$$(4.1) \quad \sum_{j=1}^k \|A_j^{(k)}\| g^{(j)} \leq c_1 G^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

En outre, si (4.1) est remplie, on a $\|\mathcal{A}\| \leq c_1$.

THÉORÈME 2. - *Si on a, pour $1 \leq p < \infty$, p fixé,*

$$(4.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^k \|A_j^{(k)}\| g^{(j)} \right\}^p = M^p < \infty$$

alors la paire (s_g, l_p) est admissible par rapport à $\mathcal{A}$ et on a $\|\mathcal{A}\| \leq M$.

THÉORÈME 3. - *Si*

$$(4.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k^{(k)}\| g^{(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \|A_j^{(k+1)} - A_j^{(k)}\| g^{(j)} = N < \infty$$

alors la paire (s_g, bv) est admissible par rapport à $\mathcal{A}$ et $\|\mathcal{A}\| \leq N$.

REMARQUE 1. - Le Théorème 1 ci-dessus est un analogue discret du Th. 3 de l'ouvrage de C. CORDUNEANU [2]. Les espaces du type s_g jouent ici le rôle que jouaient dans [2] les espaces du type C_g .

Soit maintenant Q l'un des espaces $s_1 = m$, l_p ou bv . Nous désignons par (C_{s_g}, Q) la condition

$$(4.1. \text{ bis}) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j^{(k)}\| g^{(j)} \leq c_2, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

si $Q = s_1$, la condition (4.2) si $Q = l_p$ et la condition (4.3) si $Q = bv$. Nous avons alors le

THÉORÈME 4. - *Supposons que les hypothèses suivantes soient remplies:*

(α) *La condition (C_{s_g}, Q) est satisfaite.*

(β) *La suite*

$$(4.4) \quad f = \{f^{(1)}(x^{(1)}), \dots, f^{(k)}(x^{(1)}), \dots, x^{(k)}, \dots\}$$

est définie pour chaque $x \in \Sigma_7$, où

$$\Sigma_7 = \{x; x \in Q; \|x\|_Q \leq \rho\},$$

et il existe $c_3 > 0$ et $c_4 > 0$ telles que

$$(4.5) \quad \|f^{(k)}(0, \dots, 0)\| \leq c_3 g^{(k)},$$

$$(4.6) \quad \|f^{(k)}(x^{(1)} \dots x^{(k)}) - f^{(k)}(y^{(1)} \dots y^{(k)})\| \leq c_4 g^{(k)} \|x - y\|_Q,$$

($k = 1, 2, \dots$) quels que soient $x, y \in \Sigma_7$.

(γ) *La suite $h^{(k)}$ est un élément de Q . Alors (H) définit une itération et une seule appartenant à Σ_7 , dès que c_3, c_4 et $\|h\|_Q$ satisfont aux conditions*

$$(4.7) \quad c_4 \mu < 1$$

$$(4.8) \quad \|h\|_Q + \mu c_3 \leq \rho (1 - c_4 \mu),$$

(où $\mu = c_2$ si $Q = s_1$, $\mu = M$ si $Q = l_p$ et $\mu = N$ si $Q = bv$).

La démonstration repose sur la proposition B, §1, dans laquelle on prend $P = s_g$ et $R = Q$. En vertu de (4.5) et (4.6), l'application $x \rightarrow f$ définie par (4.4) est un opérateur lipschitzien de Σ_7 à s_g tandis que (C_{s_g}, Q) est une condition suffisante (pour chaque choix de Q) d'admissibilité de la paire (s_g, Q) .

REMARQUE. - Le théorème précédant fournit des conditions suffisantes pour que l'itération donnée par (H) appartienne à l'un des espaces désignés par Q et, par cela même une information concernant son comportement à l'infini. Dans la pratique, ce qui intéresse surtout c'est d'établir des conditions permettant à conclure que l'itération tend à zéro pour k tendant à l'infini. En voilà un exemple:

THÉORÈME 5. - *Supposons qu'il-y-ait des constantes $c_5 > 0$, $c_6 > 0$, $\lambda > 0$, $H > 0$ et $\alpha > \beta > 0$, telles que*

— (α) On a

$$(4.9) \quad \|A_j^{(k)}\| < c_5(1 + \alpha)^{j-k}, \quad (1 \leq j \leq k \leq 1, 2, \dots),$$

$$(4.10) \quad \|h^{(k)}\| \leq H(1 + \beta)^{-k}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

— (β) , On a

$$(4.11) \quad \|f^{(k)}(0, \dots, 0)\| \leq c_0(1 + \beta)^{-k}$$

et

$$(4.12) \quad (1 + \beta)^k \|f^{(k)}(x^{(1)} \dots x^{(k)}) - f^{(k)}(y^{(1)} \dots y^{(k)})\| \leq \\ \leq \lambda \sup_{1 \leq r \leq k} (1 + \beta)^r \|x^{(r)} - y^{(r)}\|,$$

($k = 1, 2, \dots$), pour tout $x, y \in \{z; z \in S; \|z^{(k)}\| \leq \rho\}$.

Alors, il existe une solution unique du système (H) satisfaisant à la limitation (4.13), si λ et H sont assez petites.

La démonstration s'appuie sur la Proposition B, §1, dans laquelle on prend $P = R = s_g$, où $g = \{1 + \beta)^{+1}, \dots (1 + \beta)^{-k}, \dots\}$. On trouve alors

$$\sum_{j=1}^k \|A_j^{(k)}\| g^{(j)} \leq c_0(1 + \alpha)^{-1}(\alpha - \beta)^{-1}(1 + \beta)^{-k}$$

c'est-à-dire la paire (s_g, s_g) est admissible par rapport à (v. Th. 1, §4). On vérifie immédiatement les autres hypothèses de la Proposition B, §1.

REMARQUE 2. — Ce dernier théorème est comparable à la Proposition 2 de CORDUNEANU [2], et à un théorème de GOLDENHERSCHEL [5], pour le cas des systèmes (H) linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. G. COOKE, *Infinite matrices and sequence spaces*, London, 1950.
- [2] C. CORDUNEANU, *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra*, « Annali di Mat. Pura ed Appl. », t. 67, 1965, p. 349-363.
- [3] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, Part. I, New York 1958.
- [4] I. Tz. GOCHBERG et M. G. KREIN, *Systèmes d'équations intégrales sur le demi-axe, avec des noyaux dépendant de la différence des arguments* (en russe), « Uspekhi Mat. Nauk », tome XIII, fasc. 2 (80), p. 3-72.
- [5] E. I. GOLDENHERSCHEL, *Sur un analogue discret des équations de Volterra sur le demi-axe* (en russe) « Uspekhi Mat. Nauk », t. XXI, fasc. 2 (128), 1966, p. 223-225.
- [6] A. HAMMERSTEIN, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*, « Acta Math. », Bd. 54 (1930), 117-176.
- [7] L. KANTOROVITCH, *The method of successive approximations for functional equations*, « Acta Math. », Bd. 71, 1939, p. 63-97.
- [8] I. I. KOLODNER, *Equations of Hammerstein type in Hilbert spaces*, « Journal of Mathematics and Mechanics », vol. 13, nr. 5, 1964.
- [9] M. A. KRASNOSELSKI, *Deux observations concernant la méthode des approximations successives* (en russe) « Uspekhi Mat. Nauk », tome X, 1955, fasc. 1 (63).

- [10] M. G. KREIN, *Equations intégrales sur le demi-axe avec un noyau dépendant de la différence des arguments*, (en russe) « Uspekhi Mat Nauk », tome XIII, fasc. 5 (83), p. 3-120.
 - [11] J. L. MASSERA et J. J. SCHAEFFER, *Linear differential equations and functional Analysis I*, « Annals of Mathematics », t. 67 (1958), p. 517-573.
 - [12] — —, *Linear differential equations and functional Analysis II*, « Math. Annalen », t. 139 (1960), p. 287-342.
 - [13] V. V. NEMYTSKI, *Théorèmes d'existence et unicité pour les équations intégrales non-linéaires* (en russe), « Matem. Sbornik », 41, (1934), p. 438-452.
 - [14] J. ROBERT, *Étude des solutions de systèmes d'équations linéaires sur certains espaces de suites*, « C. R. Acad. Sci. Paris », t. 261, p. 2423-2426.
-