Sur l'analyse générale II. (Intégrales d'applications de treillis)

Par TOKUI SATO (à Kōbe, Japon)

Résumé. - Suite d'un mémoire antérieur [1] ⁽¹⁾: définir les intégrales d'applications de treillis de BOOLE σ -complet.

1. Introduction. - Nous avons donné dans [1] un point de vue pour construire l'analyse générale, et traité, comme exemple, les fonctions d'ensemble. Puisqu'un corps borélien est considéré comme représentation d'un treillis de BOOLE, nous avons remarqué dans un article antérieur [2] que la partie principale de notre analyse dans [1] devrait s'appliquer sans aucun changement aux fonctionnelles définies dans un treillis de BOOLE. Dans [1] j'ai mentionné que pour construire notre analyse générale, les caractères du domaine dans lequel les applications prennent leurs valeurs sont très importants, mais je n'ai traité que le cas où ce domaine est le corps des nombres réels, car cet ensemble me paraissait le plus important. Ce domaine peut cependant être un objet mathématique plus général. Pour réaliser concrètement cette assertion, je voudrais traiter dans cet article le cas où ce domaine est une algèbre du genre non-numérique. Nous montrerons qu'on peut définir une intégrale d'applications appliquant un treillis de BOOLE σ -complet dans le même ou un autre treillis, et nous verrons que beaucoup de théorèmes principaux dans [1] se généralisent pour cette intégrale.

Pour cela il faut commencer par rechercher des applications d'un treillis de BOOLE. D'autre part pour atteindre notre but final de construire l'analyse générale j'ai voulu traiter des applications de treillis autant généraux que possible. A ce point de vue dans les n^{os} 2-4 nous traitons des applications d'un treillis de BOOLE σ -complet dans un treillis de BOOLE $*$ -général, et dans le n^o 5 une définition des intégrales d'applications susdites est donnée.

2. Treillis de Boole $*$ -généraux. - Bien que nous ayons donné dans un article antérieur [2] sa définition et quelques propriétés, nous commençons par rappeler la notion des treillis de BOOLE $*$ -généraux. Car nous nous servons toujours de ces treillis dans cet article.

Soit $x \rightarrow x^*$ une application d'un treillis T dans T . Lorsqu'on a

$$x^{**} = x \qquad (x^{**} = (x^*)^*),$$

⁽¹⁾ Les chiffres dans les crochets renvoient aux Références placées à la fin de cet article.

$x \rightarrow x^*$ est appelée application *involutive*. Lorsqu'on a

$$x^* \geq y^* \quad \text{pour } x \leq y.$$

On dit que $x \rightarrow x^*$ est *antiordonnée*.

Lorsqu'une application $x \rightarrow x^*$ d'un treillis T dans T est involutive et antiordonnée, nous dirons que $x \rightarrow x^*$ est l'application **-orthocomplémentaire*, T est **-orthocomplémenté* et que x^* est le **-orthocomplément* de x .

De la définition on déduit aisément les lemmes suivants

LEMME 2.1. - Soient T un treillis **-orthocomplémenté* et K un ensemble d'éléments de T qui satisfait aux conditions suivantes :

- i) K possède au moins un élément,
- ii) si l'on a $x \in K$, on a $x^* \in K$,
- iii) si l'on a $x, y \in K$, on a $x \cup y \in K$.

K est un *soustreillis* de T .

Ce treillis K s'appelle *treillis de Jordan*.

LEMME 2.2. - Soient T un treillis σ -complet et **-orthocomplémenté* et B un ensemble d'éléments de T qui satisfait aux conditions suivantes :

- i) B possède au moins un élément,
- ii) si l'on a $x \in B$, on a $x^* \in B$,
- iii) si l'on a $x_n \in B$ ($n = 1, 2, \dots$), on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \in B$.

B est un *soustreillis* de T .

On appelle B *treillis de Borel*.

Soient T un treillis σ -complet et $\{x_n\}$ une suite d'éléments de T .

Posons

$$\begin{aligned} \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} x_k, \\ \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} x_k. \end{aligned}$$

On a alors

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

En particulier lorsqu'on a

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

cet élément commun s'appelle *limite* de $\{x_n\}$ et se note $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Soit T un treillis $*$ -orthocomplémenté. Définissons la *différence* $x - y$ des deux éléments x et y de T par

$$x - y = x \cap y^*,$$

y^* étant le $*$ -orthocomplément de y .

Soit T un treillis complet, modulaire et $*$ -orthocomplémenté. Lorsqu'on a

$$x \cap x^* = 0$$

pour tout élément de T , T s'appelle *treillis de Boole $*$ -général*.

EXEMPLE 1. - Le treillis représenté par la Fig. 1 est un treillis de BOOLE $*$ -général.

Application $x \rightarrow x^*$:

Fig. 1

3. Applications additives. - D'abord nous donnons quelques remarques qui seront utiles dans toute la suite.

Soient T un treillis de BOOLE σ -complet et E un ensemble d'éléments de T .

Soit $\varphi(x)$ une application définie dans E qui prend ses valeurs dans un treillis T' de BOOLE $*$ -général (même ou autre que T). Puisqu'il n'y a pas confusion, et qu'il est plutôt convenable, nous utiliserons mêmes notations $\leq$, $\cup$, $\cap$, etc. sans distinction dans deux treillis T et T' .

$\varphi(x)$ s'appelle respectivement:

- i) *isotone*, ii) *sous-additive*. iii) *additive*, iv) σ -*sous-additive*, ou
 v) σ -*additive*, suivant qu'on a

$$\text{i)} \quad \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$$

pour toute paire d'éléments x_1 et x_2 telle que

$$x_1 \leq x_2, \quad x_1, x_2 \in E,$$

$$\text{ii)} \quad \varphi(x_1 \cup x_2) \leq \varphi(x_1) \cup \varphi(x_2)$$

pour toute paire d'éléments quelconques x_1 et x_2 telle que

$$x_1, x_2 \in E \quad \text{et} \quad x_1 \cup x_2 \in E,$$

$$\text{iii)} \quad \varphi(x_1 \cup x_2) = \varphi(x_1) \cup \varphi(x_2)$$

pour toute paire d'éléments x_1 et x_2 telle que

$$x_1, x_2 \in E, \quad x_1 \cup x_2 \in E \quad \text{et} \quad x_1 \cap x_2 = 0,$$

$$\text{iv)} \quad \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n) \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)$$

pour toute suite $\{x_n\}$ d'éléments telle que

$$x_n \in E \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \in E,$$

$$\text{v)} \quad \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)$$

pour toute suite $\{x_n\}$ d'éléments telle que

$$x_n \in E \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \in E \quad \text{et} \quad x_i \cap x_j = 0 \quad (i \neq j).$$

LEMME 3.1. - *Toute application additive $\varphi(x)$ dans K (*) est isotone et sous-additive.*

Soient x et y deux éléments tels que $x \geq y$. $x = y \cup (x - y)$ et $y \cap (x - y) = 0$ ayant lieu, on a

$$\varphi(x) = \varphi(y) \cup \varphi(x - y),$$

ce qui montre que $\varphi(x)$ est isotone.

De même, on peut déduire que $\varphi(x)$ est sous-additive.

LEMME 3.2. - *Si $\varphi(x)$ est σ -additive, elle est additive.*

THÉOREME 3.1. - *Soit $\varphi(x)$ une application σ -additive dans K .*

Si l'on a

$$x_n \in K \quad (n = 1, 2, \dots), \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \in K,$$

on a

$$\varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

En effet, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1}) \quad (x_0 = 0).$$

D'après les lemmes 3.1 et 3.2, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n - x_{n-1}) \\ &\leq \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n). \end{aligned}$$

(*) Dans toute la suite, nous désignent par K et B un treillis de JORDAN et celui de BOREL respectivement.

D'autre part on a

$$\varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \geq \varphi(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

d'où

$$\varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \geq \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

On a donc

$$\varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

THÉOREME 3.2. - Soit $\varphi(x)$ une application définie dans K . Si $\varphi(x)$ est isotone et σ -sous-additive dans K , on a

$$\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n),$$

où $x_n \in K$ ($n = 1, 2, \dots$), $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \in K$.

En effet, $\varphi(x)$ étant isotone, on a

$$\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n) \geq \varphi(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

d'où

$$\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n) \geq \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n).$$

Par hypothèse, on a

$$\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n).$$

THÉOREME 3.3. - Soit $\varphi(x)$ une application définie dans K . Si $\varphi(x)$ est σ -additive, elle est aussi σ -sous-additive.

D'après les lemmes 3.1 et 3.2, $\varphi(x)$ est isotone et sous-additive. Supposons que $x \geq y$, $x, y \in B$. On a

$$\varphi(x) \geq \varphi(y), \quad \varphi^*(x) \leq \varphi^*(y),$$

$$\varphi(x) = \varphi(y) \cup (\varphi(x) - \varphi(y)).$$

Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de K telle que $x_n \in K$ ($n = 1, 2, \dots$), $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \in K$. Posons $x = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n$, $y = \bigcup_{j=1}^n x_j$, on en obtient

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(\bigcup_{j=1}^n x_j) \cup (\varphi(x) \cap \varphi^*(\bigcup_{j=1}^n x_j)) \\ &\leq \bigcup_{j=1}^n \varphi(x_j) \cup (\varphi(x) \cap \varphi^*(\bigcup_{j=1}^n x_j)), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\leq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi(x_j) \cup (\varphi(x) \cap \varphi^*(\bigcup_{j=1}^n x_j)) \right\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) \cup \left\{ \varphi(x) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi^*(\bigcup_{j=1}^n x_j) \right) \right\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) \cup \left\{ \varphi(x) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(\bigcup_{j=1}^n x_j) \right)^* \right\}.\end{aligned}$$

D'après le théorème 3.1, on a

$$\varphi(x) \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) \cup (\varphi(x) \cap \varphi^*(x)),$$

d'où

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n\right) \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n), \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du lemme 3.2 et des théorèmes 3.2 et 3.3.

COROLLAIRE. — Soit $\varphi(x)$ une application définie dans B . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $\varphi(x)$ est σ -additive,
- ii) $\varphi(x)$ est isotone et σ -sous-additive,
- iii) on a

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n), \quad x_n \in B \quad (n = 1, 2, \dots).$$

THÉOREME 3.4. — Soit $\varphi(x)$ une application σ -additive dans B . On a

$$\varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n), \quad \varphi\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)$$

pour toute suite $\{x_n\}$ d'éléments de B .

En effet, $\bigcap_{k=n}^{\infty} x_k \leq x_k$ ($k = n, n+1, \dots$) ayant lieu, on a

$$\varphi\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} x_k\right) \leq \bigcap_{k=n}^{\infty} \varphi(x_k),$$

d'où

$$\varphi\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} x_k\right) \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \varphi(x_k) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$\varphi(x)$ étant σ -additive, on a

$$\varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} x_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

$\bigcup_{k=n}^{\infty} \varphi(x_k) = \varphi(\bigcup_{k=n}^{\infty} x_k)$ ayant lieu, on a

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} \varphi(x_k) \geq \varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} x_k),$$

d'où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n).$$

4. Mesure $\mu(x)$ et μ -continuité.

LEMME 4.1. - Soit $\varphi(x)$ une application additive dans K .

Pour que

$$\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y)$$

subsiste, où $x \geq y$, $x, y \in K$. Il faut et il suffit qu'on ait

$$\varphi(x - y) \leq \varphi^*(y).$$

En effet, comme on a

$$\varphi(x) \cap \varphi^*(y) = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y),$$

on obtient

$$\varphi(x - y) \leq \varphi^*(y).$$

Supposons réciproquement $\varphi(x - y) \leq \varphi^*(y)$. $x = y \cup (x - y)$ ayan lieu, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(y) &= \varphi(x) \cap \varphi^*(y) \\ &= (\varphi(x - y) \cup \varphi(y)) \cap \varphi^*(y) \\ &= \varphi(x - y) \cup (\varphi(y) \cap \varphi^*(y)) \\ &= \varphi(x - y), \end{aligned} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Soit $\varphi(x)$ une application définie dans K .

Lorsqu'on a

$$\varphi(x - y) \leq \varphi^*(y)$$

pour $x \geq y$, $x, y \in K$, nous dirons que $\varphi(x)$ est *soustractive* dans K .

THÉOREME 4.1. - Soit $\varphi(x)$ une application σ -additive et soustractive dans B .

Si l'on a

$$x_n \in B \quad (n = 1, 2, \dots), \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots,$$

on a

$$\varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

Posons, en effet,

$$y_n = x_1 - x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

On a alors

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq \dots.$$

On a donc

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} y_n = x_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} x_n.$$

D'après le théorème 3.1 et le lemme 4.1, on a

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(y_n) &= \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_n) \\ &= \varphi(x_1) - \varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n). \end{aligned}$$

Par définition on a

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(y_n) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(x_1 - x_n) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (\varphi(x_1) \cap \varphi^*(x_n)) \\ &= \varphi(x_1) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^*(x_n)). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\varphi(x_1) - \varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n) = \varphi(x_1) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n))^*,$$

d'où

$$\varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n) \cup \varphi^*(x_1) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)) \cup \varphi^*(x_1).$$

$\varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n) \leq \varphi(x_1)$ et $\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) \leq \varphi(x_1)$ ayant lieu, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n) &= \varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n) \cup (\varphi(x_1) \cap \varphi^*(x_1)) \\ &= (\varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n) \cup \varphi^*(x_1)) \cap \varphi(x_1) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) \cup (\varphi(x_1) \cap \varphi^*(x_1)) \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n), \quad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉOREME 4.2. - Soit $\varphi(x)$ une application σ -additive et soustractive dans B . On a

$$\varphi(\varinjlim x_n) = \varinjlim \varphi(x_n) \leq \varinjlim \overline{\varphi(x_n)} = \varphi(\varinjlim x_n),$$

où $\{x_n\}$ est une suite quelconque d'éléments de B .

$\varphi(x)$ étant soustractive on a

$$\begin{aligned} \varphi(1 - \varinjlim x_n) &= \varphi(1) - \varphi(\varinjlim x_n) \\ &= \varphi(1) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} \varphi(\cap_{k=n}^{\infty} x_k))^* \\ &= \cap_{n=1}^{\infty} \varphi(1 - \cap_{k=n}^{\infty} x_k) \\ &= \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} \varphi(x_k'). \quad (^3) \end{aligned}$$

On a donc

$$\varphi(1 - \varinjlim x_n) = \varinjlim \varphi(x_n'),$$

d'où

$$\varphi^*(1) \cup \varphi(\varinjlim x_n) = \varinjlim \varphi^*(x_n').$$

Par hypothèse on a

$$\begin{aligned} \varphi(\varinjlim x_n) &= (\varphi^*(1) \cup \varphi(\varinjlim x_n)) \cap \varphi(1) \\ &= \varphi(1) \cap \varinjlim \varphi^*(x_n') \\ &= \cup_{n=1}^{\infty} (\varphi(1) \cap (\cap_{k=n}^{\infty} \varphi^*(x_k'))) \\ &= \cup_{n=1}^{\infty} (\cup_{k=n}^{\infty} \varphi(1 - x_k')) \\ &= \varinjlim \varphi(x_n). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\varphi(1) - \varinjlim \varphi(x_n') = \varphi(1) - \varphi(\varinjlim x_n').$$

Par hypothèse on a

$$\begin{aligned} \varphi(1) - \varphi(\varinjlim x_n') &= \varphi(1 - \varinjlim x_n') \\ &= \varphi(\varinjlim x_n), \end{aligned}$$

(³) α' s'exprime le complément d'un élément α .

et

$$\begin{aligned}
 \varphi(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n') \\
 &= \varphi(1) \cap (\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n'))^* = \varphi(1) \cap (\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} \varphi^*(x_k')) \\
 &= \cap_{n=1}^{\infty} (\varphi(1) \cap (\cup_{k=n}^{\infty} \varphi^*(x_k'))) = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} \varphi(1 - x_k') \\
 &= \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)}.
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)} = \varphi(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}), \quad \text{C. Q. F. D.}$$

De la définition on déduit aisément le théorème suivant.

THÉOREME 4.3. - Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de T . On a alors

- α) si tout élément x_n de $\{x_n\}$ est égal à un élément x_0 , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$;
- β) si l'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, une suite partielle quelconque converge aussi vers la même limite x_0 ;
- γ) si l'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, la suite $\{x_n\}$ ne peut pas converger vers d'autre élément que x_0 .

On en conclut que B est un L -espace au sens de M. M. FRÉCHET. On peut donc définir continuité d'applications définies dans E .

Soient $\varphi(x)$ une application définie dans E et x_0 un élément de E .

Lorsqu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0),$$

où $\{x_n\}$ est une suite quelconque d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, nous dirons que l'application $\varphi(x)$ est *continue en x_0* . Lorsque $\varphi(x)$ est continue en tout élément de E , on dit que $\varphi(x)$ est continue dans E .

D'après le théorème 4.2, nous avons aisément le théorème suivant.

THÉOREME 4.4. - Une application σ -additive et soustractive dans B est continue dans B .

Lorsque $\mu(x)$ ($\mu(0) = 0$) est une application σ -additive est soustractive dans B , nous dirons que $\mu(x)$ est une *mesure* dans B .

EXEMPLE 2. - Soient T un treillis de BOOLE représenté par la Fig. 2. et $\mu(x)$ une application définie comme suit:

Fig. 2

$$0 \rightarrow 0; \quad a, \quad b^*, \quad c^*, \quad 1 \rightarrow c^*; \quad b, \quad c, \quad a^* \rightarrow 0.$$

On peut aisément vérifier que $\mu(x)$ est une mesure dans T .

Soit $\mu(x)$ une mesure dans B , et soient a et b deux éléments de B .

Posons

$$a \ominus b = (a \cup b) \cap (a \cap b)',$$

$$|a, b|_{\mu} = \mu(a \ominus b).$$

Lorsqu'on a

$$|a, b|_{\mu} = 0,$$

nous dirons que a est μ -égal à b et écrivons

$$a =_{\mu} b.$$

Par définition nous obtenons immédiatement le théorème suivant.

THÉORÈME 4.5. - Soit $\mu(x)$ une mesure dans B . On a

$$\text{i)} \quad a =_{\mu} a,$$

$$\text{ii)} \quad a =_{\mu} b \text{ entraîne } b =_{\mu} a,$$

$$\text{iii)} \quad a =_{\mu} b \text{ et } b =_{\mu} c \text{ entraînent } a =_{\mu} c,$$

où a, b et c sont trois éléments quelconques de B .

La relation $=_{\mu}$ est donc une relation d'équivalence dans B .

Soient $\varphi(x)$ une application définie dans $E (\subseteq B)$. Lorsqu'on a

$$\varphi(x) = \varphi(a)$$

pour $x =_{\mu} a$, nous dirons que $\varphi(x)$ est μ -*indentifiable* en a . Lorsque $\varphi(x)$ est μ -indentifiable en tout élément x de E , $\varphi(x)$ s'appelle application μ -indentifiable dans E .

THÉOREME 4.6. - Soit $\varphi(x)$ une application additive dans B . Pour que $\varphi(x)$ soit une application μ -indentifiable dans B , il faut et il suffit qu'on ait $\varphi(x_0) = \varphi(0)$ pour tout élément x_0 de B tel que $\mu(x_0) = 0$.

Il est clair que la condition est nécessaire. Il suffit de montrer qu'on a $\varphi(a) = \varphi(b)$ pour a et b tels que $a, b \in B$ et $a =_{\mu} b$.

Posons

$$a_0 = a - (a \cap b), \quad b_0 = b - (a \cap b).$$

$a_0, b_0 \leq (a \cup b) \cap (a \cap b)'$ ayant lieu, on a

$$\mu(a_0) = \mu(b_0) = 0.$$

Par hypothèse on a

$$\varphi(a_0) = \varphi(b_0) = \varphi(0).$$

Puisqu'on a

$$a_0 \cup (a \cap b) = a,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi(a_0 \cup (a \cap b)) = \varphi(a_0) \cup \varphi(a \cap b) \\ &= \varphi(0) \cup \varphi(a \cap b). \end{aligned}$$

De même

$$\varphi(b) = \varphi(0) \cup \varphi(a \cap b).$$

On a donc

$$\varphi(a) = \varphi(b), \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Lorsqu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\| x_n, a \|_{\mu} = 0,$$

où $x_n \in B$ ($n = 1, 2, \dots$) et $a \in B$, nous dirons que la suite $\{x_n\}$ converge en mesure (μ) vers a , et écrivons

$$\mu\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

THÉOREME 4.7. - Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de B . Si l'on a

$$\mu\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

on a

$$\mu(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n - a) = \mu(a - \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n) = 0.$$

En effet, on a

$$x_n, a \mid_{\mu} \geq \mu(x_n - a) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

d'où

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \mid x_n, a \mid_{\mu} \geq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \mu(x_n - a).$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mid x_n, a \mid_{\mu} = 0$, on a

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \mu(x_n - a) = 0.$$

D'après le théorème 4.2, on a

$$\mu(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n - a) = 0.$$

De même on obtient

$$\mu(a - \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n) = 0.$$

THÉORÈME 4.8. - Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de B . On a alors

- a) si l'on a $x_n =_{\mu} a$ ($n = 1, 2, \dots$), on a $\mu\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$;
- β) si l'on a $\mu\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, une suite partielle quelconque de $\{x_n\}$ converge aussi en mesure (μ) vers a ;
- γ) si l'on a $\mu\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, la suite $\{x_n\}$ ne peut pas converger en mesure (μ) vers b tel que $a \neq_{\mu} b$.

Preuve.

α) est clair.

β) — On a

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} \mu((x_{j_k} \cup a) \cap (x_{j_k} \cap a')) \leq \bigcup_{j=n}^{\infty} \mu((x_j \cup a) \cap (x_j \cap a')),$$

d'où

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \mu((x_{j_k} \cup a) \cap (x_{j_k} \cap a')) \leq \bigcup_{j=1}^{\infty} \mu((x_j \cup a) \cap (x_j \cap a')),$$

c'est-à-dire

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}, a\| \leq \bigcup_{j=n}^{\infty} \mu((x_j \cup a) \cap (x_j \cap a)').$$

On a donc

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}, a\|_{|\mu} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n, a\|_{|\mu}.$$

De même on a

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}, a\|_{|\mu} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n, a\|_{|\mu}.$$

On a donc

$$\mu\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a.$$

$\gamma)$ — Soient $\mu\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ et $\mu\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. D'après le théorème précédent, on a

$$\mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - a) = \mu(a - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = 0,$$

$$\mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - b) = \mu(b - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = 0.$$

On obtient

$$\begin{aligned} a - b &\leq (a - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cup (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - b) \\ &\leq (a - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cup (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - b), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu(a - b) &\leq \mu(a - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cup \mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même on a

$$\mu(b - a) = 0.$$

On obtient donc

$$\|a, b\|_{|\mu} = 0,$$

C. Q. F. D.

Soit $\varphi(x)$ une application définie dans $E (\subseteq B)$. Lorsqu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(a),$$

où $\{x_n\}$ est une suite quelconque d'éléments de E telle que $\mu\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, nous dirons que l'application $\varphi(x)$ est μ -continue en a . Lorsque $\varphi(x)$ est μ -continue en tout élément de E , on dit que $\varphi(x)$ μ -continue dans E .

THÉOREME 4.9. — Soit $\varphi(x)$ une application σ -additive et soustractive dans B . Si $\varphi(x)$ est μ -identifiable en a , $\varphi(x)$ est μ -continue en a .

Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments telle que

$$\mu\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Par suite on a

$$\mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - a) = \mu(a - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = 0.$$

d'où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \mu\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \mu a.$$

D'après le théorème 4.2, on obtient

$$\varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

$\varphi(x)$ étant μ -identifiable en a , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(a), \quad \text{C. Q. F. D.}$$

5. Intégrales d'applications. — Soit a un élément arbitraire de B . Lorsqu'on peut prendre un élément x tel que $x \in E$, $0 < x \leq a$, nous dirons que E satisfait à la condition (D) relative à B .

Dans toute la suite, on suppose que E satisfait à la condition (D) relative à B .

Soit α un élément de B . Lorsqu'on peut prendre un ensemble Δ_α fini des éléments α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) tels que

$$\alpha = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha_i \in B \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\alpha_i \cap \alpha_j = 0 \quad (i \neq j),$$

Δ_α s'appela *division de α* .

Définissons une intégrale de $\varphi(x)$. D'abord on peut définir $M(\varphi, \Delta_\alpha)$ et $\underline{M}(\varphi, \Delta_\alpha)$ comme suit:

$$M(\varphi, \Delta_\alpha) = \bigcup_{i=1}^n (\alpha_i \cap \mu(\alpha_i)).$$

$$\underline{M}(\varphi, \Delta_\alpha) = \bigcup_{i=1}^n (\alpha_i \cap \mu(\alpha_i)),$$

où

$$\bar{\alpha}_i = \sup_{0 < x \leq \alpha_i} \varphi(x), \quad \underline{\alpha}_i = \inf_{0 < x \leq \alpha_i} \varphi(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Par définition on a

$$M(\varphi, \Delta_\alpha) \leq \bar{M}(\varphi, \Delta_\alpha).$$

Cela posé, considérons une autre division $\Delta_{\alpha'} (= \{b_1, b_2, \dots, b_{i_v}\})$. Si chaque élément b_j de $\Delta_{\alpha'}$ est inférieur ou égal à un et un seul élément α_i de Δ_α , nous dirons que $\Delta_{\alpha'}$ est plus fine que Δ_α , et écrivons $\Delta_\alpha \leq \Delta_{\alpha'}$.

Il est clair que cette relation $<$ remplit les axiomes d'ordre.

Désignons par $\{\Delta_\alpha\}$ l'ensemble de toutes les divisions de α . On voit aisément que $\{\Delta_\alpha\}$ est un ensemble filtrant supérieurement.

Par définition on a les inégalités

$$\underline{M}(\varphi, \Delta_\alpha) \leq \underline{M}(\varphi, \Delta_{\alpha'}) \leq \bar{M}(\varphi, \Delta_{\alpha'}) \leq M(\varphi, \Delta_\alpha)$$

pour $\Delta_\alpha \leq \Delta_{\alpha'}$. On obtient donc

$$\int_\alpha \varphi(x) d\mu(x) \leq \int_\alpha \varphi(x) d\mu(x),$$

où

$$\int_\alpha \varphi(x) d\mu(x) = \sup_{\{\Delta_\alpha\}} \underline{M}(\varphi, \Delta_\alpha),$$

$$\int_\alpha \varphi(x) d\mu(x) = \inf_{\{\Delta_\alpha\}} \bar{M}(\varphi, \Delta_\alpha).$$

On appelle $\int_a^{\sim} \varphi(x) d\mu(x)$ *intégrale supérieure* de $\varphi(x)$ sur a et $\int_a \varphi(x) d\mu(x)$ *intégrale (lebesguienne)* sur a .

En particulier, lorsqu'on a

$$\int_a^{\sim} \varphi(x) d\mu(x) = \int_a \varphi(x) d\mu(x),$$

nous dirons que $\varphi(x)$ est *intégrable au sens de Riemann* (ou brièvement *R-intégrable*) sur a et cet élément commun s'appelle *intégrale riemannienne* de $\varphi(x)$ sur a et se note $(R) \int_a \varphi(x) d\mu(x)$.

Considérons plus précisément l'intégrale lebesguienne.

THÉOREME 5.1. - Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des applications définies dans E .

(i) Si $\mu(a) = 0$, on a

$$\int_a \varphi(x) d\mu(x) = 0.$$

(ii) Si $\varphi(x) \leq \psi(x)$, on a

$$\int_a \varphi(x) d\mu(x) \leq \int_a \psi(x) d\mu(x).$$

(iii) L'intégrale $\int_a \varphi(x) d\mu(x)$ est σ -additive dans B .

Les propositions (i) et (ii) sont des conséquences immédiates de la définition de l'intégrale.

D'abord nous démontrons que $\int_a \varphi(x) d\mu(x)$ est additive. Désignons par a et b deux éléments de B tels que $a \cap b = 0$. Soient $\Delta_a (= \{a_1, a_2, \dots, a_m\})$, $\Delta_b (= \{b_1, b_2, \dots, b_n\})$ une division de a et celle de b respectivement. Posons

$$\Delta_{a \cup b} = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n\},$$

et

$$\begin{aligned} \underline{M}(\varphi, \Delta_{a \cup b}) &= (\cup_{i=1}^m (\alpha_i \cap \mu(a_i))) \cup (\cup_{j=1}^n (\beta_j \cap \mu(b_j))) \\ &= \underline{M}(\varphi, \Delta_a) \cup \underline{M}(\varphi, \Delta_b). \end{aligned}$$

où

$$\underline{\alpha}_i = \inf_{0 < x \leq \alpha_i} \varphi(x), \quad \underline{\beta}_j = \inf_{0 < x \leq \beta_j} \varphi(x).$$

Soit $\Delta'_{a \sim b}$ une division plus fine que $\Delta_{a \sim b}$. On a

$$\underline{M}(\varphi, \Delta'_{a \sim b}) \geq \underline{M}(\varphi, \Delta_{a \sim b}) = \underline{M}(\varphi, \Delta_a) \cup \underline{M}(\varphi, \Delta_b).$$

On obtient donc

$$\int_{a \sim b} \varphi(x) d\mu(x) \geq \int_a \varphi(x) d\mu(x) \cup \int_b \varphi(x) d\mu(x).$$

Soient Δ'_a et Δ'_b deux divisions plus fines que Δ_a et Δ_b respectivement. On a

$$\underline{M}(\varphi, \Delta_{a \sim b}) \leq \underline{M}(\varphi, \Delta'_a) \cup \underline{M}(\varphi, \Delta'_b).$$

On obtient donc

$$\int_{a \sim b} \varphi(x) d\mu(x) \leq \int_a \varphi(x) d\mu(x) \cup \int_b \varphi(x) d\mu(x).$$

Il en résulte

$$\int_{a \sim b} \varphi(x) d\mu(x) = \int_a \varphi(x) d\mu(x) \cup \int_b \varphi(x) d\mu(x).$$

Ensuite pour démontrer (iii), il suffit que $\int_a \varphi(x) d\mu(x)$ est σ -sous-additive.

Soient $a = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in B$ ($n = 1, 2, \dots$), et $\Delta_a = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ une division de a . Il est clair que $\{a_n \cap b_1, a_n \cap b_2, \dots, a_n \cap b_p\}$ est une division de a_n . Posons

$$\alpha_i = \inf_{0 < x \leq \alpha_i} \varphi(x) \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

$$\underline{\alpha}_{ni} = \inf_{0 < x \leq a_n \cap b_i} \varphi(x) \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, p \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

On a alors

$$\underline{\alpha}_i \leq \underline{\alpha}_{ni} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\underline{M}(\varphi, \Delta_a) &\leq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^p (\alpha_{ni} \cap \mu(a_n \cap b_i)) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \underline{M}(\varphi, \Delta_{a_n}) \\ &\leq \bigcup_{n=1}^{\infty} \int_{a_n} \varphi(x) d\mu(x).\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_a \varphi(x) d\mu(x) \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} \int_{a_n} \varphi(x) d\mu(x), \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Il faut remarquer que la proposition suivante ne subsiste pas nécessairement.

Soit c une constante. On a alors

$$\int_a (c \cap \varphi(x)) d\mu(x) = c \cap \int_a \varphi(x) d\mu(x).$$

D'après les théorèmes 4.6 et 5.1, nous avons le théorème suivant.

THÉOREME 5.2. — *Soit $\varphi(x)$ une application définie dans E . L'intégrale $\int_a \varphi(x) d\mu(x)$ est μ -identifiable dans B .*

THÉOREME 5.3. — *Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des applications définies dans E et R -intégrables sur a . On a alors*

$$\begin{aligned}&(R) \int_a (\varphi(x) \cup \psi(x)) d\mu(x) \\ &= (R) \int_a \varphi(x) d\mu(x) \cup (R) \int_a \psi(x) d\mu(x).\end{aligned}$$

Soit, en effet, $\Delta_a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une division de a . Posons

$$\underline{\alpha}_i = \inf_{0 < x \leq a_i} \varphi(x), \quad \underline{\beta}_i = \inf_{0 < x \leq a_i} \psi(x),$$

$$\underline{\gamma}_i = \inf_{0 < x \leq a_i} (\varphi(x) \cup \psi(x)) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Soient Δ_a' une division plus fine que Δ_a et Δ_a'' une division plus fine que Δ_a' . On a alors

$$\underline{M}(\varphi \cup \psi, \Delta_a'') \geq \underline{M}(\varphi, \Delta_a') \cup \underline{M}(\psi, \Delta_a).$$

On obtient donc

$$\int_a (\varphi(x) \cup \psi(x)) d\mu(x) \geq (R) \int_a \varphi(x) d\mu(x) \cup (R) \int_a \psi(x) d\mu(x).$$

De même a

$$\int_a (\varphi(x) \cup \psi(x)) d\mu(x) \leq (R) \int_a \varphi(x) d\mu(x) \cup (R) \int_a \psi(x) d\mu(x).$$

On a donc

$$(R) \int_a (\varphi(x) \cup \psi(x)) d\mu(x) = (R) \int_a \varphi(x) d\mu(x) \cup (R) \int_a \psi(x) d\mu(x).$$

THÉOREME 5.4. - Soit E_0 un sous-ensemble de E qui satisfait à la condition (D) relative à B . Soit $\varphi(x)$ une application définie dans E et (R) -intégrable sur a . On a alors

$$(R) \int_a \varphi(x) d\mu(x) = (R) \int_a \varphi_0(x) d\mu(x),$$

où $\varphi_0(x)$ exprime la restriction de $\varphi(x)$ dans E_0 .

Soit, en effet, $\Delta_a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une division de a . Posons

$$\alpha_i = \inf_{0 < x \leq a_i} \varphi(x), \quad \alpha_{0i} = \inf_{0 < x \leq a_i} \varphi_0(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$\alpha^i \leq \alpha_{0i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ayant lieu, on a

$$\underline{M}(\varphi, \Delta_a) \leq \underline{M}(\varphi_0, \Delta_a'),$$

où Δ_a' est une division plus fine que Δ_a . On obtient donc

$$(R) \int_a \varphi(x) d\mu(x) \leq \int_a \varphi_0(x) d\mu(x).$$

De même on a

$$(R) \int_a \varphi(x) d\mu(x) \geq \int_a \varphi_0(x) d\mu(x).$$

Il en résulte

$$(R) \int_a \varphi(x) d\mu(x) = (R) \int_a \varphi_0(x) d\mu(x).$$

RÉFÉRENCES

- [1] T. SATŌ, *Sur l'analyse générale (Théorie des fonctions d'ensemble)*, Annali di Mat., 47 253-317 (1959).
- [2] — —, *Sur les treillis de Boole *-généraux*, Proc. Japan Acad., 36, 207-212 (1960)