Zur Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes und seiner Umkehrung.

Herrn WILHELM BLASCHKE zum 60. Geburtstag gewidmet.

Von OTTO HAUPT (in Erlangen).

1. Einleitung.

1.1. Bekannt ist folgender Satz ⁽¹⁾:

(1) Wird ein stetig gekrümmtes ⁽²⁾ Oval $\mathbf{O}$ von einem Kreis in $2n$ Punkten ($n \geq 2$) getroffen, so besitzt $\mathbf{O}$ mindestens $2n$ Scheitel.

Dabei wird hier ⁽³⁾ als Scheitel jeder Punkt $P \in \mathbf{O}$ bezeichnet, dessen zyklischer Ordnungswert mindestens Vier ist (d. h. jeder Punkt, in dessen beliebig kleiner Umgebung mehr als drei auf einem Kreis gelegener Punkte von $\mathbf{O}$ existieren). Da jedes Oval mit geeigneten Kreisen (mindestens) vier Punkte gemeinsam hat, folgt aus (1) speziell der ⁽⁴⁾

Vierscheitelsatz: Jedes stetig gekrümmte Oval besitzt mindestens vier Scheitel.

Übrigens kann (1) auch so ausgesprochen werden:

(1) Jedes stetig gekrümmte Oval, dessen zyklischer Ordnungswert mindestens $2n$ beträgt, besitzt *mindestens* $2n$ Scheitel.

⁽¹⁾ BLASCHKE, W., *Kreis und Kugel*, Leipzig 1916, S. 161; MUKHOPADHYAYA, S., (I) *Some general theorems in the geometry of a plane curve*; «Calcutta University Publications 1922 = Collected geometrical Papers», Part. I (Calcutta 1929), S. 118; ferner (II) *Extended minimum number theorems of cyclic and sextactic points on a plane convex oval*, «Math. Zeitschr.», 33 (1931), S. 648 ff.

⁽²⁾ Die hier (Nr. 1.1. und 1.2.) betrachteten Ovale bzw. Konvexbogen sollen zweimal stetig differenzierbar sein und überall endliche, von Null verschiedene Krümmung besitzen; das soll heißen: Das Oval gestattet eine Darstellung $x = f(t)$, $y = g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, wobei f und g zweimal stetig differenzierbar sind mit $x'y' - x'y'' \neq 0$. Wir bezeichnen ein solches Oval kurz als stetig gekrümmt.

⁽³⁾ In der klassischen Differentialgeometrie wird als «Scheitel» jeder Punkt des Ovals erklärt, der eine Extremstelle für den Krümmungsradius, d. h. für den Radius des (unter unserer Differenzierbarkeitsvoraussetzung existierenden) freien Krümmungskreises (vgl. im Text Nr. 1.3.) liefert. In dem für uns in Betracht kommenden Falle, dass die Scheitel im Sinne der oben im Text gegebenen Definition isoliert liegen, sind beide Definitionen äquivalent; vgl. HAUPT, *Zur geometrischen Kennzeichnung der Scheitel ebener Kurven*, «Archiv. d. Math.», 1. (1948), S. 102 ff.

⁽⁴⁾ MUKHOPADHYAYA, S., (I) *New methods in the geometry of a plane arc: I. Cyclic and sextactic points*, «Bull. Calcutta math. Soc., Vol. I. (1909) = Collected geometrical papers», Part. I, S. 15, prop. III., sowie (II) a. a. O. ⁽¹⁾; BLASCHKE, W., (I) a. a. O. ⁽¹⁾, S.

1.2. Weniger bekannt als (1) scheint der folgende Satz ⁽⁵⁾ zu sein :

(2) Jeder stetig gekrümmte Konvexbogen vom zyklischen Ordnungswert Vier besitzt *höchstens* vier Scheitel, woraus zusammen mit (1) noch folgt :

(3) Ein stetig gekrümmtes Oval ist vom zyklischen Ordnungswert Vier dann und nur dann, wenn es *genau* vier Scheitel besitzt ⁽⁶⁾.

1.3. Noch weniger bekannt dürften die in Nr. 2.2. formulierten weitgehenden Verallgemeinerungen sein, deren die in Nr. 1.1. und 1.2. angeführten Sätze fähig sind, Verallgemeinerungen nämlich in dem Sinne, dass man die Kreise ersetzen kann z. B. ⁽⁷⁾ durch Ellipsen, wobei dann entsprechend die Zahl Sechs an Stelle der Zahl Vier tritt, oder allgemein ⁽⁷⁾ durch Kurven K mit-grob gesprochen- der Eigenschaft, dass je zwei Kurven K höchstens $2t$ Punkte gemeinsam haben (t fest mit $t \geq 1$ für alle K) (Genauere Angabe der Voraussetzungen in Nr. 2.1.). Für Satz (2) ist diese Verallgemeinerung unter sehr schwachen Annahmen über die Kurven K sowie über die an Stelle der Konvexbogen tretenden Bogen bewiesen ⁽⁵⁾. Demgegenüber setzen die uns bekannten Beweise der entsprechenden Verallgemeinerung von Satz (1) mehr voraus ⁽⁸⁾. Es soll deshalb ein diese Voraussetzungen vermeidender und zugleich, wie uns scheint, einfacherer ⁽⁹⁾ Beweis des verallgemeinerten Satzes (1) angegeben werden, ferner ein, ebenfalls etwas vereinfachter, Beweis

160, sowie (II) *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, I., 3. Aufl., Berlin 1930, S. 30 ff. und die dort (S. 32) angegebene Literatur; dazu noch v. Sz. NAGY, G., *Ein Beweis des Vierscheitelsatzes*, « Jahresber. d. d. Math. Ver. », 52 (1942), Abt. I, S. 198-200; Weitere Literatur bei Bonnesen-Fenchel, *Theorie d. konvexen Körper*, « Ergebnisse d. Math. u. Grenzgebiete », 3. Bd., Berlin 1935; Für *nicht-konvexe* Kurven vgl. H. Kneser, *Neuer Beweis des Vierscheitelsatzes*, Christ. Huygens Bd. 2 (1922-23), 315 ff.

⁽⁵⁾ Vgl. HAUPT, *Zur Theorie der Realitätsordnungen*, « Monatsh. f. Math. u. Physik », 40 (1933), S. 47.

⁽⁶⁾ JUEL, C., *Om simple cykliske kurver*, « Danske Vidensk. Selskab Skrifter, 7. R., naturv. og matem. Afd. » VIII, Nr. 6 (1911); BLASCHKE, a. a. O. ⁽⁴⁾, (II) S. 49, Aufg. 21; BOSE, R. C., *Circles of curvature*, « Math. Zeitschr. », 35₂ (1932), S. 24; HAUPT, a. a. O. ⁽⁵⁾, S. 48; BOL, G., *Ein Satz über Eiliniën*, « Abh. math. Seminar Hamburg », 13 (1940), S. 319.

⁽⁷⁾ Bezüglich Satz (1) sowie bezüglich des Vierscheitelsatzes siehe MUKHOPADHYAYA a. a. O. ⁽⁴⁾ und ⁽⁴⁾. - Anmerkung bei der Korrektur: Inzwischen [erschien noch G. BOL, *Eiliniën und sextaktische Punkte*, « Archiv. d. Math. », 1 (1948), S. 94 ff., worin unser Satz (B) (1) in Nr. 2.2. für den speziellen Fall bewiesen wird, dass der Grundbogen B ein analytisches Oval ist und dass die Ordnungscharakteristiken die Kegelschnitte sind. Die ausserdem dort (§ 8) gewonnenen Sätze dürften sich als Folgerungen aus unserem Satz (B) (1) für den Fall eines Bogens B ergeben.

⁽⁸⁾ MUKHOPADHYAYA a. a. O. ⁽⁴⁾ (I) und (II) je Nr. 1. und 2.

⁽⁹⁾ Wir bedienen uns nämlich der Zurückführung auf den Fall $t=0$ (in unserer späteren Bezeichnung $k=1$) vermittelt vollständiger Induktion, wodurch mancherlei Beweisschwierigkeiten vermeidbar werden. Dafür muss das Auftreten von Grundpunkten (vgl. Nr. 2.1.) auf dem Grundbogen zugelassen werden, was aber keinerlei Komplikationen mit sich bringt.

von Satz (2). Damit ist dann auch Satz (3) entsprechend verallgemeinert. (Genaue Formulierung der Verallgemeinerungen in Nr. 2.2.).

Die im Falle der zyklischen Ordnung gemachten Differenzierbarkeitsannahmen ⁽²⁾ sind damit äquivalent ⁽¹⁰⁾, dass *in jedem Punkt des Ovals der freie Krümmungskreis* (eindeutig) *existiert* (und *endlichen, von Null verschiedenen Radius* besitzt); bei den ins Auge gefassten Verallgemeinerungen entspricht dieser Differenzierbarkeitsannahme die Forderung der (eindeutigen) *Existenz der « k-Paratingente »* in jedem Punkt (vgl. Nr. 2.1., IV.). Diese Differenzierbarkeitsvoraussetzung IV. ist mindestens für Satz (1) und (3) wesentlich, insofern ohne sie der Vierscheitelsatz und damit auch Satz (1) und (3) bzw. seine Verallgemeinerung nicht zu gelten braucht, wie einfache Beispiele zeigen (vgl. Nr. 3.2.1.2.). *Setzt man aber die Existenz des freien Krümmungskreises nicht voraus* (auch nicht die der Tangente), so gilt doch wenigstens (vgl. Nr. 3.2.1.1.) der Satz:

(4) Jedes Oval, welches von einem Kreis in $(3t + 1)$ Punkten ($t \geq 1$) getroffen wird, besitzt mindestens $(t + 1)$ Scheitel (gleichgültig, ob in jedem Punkt des Ovals der freie Krümmungskreis existiert oder nicht).

Als Spezialfall für $t = 1$ ergibt sich daraus der

Zweischeitelsatz: *Jedes Oval besitzt mindestens zwei Scheitel.*

Die Beweisüberlegungen gründen sich auf eine Weiterbildung und Vertiefung der Methode von Mukhopadhyaya ⁽¹¹⁾. Mit ihr lassen sich übrigens auch (rein geometrisch) Verallgemeinerungen der Ovalsätze von Böhmer, Carleman und Mohrmann ⁽¹²⁾ gewinnen, sowie Verallgemeinerungen anderer Kennzeichnungen ⁽¹³⁾ der Ovale vom zyklischen Ordnungswert Vier beweisen; ferner ist sie Hilfsmittel bei ordnungsgeometrischen Strukturuntersuchungen ⁽¹⁴⁾. *Genauere Angaben über die beim Beweise der einzelnen Sätze jeweils benutzten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen finden sich im Zusatz zu Nr. 2.2.*

Es bedarf kaum der Hervorhebung, dass durch die nachstehenden Betrachtungen die in Rede stehenden Sätze als solche der direkten Infinitesimalgeometrie sich erweisen.

⁽¹⁰⁾ Vgl. HAUPT-AUMANN-PAUC, *Differential- u. Integralrechnung*, 2. Aufl., Berlin 1948, Bd. II., Nr. 2.2.6.1., Satz 1a.

⁽¹¹⁾ MUKHOPADHYAYA, a. a. O. ⁽¹⁾.

⁽¹²⁾ Vgl. HAUPT, *Über Verallgemeinerungen des Böhmerschen u. verwandter Ovalsätze*, « Abh. math. Seminar Hamburg », 15 (1943), S. 130 ff.

⁽¹³⁾ HAUPT, *Verallgemeinerung eines Satzes usw.*, « Sitz. Ber. d. medizin.-physikal. Sozietät zu Erlangen », 65 (1934), S. 279 ff., sowie ebenda 67 (1935), S. 13.

⁽¹⁴⁾ Vgl. z. B. HAUPT, *Zyklisch ordnungshomogene Bogen*, « Journ. f. d. r. u. angew. Math. », 178 (1937), S. 14 ff. und 180 (1939), S. 44 ff.

2. Formulierung der verallgemeinerten Sätze.

2.1. Voraussetzungen.

Wir stellen zunächst zusammen, was bei den nachstehenden Betrachtungen vorausgesetzt wird ⁽¹⁵⁾.

I. Grundbogen (Grundkurve). In einem einfach zusammenhängenden Gebiet G (Grundgebiet) ⁽¹⁶⁾ der euklidischen Ebene E_2 sei ein einfacher abgeschlossener oder offener Bogen, der Grundbogen B , oder eine einfache, geschlossene (beschränkte) Kurve, die Grundkurve C gegeben. Jeder Teilbogen von B oder C ist ebenfalls ein Grundbogen insofern nämlich, als er den jetzt anzugebenden Voraussetzungen I-III. oder I-IV. genügt. Es soll B bzw. C mit keiner der (sogleich zu erklärenden) Ordnungscharakteristiken Teilbogen gemeinsam haben. Wenn im Folgenden vom « Grundbogen » ohne weiteren Zusatz die Rede ist, so soll damit auch der Fall einer Grundkurve einbegriffen sein.

II. Ordnungscharakteristiken. (a) In G ist ein System k von sogenannten Ordnungscharakteristiken, kurz OCh, gegeben der folgenden Art: Jede OCh ist entweder ein einfacher, offener Bogen, dessen (ev. zusammenfallende) Endpunkte der Begrenzung von G angehören, oder eine einfache, geschlossene Kurve. — (b) *Existenz und Eindeutigkeit der OCh.* Durch k verschiedene Punkte von G , die zu beliebigen verschiedenen Punkten des Grundbogens je hinreichend benachbart sind, geht mindestens eine OCh. Es gibt höchstens endlich viele (ev. keine) (k -)Grundpunkte, d. h. Punkte, die allen OCh gemeinsam sind; sämtliche Grundpunkte sollen auf dem Grundbogen liegen. Irgend zwei verschiedene OCh haben außer den Grundpunkten höchstens $(k-1)$ Punkte in G gemeinsam; dabei ist die sogenannte Grundzahl k eine, durch das System k der OCh bestimmte, natürliche Zahl ≥ 1 . Für jede OCh K soll BK nirgends dicht liegen auf B , es soll also kein K mit B einen Teilbogen gemeinsam haben. — (c) *Stetigkeit der Ordnungscharakteristiken.* Sind P_j' , $j=1, \dots, k$, irgend k untereinander und von den Grundpunkten verschiedene Punkte des Grundbogens und ist K' die, alle P_j' enthaltende OCh, so existiert zu jedem $\eta > 0$ ein $\delta = \delta(\eta; P_1', \dots, P_k') > 0$ von folgender Eigenschaft: (1') jede OCh K , die nicht fremd ist je zur δ -Umgebung eines jeden der P_j' , liegt in der η -Umgebung von K' ; und umgekehrt liegt K' in der η -Umgebung von K . — (2') Ist T' ein Teilbogen von K' mit den Begrenzungspunkten Q', R' auf K' , so gibt es in der δ -Umgebung von Q' bzw. R' je einen Punkt Q bzw. R von K derart, dass Q, R die Endpunkte eines zu T' η -benachbarten Teilbogens T von K sind. — (d) *Verhalten in der Umgebung der Grundpunkte.* Im Zusammenhang mit der Stetigkeit der OCh fordern wir

⁽¹⁵⁾ Zu Vor. I — III. vgl. HAUPT, a. a. O. ⁽⁵⁾, Nr. 1.1.

⁽¹⁶⁾ Das Grundgebiet G kann auch mit E_2 identisch sein; als Begrenzung von G gelte dann die uneigentliche Gerade der zur affinen Ebene erweiterten E_2 .

nach folgendes: (1) Jeder *Grundpunkt* soll « *im allgemeinen* » *Schnittpunkt* ⁽¹⁷⁾ von **B** mit den OCh sein, d. h.: ist der Grundpunkt G Stützpunkt ⁽¹⁷⁾ der OCh **K** mit **B**, so gibt es zu **K** beliebig benachbarte OCh **K'** derart, dass G *Schnittpunkt* von **K'** mit **B** ist. — (2) Wir werden es fast ausschliesslich mit dem Fall zu tun haben, dass die OCh nur endlich viele Punkte mit **B** gemeinsam haben; die auftretenden Schnitt- und Stützpunkte sind dann stets isoliert. Ist die Anzahl der gemeinsamen Punkte von **B** mit den OCh endlich oder speziell beschränkt (also für jede OCh **C** nicht grösser als eine (von **C** unabhängige) feste Zahl), so soll gelten: Es seien $Q_1, \dots, Q_{k-1}$, feste, von den Grundpunkten verschiedene Punkte von **B**; ferner sei G' ein Grundpunkt und U' eine, zu den übrigen Grundpunkten sowie zu den $Q_j, j=1, \dots, k-1$, fremde Umgebung von G' auf **B**. Durch irgend einen, von G' verschiedenen Punkt $Q' \in U'$ und durch die $Q_1, \dots, Q_{k-1}$ ist eindeutig eine OCh **C'** bestimmt. Die Forderung lautet nun: Konvergiert Q' gegen G' , so sollen die zugehörigen **C'** einen Bogen bzw. eine Kurve als Limes ⁽¹⁸⁾ besitzen, der (die) mit **B** nur endlich viele Punkte gemeinsam hat. (Vgl. weiteres in Nr. 3.12.).

Anmerkung. Man beachte, dass, falls keine Grundpunkte vorhanden sind (wie z. B. bei den Kreisen als OCh), die Forderung (d) gegenstandslos wird und als von selbst erfüllt zu gelten hat.

Soweit im Folgenden von *gemeinsamen Punkten zweier OCh* oder *einer OCh mit dem Grundbogen* die Rede ist und nicht ausdrücklich anderes bemerkt wird, bleiben Grundpunkte stets ausser Betracht.

III. Jede OCh liegt normal zum Grundbogen: das soll heissen: Hat der Grundbogen **B** mit der OCh **K** die Punkte $P_1, \dots, P_r$ gemeinsam ($r \geq 3$), wobei auch die Grundpunkte einbegriffen seien, so gibt es stets eine Anordnung der P_ρ , etwa eben diese: $P_1, \dots, P_r$, derart, dass bei einer der beiden Orientierungen von **B** bzw. **K** die P_ρ in eben dieser Reihenfolge durchlaufen werden; man nennt dann die Reihenfolge (die Anordnung) eine natürliche auf **B** bzw. auf **K**. Ist jede auf **B** natürliche Anordnung auch natürlich auf **K**, so heissen **B** und **K** normal zueinander gelegen. (Aus dieser Definition folgt insbesondere, dass im Falle einer Grundkurve auch alle OCh *Kurven* sein müssen) ⁽¹⁹⁾. Da wir im Folgenden stets OCh durch mindestens

⁽¹⁷⁾ Betr. Schnitt- und Stützpunkt vgl. a. a. O. ⁽⁶⁾, Nr. 1.3. Soweit von Schnittpunkten die Rede ist, wird hier der Durchschnitt von **B** mit jeder OCh als endlich angenommen.

⁽¹⁸⁾ Ist das Grundgebiet **G** kompakt, so sei die Konvergenz als metrische (im Hausdorffschen Sinne) erklärt, aber mit dem Zusatz betr. Teilbogen wie in Nr. 2.1., II., (c), (2'). Ist **G** nicht kompakt, so herrsche metrische Konvergenz in jedem kompakten Teil von **G**.

⁽¹⁹⁾ Ist nämlich **B** eine Kurve, aber **K** ein Bogen mit $P_i \in \mathbf{BK}$, $i=1, \dots, r$, wo $r \geq 3$, so sind z. B. auch $P_2, P_3, \dots, P_r, P_1$ auf **B** natürlich angeordnet, aber nicht auf **K**, falls $P_1, P_2, \dots, P_r$ natürliche Anordnung auf **K** ist. Da (Nach Vor., vgl. a. a. O. ⁽¹⁵⁾) das Grundgebiet von einer einfachen Kurve **J** begrenzt wird, kann man aber erforderlichenfalls die OCh, soweit sie Bogen sind, stets zu Kurven erweitern (durch Hinzunahme eines geeigneten Teilbogens von **J**).

($k+1$) Punkte von $\mathbf{B}$ betrachten, ist die vorstehende Definition einschlägig jedenfalls für $k > 2$; für $k = 1$ nur, wenn Grundpunkte vorhanden sind.

IV. Eindeutigkeit der k -Paratingenten an $\mathbf{B}$. Wir bemerken zunächst: Es sei Q ein Punkt von $\mathbf{B}$. Ferner sei V eine Umgebung von Q auf $\mathbf{B}$ und $\mathbf{K}$ eine OCh derart, dass $\mathbf{KV}$ mindestens Q von den Grundpunkten verschiedene Punkte enthält, wobei $q \geq k$ ist. Zieht sich dann V auf den zugehörigen Punkt Q zusammen und existiert dabei stets eine OCh der eben beschriebenen Art, und zwar bei festem q , so soll für $V \rightarrow Q$ jeder Limes einer (konvergenten ⁽¹⁸⁾ Teil-)Schar solcher OCh als eine k -Paratingente an $\mathbf{B}$ in Q bezeichnet werden. Die Vor. IV. besagt nun: *Jede k -Paratingente ist ein durch Q eindeutig bestimmter einfacher Bogen (oder speziell eine einfache Kurve) $P = P(Q; q)$ der normal liegt zu $\mathbf{B}$ und mit $\mathbf{B}$ nur eine auf $\mathbf{B}$ nirgends dichte Menge von Punkten gemeinsam hat.* Es soll ferner der gleiche Limes P sich ergeben, wenn q , bei festgehaltenem Q durch grössere Zahlen ersetzt wird, sofern zu diesen Zahlen zugehörige OCh $\mathbf{K}$ existieren.

Ist speziell $q \geq k+1$, so sprechen wir von Q als von einem k -Scheitel von $\mathbf{B}$ und dann von der zugehörigen Paratingente als einer k -Scheitelparatingente. Für die k -Paratingente $\mathbf{P}$ im Punkte Q bezeichnen wir Q auch als Schmiegpunkt und die vom Schmiegpunkt verschiedenen Punkte aus $\mathbf{BP}$ als Begleitpunkte von Q (auf $\mathbf{BP}$) oder als (auf $\mathbf{BP}$) mit Q verbunden, unter Umständen (vgl. Nr. 3.1.1.) einschliesslich der Grundpunkte. Nach Voraussetzung liegen die mit Q verbundenen Punkte nirgends dicht auf $\mathbf{B}$. Die k -Paratingente ist (zufolge Vor.) stetige Funktion des Schmiegpunktes. Wir bemerken noch ausdrücklich, dass der eben bei der Definition der Paratingente verwendete Punkt Q auch Grundpunkt sein kann (während die Punkte, durch welche die OCh $\mathbf{K}$ festgelegt wird, verabredungsgemäss keine Grundpunkte sein dürfen).

Für den Fall, dass die OCh mit $\mathbf{B}$ nur endlich viele Punkte gemeinsam haben, werde noch folgendes gefordert: Es sei Q Schmiegpunkt der k -Paratingente $\mathbf{P}$ und Limes einer genau geraden bzw. ungeraden Anzahl von, keine Grundpunkt enthaltenden, Punkten von $\mathbf{BK}'$, wobei $\mathbf{K}'$ die gegen $\mathbf{P}$ konvergierenden OCh sind; dann soll Q auf $\mathbf{P}$ Schnitt- bzw. Stützpunkt mit $\mathbf{B}$ sein oder umgekehrt Stütz- bzw. Schnittpunkt, je nachdem Q Grundpunkt ist oder nicht. Andererseits ist der Schmiegpunkt S von $\mathbf{P}$ Limes einer geraden bzw. ungeraden Anzahl von Punkten aus $\mathbf{BK}'$, je nachdem S Stützpunkt oder Schnittpunkt auf $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{B}$ ist oder umgekehrt.

Etwas schwächer als Vor. IV. ist die (in IV. enthaltene) Vor.

Iva. Eindeutigkeit der k -Scheitelparatingenten; d. h. zu jedem k -Scheitel als Schmiegpunkt existiert genau eine k -Paratingente. Im übrigen soll jede k -Paratingente wieder ein einfacher, zu $\mathbf{B}$ normal liegender Bogen (Kurve), braucht aber nicht durch ihren Schmiegpunkt

eindeutig bestimmt zu sein (es sei denn, dass dieser Schmiegpunkt ein k -Scheitel ist).

Definition der Orientierung der Ordnungscharakteristiken und Paratingenten. Bei Festlegung einer Orientierung $\mathfrak{o}$ von $\mathbf{B}$ lassen sich die von uns zu betrachtenden OCh und k -Paratingenten folgendermassen orientieren: Durch $\mathfrak{o}$ wird zunächst der Begriff der (positiven und negativen) *Seite* von $\mathbf{B}$ in der Umgebung eines jeden inneren Punktes von $\mathbf{B}$ festgelegt⁽²⁰⁾. Ferner wird durch $\mathfrak{o}$ eindeutig eine Orientierung auf einer jeden OCh $\mathbf{K}$ festgelegt, falls $\mathbf{K}$ mit $\mathbf{B}$ mindestens 3 Punkte, etwa R_1, R_2, R_3 gemeinsam hat; ist nämlich R_1, R_2, R_3 die (bzw. falls $\mathbf{B}$ eine Kurve ist, eine) natürliche Anordnung der R_i auf $\mathbf{B}$ bezüglich $\mathfrak{o}$, so werde auf $\mathbf{K}$ diejenige Orientierung gewählt, bei der R_1, R_2, R_3 auch auf $\mathbf{K}$ die (bzw. eine) natürliche Anordnung ist. Von zwei Punkten auf $\mathbf{B}$ oder auf $\mathbf{K}$ (oder auf einem echten Teilbogen von $\mathbf{L}$ bzw. $\mathbf{R}$, falls $\mathbf{L}$ bzw. $\mathbf{R}$ eine Kurve ist) wird dann als oberer bzw. unterer (als oberhalb bzw. unterhalb des anderen auf $\mathbf{B}$ oder $\mathbf{K}$ gelegen) derjenige bezeichnet, der dem anderen auf $\mathbf{B}$ oder $\mathbf{K}$ (bezüglich der Orientierung) vorangeht oder nachfolgt; dementsprechend ist die Bezeichnung *obere* und *untere* (einseitige) Umgebung des Punktes Q auf $\mathbf{B}$ oder $\mathbf{K}$ zu verstehen. Sind R, Q die Begrenzungspunkte eines orientierten Teilbogens $\mathbf{T}$ von $\mathbf{B}$ oder $\mathbf{K}$ (auf $\mathbf{B}$ oder $\mathbf{K}$), so heisse der obere bzw. untere von ihnen End- bzw. Anfangspunkt von $\mathbf{T}$. Beim Grenzübergang zu einer Paratingente lässt sich die Orientierung von den OCh auf die Paratingente übertragen. Die für uns späterhin in Betracht kommenden OCh $\mathbf{K}$ und k -Paratingenten $\mathbf{P}$ besitzen weiter die Eigenschaft, dass eine untere Umgebung auf $\mathbf{K}$ bzw. auf $\mathbf{P}$ eines ausgezeichneten Punktes von $\mathbf{BK}$ bzw. des jeweiligen Schmiegpunktes von $\mathbf{P}$ *fremd* ist zur einen Seite von $\mathbf{B}$; wir bezeichnen dann zwei OCh $\mathbf{K}', \mathbf{K}''$ bzw. zwei k -Paratingenten $\mathbf{P}', \mathbf{P}''$ als gleichartig bzw. als ungleichartig (gelegen bezüglich $\mathbf{B}$), je nachdem untere Umgebungen der ausgezeichneten Punkte von $\mathbf{K}', \mathbf{K}''$ bzw. der Schmiegpunkte von $\mathbf{P}', \mathbf{P}''$ fremd sind zur gleichen Seite bzw. zu verschiedenen Seiten von $\mathbf{B}$. Auch die Schmiegpunkte werden entsprechend als gleich- bzw. ungleichartig bezeichnet, insbesondere spricht man von gleich- bzw. ungleichartigen k -Scheiteln.

Zusatz. Ist A ein, von den Grundpunkten verschiedener Punkt des Grundbogens, so ist das System aller, den Punkt A enthaltender OCh aus $\mathbf{k}$ ein System $\mathbf{k}^*$ von OCh mit der Grundzahl $k^* = k - 1$. Die $\mathbf{k}^*$ -Scheitel sind dann Erstens diejenigen, von A verschiedenen Punkte von $\mathbf{B}$, deren k -Para-

⁽²⁰⁾ Ist $\mathbf{B}$ eine Kurve, so entsprechen die beiden «Seiten» von $\mathbf{B}$ etwa dem von $\mathbf{B}$ begrenzten beschränkten und nicht beschränkten Gebiet (gemäss des Jordanschen Kurvensatzes). Ist $\mathbf{B}$ ein Bogen, so kann man ihn zu einer Kurve ergänzen (vgl. z. B. KÉRÉKJÁRTÓ, B. v., *Vorles. über Topologie I.*, Berlin 1923, S. 69).

tingenten den Punkt A enthalten; Zweitens der Punkt A selbst, wenn A ein k -Scheitel ist.

2.1.1. Anmerkung. Der Paratingentenbegriff und die an ihn gestellten Forderungen werden bei der Formulierung von Vor. IV. nur im Interesse der Anschaulichkeit herangezogen. In Wirklichkeit ist der für unsere Zwecke wesentliche Inhalt der Vor. IV. davon unabhängig. Es genügt nämlich, folgendes vorauszusetzen. Die sämtlichen, in $\mathbf{BK}$ enthaltenen Punkte seien $X_1, \dots, X_q$; ferner sei $1 \leq t \leq q$ und $q_1 + \dots + q_t \geq k$ mit $q_\tau > 0$, $1 \leq \tau \leq t$; ausserdem sollen t verschiedene Punkte $Q_1, \dots, Q_t$ auf $\mathbf{B}$ existieren derart, dass unter den $X_1, \dots, X_q$ insgesamt p'_τ gegen Q_τ konvergieren, $\tau = 1, \dots, t$, wobei $0 \leq q'_\tau \leq q_\tau$, und $k'_1 + \dots + k'_t = k$. Dann konvergieren die übrigen Punkte X_τ , soweit sie beim Grenzübergang nicht verloren gehen, gegen feste, nur durch die Q_τ , q'_τ bestimmte Punkte von $\mathbf{B}$, die teilweise oder sämtlich untereinander und mit den Q_τ zusammenfallen können; und für $t = 1$, also $q'_1 = q$ liegen die beim Grenzübergang auftretenden OCh $\mathbf{K}$ sämtlich gleichartig, wenn der unterste von den gegen Q_1 konvergierenden Punkten unter den $X_1, \dots$ von unten her gegen Q_1 konvergiert und ausgezeichnet wird (vgl. Nr. 3.1.) Man kann auch noch weitergehen und entsprechend die Benutzung des Begriffes der OCh zu vermeiden, also sämtliche Aussagen lediglich mit Hilfe des Begriffes des q -tupels von Punkten auf $\mathbf{B}$ zu formulieren suchen.

2.2. Formulierung der verallgemeinerten Sätze.

Wir bezeichnen als k -Ordnungswert, kurz k -OW, des Grundbogens $\mathbf{B}$, und allgemeiner eines beliebigen *Teilbogens* $\mathbf{T}$ von $\mathbf{B}$, die grösste Mächtigkeit $r \geq k$, welche der Durchschnitt von $\mathbf{T}$ mit einer OCh $\mathbf{K}$ besitzt (falls dieses Maximum r existiert); *Grundpunkte* werden bei der Bestimmung der Mächtigkeit von $\mathbf{TK}$ nicht mitgezählt. Von endlichem bzw. beschränktem k -OW sprechen wir, wenn die Mächtigkeit von $\mathbf{BK}$ für alle OCh $\mathbf{K}$ endlich ist bzw. eine endliche obere Schranke besitzt. Ferner bezeichnen wir einen Punkt $P \in \mathbf{B}$ als vom k -Ordnungswert $p \geq k$, wenn jede hinreichend kleine Umgebung von P auf $\mathbf{B}$ den k -Ordnungswert p besitzt. Die Punkte, deren k -OW *mindestens* gleich $(k + 1)$ ist, sind identisch mit den früher als k -Scheitel bezeichneten Punkten von $\mathbf{B}$. Dabei kann ein k -Scheitel S zugleich Grundpunkt sein (vgl. Nr. 2.1, IV.); in diesem Falle gibt es zur k -Scheitelparatingente in S beliebig benachbarte OCh, welche ausser S noch mindestens $(k + 1)$ verschiedene zu S beliebig benachbarte Punkte mit $\mathbf{B}$ gemeinsam haben.

Die in Aussicht genommenen Verallgemeinerungen der in Nr. 1.1. bis 1.3. angegebenen Sätze sowie einige damit zusammenhängende Bemerkungen können nun so ausgesprochen werden:

(A) *Es seien die Voraussetzungen I. – III. (Nr. 2.1.) erfüllt:*

(1) *Besitzt der Grundbogen $\mathbf{B}$ mindestens den k -Ordnungswert $(kt + 1)$,*

wobei $k \geq 1$, $t \geq 1$, so ist die Anzahl der k -Scheitel von B mindestens t und, wenn B eine Kurve ist, mindestens $(t + 1)$. (Verallgemeinerter Zweischeitelsatz).

(2) Jeder, nur isolierte ⁽²¹⁾ k -Scheitel enthaltende, Grundbogen B ist Summe von, bis auf ihre Begrenzungspunkte fremden (abgeschlossenen) Bogen je vom k -Ordnungswert k derart, dass die im Innern von B gelegenen Begrenzungspunkte dieser Bogen genau die k -Scheitel von B sind. (Begrenzungspunkte des Grundbogens sind nur dann k -Scheitel, wenn ihr k -Ordnungswert grösser als $(k + 1)$ und der Begrenzungspunkt daher kein isolierter k -Scheitel ist).

(B) Es seien die Voraussetzungen I. - IV bzw. IVa. (Nr. 2.1.) erfüllt:

(1) Besitzt der Grundbogen B mindestens den k -Ordnungswert $p \geq k + 1$, so ist die Anzahl der k -Scheitel von B mindestens $(p - k)$. Ist C eine Grundkurve ⁽²²⁾ von mindestens dem k -Ordnungswert $p \geq k + 1$, so ist die Anzahl der k -Scheitel von C mindestens gleich p .

(2) Besitzt der Grundbogen B höchstens den k -Ordnungswert $(k + 1)$, so ist die Anzahl der k -Scheitel von B höchstens gleich $(k + 1)$.

(3) Die Grundkurve ⁽²²⁾ C besitzt genau den k -Ordnungswert $(k + 1)$ dann und nur dann, wenn die Anzahl der k -Scheitel von C genau gleich $(k + 1)$ ist ⁽²³⁾.

(4) Jeder isolierte k -Scheitel besitzt genau den k -Ordnungswert $(k + 1)$. Jeder genau einen k -Scheitel enthaltende Grundbogen besitzt genau den k -Ordnungswert $(k + 1)$.

(5) Je zwei, auf B unmittelbar benachbarte (d. h. durch keinen k -Scheitel auf B getrennte) k -Scheitel sind gleich- oder ungleichartig, je nachdem sie auf B durch eine ungerade oder gerade Anzahl von Grundpunkten von einander getrennt werden. Fällt dabei ein k -Scheitel S in einen Grundpunkt G , so ist G als ein im Sinne der Orientierung von B auf S folgender (oberhalb S liegender) Grundpunkt zu rechnen (ganz entsprechend der auf die Orientierung von B Bezug nehmenden Definition der Gleich-bzw. Ungleichartigkeit von k -Scheiteln).

Zusatz. Es sei hervorgehoben, dass zum Beweise der Sätze (B) (2) und (B) (4) nur die Vor. IVa. (nicht IV.) benötigt wird. Die beim Beweise der Sätze (B) (1) und (5) herangezogene Vor. IV. liesse sich übrigens auch noch abschwächen, wie wir später zu zeigen hoffen.

⁽²¹⁾ Ein k -Scheitel S heisst isoliert, wenn in einer Umgebung von S auf B ausser S kein k -Scheitel existiert. — Zur Feststellung in (B) (4), dass unter unseren Voraussetzungen I. - IVa. jeder isolierte k -Scheitel genau den k -OW $(k + 1)$ besitzt, vgl. Entsprechendes für Raumkurven bei J. Sauter, Math. Zeitschr. 42 (1937), 592, Zusatz.

⁽²²⁾ Die OCh sind dann auch sämtlich Kurven. Vgl. Nr. 2.1., III.

⁽²³⁾ Falls die eindeutige Existenz der k -Paratingente nicht vorausgesetzt wird, gilt der Satz im allgemeinen nicht. Vgl. das Beispiel in Nr. 3.2.1.2.

Die Sätze (A) werden in Nr. 3.2. bewiesen, die Sätze (B) (4) bzw. (1) bzw. (2) bzw. (5) in Nr. 3.3. bzw. Nr. 3.4. bzw. Nr. 3.5. bzw. Nr. 3.6. Der Satz (B) (3) ist unmittelbare Folge aus den Sätzen (B) (1) und (2).

3. Beweise.

3.1. Folgerungen aus den Voraussetzungen I-II. in Nr. 2.1. (ohne Vor. IVa.)

3.1.1. Irgend $r \geq 1$ in natürlicher Anordnung auf **B** befindliche Schnittpunkte ⁽¹⁹⁾ $S_1, \dots, S_r$ von **B** mit einer OCh **K** bezeichnen wir als ein r -tupel γ ; dabei werden *Grundpunkte* als Punkte eines solchen r -tupels *nicht mitgezählt*. Die *Ordnungscharakteristik* **K** heiße zum r -tupel γ gehörig. Der (bei der zu Grunde gelegten und dann stets festgehaltenen Orientierung von **B**) unterste Punkt S_1 von γ heiße auch der Anfangspunkt von γ . Der alle S_ρ enthaltende Teilbogen **G** von **B** mit S_1 als Anfangs- und S_r als Endpunkt werde als zu γ gehöriger (Teil-)Bogen bezeichnet. Sind in γ ausser den S_ρ , $\rho = 1, \dots, r$, (und etwaigen Grundpunkten) keine weiteren Schnittpunkte aus **BK** enthalten, so heiße γ ununterbrochen. Enthält **BK** ausser den S_ρ (und ausser Grundpunkten) noch andere Punkte, so heißen diese mit γ oder mit den S_ρ verbunden (falls $r \geq k$). Ein *Grundpunkt* G soll als mit einem r -tupel γ *verbunden* gelten, falls G Schnittpunkt ist von **B** mit der, γ tragenden OCh; soweit es nicht ausdrücklich hervorgehoben wird, sind aber unter «mit γ verbundenen» Punkten nur von Grundpunkten *verschiedene* Punkte zu verstehen. Es sei γ' bzw. γ'' ein r' -bzw. r'' -tupel ($r' \geq 1$, $r'' \geq 1$) mit dem Anfangspunkt S' bzw. S'' und mit **K'** bzw. **K''** als zugehöriger OCh. Sind dann untere Umgebungen von S' auf **K'** und von S'' auf **K''** fremd zur gleichen bzw. zu verschiedenen Seiten von **B**, so sollen γ' und γ'' sowie **K'** und **K''** als gleich-bzw. als ungleichartig (gelegen) zu **B** für S' , S'' bezeichnet werden. Wir bemerken noch: *Reduktionssatz* ⁽²⁴⁾: Ist **B** von endlichem **k**-OW, d.h. hat **B** mit jeder OCh nur endlich viele Punkte gemeinsam, sind ferner s Punkte $P_1, \dots, P_s$ in **BK** enthalten, so existieren in beliebiger Nachbarschaft von **K** solche OCh **K'**, die zu einem s -tupel γ' gehören, das im *Innern* von **B** liegt und dessen Punkte *beliebig benachbart* sind je zu einem der $P_1, \dots, P_s$; dabei kann überdies gefordert werden, dass **BK'** *nur* Schnittpunkte enthält.

3.1.2. Spezieller Monotoniesatz ⁽²⁵⁾. Der Grundbogen **B** sei wieder von endlichem **k**-OW (d.h. es enthalte **BK** nur endlich viele Punkte für jede OCh **K**). Enthält **BK** nicht lauter Schnittpunkte, so gibt es zu **K** beliebig

⁽²⁴⁾ Vgl. a. a. O. ⁽⁵⁾, Nr. 2.4. Der Reduktionssatz gilt auch dann, wenn Grundpunkte auf **B** liegen.

⁽²⁵⁾ Vgl. a. a. O. ⁽⁵⁾, Nr. 3.2. Der Monotoniesatz gilt auch, wenn Grundpunkte auf **B** liegen.

benachbarte OCh $\mathbf{K}'$, sodass $\mathbf{BK}'$ nur Schnittpunkte enthält und zwar mindestens ebensoviele, als Punkte in $\mathbf{BK}$ vorhanden sind ⁽²⁶⁾. Es habe nun $\mathbf{K}$ mit $\mathbf{B}$ nur Schnittpunkte gemeinsam, etwa $S_1, \dots, S_r$, und zwar mindestens $(k+1)$. Werden dann irgend $(k-1)$ unter diesen S_p festgehalten und wird einer der übrigen durch eine hinreichend kleine Abänderung von $\mathbf{K}$ monoton und stetig aus seiner Ausgangslage heraus « bewegt », so « bewegen » sich je zwei der übrigen Punkte unter den S_p (streng monoton) im gleichen oder entgegengesetzten Sinne auf $\mathbf{B}$, je nachdem zwischen ihnen eine ungerade oder gerade Anzahl beweglicher Schnittpunkte liegen.

Rückt im Laufe dieser Bewegung ein beweglicher Punkt S mit einem Grundpunkt G zusammen, aber nicht gleichzeitig mit einem anderen beweglichen, ihm entgegenrückenden Punkt und werden nicht gleichzeitig Punkte auf $\mathbf{BK}$ gewonnen, so wird S den Punkt G unter Beibehaltung seiner Bewegungsrichtung überschreiten, falls die übrigen beweglichen Punkte ihre Bewegungsrichtung nicht ändern. (Ausser Betracht bleiben kann hier der Fall, dass ein beweglicher Punkt S mit einem festgehaltenen Punkt zusammenrückt, der nicht Grundpunkt ist, weil sich das durch passenden Wechsel der festgehaltenen und der benachbarten beweglichen Punkte jeweils umgehen lässt). Die Bewegung von S verläuft mithin so, als ob der Grundpunkt G gar nicht vorhanden wäre; bemerkbar macht sich der Durchgang von S durch G nur insofern, als sich beim Durchgang die Lage der unteren Umgebung von S auf $\mathbf{K}$ gegenüber $\mathbf{B}$ ändert. (Der Beweis dieser Beh. ergibt sich aus Vor. II. (d) in Nr. 2.2.). Weiter folgt: Überschreitet bei monotoner Änderung (und $(k-1)$ festen Punkten) der Anfangspunkt S des betrachteten r -tupels γ einen Grundpunkt F , ohne mit einem (anderen) beweglichen Punkt zusammenzurücken, so liegt nach dem Durchgang von S durch F ein zum ursprünglichen ungleichartiges r -tupel vor (vorausgesetzt, dass keine Punkte von γ « verloren » gingen); wir sagen dafür kurz auch: γ geht in ein zu γ ungleichartiges r -tupel über, falls der Anfangspunkt S von γ einen Grundpunkt überschreitet, sonst in ein gleichartiges.

Hinsichtlich der im Verlaufe einer monotonen Änderung eines r -tupels mit $(k-1)$ festgehaltenen Punkten möglichen « Gewinne » und « Verluste » sei noch folgendes bemerkt: « Neue Punkte » können nur auftreten (« gewonnen werden ») innerhalb « abnehmender » Teilbogen, d.h. solcher Teilbogen, die von zwei beweglichen, auf $\mathbf{B}$ sich einander nähernden Punkten des r -tupels begrenzt werden. Demgegenüber treten in einem « wachsenden » (« zunehmenden »), d.h. von zwei auf $\mathbf{B}$ sich voneinander entfernenden beweglichen Punkten begrenzten, Teilbogen Gewinne höchstens dann auf, wenn der Teilbogen abnehmende Teilbogen enthält, also keine Gewinne, wenn er

⁽²⁶⁾ Vgl. a. a. O. ⁽⁴⁾. Betr. die Begriffe « Gewinn » und « Verlust » vgl. z. B. a. a. O. ⁽¹⁴⁾, 2. Abh., Nr. 1.5.1. ff.

im Innern fremd ist zur OCH, die zum r -tupel gehört. Dagegen sind Verluste, hervorgerufen durch das Zusammenrücken zweier beweglicher Punkte, sowohl in abnehmenden als in zunehmenden Teilbogen möglich.

3.1.3. Kontraktionssatz ⁽²⁷⁾. Es sei **B** wieder von *endlichem* **k**-OW. In einem $(k+1)$ -tupel $\gamma = (S_1, \dots, S_{k+1})$ kann man unter Festhalten von $(k-1)$ der S_x die übrigen beiden Schnittpunkte dem Monotoniesatze gemäss so bewegen, dass der zu γ gehörige Teilbogen **T** von **B** abnimmt, ferner dass die beweglichen Punkte über keinen der jeweils festgehaltenen Punkte von γ hinwegrücken, sondern höchstens über Grundpunkte, und auch dass keine beweglichen Punkte zusammenrücken. Sollte eines der hiermit ausgeschlossenen Vorkommnisse eintreten, so werde vorher die Bewegung unterbrochen und der Prozess bei anderer Wahl der festen Punkte so fortgesetzt, dass **T** auch weiterhin abnimmt. Dabei kann o.B.d.A. γ als ununterbrochen angenommen werden, weil andernfalls (z.B. auch bei Gewinnen innerhalb **T**) aus γ (ev. durch Übergang zu einer beliebig benachbarten OCh) ein mit γ gleichartiges ununterbrochenes, in **T** enthaltenes neues $(k+1)$ -tupel erhalten werden kann (vgl. Nr. 3.1.1., Reduktionssatz). Man bezeichnet eine solche monotone Änderung von γ (mit Verkleinerung von **T**) als eine Kontraktion von γ . Werden mehrere solche Kontraktionen (mit wechselnden festen und beweglichen Punkten) hintereinander ausgeführt gemischt mit beliebig klein wählbaren Änderungen der OCh (denen keine monotone Änderung des $(k+1)$ -tupels zu entsprechen braucht, vgl. die Anwendung des Reduktionssatzes in Nr. 3.1.2., Anfang, sowie oben in Nr. 3.1.3.), so spricht man von einem Kontraktionsprozess ⁽²⁸⁾. Der Kontraktionssatz ⁽²⁷⁾ besagt dann: Zu jedem beliebig vorgegebenen $(k+1)$ -tupel γ existiert ein Kontraktionsprozess, vermöge dessen sich γ auf einen inneren Punkt Q des zu γ gehörigen Teilbogens **T** zusammenzieht (Dabei kann Q auch ein Grundpunkt sein). *Es liegt Q oberhalb der Anfangspunkte aller beim Prozess auftretenden $(k+1)$ -tupel.*

Dieser Kontraktionssatz gestattet (unter den Vor. I.-III.) nachstehende

Verschärfung: Der zu einem $(k+1)$ -tupel gehörige Kontraktionsprozess kann stets folgendermassen eingerichtet werden: Die bei den einzelnen Schritten des Kontraktionsprozesses auftretenden $(k+1)$ -tupel γ' sowie die den γ' zugehörigen OCh **K'** liegen *gleich-*bzw. *ungleichartig*, je nachdem der Anfangspunkt des ursprünglichen $(k+1)$ -tupels γ beim Übergang zum Anfangspunkt von γ' eine gerade bzw. ungerade Anzahl Grundpunkte (in Richtung nach oben auf **B**) überschritten hat. Die **K'** (und γ') sind schliesslich alle gleichartig untereinander.

⁽²⁷⁾ Vgl. für das Folgende a. a. O. ⁽⁵⁾, Nr. 4.2.; ferner a. a. O. ⁽²⁾, Nr. 2.4. ff. Der Kontraktionssatz gilt unter den Vor. I. - III. auch, wenn Grundpunkte auf **B** liegen.

⁽²⁸⁾ Vgl. a. a. O. ⁽¹²⁾, Nr. 2.3.1.

Zusatz. Falls Nr. 2.1., Vor. IVa., hinzugenommen wird, gilt-
überdies: Die $\mathbf{K}'$ und γ' sind schliesslich alle gleichartig zu der $\mathbf{k}$ -Scheitel-
paratingente in Q an $\mathbf{B}$ (gegen welche die $\mathbf{K}'$ konvergieren).

Bew. Bei dem früher ⁽²⁹⁾ gegebenen Beweise des Kontraktionssatzes wurde die eben formulierte Verschärfung noch nicht berücksichtigt; man erhält sie aber durch folgende Modifikation: Es sei $\gamma_1 = (S_1, \dots, S_{k+1})$ das ursprünglich vorliegende $(k+1)$ -tupel und $\mathbf{K}_1$ die zugehörige OCh; wenn nötig erzwingen wir durch eine beliebig kleine Abänderung von $\mathbf{K}_1$ in $\mathbf{K}_1'$, dass $\mathbf{BK}_1'$ nur Schnittpunkte enthält und dass $\mathbf{K}_1''$ zu einem mit γ_1 gleichartigen $(k+1)$ -tupel γ_1' gehört, wobei γ_1' ununterbrochen ist und wobei der *Anfangspunkt von γ_1' nicht unterhalb des Anfangspunktes von γ_1 liegt* (gemäss Nr. 3.1.1., Reduktionssatz). Indem wir nun definitionsgemäss die S_i in γ_1 als in natürlicher Anordnung (auf $\mathbf{B}$ und $\mathbf{K}$) voraussetzen, halten wir $S_3, \dots, S_{k+1}$ fest und kontrahieren S_1, S_2 . Es ist dann S_1 End- und S_2 Anfangspunkt je eines *wachsenden Teilbogens* $\mathbf{T}_1$ bzw. $\mathbf{T}_2$ von $\mathbf{B}$ sodass weder in $\mathbf{T}_1$ noch in $\mathbf{T}_2$ Gewinne stattfinden können. Entweder kann man nun S_1 und S_2 einander beliebig nahe bringen, wobei das entstehende $(k+1)$ -tupel γ_2 gleichartig oder ungleichartig ist mit γ_1 ; je nachdem S_1 beim Übergang von γ_1 zu γ_2 eine gerade oder ungerade Anzahl Grundpunkte überschritten hat. Oder es werden auf dem abnehmenden Teilbogen, der S_1 als Anfangs- und S_2 als Endpunkt besitzt, endlich viele Paare von Schnittpunkten gewonnen; dann ersetzen wir S_2 durch den am nächsten oberhalb S_1 gelegenen neuen Schnittpunkt S_2' , ferner γ durch ein ununterbrochenes $(k+1)$ -tupel $S_1' S_2' S_3' \dots S_{k+1}'$ und setzen die Kontraktion bei festen $S_3', \dots, S_{k+1}'$ fort. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens und ev. vollständige Induktion im Kontinuum ⁽³⁰⁾ ergibt sich schliesslich ein $(k+1)$ -tupel γ' mit $\mathbf{K}'$ als zugehöriger OCh derart, dass in $\mathbf{BK}'$ ein ununterbrochenes $(k+1)$ -tupel $\gamma_1'' = (S_1'', \dots, S_{k+1}'')$ mit dem gleichen Anfangspunkt S_1'' wie γ' enthalten ist von folgender Beschaffenheit:

- (A) Es liegt S_1'' oberhalb S_1 und ist Endpunkt eines, $\mathbf{T}_1$ enthaltenden, zu $\mathbf{BK}'$ fremden (offenen) Teilbogens von $\mathbf{B}$;
- (B) Es liegt S_{k+1}'' nicht oberhalb S_{k+1} ;
- (C) Es liegt γ_1'' gleichartig bzw. ungleichartig mit γ_1 , je nachdem zwischen S_1 und S_1'' eine gerade oder ungerade Anzahl Grundpunkte liegt;
- (D) Die Schnittpunkte $S_1'', \dots, S_R''$ für ein gewisses $R \geq 2$ besitzen beliebig kleine Abstände voneinander.

Dass hierbei (A), (B) und (C) erfüllbar sind, ist unmittelbar einzusehen; ebenso dass (D) für $R=2$ gilt. Zu Beweise des verschärften Kontraktions-

⁽²⁹⁾ Vgl. a. a. O. ⁽²⁷⁾. Entscheidend dafür, dass der früher gegebene Beweis auch die Verschärfung liefert, ist, dass bei den Überlegungen a. a. O. ⁽⁵⁾, Nr. 4.7₁ und 4.7₂, nur Kontraktionsprozesse verwendet werden, vermittelt deren lauter $(k+1)$ -tupel mit den Eigenschaften (A) — (D) (vgl. oben im Text) gewonnen werden.

⁽³⁰⁾ Vgl. z. B. HAUPT-AUMANN-PAUC, a. a. O. ⁽¹⁰⁾, 1. Bd., S. 35.

satzes ist daher noch zu zeigen, dass $R = k + 1$; des Beweises hierfür verläuft im wesentlichen wie früher (²⁰).

Betr. Bew. des Zusatzes. Im Falle die Vor. IVa. im Nr. 2.1. erfüllt ist, gilt folgendes: Ziehen sich die beim Kontraktionsprozess auftretenden $(k + 1)$ -tupel γ auf den Punkt Q zusammen, wobei also die Anfangspunkte der γ monoton nach oben gegen Q sich bewegen, so existiert eine, nur durch das ursprüngliche $(k + 1)$ -tupel bestimmte untere Umgebung V von Q auf B mit der folgenden Eigenschaft: Zu V gehört eine untere Umgebung U von Q auf der zugehörigen k -Scheitelparatingente P (mit dem Schmiegepunkt Q), sodass U mit V keine Schnittpunkte gemeinsam hat, also U in einer geeigneten zweidimensionalen Umgebung von Q ganz auf der einen Seite von B verläuft. Und das Gleiche gilt für eine untere Umgebung des Anfangspunktes von γ auf der zu γ gehörigen OCh für schliesslich alle γ . Der Beweis folgt daraus, dass vermöge (A) und (C) die Beh. in der Tat für schliesslich alle γ erfüllt ist, weil nämlich zwischen Q und schliesslich allen S_i keine Grundpunkte mehr liegen; und da die k -Scheitelparatingente P eindeutig bestimmt ist (Vor. IVa.) liegen $(k + 1)$ -tupel aus verschiedenen, zu P führenden Kontraktionsprozessen stets gleichartig, sofern sie zu Q hinreichend benachbart sind.

3.2. Beweis der Sätze (A) (1) und (2) in Nr. 2.2. .

Diese Beweise ergeben sich aus den folgenden Sätzen, denen lediglich die Vor. I-III. (Nr. 2.1.) zu Grunde liegen.

3.2.1. Sind $S_1, \dots, S_{k+1}$ (von den Grundpunkten verschiedene) Schnittpunkte des Grundbogens B mit der Ordnungscharakteristik K in natürlicher Anordnung ($k \geq 1$), so enthält der zum $(k + 1)$ -tupel $\gamma = (S_1, \dots, S_{k+1})$ gehörige (abgeschlossene) Teilbogen T von B (mit S_1 bzw. S_{k+1} als Anfangs- bzw. als Endpunkt) in seinem Inneren mindestens einen k -Scheitel (der definitionsgemäss auch mit einem Grundpunkte zusammenfallen kann). (Ohne Vor. IVa. (Nr. 2.1.).)

Bew. Hat ein, ganz im Innern von T gelegener, abgeschlossener Teilbogen T' von T mit mindestens einer OCh K' unendlich viele Punkte gemeinsam, so besitzt die Menge $T'K'$ wegen der Kompaktheit von T mindestens einen Häufungspunkt in T' also im Innern von T ; jeder solche Häufungspunkt ist aber ein k -Scheitel, weil jetzt K' selbst eine k -Scheitelparatingente ist. Besitzt hingegen jeder solche Teilbogen T' von T endlichen k -OW, so gehe man vermittelst einer geeigneten, beliebig kleinen Kontraktion von γ zu einem $(k + 1)$ -tupel γ' über, das im Innern von T , also in einem Teilbogen T' enthalten ist; da T' nach Annahme endlichen k -OW besitzt, ist der Kontraktionssatz auf γ' anwendbar, woraus die Beh. folgt.

3.2.1.1. Beweis von Satz (A) (1) (Nr. 2.2.).

Verallgemeinerter Zweischeitelsatz. Vor. Es sei B ein Grundbogen, welcher nur den Vor. I-III. von Nr. 1.2., aber nicht der Vor. IVa., zu

genügen braucht. Ferner soll B mindestens den k -OW $(kt + 1)$ besitzen ($k \geq 1$, $t \geq 1$). Der Fall, dass der k -OW von B nicht endlich ist, sei einbegriffen.

Beh. Die Anzahl der in Innern von B gelegenen k -Scheitel ist mindestens gleich t und, falls B eine Grundkurve ist, mindestens gleich $(t+1)$.

Bew. Indirekt. Es sei also die Anzahl der k -Scheitel Q_i innerhalb B gleich $s \leq t - 1$ bzw. (falls B eine Kurve ist) gleich $s \leq t$. Dann ist B Summe von $(s + 1)$ oder, falls B eine Kurve ist, von s Teilbogen T_j , die abgeschlossen in B sind, paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben und unter deren Endpunkten alle k -Scheitel Q_i enthalten sind. Es sind dann nur folgende Fälle denkbar: Entweder besitzen alle T_j endlichen k -OW, dann auch B selbst, sodass der Reduktionssatz anwendbar ist und o.B.d.A. vorausgesetzt werden kann, dass alle Punkte von BK Schnittpunkte sind und dass ihre Anzahl für passende K mindestens gleich $(kt + 1)$ ist. Fallen einige oder alle Q_i mit Punkten aus BK zusammen, so kann der Reduktionssatz auf die in Betracht kommenden T_j angewandt und es kann erreicht werden, dass $(kt + 1)$ unter den Schnittpunkten von BK verschieden sind von den Q_i . Dann liegen aber im Innern mindestens eines der T_j mindestens $(k + 1)$ Schnittpunkte aus BK . Gemäss Nr. 3.2.1. liegt also im Innern mindestens eines T_j ein k -Scheitel im Widerspruch zur Annahme. Oder mindestens zu einem T_j , etwa T_q , existiert eine OCh K' so, dass $T_q K'$ unendlich viele Punkte enthält. Zuzufolge der Definition der T_j kann innerhalb T_q kein Häufungspunkt von BK' liegen. Es gibt aber einen abgeschlossenen, kompakten Teilbogen T_q' von T_q , der mindestens $(k + 1)$ Punkte von BK' enthält und ganz im Innern von T_q liegt. Überdies muss T_q' von endlichem k -OW sein. Gemäss Nr. 3.2.1 existiert aber dann ein k -Scheitel in Innern von T_q . Widerspruch.

3.2.1.2. Anmerkung. In Nr. 2.2., Satz (B) (1), werden für die Anzahl der k -Scheitel des Grundbogens untere Schranken angegeben, die grösser sind als die in Nr. 3.2.1.1. bestimmten; der Unterschied in den Voraussetzungen zwischen Nr. 2.2. (B) (1) und Nr. 3.2.1. besteht dabei darin, dass im letzteren Falle die *eindeutige Existenz der k -Paratingente* nicht (wie durch Vor. IV., Nr. 2.1.) gefordert wird. Es wird nun durch ein Beispiel gezeigt (für $k = 3$ und $t = 1$), dass die Schranken in N. 3.2.1.1. im allgemeinen nicht verbessert werden können. Daraus folgt dann (Vgl. dazu Nr. 2.2., Zusatz):

Für die uneingeschränkte Gültigkeit des Satzes (1) in Nr. 2.2. (und insbesondere des Vierscheitelsatzes) ist die Vor. IVa. (Nr. 2.1.), d. h. die eindeutige Existenz der k -Scheitelparatingente, nicht zu entbehren (im speziellen Fall der zyklischen Ordnung also nicht die Existenz des freien Scheitelkrümmungskreises).

Beispiel eines Ovals vom zyklischen Ordnungswert Vier und mit nur zwei Scheiteln.

Konstruktion. Es sei T ein abgeschlossener Teilbogen eines Ellipsenquadranten, der keinen Scheitel enthält. Es sei Q der Schnittpunkt der

Halbtangenten an T in dessen Anfangs- und Endpunkt. Ferner sei h ein Kreis mit Q als Zentrum, in dessen Inneren T liegt. Das Spiegelbild von T bezüglich h ist dann wieder ein Bogen S vom zyklischen Ordnungswert Drei. Überdies enthält aber S einen Teilbogen S' mit dem Endpunkt E und dem Anfangspunkt A derart, dass die Halbtangenten an S' in E und A parallel sind. Spiegelt man nun S' am Mittelpunkt M der Strecke AE , so ist die Summe von S' und seinem Spiegelbild S'' ein Oval C mit überall stetiger Tangente. Es hat C genau A und E zu Scheiteln.

Beweis. Wie weiter unten gezeigt wird, ist der zyklische Ordnungswert von C gleich Vier, (wegen $k=3$) mithin $t=1$; gemäss Nr. 3.2.1.1. sind also mindestens zwei Scheitel vorhanden; diese Scheitel können aber nur in A und E liegen, weil S' und S'' je den zyklischen Ordnungswert Drei besitzen. Dass nun der zyklische Ordnungswert von C gleich Vier ist, beweisen wir indirekt: Angenommen, es existiere ein Kreis K , der mit C die 6 Punkte P_i , $i=1, \dots, 6$, gemeinsam hat (der zyklische Ordnungswert von C ist höchstens gleich 6); die P_i dürfen dabei o.B.d.A. sämtlich als Schnittpunkte angenommen werden⁽³⁵⁾. Da höchstens je drei der P_i auf S' bzw. auf S'' liegen können, gibt es eine auf C natürliche Anordnung $P_1, \dots, P_6$ der P_i derart, dass $P_i \in S'$ bzw. $P_i \in S''$ je nachdem $i=1, 2, 3$, bzw. $i=4, 5, 6$. Es sei dann K ebenfalls so orientiert, dass $P_1, \dots, P_6$ eine natürliche Anordnung auf K ist. Liegt nun eine untere Umgebung V_1 von P_1 auf K innerhalb (oder ausserhalb) C , so liegt eine untere Umgebung V_4 von P_4 auf K ausserhalb (oder innerhalb) C . Andererseits müssen aber V_1 und V_4 beide innerhalb oder beide ausserhalb C liegen. In der Tat: Geht man vermöge Spiegelung an M von S'' zu S' über, so geht das Tripel P_4, P_5, P_6 in ein auf S' natürlich geordnetes Tripel $P_1' P_2' P_3'$ über, wobei P_i' Bild von P_{3+i} ist und P_1 unterster unter den P_i auf S' . Ferner wird ein, die P_4, P_5, P_6 sowie V_4 enthaltender Kreisbogen gespiegelt in einen Kreisbogen K' durch P_1', P_2', P_3' und es wird V_4 gespiegelt in eine untere Umgebung V_1' von P_1' auf K' . Nun müssen alle Tripel auf S' gleichartig liegen bezüglich S' , also bezüglich C ; denn dies gilt bekanntlich für jeden Teilbogen eines Ellipsenquadranten und S' ist Spiegelbild am Kreis h eines solchen Teilbogens. Speziell müssen also V_1 und V_1' auf der gleichen Seite von C liegen. Gleiches gilt dann aber für V_4 und V_4' . Dies steht im Widerspruch mit den oben gemachten Feststellungen.

3.2.2. Jeder Häufungspunkt H von k -Scheiteln des Grundbogens ist ein Punkt von mindestens dem k -OW ($k+2$). (Ohne Vor. IVa., Nr. 2.1.).

Bew. Jedenfalls existiert eine Folge von k -Scheiteln, die von einer Seite, z.B. von unten her gegen H konvergiert. Da jeder k -Scheitel mindestens den k -OW ($k+1$) besitzt, ist somit jede untere Umgebung von H auf B mindestens vom k -OW ($k+1$). Weil es aber keine Punkte vom

einseitigen k -OW $(k+1)$ gibt ⁽³¹⁾, muss H mindestens den k -OW $(k+2)$ besitzen, w.z.z.w.

3.2.3. *Ein (echter oder unechter) Teilbogen T des Grundbogens B besitzt dann und nur dann den k -OW k , wenn in Innern von T kein k -Scheitel liegt. (Ohne Vor. IVa., Nr. 2.1.).*

Bew. Existiert mindestens ein k -Scheitel im Innern von T , so gibt es (gemäss der Definition des k -Scheitels) ein $(k+1)$ -tupel γ' , dessen Punkte sämtlich im Innern von T liegen; somit besitzt T mindestens den k -OW $(k+1)$. Es enthalte andererseits T keinen k -Scheitel im Innern. Es genügt dann, zu zeigen, dass jeder abgeschlossene, ganz im Innern von T gelegene und folglich kompakte Teilbogen T' von T den k -OW k besitzt; daraus folgt nämlich das Gleiche für T selbst (gemäss Nr. 3.1.1., Reduktionssatz). Jedenfalls ist T' von *endlichem* k -OW, weil anderfalls eine OCh K' existierte derart, dass TK' unendlich viele Punkte und folglich (gemäss Nr. 3.2.1.) T im Innern einen k -Scheitel enthielte. Ist aber T' von *endlichem* k -OW und wäre der k -OW von T' mindestens gleich $(k+1)$, so würde wiederum aus Nr. 3.2.1. die Existenz mindestens eines Scheitels innerhalb T' und damit ein Widerspruch sich ergeben.

3.2.4. *Ein abgeschlossener Grundbogen B enthält in seinem Innern endlich viele k -Scheitel dann und nur dann, wenn B darstellbar ist als Summe endlich vieler abgeschlossener, bis auf ihre Begrenzungspunkte paarweise fremder Teilbogen von B , deren jeder den k -OW k besitzt und deren im Innern von B gelegene Begrenzungspunkte genau die innerhalb B gelegenen ⁽³²⁾ k -Scheitel von B sind ⁽³³⁾. (Ohne Vor. IVa., Nr. 2.1.).*

Zusatz. Enthält der Grundbogen B nur endlich viele k -Scheitel, so besitzt B einen beschränkten k -Ordnungswert.

Bew. Folgt aus N. 3.2.3.

3.3. Beweis des Satzes (B) (4) in Nr. 2.2.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus den folgenden Betrachtungen, die übrigens auch bei späteren Beweisen benötigt werden. Dabei wird stets auch die Vor. IVa. (Nr. 2.1.) als erfüllt angenommen.

3.3.1. (a) Vor. *Der Teilbogen T des Grundbogens B enthalte nur endlich viele k -Scheitel; ferner enthalte T zwei $(k+1)$ -tupel, die gleichartig bzw.*

⁽³¹⁾ Vgl. a. a. O. ⁽⁵⁾, Nr. 6.3.

⁽³²⁾ Die Begrenzungspunkte (Anfangs- und Endpunkt) von B können nicht k -Scheitel sein, weil sie Begrenzungspunkte von Bogen des k -OW k sind.

⁽³³⁾ Grundpunkte nehmen dabei keine Sonderstellung ein und dürfen mit k -Scheiteln zusammenfallen.

ungleichartig sind und deren Anfangspunkte auf T durch eine ungerade bzw. gerade Anzahl Grundpunkte (die als Schnittpunkte mit den $(k+1)$ -tupeln verbunden sind) von einander getrennt werden ($k \geq 1$).

Beh. Im Innern von T liegen mindestens zwei k -Scheitel.

(b) Vor. Der Teilbogen T von B enthalte nur endlich viele k -Scheitel.

Beh. (I) Ist der (notwendig beschränkte) k -OW von T nicht kleiner als $(k+2)$, so enthält T im Innern mindestens zwei k -Scheitel.

(II) Enthält T in seinem Inneren genau einen k -Scheitel, so besitzt T den k -OW $(k+1)$.

Bew. (a) Gemäss Nr. 3.2.4., Zusatz, besitzt T beschränkten k -OW. Es seien dann $\gamma = (S_1, \dots, S_{k+1})$ und $\gamma' = (S'_1, \dots, S'_{k+1})$ die beiden $(k+1)$ -tupel, wobei etwa S_1 unterhalb S'_1 liege. Zuzufolge Nr. 3.2.1. entspricht dem γ bzw. γ' je (mindestens) ein k -Scheitel A bzw. A' . Wir zeigen, dass $A = A'$ zu einem Widerspruch mit Vor. IVa., Nr. 2.1., führt, d. h. zur Existenz zweier ungleichartiger k -Scheitelparatingenten in $A = A'$. Es sei also $A = A'$. Da bei den auf γ bzw. γ' auszuübenden Kontraktionsprozessen sich S_1 und S'_1 beide nach oben hin bewegen, liegt A oberhalb S'_1 . Es sei ferner S_1 von S'_1 auf B durch t Grundpunkte $G_1', \dots, G_t'$ (diese natürlich angeordnet) getrennt und weiter G_t' von A durch s Grundpunkte $G_1'', \dots, G_s''$ (ebenfalls in natürlicher Anordnung), $t \geq 0$, $s \geq 0$. Im Laufe des Kontraktionsprozesses (vgl. die Verschärfung des Kontraktionssatzes in Nr. 3.1.3.) überschreitet S_1 zunächst die $G_1', \dots, G_t'$; dabei geht γ über in ein mit γ gleichartiges oder ungleichartiges $(k+1)$ -tupel $\gamma'' = (S_1'', \dots, S_{k+1}'')$ je nachdem $t \equiv 0$ oder $t \equiv 1 \pmod{2}$ ist. Andererseits ist nach Vor. γ gleich- bzw. ungleichartig mit γ' je nachdem $t \equiv 1$ oder $t \equiv 0 \pmod{2}$. Somit sind γ'' und γ' stets ungleichartig. Und diese Ungleichartigkeit von γ'' und γ' bleibt im weiteren Verlaufe des Kontraktionsprozesses für γ'' bzw. beim Kontraktionsprozess für γ' erhalten, weil ja S_1'' und S'_1 beide die nämlichen Grundpunkte nach oben hin überschreiten (und sonst keine Grundpunkte), bevor sie sich dem Punkte A (beliebig) nähern. Somit sind die aus der Kontraktion von γ und von γ' resultierenden k -Scheitelparatingenten P bzw. P' an B in A ungleichartig. Dies und somit die Annahme, dass $A = A'$, steht aber im Widerspruch zum Eindeutigkeitsaxiom IVa. in Nr. 2.1.

(b). Die Beh. (b) (I) folgt aus der Tatsache, dass die aus einem ununterbrochenen $(k+2)$ -tupel $(S_1, \dots, S_{k+2})$ sich ergebenden $(k+1)$ -tupel $(S_1, \dots, S_{k+1})$ und $(S_2, \dots, S_{k+2})$ gleich- bzw. ungleichartig sind je nachdem S_1 und S_2 auf B durch eine ungerade bzw. gerade Anzahl Grundpunkte getrennt werden, die sämtlich als Schnittpunkte von B mit der in Betracht kommenden OCh angenommen werden dürfen. Aus (I) folgt dann (II).

3.3.2. Aus Nr. 3.3.1. Beh. (b) (II) ergibt sich bei Vor. IVa. noch die folgende

Verschärfung des Satzes in Nr. 3.2.4.: Jeder isolierte k -Scheitel

(im Innern) des Grundbogens B ist ein minimaler k -Scheitel, d.h. jeder isolierte k -Scheitel besitzt den (minimalen) k -OW $(k+1)$.

3.3.3. Aus Nr. 3.3.1., (a), folgt weiter:

Enthält der Grundbogen B in seinem Innern genau einen k -Scheitel S , so liegen je zwei, im Innern von B enthaltene $(k+1)$ -tupel gleichartig oder ungleichartig, je nachdem ihre Anfangspunkte durch eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Grundpunkten auf B von einander getrennt sind.

Anmerkung. Dabei liegen die Anfangspunkte bzw. die Endpunkte aller $(k+1)$ -tupel unterhalb bzw. oberhalb des k -Scheitels S ; diese Anfangspunkte z.B. werden also durch S nicht von einander getrennt. Es ist daher auf die Gültigkeit des Satzes ohne Einfluss, ob S Grundpunkt ist oder nicht.

Bew. Andernfalls existierten nämlich zwei $(k+1)$ -tupel, die der Voraussetzung des Satzes in Nr. 3.3.1. (a) genügt.

3.4. Beweis von Satz (B) (1) in Nr. 2.2.

Es sollen die Vor. I.-IV. (Nr. 2.1.) gelten.

3.4 1. Vor. Der Grundbogen B besitze nur endlich viele k -Scheitel. Ferner sei A ein innerer Punkt von B , aber kein k -Grundpunkt. Das System aller OCh aus k , welche durch Punkt A gehen, sei k^* . Weiter seien Q' und Q'' zwei, von A verschiedene k^* -Scheitel innerhalb B , wobei Q' zwischen A und Q'' liege. Die Existenz weiterer k^* -Scheitel zwischen A und Q' , sowie zwischen Q' , Q'' ist nicht ausgeschlossen; ferner können Q' , Q'' sowie A auch k -Scheitel sein und Q' , Q'' auch k -Grundpunkte.

Beh. (I) Es existiert

(1) zwischen A und Q' , den Punkt Q' eingeschlossen, mindestens ein k -Scheitel S' , welcher übrigens stets von A verschieden ist; dagegen kann $S' = Q'$ sein.

(2) zwischen Q' und Q'' , den Punkt Q'' eingeschlossen aber nicht Q' , mindestens ein k -Scheitel S'' , der übrigens von Q'' verschieden ist, falls nicht Q' und Q'' beide k -Scheitel sind.

(II) Ist die Anzahl der k -Scheitel von B gleich q , so ist die Anzahl der k^* -Scheitel von B (ebenfalls endlich und zwar) nicht grösser als q .

Bew. Es sei T der, von A und Q' begrenzte, Q' enthaltende Teilbogen von B , wobei T o.B.d.A. den Anfangspunkt A besitze. Ferner sei S derjenige Teilbogen von B , der Q' als Anfangs- und Q'' als Endpunkt besitzt. Schliesslich sei U' bzw. U'' eine Umgebung von Q' bzw. von Q'' auf B , in der weder A noch Q'' bzw. weder A noch Q' enthalten ist und in der kein k -Scheitel liegt ausgenommen höchstens Q' bzw. Q'' . Zufolge der Vor. existieren derartige, sogar zu einander fremde, U' und U'' .

Betr. Beh. (I) (1). Da Q' ein k^* -Scheitel ist, existiert ein in U' enthaltene k -tupel $\gamma = (S_2, \dots, S_{k+1})$, mit dem A verbunden ist. Es sei A' der am nächsten unterhalb S_2 gelegene, mit γ verbundene Punkt, wobei $A = A'$ zuge-

lassen ist. Erforderlichenfalls kann nun (gemäss Nr. 3.1.1., Reduktionssatz) durch eine beliebig kleine Änderung der zu γ gehörigen OCh stets erreicht werden, dass A' im Innern von $T' = (T - S) + U'$ liegt und Schnittpunkt ist, während zugleich $S_2, \dots, S_{k+1}$ Schnittpunkte sind. Damit ist die Existenz eines $(k+1)$ -tupels innerhalb T' nachgewiesen und folglich die eines k -Scheitels S' innerhalb T' . Ist Q' selbst k -Scheitel, so kann $S' = Q'$ sein, andernfalls liegt S' innerhalb $(T' - U')$ gemäss der Definition von U' , w.z.z.w.

Betr. Beh. (I) (2). Nach Vor. existiert je ein in U' bzw. in U'' enthaltenes (natürlich geordnetes) k -tupel $\gamma' = (S'_1, \dots, S'_k)$ bzw. $\gamma'' = (S''_1, \dots, S''_k)$, mit dem A verbunden ist. Alle Punkte von γ' liegen unterhalb aller Punkte von γ'' . Wir unterscheiden nun folgende drei, alle Möglichkeiten erschöpfende Fälle: (a) es ist Q' kein k -Scheitel; (b) es ist Q'' kein k -Scheitel; (c) es sind Q' und Q'' beide k -Scheitel.

Betr. Fall (a). Nach Annahme enthält U' keinen k -Scheitel. Zwecks indirekten Beweises der Beh. setzen wir überdies voraus, dass auch im Innern von S keine k -Scheitel liegen. Wir unterscheiden zwei Unterfälle (a') und (a''); nämlich:

Unterfall (a'): Es sei auch Q'' kein k -Scheitel. Dann besitzt $R = U' + S + U''$ den k -OW k gemäss Nr. 3.2.3. Wir halten $S''_2, \dots, S''_k$ fest und ändern das natürlich geordnete $(k+1)$ -tupel $(A, S''_1, \dots, S''_k)$ so ab, dass S''_1 monoton nach unten (gegen A) hin sich bewegt; an Stelle von A erhalten wir dann Punkte oberhalb (des ursprünglichen Ortes von) A . Da R den k -OW k besitzt, können in R bei unserer Änderung keinerlei Gewinne stattfinden, solange S''_1 oder vielmehr der aus S''_1 durch die Änderung hervorgehende Punkt sich innerhalb R befindet. Man kann daher durch die monotone Änderung S''_1 in S'_1 überführen und dadurch aus dem k -tupel γ'' das k -tupel $(S'_1, S''_2, \dots, S''_k)$ erhalten. Mit dem letzteren ist aber der ursprüngliche Ort von A nicht mehr verbunden, da er bei der Änderung ins Innere eines wachsenden Teilbogens W gerät; verbunden ist mit $(S'_1, S''_2, \dots, S''_k)$ hingegen ein Punkt, der oberhalb des obersten, unterhalb R gelegenen und mit γ'' verbundenen Punktes A'' liegt, aber nicht zu R gehört. Die soeben für S'_1, S''_1 angestellten Überlegungen können für S'_2, S''_2 (bei festen $S'_1, S''_3, \dots, S''_k$) wiederholt werden. Da hierbei die monotone Bewegung der mit dem jeweils betrachteten k -tupel verbundenen Punkte stets im gleichen Sinne verläuft wie beim ersten Schritt (für S'_1, S''_1), so wird W bei diesem zweiten Schritt weiter wachsen, also der ursprüngliche Ort von A insbesondere mit $(S'_1, S'_2, S''_3, \dots, S''_k)$ nicht verbunden sein. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens für S'_3, S''_3 usw. gelangen wir zum Ergebnis: Es ist γ'' in γ' derart überführbar, dass der ursprüngliche Ort von A mit keinem der bei der Überführung auftretenden, innerhalb R gelegenen k -tupel verbunden ist, insbesondere also nicht mit γ' . Widerspruch mit der Annahme über γ' .

Unterfall (a''). Es sei Q'' aber nicht Q' ein k -Scheitel (und das Innere

von S sei frei von k -Scheiteln). Wir versuchen, γ'' durch den gleichen monotonen Prozess wie im Unterfall (a') in γ' überzuführen. Dabei ergibt sich aber die Schwierigkeit, dass Gewinne von Punkten innerhalb R unterhalb des jeweils (nach unten) bewegten Punktes S_x'' nicht von vorneherein ausgeschlossen sind ($x = 1, \dots, k$), weil R jetzt den k -OW ($k+1$) besitzt (gemäss Nr. 3.3.1., (b) (II)). Unter Benutzung der vorausgesetzten Eindeutigkeit der k -Paratingenten (Nr. 2.1., IV.) kann man diese Schwierigkeit folgendermassen umgehen. Wir führen zunächst γ'' durch den im Unterfall (a') verwendeten *monotonen* Prozess in ein *unterhalb* Q'' gelegenes k -tupel $\bar{\gamma}''$ über und stützen uns auf die (weiter unten zu beweisende) *Zwischenbehauptung*: «Werden (was stets möglich ist) $\bar{\gamma}''$ und γ'' beide nur hinreichend nahe bei Q'' gewählt, so finden im Verlauf unserer Überführung von γ'' in $\bar{\gamma}''$ keine Gewinne von Punkten innerhalb $R' = U' + S$ statt.» Weil aber R' den k -OW k besitzt, lässt sich auf die beiden, innerhalb R' gelegenen k -tupel $\bar{\gamma}''$ und γ' der gleiche (monotone) Überführungsprozess mit dem gleichen Ergebnis anwenden wie im Unterfall (a'); dabei ist nur noch zu beachten, dass (der ursprüngliche Ort des Punktes) A bei der Überführung von γ'' in $\bar{\gamma}''$ *ins Innere eines wachsenden Bogens* W gerät und dass W auch bei der (monotonen) Überführung von $\bar{\gamma}''$ in γ' *ohne Unterbrechung weiter wächst*. Die Annahme, das Innere von S sei frei von k -Scheiteln, führt somit auch im Unterfall (a'') zu einem Widerspruch. Wir haben jetzt noch den Beweis der Zwischenbehauptung nachzuholen; dabei ist nach wie vor vorausgesetzt, dass S frei ist von k -Scheiteln. Wir bemerken vorerst, dass mit γ' noch ein oberhalb S_k'' sowie innerhalb U'' gelegener Punkt S''_{k+1} verbunden sein kann; dieser bewegt sich aber bei der (monotonen) Überführung von γ'' in $\bar{\gamma}''$ stets nach oben (solange er nicht etwa oberhalb U'' verloren geht), kann also beim Beweise der Zwischenbehauptung ausser Betracht bleiben. Wir führen diesen Beweis indirekt, nehmen also an, es würden bei unserer Überführung von γ'' in $\bar{\gamma}''$ Gewinne innerhalb R' stattfinden. Da $R = U' + S + U''$ den k -OW ($k+1$) besitzt, können Gewinne unterhalb des jeweils (nach unten) bewegten Punktes S_x'' nur dann stattfinden, wenn S''_{k+1} nicht vorhanden bzw. schon nach oben hin aus U'' herausgerückt ist. Es kann auch nur höchstens *ein* Punkt P innerhalb R' gewonnen werden und zwar nur derart, dass P monoton nach oben hin sich bewegend über den Anfangspunkt U' von U' hinweg ins Innere von $R' = U' + S$ hinein und dem S''_x monoton entgegenrückt. Da aber R' den k -OW k besitzt (gemäss Nr. 3.2.3.), kann mit $\bar{\gamma}''$ kein Punkt in R' verbunden sein. Daher müsste P noch vor Vollendung der Überführung von γ'' in $\bar{\gamma}''$ den ganzen Bogen $R' - U''$ durchlaufen und nach U'' hineingelangen, um verloren zu gehen. Wäre also die Zwischenbehauptung falsch, so existierte zu *jedem* Punkt X einer Umgebung V' von U' auf $R' - U''$ in *jeder* (beliebig kleinen) Umgebung Z von Q'' auf B ein k -tupel τ derart, dass X mit τ verbunden ist. Daher wäre X in der (gemäss Vor. IV. (Nr. 2.1.) eindeutig bestimmten) k -Paratingente P

an B in Q' enthalten. Somit läge der ganze Bogen V' auf P , während doch BP als nirgends dicht auf B vorausgesetzt ist (Nr. 2.1., IV.). Damit ist die Zwischenbehauptung (indirekt), also die Beh. (I) (2) auch für den Unterfall (a'') und damit für den Fall (a) bewiesen.

Betr. Fall (b). Der Beweis kann wie im Falle (a) geführt werden, wenn man nur g' und g'' ihre Rollen tauschen lässt.

Betr. Fall (c). Für die Beh. (I) (2) ist in diesem Falle nichts zu beweisen.

Betr. Beh. (II) Die Anzahl der k^* -Scheitel, die unterhalb bzw. oberhalb A liegen (wenn wir hier B als *Bogen* voraussetzen, was die zu beweisende Aussage nicht beeinträchtigt), sei mindestens s bzw. t mit $0 \leq s$, $0 \leq t$, $s + t = p \geq 1$. Gemäss Beh. (I) ist die Anzahl der k -Scheitel unterhalb bzw. oberhalb A dann mindestens gleich s bzw. t . Sind nämlich etwa $R_1, \dots, R_t$ oberhalb A gelegene k^* -Scheitel in natürlicher Anordnung und setzt man noch $R_0 = A$, so liegt mindestens ein k -Scheitel innerhalb des Bogens mit $R_{\tau-1}$ bzw. R_τ als Anfangs- bzw. als Endpunkt oder in dessen Endpunkt R_τ , $\tau = 1, \dots, t$. Entsprechend schliesst man für die unterhalb A gelegenen k -Scheitel, woraus $s + t \leq q$ folgt, w.z.z.w.

Anmerkung. Die beim Beweise des vorstehenden Satzes verwendete Methode zeigt gewisse Analogien zum Juelschen Korrespondenzprinzip ⁽³⁴⁾.

3.4.2. *Besitzt B mindestens den k -OW p mit $k + 1 \leq p$, so ist die Anzahl q der k -Scheitel auf B mindestens gleich $(p - k)$. Ist B speziell eine Kurve C , so ist sogar $q \geq p$.*

Bew. O.B.d.A können wir ausnahmslos annehmen, dass der zu betrachtende Grundbogen (Grundkurve) nur endlich viele k -Scheitel enthält. Dann verwenden wir vollständige Induktion. Die Beh. ist *richtig zunächst für $k = 1$* . In der Tat: Es sei K eine OCh, die mit B (mindestens) p Schnittpunkte $S_1, \dots, S_p$ (in natürlicher Anordnung auf B) gemeinsam hat. Wir können o.B.d.A. (gemäss Nr. 3.1.1., Reduktionssatz) $(S_1, \dots, S_p)$ als ununterbrochenes p -tupel annehmen (gemäss Nr. 2.2. und 3.1.1. sind Grundpunkte unter die $S_1, \dots, S_p$ nicht aufzunehmen). Wendet man auf das 2-tupel $(S_\rho, S_{\rho+1})$, $\rho = 1, \dots, p - 1$, den Kontraktionssatz an, so ergibt sich die Existenz eines k -Scheitels, der im Innern des Bogens mit dem Anfangs- bzw. Endpunkt S_ρ bzw. $S_{\rho+1}$ liegt (das Vorhandensein von Grundpunkten spielt beim Existenzbeweis für diese k -Scheitel keine Rolle). Somit existieren mindestens $(p - 1)$ k -Scheitel auf B , die sämtlich z.B. von S_1 verschieden sind. Ist speziell B eine *Kurve*, so enthält auch der Bogen mit S_p als Anfangs- und S_1 als Endpunkt in seinem Innern einen k -Scheitel; die Gesamtzahl der k -Scheitel in Falle einer Grundkurve ist daher mindestens gleich p .

⁽³⁴⁾ Vgl. JUEL, C., *Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung*, « Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. R., naturv. og mathem. Afd. », XI. 2 (1914).

Induktionsannahme: Die Beh. sei schon für jedes k mit $1 \leq k \leq k'$ bewiesen. Es sei $k'' = k' + 1$, ferner sei k'' ein System von OCh mit der Grundzahl k'' und es besitze B den k'' -OW p mit $k'' + 1 \leq p$. Demgemäss sei $\gamma = (S_1, \dots, S_p)$ ein p -tupel auf B . Durch eine beliebig kleine Abänderung der S_i in γ kann übrigens (da B beschränkten k -OW besitzt, Nr. 3.2.4., Zusatz) stets erreicht werden ⁽³⁵⁾, dass keines der S_i ein k'' -Scheitel ist und dass überdies S_i auf keiner der (endlich vielen) k'' -Scheitelparatingenten von B liegt; die letztere Forderung ist deshalb erfüllbar, weil der Durchschnitt einer jeden der endlich vielen k'' -Scheitelparatingenten mit B nirgends dicht auf B sein sollte (Nr. 2.1., IV.). Nun bildet aber die Gesamtheit der den Punkt S_i enthaltenden OCh K von k'' ein System k' von OCh mit der Grundzahl $k' = k'' - 1$; (zufolge der Wahl von S_i sind übrigens die k'' -Scheitel sämtlich verschieden von den k' -Scheiteln) auch ist S_i selbst kein k' -Scheitel (gemäss der Festsetzung zu Beginn der Nr. 2.2.). Nach Induktionsannahme ist nun die Anzahl der k' -Scheitel mindestens $(p - 1) - k' = p - k''$. Gemäss Nr. 3.4.1., Beh. (II), ist somit die Anzahl der k'' -Scheitel nicht kleiner als $(p - k'')$; w.z.z.w. Ist speziell B eine *Kurve* C , so ist nach der Induktionsannahme die Anzahl m der k' -Scheitel T_μ' , $\mu = 1, \dots, m$, nicht kleiner als $(p - 1)$; dabei zählt S_i nicht zu den T_μ' (vgl. Nr. 2.2., Festsetzung). O.B.d.A. sei $T_1', \dots, T_m'$ eine natürliche Anordnung der T_μ' auf C derart, dass S_i unterhalb T_1' liegt. Zufolge der Wahl von S_i fällt keiner der k'' -Scheitel in einen der Punkte T_μ' . Gemäss Nr. 3.4.1., Beh. (I), liegen dann im Innern des, T_1' enthaltenden, S_i als Anfangs- und T_m' als Endpunkt besitzenden Teilbogens von C nicht weniger als m k'' -Scheitel; ebenso liegt im Innern des, T_1' nicht enthaltenden Bogens mit T_m' als Anfangs- und mit S_i als Endpunkt mindestens ein k'' -Scheitel. Zusammen sind also nicht weniger als $m + 1 \geq (p - 1) + 1 = p$ solche k'' -Scheitel vorhanden; w.z.z.w.

3.5. Beweis von Satz (B) (2) in Nr. 2.2.

Es gelten die Vor. I.-IVa. (Nr. 2.1.). Wir bemerken zunächst, dass die k -Scheitel isoliert auf B liegen; denn gemäss Nr. 3.2.2. ist der k -OW eines jeden Häufungspunktes von k -Scheiteln mindestens gleich $(k + 2)$; jeder kompakte Teilbogen von B enthält somit nur endlich viele k -Scheitel. Während nun Satz (B) (1) in Nr. 2.2. die Anzahl der k -Scheitel *nach unten* hin beschränkte, tut dies Satz (2) *nach oben* hin, allerdings nur ⁽³⁶⁾ für die Grund-

⁽³⁵⁾ Vgl. a. a. O. ⁽⁵⁾, Nr. 1.8., S. 16.

⁽³⁶⁾ Es gibt z. B. Bogen vom zyklischen Ordnungswert $t \geq 5$ mit unendlich vielen Punkten von mindestens dem zyklischen OW Vier. (Vgl. HAUPT, *Raumbogen beliebig vorgegebener lokaler Ordnung*, « Journ. f. d. r. u. angew. Math. », 184 j (1942), S. 77 ff., ferner « Sitz. Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. math. - naturw. Abt. », 1939, S. 253 ff). Daraus folgt, dass für Bogen (oder Kurven) von einem k -OW grösser als $(k + 1)$ in allgemeinen eine (endliche) Schranke für die Anzahl der k -Scheitel nicht mehr existiert.

bogen von höchstens dem k -OW ($k + 1$). Dementsprechend bedienen wir uns zu seinem Beweise des nachstehenden Hilfssatzes (Nr. 3.5.1.), welcher dem Hilfssatz in Nr. 3.3.1. entspricht:

3.5.1. Vor. *Der Grundbogen B besitze den k -OW ($k + 1$) mit $k \geq 1$. Ferner seien S' und S'' zwei k -Scheitel (also innere Punkte) von B und es sei T der (bzw., wenn B eine Kurve ist, einer der) Teilbogen von B mit den Begrenzungspunkten S' , S'' . Schliesslich sei A ein unterhalb T gelegener Punkt von B und k^* das System der OCh durch A .*

Beh. Auf dem abgeschlossenen Teilbogen T liegt mindestens ein k^ -Scheitel.*

Bew. Die Beh. ergibt sich ⁽³⁷⁾ aus dem Kontraktionssatz.

3.5.2. Jeder Grundbogen B vom k -OW ($k + 1$) enthält nicht mehr als ($k + 1$) k -Scheitel.

Bew. Vollständige Induktion.

(1) Zunächst sei $k = 1$ (bei beliebig, aber endlich vielen Grundpunkten). Es seien ferner S_j , $j = 1, 2, 3$, drei k -Scheitel in natürlicher Anordnung auf B , wobei S_1 unterhalb S_2 (und S_2 unterhalb S_3) liegt. Wegen $k + 1 = 2$ ist mit jedem Punkt von B noch höchstens ein Punkt von B verbunden. Da S_j ein k -Scheitel ist, gibt es in beliebig kleiner Umgebung U_j von S_j auf B zwei mit einander verbundene Punkte P_j' , P_j'' , $j = 1, 2, 3$; o.B.d.A. können wir dabei annehmen, dass P_j' unterhalb P_j'' liegt und dass die U_j paarweise fremd sind, sodass U_1 unterhalb U_2 und U_2 unterhalb U_3 liegt. Wir schreiben $Q = P_1'$ und $R = P_1''$. Nun lassen wir R monoton nach oben rücken; dann rückt Q monoton nach unten. Dabei können, selbst nach dem etwaigen Verlust von Q (über den ⁽³⁸⁾ Anfangspunkt A von B hinweg), innerhalb B keine Gewinne stattfinden, weil dabei (mindestens) zwei neue, mit R verbundene Punkte auf B auftreten würden. Andererseits muss Q nach unten hin den Bogen B über A hinweg verlassen bevor R mit P_2' zusammenrückt; denn sonst wäre mit $R = P_2'$ ausser P_2'' noch Q verbunden. Nachdem Q über A hinweg nach unten hin verloren worden ist und bevor R mit P_2' zusammenrückt, muss ferner genau ein Punkt T gewonnen werden und zwar, weil dies nicht innerhalb von B und nicht unterhalb R möglich ist, von oben her über den Endpunkt ⁽³⁸⁾ E von B hinweg. Sobald R mit P_2' zusammengerückt ist, muss T monoton von E nach P_2'' gelangt sein. Somit müsste T vorher (monoton) jeden Punkt von U_3 passieren, also T etwa mit P_3'' zusammenrücken. Für $T = P_3''$ wäre aber T , ausser mit R , noch mit P_3' verbunden; da indes P_3' oberhalb U_2

⁽³⁷⁾ Vgl. a. a. O. ⁽⁵⁾, Nr. 4.2. Übrigens gilt Nr. 3.5.1. unabhängig von Vor. IVa., Nr. 2.1.

⁽³⁸⁾ Ist B eine Kurve, so kann man als Anfangspunkt A einen beliebigen, unterhalb S_1 und oberhalb S_3 gelegenen Punkt wählen; als Endpunkt E kann ebenfalls A genommen werden.

liegt und infolgedessen von dem, noch unterhalb P_2' gelegenen, Punkt R verschieden ist, widerspricht diese Verbundenheit von R , P_3' und $P_3'' = T$ der Vor., dass $\mathbf{B}$ den k -OW 2 besitzt. Damit ist die Beh. für $k = 1$ bewiesen.

Anmerkung. Beim Beweise wurde nur die Existenz von drei Paaren verbundener Punkte P_j' , P_j'' vorausgesetzt, die in fremden Umgebungen auf $\mathbf{B}$ liegen; insbesondere ist also a priori nicht vorausgesetzt, dass auf $\mathbf{B}$ nur beschränkt viele k -Scheitel liegen oder dass die k -Scheitel von den Grundpunkten verschieden sind. Auch Vor. IVa. wurde nicht benutzt.

(2) *Induktionsannahme.* Die Beh. sei schon für alle k mit $1 \leq k \leq k'$ bewiesen. Angenommen, es sei $k'' = k' + 1$ die Grundzahl eines OCh-Systems k'' . Ferner besitze $\mathbf{B}$ den k'' -OW ($k'' + 1$). Ist höchstens *ein* k'' -Scheitel vorhanden, so ist die Beh. richtig, wegen $1 < k''$. Es enthalte $\mathbf{B}$ in Innern (mindestens) die k'' -Scheitel $S_1, \dots, S_{2q}$ in natürlicher Anordnung, wobei S_i unterhalb S_j liegt und wobei $1 \leq q$; die Annahme der Existenz von $2q$ k'' -Scheiteln widerspricht nicht der Behauptung, da jedenfalls für $q = 1$ gilt: $2q \leq k' + 1 < k'' + 1$. Weiter sei A ein, von den k'' -Grundpunkten verschiedener, Punkt von $\mathbf{B}$ unterhalb S_1 (und oberhalb S_{2q} , falls $\mathbf{B}$ eine Kurve sein sollte); das System aller OCh aus k'' , die den Punkt A enthalten, sei k' . Es ist k' ein OCh-System mit der Grundzahl k' . Zuzufolge Nr. 3.5.1, existieren (mindestens) q k' -Scheitel, nämlich jeweils einer in dem abgeschlossenen Teilbogen mit $S_{2\tau-1}$ bzw. $S_{2\tau}$ als Anfangs- bzw. Endpunkt, $\tau = 1, \dots, q$. Nach Induktionsannahme ist aber $q \leq k' + 1$; denn $\mathbf{B}$ besitzt (höchstens) den k' -OW $k'' = k' + 1$. Mithin besitzt $\mathbf{B}$ nur beschränkt viele k'' -Scheitel, nämlich nicht mehr als $2(k' + 1) + 1$. Nunmehr können wir die Beh. (dieser Nr. 3.5.2.) für $k = k''$ selbst beweisen. Dazu wählen wir A derart, dass jede der (beschränkt vielen) k'' -Scheitelparatingenten an $\mathbf{B}$ fremd ist zu A , dass also die k' -Scheitel von den k'' -Scheiteln verschieden sind und mithin insbesondere A selbst kein k' -Scheitel ist (vgl. die auf S_i bezüglichen Bemerkungen im Nr. 3.4.2., Bew., Induktionsannahme); hierbei wird Nr. 2.1., IVa., wesentlich benutzt. Sind dann $S_1, \dots, S_p$ die k'' -Scheitel von $\mathbf{B}$, so enthält jeder Bogen mit S_ρ als Anfangs- und $S_{\rho+1}$ als Endpunkt ($\rho = 1, \dots, p - 1$) mindestens einen k' -Scheitel *im Innern* (gemäß Nr. 3.5.1.), sodass die Anzahl der k' -Scheitel mindestens $(p - 1)$ ist. Nach Induktionsannahme ist aber die Anzahl der k' -Scheitel höchstens gleich $(k' + 1)$. Mithin ist $p - 1 \leq k' + 1$ oder $p \leq k' + 2 = k'' + 1$. Damit ist der Induktionsschluss fertig. Er gilt insbesondere auch für den Fall einer Grundkurve.

3.6. Beweis von Satz (B) (5) in Nr. 2.2.

Es gelten die Vor. I.–IV. (Nr. 2.1.).

3.6.1. *Enthält der Grundbogen $\mathbf{B}$ (in seinem Innern) nur isolierte k -Scheitel, so sind je zwei k -Scheitel S' , S'' von $\mathbf{B}$ gleich-oder ungleichartig, je nachdem*

die Gesamtzahl der k -Grundpunkte und k -Scheitel auf B , durch die S' und S'' auf B von einander getrennt werden, ungerade oder gerade ist.

Zur Definition der Gesamtzahl der k -Grundpunkte und k -Scheitel, durch die S' und S'' von einander getrennt werden: Fällt ein zwischen S' und S'' gelegener k -Scheitel in einen k -Grundpunkt, so ist der betr. Punkt sowohl als k -Grundpunkt wie als k -Scheitel zu zählen; fällt S' in einen k -Grundpunkt, so ist S' als zwischen S' und S'' gelegener k -Grundpunkt zu zählen.

Bew. Gemäss Nr. 3.2.4. ist jede hinreichend kleine, einseitige Umgebung von S' oder S'' auf B vom k -OW k ; insbesondere liegen S' und S'' im Innern von B . Es liege etwa S'' oberhalb S' und es sei S' bzw. S'' Anfangs- bzw. Endpunkt des Teilbogens S von B . Da die k -Scheitel isoliert auf B liegen sollen, genügt es, den Fall zu betrachten, dass im Innern von S keine weiteren k -Scheitel liegen, und zu zeigen: S' und S'' sind gleich- bzw. ungleichartig, je nachdem S' von S'' auf S durch eine ungerade oder gerade Anzahl von Grundpunkten getrennt werden; zu diesen Grundpunkten ist S' selbst zu zählen, falls S' mit einem Grundpunkt zusammenfällt (Beachte, dass S' unterhalb S'' liegen sollte). Es sei nun V' bzw. V'' eine untere bzw. obere Umgebung von S' bzw. S'' je vom k -OW k . Für jedes r -tupel mit $k+1 \leq r$, dessen zugehöriger Teilbogen R in $\tilde{S} = V' + S + V''$ enthalten ist, muss R in seinem Innern entweder S' oder S'' oder beide enthalten, weil nämlich S den k -OW k besitzt. Es seien U' bzw. U'' (zweiseitige) Umgebungen von S' bzw. von S'' , die in $\tilde{S}$ enthalten und fremd sind sowie keinen der (endlich vielen) Grundpunkte enthalten ausser höchstens S' und S'' . Es existiert dann ein in U' bzw. U'' enthaltenes $(k+1)$ -tupel $\gamma' = (S'_1, \dots, S'_{k+1})$ bzw. $\gamma'' = (S''_1, \dots, S''_{k+1})$; dabei muss γ' bzw. γ'' Punkte sowohl unter- als oberhalb S' bzw. S'' enthalten, weil andernfalls z.B. U' einen unter- oder oberhalb S' gelegenen k -Scheitel enthalten würde.

Wir ändern nun γ' stetig derart, dass sich S'_1 nach unten und S'_{k+1} nach oben bewegt, während $S'_2, \dots, S'_k$ festgehalten werden. Im Verlaufe dieser Änderung kann solange kein Punkt innerhalb $S' = V' + S$ gewonnen werden, als S'_{k+1} unterhalb S'' bleibt. In der Tat: Jedenfalls ist dies richtig, solange S'_1 nach unten hin nicht aus S' (über den Anfangspunkt V' von V' hinweg) hinausrückt; denn S' besitzt den k -OW $(k+1)$ (Nr. 3.3.1., (b) (II)). Aber auch nachdem S'_1 über V' hinweg den Bogen S' verlassen haben sollte, kann in S' kein Gewinn stattfinden. Denn einerseits sind Gewinne in S' unterhalb S'_{k+1} unmöglich, weil der von V' und S'_{k+1} begrenzte Teilbogen von S' ständig wächst. Andererseits sind Gewinne in S' oberhalb S'_{k+1} unmöglich; würde nämlich ein Schnittpunkt S'_{k+2} innerhalb S' und oberhalb S'_{k+1} auftreten, so existierte ein $(k+1)$ -tupel γ'_2 in S' mit S'_2 als Anfangspunkt; es werden aber S'_1 und S'_2 entweder durch einen Grundpunkt (nämlich durch S') oder durch keinen Grundpunkt auf U' getrennt, je nachdem entweder S' sowohl in einen Grundpunkt fällt, als zwischen S'_1 und S'_2 liegt oder nicht beides gleichzeitig

der Fall ist; daher würden, weil S'_1 und S'_2 in γ' unmittelbar aufeinanderfolgen, je nachdem γ' und γ'_2 gleichartig oder ungleichartig sein und es würden dann gemäss N. 3.3.1., (a), innerhalb S' zwei verschiedene k -Scheitel existieren im Widerspruch mit der Definition von S' . Wir können also durch unsere Änderung jedenfalls S'_{k+1} in eine in U'' enthaltene untere Umgebung W'' von S'_1 bringen, ohne dass in S' Gewinne stattfinden; die Endlage von S'_{k+1} sei T_{k+1} . (Man beachte, dass S'_1 unterhalb S'' liegen muss, weil andernfalls in U'' oberhalb von S'' noch ein k -Scheitel liegen würde).

Durch Wiederholung dieser Schlüsse (jetzt bei festen $S'_2, \dots, S'_{k-1}, T_{k+1}$; usw.) ergibt sich (gleichgültig ob S'_1 den Punkt V' nach unten hin überschritten hat oder nicht) die Existenz eines in W'' enthaltenen, also unterhalb S'_1 gelegenen k -tupels $\tau = (T_2, \dots, T_{k+1})$, von dem folgendes behauptet werden kann: Es ist τ gleich-oder ungleichartig mit γ' , je nachdem S' und S'' auf S durch eine ungerade oder gerade Anzahl von Grundpunkten getrennt werden (dabei ist S' unter diese Grundpunkte mit einzurechnen, falls S' in einen Grundpunkt fällt). In der Tat: Ist zunächst S' kein Grundpunkt, dann ist stets γ' ungleichartig mit $\tau' = (S'_2, \dots, S'_{k+1})$; je nachdem dann eine gerade oder ungerade Anzahl Grundpunkte zwischen S' und S'' liegt, sind τ' und τ gleich-oder ungleichartig, also γ' und τ ungleich-oder gleichartig, wie behauptet. Es sei nun S' ein Grundpunkt; liegt S' nicht zwischen S'_1 und S'_2 , so schliesst man wie eben, wobei S' als Grundpunkt zwischen S' und S'' zu zählen ist; liegt aber S' zwischen S'_1 und S'_2 so, ist γ' gleichartig mit τ' und dieses gleich-bzw. ungleichartig mit τ je nachdem zwischen S' und S'' eine gerade oder ungerade Anzahl von Grundpunkten liegt, wobei jetzt S' nicht mitzählt. Daraus folgt wieder die Beh. betr. γ' und τ . – Wir unterscheiden für den weiteren Verlauf des Beweises folgende Fälle: Entweder (*Fall A.*) ist in U'' ein (oberhalb S' gelegener) Schnittpunkt T_{k+2} mit τ verbunden (mehr als ein solcher Schnittpunkt kann nicht existieren); es sind alle in U'' gelegenen $(k+1)$ -tupel gleichartig mit τ , insbesondere also auch γ' (gemäss Nr. 3.3.3.), da U'' keine Grundpunkte enthalten soll abgesehen höchstens von S'' . Oder (*Fall B.*) es ist mit τ kein Schnittpunkt in U'' verbunden. Dann halten wir $T_2, \dots, T_k$ fest und lassen T_{k+1} monoton nach oben hin sich bewegen entweder (*Fall B'.*) bis in U'' von oben her ein neuer, mit τ verbundener Schnittpunkt über den Endpunkt von U'' nach U'' hereinrückt, womit wir auf den Fall A. zurückkommen; oder (*Fall B''.*) bis T_{k+1} mit S''_k zusammenrückt; in diesem Falle B'' ist wieder zu beachten, dass unterhalb T_{k+1} in S' keine Gewinne stattfinden können, weil derjenige Teilbogen von $\tilde{S}$ wächst, der S'_1 oder, falls S'_1 schon verloren ging, V' als Anfangs- und T_{k+1} als Endpunkt besitzt. Hat man nun $T_{k+1} = S''_k$ erreicht, so wiederhole man das Verfahren mit der Modifikation, dass man jetzt bei festen $T_2, \dots, T_{k-1}, S''_k$ den Schnittpunkt T_k nach oben hin gegen S''_{k+1} sich bewegen lässt. Entweder tritt einmal Fall A. oder Fall B. ein oder das Verfahren lässt sich erneut wiederholen. Würde dabei immer Fall

B". eintreten, so liessen sich der Reihe nach T_{j+1} und S_j'' zur Deckung bringen, $j=k, k-1, \dots, 1$. Dann aber wäre S''_{k+1} mit dem k -tupel $(T_2=S_1'', \dots, T_{k+1}=S_k'')$ verbunden und folglich müsste, schon bevor T_{j+1} und S_j'' für *alle* j zur Deckung gebracht ist, einmal Fall A. oder B'. eingetreten sein; entgegen der Annahme. Damit erweist sich aber τ als in jedem Falle gleichartig mit γ' . Daraus folgt die Beh.

3.6.2. *Besitzt die Grundkurve C nur endlich viele k-Scheitel, so ist die Gesamtzahl der k-Scheitel und der k-Grundpunkte gerade; dabei ist jeder k-Scheitel, der mit einem k-Grundpunkt zusammenfällt, in der Gesamtzahl zweifach zu zählen, nämlich einmal als k-Scheitel und dann als k-Grundpunkt.*

Bew.. Sind $S_1, \dots, S_q$ die k -Scheitel von C in natürlicher Anordnung, sind also $S_{q+1}=S_1$ und S_q unmittelbar benachbart auf C, ist ferner t_ρ die im Sinne des Satzes von Nr. 3.6.1. berechnete Anzahl der Grundpunkte zwischen S_ρ und $S_{\rho+1}$, $\rho=1, \dots, q$, so sind S_ρ und $S_{\rho+1}$ gleich-oder ungleichartig je nachdem $s_\rho \equiv t_\rho + 1 \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod{2}$ ist. Wegen $S_{q+1}=S_1$ muss daher die Anzahl der s_ρ mit $s_\rho \equiv 1$ gerade sein, also $s_1 + \dots + s_q = (t_1 + \dots + t_q) + q \equiv 0$ woraus die Beh. folgt.