Trasporti rigidi di vettori, e geometria della retta (*).

Memoria di BENIAMINO SEGRE (a Bologna).

Sunto. - *Si risolve completamente una questione posta da Pia Nalli a fondamento dello studio di certi notevoli trasporti rigidi di vettori (e da lei trattata soltanto in alcuni casi particolari), collegandola alla teoria proiettivo-differenziale delle superficie rigate di un iperspazio.*

1. In un interessante lavoro, uscito dieci anni or sono, Pia Nalli ha esaminato certi notevoli trasporti rigidi di vettori sopra una V_n riemanniana, ponendo alla base del suo studio la seguente questione [1]:

Trovare a quali condizioni debbono soddisfare le funzioni di variabile reale

$$p_{ik} = p_{ik}(u) \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \dots, n;\quad n \geq 3), \tag{1}$$

affinchè esistano n *funzioni derivabili*

$$x_i = x_i(u) \qquad (i = 1,\ 2, \dots, n) \tag{2}$$

tali che valgano le uguaglianze

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1, \tag{3}$$

$$p_{ik} = x_i x_k' - x_k x_i' \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \dots, n), \tag{4}$$

ove gli apici denotano derivazione rispetto a u.

La Nalli ha risolto in loc. cit. in [1] il problema nel caso più semplice $n = 3$, ed è tornata recentemente sul caso $n = 4$ [2]; quest'ultima trattazione non lascia però vedere come potrebbe venir affrontato il caso generale, e conduce a risultati non del tutto esaurienti neppure per $n = 4$. Il lavoro citato in [2] fornisce infatti condizioni necessarie per $n = 4$, senza mostrare esplicitamente s'esse siano o meno sufficienti: tali condizioni sono inoltre — come qui risulterà — più complicate del necessario, involgendo le derivate terze delle funzioni (1) [3].

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna, comunicato nel settembre 1948 al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

(1) P. NALLI, *Trasporti rigidi di vettori nelle varietà metriche*, « Rendic. Circ. Mat. di Palermo », *61* (1937), 314-338, n. 2.

(2) P. NALLI, *Sopra un problema relativo ai trasporti rigidi di vettori negli spazi quadrimensionali*, « Ann. di Mat. », (4) *26* (1947), 67-72.

(3) [*Nota aggiunta durante la correzione delle bozze*]. La professoressa Nalli — alla quale avevo comunicato il presente lavoro — mi avverte di aver da tempo approfondita la ricerca coi metodi del calcolo differenziale assoluto, ottenendo condizioni, rimaste finora inedite, in cui compaiono soltanto più derivate prime e seconde. Della possibilità di applicare tali metodi al caso $n > 3$, si sta occupando un suo Assistente.

In questa Nota risolviamo per $n \geq 3$ arbitrario il problema dianzi enunciato, dando condizioni necessarie e sufficienti, espresse da legami relativamente semplici, che fanno intervenire soltanto le (1) e le loro derivate prime e seconde; di più mostriamo come, nell'ipotesi che valgano tali condizioni, si determinino le funzioni (2) in guisa che sussistano le (3), (4).

All'uopo poniamo per abbreviare

$$(p, q)_{ijhk} = p_{ij}q_{hk} + p_{ih}q_{kj} + p_{ik}q_{jh}, \tag{5}$$

e conveniamo sempre che gli indici in basso siano numeri scelti arbitrariamente fra gli interi $1, 2, \ldots, n$, e che gli apici in alto denotino derivazioni rapporto ad u. Ammettiamo inoltre che le funzioni (1) abbiano un campo di definizione comune, ove non si annullino simultaneamente ed ammettano derivate prime e seconde continue.

I risultati qui ottenuti, enunciati nel n. 6, ricevono applicazione nella geometria della retta, fornendo condizioni necessarie e sufficienti affinchè *una superficie rigata di* S_{n-1} *sia una sviluppabile od un cono* (n. 7).

2. Supponiamo intanto che valgano le (4). Allora ovviamente risulta

$$p_{ik} = -p_{ki}. \tag{6}$$

Si ha inoltre

$$(p, p)_{ijhk} = 0, \tag{7}$$

come si vede sviluppando il determinante nullo

$$\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_h & x_k \\ x_i' & x_j' & x_h' & x_k' \\ x_i & x_j & x_h & x_k \\ x_i' & x_j' & x_h' & x_k' \end{vmatrix}$$

colla regola di Laplace, secondo i minori estratti dalle matrici formate dalle prime due e dalle ultime due righe. Dalle (4) si deduce poi, derivando rispetto ad u,

$$p_{ik}' = x_i x_k'' - x_k x_i'': \tag{8}$$

sicchè, come le (4) implicano le (7), così dalle (8) seguono le

$$(p', p')_{ijhk} = 0. \tag{9}$$

Infine dalle (4), (8) si ricavano subito le

$$\begin{cases} x_i p_{kl} + x_k p_{li} + x_l p_{ik} = 0 \\ x_i p_{kl}' + x_k p_{li}' + x_l p_{ik}' = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Se le p_{ik} fossero tutte nulle, le (4) equivarrebbero a supporre costanti i mutui rapporti delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde dall'equazione (3) seguirebbe che le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ medesime dovrebbero ridursi a costanti, soddisfacenti appunto a tale equazione. Escludendo d'ora innanzi che le p_{ik} siano tutte nulle, distinguiamo due casi, secondochè il rapporto p_{ik}/p_{ik} non dipende dagli indici i, k o muta al variare di questi.

3. Nelle prima delle due suddette alternative il rapporto di due qualunque delle p_{ik} è costante rispetto ad u, avendo nulla la derivata, e cioè sussistono le

$$p_{ik} = c_{ik} f(u) \tag{11}$$

colle c costanti non tutte nulle. Allora le (6), (7), (9) si riducono alle

$$c_{ik} = -c_{ki}, \qquad (c, c)_{ijhk} = 0 \tag{12}$$

e le (10) diventano

$$c_{kl} x_i + c_{li} x_k + c_{ik} x_l = 0. \tag{13}$$

Supposto per fissare le idee $c_{12} \neq 0$, è subito visto che — in forza delle (12) — si soddisfa nel modo più generale alle (13) assumendo

$$x_i = c_{1i} \alpha(u) + c_{2i} \beta(u), \tag{14}$$

ove α e β denotano funzioni arbitrarie della u. Sostituendo nelle (3), (4) ed usufruendo ancora delle (11), (12) si giunge al sistema differenziale

$$\begin{gathered} \alpha^2(u) \sum_i c_{1i}^2 + 2\alpha(u)\beta(u) \sum_i c_{1i} c_{2i} + \beta^2(u) \sum c_{2i}^2 = 1 \\ \alpha(u)\beta'(u) - \alpha'(u)\beta(u) = f(u)/c_{12}, \end{gathered} \tag{15}$$

il quale fornisce le funzioni $\alpha(u)$ e $\beta(u)$ con una costante arbitraria.

4. Supponiamo ora che valga la seconda delle alternative contemplate alla fine del n. 2, talchè le (10) o sono incompatibili per valori non tutti nulli delle x, oppure determinano univocamente i mutui rapporti delle x. Incominciamo col mostrare che nell'ipotesi suddetta,

se valgono le (6), (7), (9), *le* (10) *sono compatibili per valori non tutti nulli delle* x.

All'uopo fissiamo arbitrariamente tre dei numeri $1, 2, \ldots, n$, siano r, s, t, e verifichiamo che si soddisfa alle (10) assumendo

$$x_i = \lambda\, (p, p')_{irst} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

dove λ denota una qualunque funzione non nulla di u. Invero, esprimendo nella prima delle (10) le x_i, x_k, x_l mediante la (16) e rammentando le (5), (6), il primo membro di detta equazione diventa

$$\begin{aligned} & \lambda p_{st}'(p_{ir}p_{kl} + p_{kr}p_{li} + p_{lr}p_{ik}) + \\ + {} & p_{tr}'(p_{is}p_{kl} + p_{ks}p_{li} + p_{ls}p_{ik}) + \\ + {} & \lambda p_{rs}'(p_{it}p_{kl} + p_{kt}p_{li} + p_{lt}p_{ik}) = \\ & = -\lambda p_{st}'(p, p)_{rikl} - \lambda p_{tr}'(p, p)_{sikl} - \lambda p_{rs}'(p, p)_{tikl}; \end{aligned}$$

esso quindi si annulla, in virtù delle (7). Osserviamo poi che derivando le (7) rispetto ad u si ottengono le identità $(p,\ p')_{ijhk} + (p',\ p)_{ijhk} = 0$, onde le (16) equivalgòno alle

$$x_i = -\lambda(p',\ p)_{irst}\ ;$$

un calcolo analogo al precedente mostra allora che questi valori delle x soddisfanno alla seconda delle (10), in forza delle (9). Notiamo infine che le (16), (5), (6) forniscono

$$x_r = \lambda(p,\ p')_{rrst} = \lambda(p_{rs}p_{tr}' - p_{tr}p_{rs}'),$$

onde per una scelta conveniente degli indici r, s, t risulta $x_r \neq 0$, in virtù dell'ipotesi ammessa al principio di questo numero.

Siccome le (10) — per quanto si è visto — determinano univocamente i mutui rapporti delle x, così dalle (16) — tenuto conto che in esse gli indici r, s, t sono arbitrari — si traggono le identità

$$(p,\ p')_{irst}(p,\ p')_{jhkl} - (p,\ p')_{ihkl}(p,\ p')_{jrst} = 0,$$

valide comunque si scelgano gli indici. Notiamo da ultimo che, nell'ipotesi fatta nel n. 3, i secondi membri delle (16) risultano tutti nulli.

5. Ferme restando le ipotesi ammesse al principio del n. 4, e fissati gli indici r, s, t in guisa che i secondi membri delle (16) siano non tutti nulli, ci resta da vedere se e come è possibile determinare λ in modo che le (16) rendano soddisfatte le (3), (4). Si ha intanto che, affinchè valga la (3), occorre e basta che sia

$$\lambda = \pm 1/\sqrt{(p,\ p')^2_{1rst} + (p,\ p')^2_{2rst} + \dots + (p,\ p')^2_{nrst}}, \tag{17}$$

dove il radicale a secondo membro è diverso da zero.

Per la validità delle (4) dev'essere (per $i,\ k = 1,\ 2, \dots, n$)

$$p_{ik}/\lambda^2 = (p,\ p')_{irst}(p,\ p')_{krst}' - (p,\ p')_{krst}(p,\ p')_{irst}',$$

ossia, tenuto conto delle (5), (7), (9),

$$p_{ik}/\lambda^2 = (p,\ p')_{irst}(p,\ p'')_{krst} - (p,\ p')_{krst}(p,\ p'')_{irst} =$$
$$= p_{ik}\begin{vmatrix} p_{st} & p_{tr} & p_{rs} \\ p_{st}' & p_{tr}' & p_{rs}' \\ p_{st}'' & p_{tr}'' & p_{rs}'' \end{vmatrix}.$$

In virtù della (17) si giunge così all'*unica equazione*

$$(p,\ p')^2_{1rst} + (p,\ p')^2_{2rst} + \dots + (p,\ p')^2_{nrst} = \begin{vmatrix} p_{st} & p_{tr} & p_{rs} \\ p_{st}' & p_{tr}' & p_{rs}' \\ p_{st}'' & p_{tr}'' & p_{rs}'' \end{vmatrix}, \tag{18}$$

indipendente dagli indici i, k.

6. Riassumendo i risultati conseguiti nei nn. 2-5, abbiamo che:

Affinchè valgano le condizioni enunciate nel n. 1, è necessario e sufficiente che le p_{ik} *verifichino le* (6), (7), (9), (18). *Queste condizioni sono intanto soddisfatte se le* p_{ik} *sono tutte nulle, nel qual caso le* (2) *riduconsi a costanti, vincolate soltanto dalla* (3). *Supposto quindi che le* p_{ik} *non siano tutte nulle, nel caso particolare in cui le* p_{ik} *possano esprimersi colle* (11), *ove ad esempio* $c_{12} \neq 0$, *tali condizioni si riducono alle equazioni algebriche* (12); *se queste sono verificate, le funzioni* (2) *sono ottenibili con una costante arbitraria mediante le* (14), *integrando le* (15). *Se invece le* p_{ik} *non possono assumersi nella forma* (11) *e soddisfanno le* (6), (7), (9), (18), *le funzioni* (2) *risultano determinate sotto forma finita — ed a meno di un simultaneo cangiamento di segno — dalle* (16), (17), *nelle quali* r, s, t *denotano tre qualunque dei numeri* 1, 2, ..., n *scelti (com'è certamente possibile) in guisa che nella* (17) *il radicale non si annulli.*

Aggiungiamo che le (6), (7) sono equazioni algebriche omogenee — rispettivamente lineari e quadratiche — nelle p_{ik}, ed osserviamo che, in virtù delle (6), basta limitarsi alle condizioni (7) provenienti da valori distinti degli indici i, j, h, k. Dunque le (7) possono venir omesse se $n=3$; mentre per $n \geq 4$ è facile vedere che, fra le (7), ve ne sono esattamente $\binom{n}{4}$ *linearmente indipendenti ed* $\binom{n-2}{2}$ *algebricamente indipendenti.* Analoghe considerazioni valgono per le (9), tenuto presente che le (6) implicano le $p_{ik}' = -p_{ki}'$. Finalmente la (18) è una relazione algebrica nelle p, p' e p'', lineare non omogenea nelle p''; in base ai nn. 4, 5, *le relazioni fornite dalla* (18) *al variare degli indici* r, s, t *si riducono ad una sola* in forza delle (6), (7), (9). Per $n=3$, è questo l'unico legame che deve intercedere fra le p e le loro derivate oltre alle (6).

7. Il problema enunciato nel n. 1 e dianzi risolto, può, almeno in parte venir interpretato geometricamente come segue. Assunte le $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ come coordinate omogenee di punto in S_{n-1}, le equazioni (2) rappresentano ivi una curva ogniqualvolta i secondi membri delle (4) non si annullino tutti identicamente. Allora questi secondi membri non sono che le coordinate plückeriane della tangente alla curva suddetta nel generico punto, sicchè le (1) rappresentano il luogo generato da tale tangente.

Questo luogo si riduce ad una retta fissa se, e soltanto se, valgono le ipotesi ammesse nel n. 3, nel qual caso pure la curva (2) coincide con tale retta, com'è geometricamente evidente, e come risulta dalle (14). Altrimenti il luogo suddetto è una superficie rigata sviluppabile, e la questione posta nel n. 1 implica che si determini quand'è che le (1) rappresentano una superficie siffatta. In base ai nn. 2-5, le (6), (7), (9), sono le *condizioni all'uopo necessarie e sufficienti,* soddisfatte le quali il relativo spigolo di regresso viene fornito dalle (16). Più precisamente, le (6), (7) sono le ben note *relazioni intercedenti fra le coordinate plückeriane di una retta in* S_{n-1} ([4]), sicchè le (1) rappresentano una rigata di S_{n-1} s'esse sono soddisfatte senza che valgano le (11). In tale ipotesi, questa rigata è sviluppabile *quando e soltanto quando sussistono le* (9) ([5]), senza che i secondi membri delle (16) abbiano rapporti costanti (ossia indipendenti dalla u).

L'avere questi secondi membri rapporti costanti equivale a supporre che lo spigolo di regresso (16) si riduca ad un punto, ed esprime quindi la condizione affinchè la rigata sviluppabile (1) sia un cono. In virtù del n. 5, *all'uopo è necessario e sufficiente che il secondo membro della* (18) *si annulli comunque si scelgano gli indici* r, s, t, ciò che rimane escluso ove si supponga che per ogni scelta di questi valga la (18).

I risultati precedenti assumono particolare perspicuità se li si interpretano, per $n \geq 4$, in uno spazio $S_{\binom{n}{2}-1}$ in cui le $p_{ik} = -p_{ki}$ siano coordinate omogenee di punto. Quivi abbiamo $\binom{n}{4}$ quadriche (7), la cui intersezione è la varietà grassmanniana delle rette di S_{n-1}; le (1) sono le equazioni parametriche di una curva di $S_{\binom{n}{2}-1}$, la quale dev'essere tracciata su questa varietà affinchè i secondi membri delle (1) verifichino le (7). Derivando le (7) rispetto ad u si vede che i punti $p = p(u)$ e $p' = p'(u)$ sono coniugati rispetto a ciascuna delle quadriche suddette; le (9) esprimono allora che il punto p' — e conseguentemente la retta pp' — giace su ognuna di esse. Pertanto:

Affinchè una rigata dello spazio ordinario o di un iperspazio sia sviluppabile (o, in particolare, sia un cono), occorre e basta che la sua imagine sulla grassmanniana delle rette sia una curva le cui tangenti giacciano su tale grassmanniana.

È questa una traduzione geometrica rigorosa del fatto intuitivo che una rigata risulta sviluppabile se, e soltanto se, due sue generatrici infinitamente vicine qualsiansi sono fra loro incidenti; tale proprietà fornisce, in modo ovvio, un'interpretazione geometrica delle (10) ([6]).

([4]) Cfr. ad esempio B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna* (Bologna, Zanichelli, 1948), nn. 123, 129, 130.

([5]) Questo risultato, senza la precisazione data nel capoverso successivo, è ben noto per $n = 3$; vedasi p. es. G. KOENIGS, *La géométrie réglée et ses application* (Paris, Gauthier-Villars, 1895), n. 51, oppure L. ZINDLER, *Liniengeometrie mit Anwendungen* (Leipzig, Göschen, 1906), § 4.

([6]) Per altre applicazioni analitiche di geometria della retta, cfr. B. SEGRE, *Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti*, « Mem. Acc. Naz. dei Lincei », (6) *2* (1928), 578-592, e B. SEGRE, *Sulle equazioni differenziali autoaggiunte del 4º e 5º ordine*, « Boll. Un. Mat. Ital. », *8* (1929), 244-245.