Algebre senza base finita (II) ⁽¹⁾.

Memoria di IACOPO BARSOTTI (a Pisa).

Sunto. - Si finiscono di passare in rassegna i teoremi più importanti della teoria delle algebre a base finita, quale è esposta dallo SCORZA, lasciando cadere l'ipotesi della limitazione della base. Dei teoremi che restano validi si dà la dimostrazione solo quand'essa è necessariamente diversa da quella dello SCORZA: nel caso di teoremi la cui dimostrazione verte essenzialmente nella finitezza della base sono dati esempi di algebre per cui essi cadono in difetto.

CAP. II - Algebre senza base finita ⁽²⁾.

2.1. Definizione; indipendenza dei postulati. — Dicesi *algebra* sul corpo Γ un insieme A di elementi, che sia un sistema nel corpo Γ , e tale che, se (a, b) è una coppia ordinata di suoi elementi, sia definito un suo elemento $P(a, b)$, in modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

$$P(P(a, b), c) = P(a, P(b, c))$$

$$P(a, S(b, c)) = S(P(a, b), P(a, c)); P(S(a, b), c) = S(P(a, c), P(b, c))$$

$$P(D(\alpha, a), D(\beta, b)) = D(\alpha\beta, P(a, b)), \text{ se } \alpha, \beta \text{ sono numeri.}$$

Con notazioni più comuni, si può porre $P(a, b) = ab$, e $P(a, b)$ si dirà il *prodotto* di a per b , mentre si riserverà il nome di *prodotto scalare* all'elemento $D(\alpha, a)$. Le precedenti divengono allora:

$$(37) \quad (ab)c = a(bc)$$

$$(38) \quad a(b + c) = ab + ac; (a + b)c = ac + bc$$

$$(39) \quad (\alpha a)(\beta b) = (\alpha\beta)(ab) \text{ se } \alpha, \beta \text{ sono numeri.}$$

Che l'insieme di questi postulati sia compatibile con l'insieme dei postulati (5), (6), (7), (8) è noto. Rimane da dimostrarne l'indipendenza, il che si scinde nei seguenti sottocasi:

a) la negazione di (37) è compatibile con (5), (6), (7), (8), (38), (39);

b) la negazione di (38) è compatibile con (5), (6), (7), (8), (37), (39);

c) la negazione di (39) è compatibile con (5), (6), (7), (8), (37), (38);

d) la negazione del primo dei (38) è compatibile col secondo e con (5), (6), (7), (8), (37), (39).

⁽¹⁾ Estratto dalla tesi di laurea (Pisa, Scuola Normale Superiore, 1942).

⁽²⁾ La numerazione segue quella della parte I, pubblicata in questi Annali, S. IV, T. XXVI, (1947), pp. 57-66.

Dimostrazione di a): Se A è un'algebra non commutativa, in cui il prodotto si indicherà, per chiarezza, con $a \cdot b$, si ponga $ab = a \cdot b - b \cdot a$.

Si avrà allora $(ab)c = a \cdot b \cdot c - b \cdot a \cdot c - c \cdot a \cdot b + c \cdot b \cdot a$; $a(bc) = a \cdot b \cdot c - a \cdot c \cdot b - b \cdot c \cdot a + c \cdot b \cdot a$, che è generalmente diverso dal precedente risultato, onde il (37) non è soddisfatto; poi: $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c - b \cdot a - c \cdot a$; $ab+ac = a \cdot b - b \cdot a + a \cdot c - c \cdot a$, eguale al precedente risultato, onde il primo dei (38), e analogamente il secondo, è soddisfatto: infine: $(\alpha a)(\beta b) = (\alpha \beta)(a \cdot b) - (\alpha \beta)(b \cdot a)$, e $(\alpha \beta)(ab) = (\alpha \beta)(a \cdot b) - (\alpha \beta)(b \cdot a)$, onde il (39) è soddisfatto, c. v. d.

Dimostrazione di b): sia A un sistema in $C(2)$ (corpo fondamentale di caratteristica 2), che abbia almeno 2 elementi distinti fra loro e dallo zero: pongasi: $ab = a$ se $b \neq 0$, $ab = 0$ se $b = 0$. È allora: $(ab)c = a = a(bc)$ se $b \neq 0 \neq c$; $(a0)c = 0 = a(0c)$; $(ab)0 = 0 = a(b0)$ se $b \neq 0$, onde A soddisfa il (37); poi: $(\alpha a)(\beta b) = \alpha a = (\alpha \beta)(ab)$ se $\beta b \neq 0$, ossia se $\beta = 1$ e $b \neq 0$; $(\alpha a)(\beta 0) = 0 = (\alpha \beta)(a0)$; $\alpha a(0b) = 0 = (\alpha 0)(ab)$, e quindi A soddisfa al (39); però A non soddisfa al (38), poichè se a, b sono diversi fra loro e dallo 0, e se $c \neq 0$, è: $c(a+b) = c$, ma $ca + cb = 0$.

Dimostrazione di c): sia A l'insieme degli elementi a' , con a numero del corpo complesso F ; pongasi: $a' + b' = (a+b)'$; $\alpha' = (\alpha a)$ se α è elemento di F ; allora A è un sistema, il cui zero è $0'$. Pongasi poi $a'b' = (a, b, \alpha)'$, ove con a, α si indica la parte reale di a . Allora i (37), (38) sono soddisfatti, ma non il (39), poichè se α, β sono immaginari puri diversi da 0, ed a, b reali diversi da 0, è: $(\alpha a)(\beta b) = 0'$, mentre $(\alpha \beta)(a'b') = (\alpha \beta ab)' \neq 0'$. Si noti però che: (40) *Se A è un sistema nel corpo Γ , per cui sono soddisfatti i (37), (38), esiste un sottocorpo massimo G di Γ tale che se A viene considerato in G , è soddisfatto anche il (39).*

Dim. — Si osservi prima di tutto che il (39) è equivalente, di fronte agli altri postulati, ai due seguenti: se a, b sono elementi di A , ed α è numero di Γ , è: $(\alpha a)b = \alpha(ab)$; $a(\alpha b) = \alpha(ab)$. È chiaro che se α, β sono nel sottocorpo fondamentale di Γ , il (39) è soddisfatto.

Sia allora G_1 l'insieme dei numeri α per cui $(\alpha a)b = \alpha(ab)$ per ogni coppia a, b di elementi di A . Si prova facilmente che G_1 è un corpo: analogamente per il corpo G_2 degli α per cui $a(\alpha b) = \alpha(ab)$ per ogni coppia a, b ; il corpo $G = G_1 \cap G_2$ è quello di cui si vuole dimostrare l'esistenza, c. v. d.

Dimostrazione di d): la stessa algebra definita per la dimostrazione di b) dimostra anche d).

2.2 Prime definizioni; centro e algebre semplici. — Si passeranno ora in rassegna i teoremi più importanti della teoria delle algebre a base finita, quale è esposta dallo SCORZA (*Corpi numerici e algebre*). Quelli la cui dimostrazione è uguale alla dimostrazione datane dallo SCORZA verranno soltanto enunciati; per gli altri, verrà data la dimostrazione: infine, per alcuni, la

cui dimostrazione verte essenzialmente sulla finitezza della base, saranno dati esempi di algebre per cui essi cadono in difetto.

Si ha, se e è lo zero di A : $ae = ea = e$ per ogni elemento a di A .

Infatti (12), (39), è: $ae = a(0e) = (ae)0 = e$, ed analoga.

(41) TEOREMA. - Se α è numero di Γ , ed a è elemento di A , condizione necessaria e sufficiente affinché sia $\alpha a = 0$, è che sia $\alpha = 0$ ovvero $a = 0$.

Se infatti $\alpha \neq 0$, è $\alpha^{-1}(\alpha a) = a = 0$, c. v. d.

(42) TEOREMA. - Se $a = 0$, b sono elementi di A , è: $ab = 0 = ba$.

Infatti si ha $a + b = b$, onde $ab + b^2 = b^2$, c. v. d. (11).

Se $a \neq 0$, $b \neq 0$, e $ab = 0$, si dirà che a , b sono rispettivamente un *divisore* sinistro o destro dello 0, e che a , b sono rispettivamente un *nullifico* sinistro di b , e *destro* di a . Si danno anche le seguenti definizioni: se $ab = b$, a è un *modulo* sinistro di b ; analogamente per i moduli destri; se $ab = ba = b$, a è un *modulo* di b ; se $a \neq 0$ e $ab = ba = 0$, a è un *nullifico* di b ; se $a^2 = a \neq 0$, a è un *automodulo*; se $ab = b$, ovvero $ba = b$, ovvero $ab = ba = b$ per ogni elemento b di A , si dirà rispettivamente che a è un *modulo* sinistro, destro, o un *modulo* di A ; ed analogamente per i nullifici.

(43) TEOREMA. - Se a è modulo sinistro di b , e b modulo destro di a , o è $a = b = 0$, ovvero $a = b$ è un *automodulo*.

(44) TEOREMA. - Un modulo destro o sinistro di un'algebra è un *automodulo*.

(45) TEOREMA. - Un'algebra o non ha modulo, o ne ha uno solo: se ha moduli destri e moduli sinistri, ne ha uno solo, che coincide con il modulo.

(46) TEOREMA. - Se un'algebra possiede moduli sinistri (destri) differenti, la differenza fra due di essi è un *nullifico* sinistro (destro) dell'algebra, e da uno di essi si ottengono tutti gli altri sommandolo coi singoli nullifici sinistri (destri).

Due algebre A , A' diconsi *isomorfe* se i sistemi A , A' sono equivalenti, e se all'elemento ab , con a , b in A , corrisponde $a'b'$, ove a' , b' sono i corrispondenti di a , b in A' ; diconsi *reciproche*, se i sistemi A , A' sono equivalenti, e se ad ab corrisponde $b'a'$. Tutti i teoremi dati, e che si daranno, sulle algebre, sono invarianti di fronte alle relazioni di isomorfismo e reciprocità.

Un'algebra priva di divisori dello zero dicesi *primitiva*. Se B , C sono due sub-sistemi di A , sia S l'insieme degli elementi di A ognuno dei quali è somma di elementi del tipo bc , con b in B e c in C ; S è evidentemente un sistema, qualora la somma ed il prodotto scalare vi siano definiti come in A : S dicesi il *prodotto* di B , C , ed indicasi con $S = BC$.

Se $S^2 \leq S \neq 0$, S è evidentemente un'algebra, qualora il prodotto vi si definisca come in A ; si dirà una *sub-algebra* di A , e si dirà *propria* se $S < A$.

(47) TEOREMA. - L'insieme degli elementi di A , ognuno dei quali commuta con un dato elemento a , è una *sub-algebra* di A , che dicesi l' A -commutatore di a .

(48) TEOREMA. - Gli elementi di A , ognuno dei quali commuta con ogni elemento di A , formano un sistema che, se non è nullo, è una *sub-algebra* commutativa di A .

Esso dicesi la *sub-algebra centrale*, o il *centro* di A .

Una sub-algebra B di A si dirà *invariante sinistra*, o *destra*, in A , se $BA \leq B$, o $AB \leq B$ rispettivamente; si dirà *invariante* in A se è invariante sinistra e destra.

(49) TEOREMA. — Se $B \neq 0$ è un sub-sistema di A , e $BA \leq B$ ($AB \leq B$), B è una sub-algebra invariante sinistra (destra) in A .

Una sub-algebra invariante di A dicesi *massima* se è propria, e se non esiste nessuna sub-algebra invariante di A che la contenga, senza coincidere con essa. Un'algebra dicesi *semplice*, se è priva di sub-algebre invarianti proprie.

(50) TEOREMA. — Se B_1, B_2 sono sub-algebre invarianti di A , la $C = B_1 \cap B_2$ o è nulla, o è una sub-algebra invariante di A . Ed ognuno dei sistemi $B_1 B_2, B_2 B_1$, se non è nullo, è una sub-algebra di C invariante in A .

(51) TEOREMA. — Se a è elemento di A , l'insieme degli elementi di A di cui a è modulo sinistro (destro) costituisce un sistema che, se non è nullo, è una sub-algebra invariante sinistra (destra) di A .

(52) TEOREMA. — I nullifici destri (sinistri) di un dato elemento di A , formano un sistema che, se non è nullo, è una sub-algebra invariante sinistra (destra) di A .

2.3. Elementi singolari ed inversi. — Un elemento a di A si dirà *singolare sinistro*, o *destro*, secondo che $aA < A$, $Aa < A$; nelle algebre a base finita, ogni elemento singolare sinistro diverso da 0 è un divisore sinistro dello 0, e analogamente per il destro; ma ciò non accade per le algebre senza base finita, come si vede dalla considerazione dell'anello dei polinomi in una indeterminata sopra un corpo qualsiasi.

(53) TEOREMA. — Se l'elemento a dell'algebra A non è singolare sinistro (destro), per ogni b di A esiste un c di A tale che $ac = b$ ($ca = b$).

Un'algebra priva di elementi singolari diversi da 0 sia sinistri che destri si dirà *divisoria*; essa è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto, qualora non si tenga conto dell'elemento 0, e quindi contiene l'elemento unità u ; esso è il modulo dell'algebra:

(54) TEOREMA. — Un'algebra divisoria è dotata di modulo.

In un'algebra col modulo u , un elemento b dice-i *inverso* dell'elemento a se $ab = ba = u$. L'inverso di un elemento è unico, poichè se $ab = ba = u$, $ab' = b'a = u$, sarà: $b = b(ab') = (ba)b' = b'$; l'inverso di a sarà indicato con a^{-1} .

(55) TEOREMA. — Se a è elemento di A col modulo u , e b, c sono tali che $ab = ca = u$, è: $b = c = a^{-1}$.

Dim. — Infatti $c = c(ab) = (ca)b = b$.

(56) TEOREMA. — In un'algebra con modulo, condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento sia dotato di inverso, è che esso non sia singolare nè destro, nè sinistro.

Dim. — La condizione è necessaria, poichè se a^{-1} esiste, e b è un elemento qualsiasi, è: $b = a(a^{-1}b)$, onde $aA = A$, e analogamente per Aa .

Se poi $aA = A$, esiste un b tale che $ab = u$, e analogamente un c tale che $ca = u$, onde (55) a ha inverso, c. v. d.

(57) TEOREMA. — *Se a ha inverso, ed $ab = u$ (modulo), è $b = a^{-1}$; e analogamente se $ba = u$.*

Infatti $b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}$, c. v. d.

(58) TEOREMA. — *Un elemento dotato di inverso non è un divisore nè destro nè sinistro dello zero.*

Dim. — Se infatti fosse $ab = 0$, sarebbe $b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = 0$, c. v. d.

Non è detto che ogni divisore sinistro (destro) dello 0 sia singolare sinistro (destro). Sia infatti A l'algebra in $C(2)$ la cui base è formata dagli elementi a' , con a numero reale tale che $0 \leq a \leq 2$, col prodotto così definito: $a'b = (ab)'$ se $ab \leq 2$; $a'b = 0$ se $ab > 2$. L'elemento $(3/2)'$ è evidentemente un divisore sinistro dello 0, ma è $(3/2)'A = A$, poichè esiste sempre il numero x compreso fra 0 e 2 tale che $(3/2)x = a$ se $0 \leq a \leq 2$. Però:

(59) TEOREMA. — *Un'algebra divisoria è primitiva.*

Essa, infatti, ha (54) il modulo u , ed ogni elemento $\neq 0$ è dotato di inverso e quindi, per la (58), tale algebra è priva di divisori sinistri o destri dello 0, c. v. d.

Possono invece aversi algebre primitive senza modulo, e non divisorie: tale è infatti l'algebra sul corpo Γ formata dai polinomi di grado maggiore od eguale ad 1, in una indeterminata e con coefficienti in Γ .

(60) TEOREMA. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'algebra abbia qualche modulo sinistro (destro), è che contenga qualche elemento che non sia nè singolare sinistro (destro), nè divisore sinistro (destro) dello 0.*

Dim. — La condizione è evidentemente necessaria. Se poi a è un tale elemento, esiste un u per cui $au = a$: se b è elemento di A , è $aub = ab$, onde $ub = b$, c. v. d.

(61) TEOREMA. — *Ogni elemento di una sub-algebra invariante propria sinistra (destra) in A è singolare sinistro (destro) in A .*

È evidente; da (56) si ha poi:

(62) TEOREMA. — *Un'algebra divisoria è semplice.*

(63) TEOREMA. — *Una sub-algebra di un'algebra primitiva è primitiva.*

2.4. Elementi pseudonulli. — Sia A un'algebra: si avrà $A \geq A^2 \geq A^3 \geq \dots$. Può essere che vi sia un intero r tale che $A^r = A^{r+1}$, ed $A^{r-1} > A^r$; tale r si dirà l'indice di A . A^r dicesi il *nucleo* di A , e se esso è nullo, A dicesi *pseudonulla*; un'algebra pseudonulla di indice 2 dicesi *zero-algebra*.

(64) TEOREMA. — *Se A è pseudonulla di indice r , ogni sua sub-algebra è pseudonulla di indice minore od uguale ad r .*

(65) TEOREMA. — *Una zero-algebra è semplice se, e solo se è di ordine uno.*

(66) TEOREMA. — *Il nucleo di un'algebra, se non è nullo, è una sub-algebra invariante dell'algebra data. Un'algebra semplice è di indice uno o due, e nel secondo caso è una zero-algebra di ordine uno.*

Un'algebra si dirà *semisemplice* se è priva di sub-algebre invarianti pseudonulle.

(67) TEOREMA. — *Un'algebra semisemplice, che non sia una zero-algebra di ordine uno, non è pseudonulla. Se A ha dei nullifici, essi, insieme allo 0, costituiscono una zero-algebra invariante in A. Un'algebra semisemplice, che non sia una zero-algebra di ordine uno, è priva di nullifici.*

Un elemento $a \neq 0$ di un'algebra dicesi *pseudonullo* se qualche sua potenza è nulla; ed il massimo intero r per cui $a^r \neq 0$ dicesi il *grado* di a .

(68) TEOREMA. — *Se un'algebra ha elementi pseudonulli, ne ha certamente di grado uno.*

(69) TEOREMA. — *Se ab è nullo, o pseudonullo, tale è ba , e i loro gradi differiscono al più di uno.*

(70) TEOREMA. — *Ogni elemento di un'algebra pseudonulla di indice r , è pseudonullo di grado minore di r .*

Non è però vero, come nelle algebre a base finita, il reciproco; si consideri infatti l'algebra A in $C(2)$ che ha per base l'insieme degli elementi a_r ($r = 1, 2, \dots$) in cui il prodotto è così definito: $a_r a_s = a_{r,s}$ se r, s sono primi fra loro; $a_r a_s = 0$ negli altri casi. Il numero 1 non si considererà primo con nessun numero. È chiaro che tale algebra soddisfa a (37), e che in essa ogni elemento è pseudonullo di grado al più eguale al numero di elementi della base di cui esso è somma; però non è pseudonulla, perchè si può avere un prodotto di un numero qualsiasi di elementi che è diverso da 0; esso è infatti il prodotto $a_{r_1} a_{r_2} \dots a_{r_n}$, ove $r_1, r_2, \dots, r_n$ sono i primi n numeri primi.

2.5. Somma diretta; differenza di algebre. — Se S_i, S_j sono sub-sistemi di un'algebra A , la loro somma si dirà *diretta* se essi sono disgiunti, e se $S_i S_j = S_j S_i = 0$. Un'algebra dicesi *riducibile* o *irriducibile* secondochè può pensarsi, o no, come somma diretta di sue sub-algebre. Non è detto che un'algebra riducibile sia scomponibile nella somma di algebre irriducibili, come accade sempre per le algebre a base finita; basta pensare ad una zero-algebra senza base finita.

(71) TEOREMA. — *Un'algebra riducibile è sommatoria se, e solo se tali sono le algebre di cui essa è somma diretta.*

Deriva immediatamente da (18), (19).

(72) TEOREMA. — *L'indice di $S = S_1 \dot{+} \dots \dot{+} S_n$ ⁽³⁾ esiste se, e solo se ogni S_i ha indice; e l'indice di S è eguale all'indice di quell' S_i che ha indice massimo.*

(73) TEOREMA. — *$S = S_1 \dot{+} \dots \dot{+} S_n$ è pseudonulla se, e solo se tale è ogni S_i .*

(74) TEOREMA. — *Se $S = S_1 \dot{+} \dots \dot{+} S_n$, ogni S_i , se è un'algebra, è una sub-algebra invariante propria di S . Un'algebra semplice è irriducibile,*

⁽³⁾ Il simbolo $\dot{+}$ indica somma diretta.

Ed anche:

(75) TEOREMA. - Se $S_1, \dots, S_n$ sono sub-algebre invarianti e complementari in A , è: $A = S_1 + \dots + S_n$.

In quel che segue, supporremo a, b elementi di $A = A_1 + \dots + A_n$, con $A_1, \dots, A_n$ algebre, e $a = \sum_1^n a_i, b = \sum_1^n b_i$, con a_i, b_i elementi di A_i .

(76) TEOREMA. - Se a è un modulo sinistro (destro) di b , tale è a_i per b_i , e reciprocamente.

(77) TEOREMA. - L'algebra $A = A_1 + \dots + A_n$ è dotata di moduli sinistri (destri) se, e solo se lo sono le $A_1, \dots, A_n$; e tali moduli sono tutti e soli gli elementi $u = u_1 + \dots + u_n$, ove u_i è modulo sinistro (destro) di A_i . Lo stesso dicasi per nullifici sinistri (destri).

(78) TEOREMA. - Colle notazioni di (77), la A ha centro se, e solo se lo ha almeno una delle A_i ; e tale centro è la somma diretta dei centri di quelle A_i che hanno centro.

(79) TEOREMA. - L'elemento a è pseudonullo se, e solo se gli a_i non sono tutti nulli, e se quelli fra essi che sono diversi da 0 sono pseudonulli. Il grado di a è il grado di quello fra gli a_i che ha grado massimo. L'elemento a è un automodulo se, e solo se gli a_i non sono tutti nulli, e se quelli, fra essi, che sono diversi da 0 sono automoduli.

La teoria della congruenza rispetto ad un sistema si svolge come per le algebre a base finita, e vale ancora il

(80) TEOREMA di MOLIN. - Se B è una sub-algebra invariante propria di A , si può definire il prodotto fra le classi di $A \pmod{B}$ in modo che esse formino un'algebra, che si dirà la differenza fra A e B , e si indicherà con $A - B$.

(81) TEOREMA. - Se $A = B + C$, con B, C algebre, B è isomorfa ad $A - C$, e C ad $A - B$.

(82) TEOREMA. - Se B è una sub-algebra del sistema sommatorio A , $A - B$ è sommatorio.

Dim. - Sia infatti C un complementare di B in A ; ogni classe di $A \pmod{B}$ contiene un solo elemento di C , e ogni elemento di C è contenuto in una di tali classi; inoltre, C è equivalente ad $A - B$, onde (19) $A - B$ è sommatorio, c. v. d.

(83) TEOREMA. - Se A, B sono algebre nel corpo Γ , esiste un'algebra C che è somma diretta di due algebre isomorfe ad A, B rispettivamente.

Dim. - Sia C l'algebra formata dalle coppie (a, b) , con a elemento di A , e b di B , e colle operazioni così definite:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'); (a, b)(a', b') = (aa', bb');$$

$\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ se α è numero di Γ . È facile constatare che C è effettivamente un'algebra; e i sub-sistemi formati dagli elementi del tipo $(a, 0), (0, b)$ sono algebre isomorfe ad A, B rispettivamente, e C è la loro somma diretta c. v. d.

2.6. Prodotto diretto. — Se B, C sono sistemi non nulli dell'algebra A , tali che ogni elemento di B commuti con ogni elemento di C , gli elementi $b_1, \dots, b_n$ di B si diranno *indipendenti* in C , se può essere $c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = 0$, con $c_1, \dots, c_n$ elementi di C , quando, e solo quando sia

$$c_1 = \dots = c_n = 0.$$

Si definisca « proprietà P_C » la seguente proprietà di B : se degli elementi di B sono dipendenti in C , essi sono fra loro dipendenti: e analogamente per la proprietà P_B di C .

(84) LEMMA. — Se B gode di P_C , allora C gode di P_B .

Dim. — Siano $c_1, \dots, c_n$ elementi di C , tutti diversi da 0, dipendenti in B : $b_1 c_1 + \dots + b_n c_n = 0$, ove gli elementi $b_1, \dots, b_n$ possono supporre tutti non nulli; poichè B gode di P_C , esistono dei numeri $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tutti nulli per cui $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = 0$; supposto $\alpha_1 \neq 0$, è: $b_1 = \alpha_2' b_2 + \dots + \alpha_n' b_n$, onde $\alpha_2' b_2 c_1 + \dots + \alpha_n' b_n c_1 + b_2 c_2 + \dots + b_n c_n = (\alpha_2' c_1 + c_2) b_2 + \dots + (\alpha_n' c_1 + c_n) b_n = 0$. Se in quest'espressione i coefficienti delle $b_2, \dots, b_n$ non sono tutti $\neq 0$, le $c_1, \dots, c_n$ sono dipendenti, che è ciò che si vuole dimostrare; altrimenti si ripete il ragionamento, e così proseguendo, se non si arrivasse ad un punto in cui uno dei coefficienti delle $b_r, b_{r+1}, \dots, b_n$ è nullo, si arriverebbe ad avere una espressione della forma $(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \dots + \beta_{n-1} c_{n-1} + c_n) b_n = 0$, con $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ numeri; ed allora sarebbe $\beta_1 c_1 + \dots + \beta_{n-1} c_{n-1} + c_n = 0$, c. v. d.

Se allora B, C sono sub-sistemi di A , il loro prodotto $D = BC$ dicesi *diretto* ed indicasi con $B \times C = C \times B$ se: ogni elemento di B commuta con ogni elemento di C ; B gode di P_C o, il che è (84) lo stesso, C gode di P_B . È facile vedere che questa definizione di prodotto diretto coincide, nel caso di algebre a base finita, con quella che si dà comunemente.

(85) TEOREMA. — Se $D = B \times C$, con B, C sub-algebre di A , coi moduli b, c rispettivamente, D è prodotto diretto di due algebre con lo stesso modulo, isomorfe a B, C .

Dim. — Si considerino infatti le algebre bC e cB ; esse hanno il modulo bc , e se $D' = (bC)(cB)$, ogni elemento di D' è della forma $d' = bcb_1 c_1 + \dots + bcb_n c_n$, con $b_1, \dots, b_n$ elementi di B , $c_1, \dots, c_n$ elementi di C ; perciò $d' = b_1 c_1 + \dots + b_n c_n$ è elemento di D , e viceversa, onde $D' = D$. Il resto è immediato, c. v. d.

(86) TEOREMA. — Ogni algebra è isomorfa ad una sub-algebra invariante di un'algebra con modulo.

Dim. — Sia A un'algebra priva di modulo, e si consideri l'insieme delle coppie (a, α) con a elemento di A ed α numero di Γ ; pongasi $\beta(a, \alpha) = (\beta a, \alpha \beta)$; $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$; $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha \beta)$. Si constata immediatamente che l'insieme K così definito è un'algebra col modulo $(0, 1)$, e che in essa l'insieme degli elementi $(a, 0)$ è una sub-algebra isomorfa ad A ; che poi tale sub-algebra sia invariante in K è evidente, c. v. d.

(87) TEOREMA. — Se A, B sono due algebre sul corpo Γ , esiste un'algebra C nel corpo Γ che è prodotto diretto di due algebre A', B' isomorfe ad A, B rispettivamente.

Dim. - Sia L l'insieme degli elementi $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_r \end{pmatrix}$ ($r = 1, 2, \dots$), con a_i elemento di A , b_i elemento di B ; si indicherà, usando il simbolismo delle matrici, con a l' n -complesso orizzontale $(a_1, \dots, a_n)$, e con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ l'elemento $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_r \end{pmatrix}$ di L . L'elemento b si chiamerà il corrispondente di a .

(88) LEMMA. - Se $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è elemento di L , e a_1, a_1' sono insiemi di elementi indipendenti di a , tali che ogni elemento di a sia loro combinazione, e, chiamati a_2, a_2' i rimanenti elementi di a , ordinati in modo qualsiasi, si ha $a_2 = a_1 A$, $a_2' = a_1' A'$, con A, A' matrici in Γ , pongasi: $b_3 = b_1 + b_2 A_{-1}$; $b_3' = b_1' + b_2' A'_{-1}$, dove b_1, b_2, b_1', b_2' sono i corrispondenti di a_1, a_2, a_1', a_2' ; allora $b_3 = b_3' S_{-1}$, dove S è matrice tale che $a_1' = a_1 S$.

Dim. - Sia K matrice i cui elementi sono soltanto 0 ed 1, tale che $(a_1' | a_0') = (a_1 | a_2) K$, e perciò $(b_1' | b_2') = (b_1 | b_2) K$; si ha $a_1(I | A) = (a_1 | a_2)$, ove I è matrice identica di ordine opportuno; ed è anche: $a_1 S(I | A') K_{-1} = a_1(S | SA') K_{-1} = (a_1' | a_2') K_{-1} = (a_1' | a_2') K^{-1} = (a_1 | a_0)$, attesa l'ortogonalità di K ; perciò, essendo gli elementi di a indipendenti, è $(I | A) = S(I | A') K_{-1}$, ed allora $\begin{pmatrix} I \\ A_{-1} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} I \\ A'_{-1} \end{pmatrix} S_{-1}$, e $(b_1 | b_2) \begin{pmatrix} I \\ A_{-1} \end{pmatrix} = b_1 + b_2 A_{-1} = b_3$; $(b_1 | b_2) K \begin{pmatrix} I \\ A'_{-1} \end{pmatrix} S_{-1} = (b_1' | b_2') \begin{pmatrix} I \\ A'_{-1} \end{pmatrix} S_{-1} = (b_1' + b_2' A'_{-1}) S_{-1} = b_3' S_{-1}$, onde $b_3 = b_3' S_{-1}$, ed il lemma è dimostrato.

Il lemma vale, naturalmente, anche scambiando i ruoli delle a e delle b . Perciò, dato un elemento qualsiasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ di L , si può costruire un elemento $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ con a' formato tutto di elementi indipendenti di a , e tali che ogni elemento di a sia loro combinazione, e con b' costruito come è indicato nel lemma per costruire b_3 ; e per il lemma stesso, si possono ripartire gli elementi di L in classi, ponendo due elementi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ nella stessa classe, se essendo i complessi a, a' formati ciascuno da elementi indipendenti, esiste una matrice S per cui $a' = aS$, e $b = b'S_{-1}$, o se, non essendo verificata quell'ipotesi, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sono riducibili, nel modo indicato in (88) per ottenere $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_3 \end{pmatrix}$, ad elementi $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1' \\ b_1' \end{pmatrix}$ con le a_1, a_1' soddisfacenti a quell'ipotesi, e tali che esista la matrice S per cui $b_1 = b_1' S_{-1}$ e $a_1' = a_1 S$. Il lemma assicura che ogni elemento appartiene ad una sola classe. Si indicherà con $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ la classe che contiene $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Pongasi: $x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ xb \end{bmatrix}$, se x è numero di Γ ; si deve dimostrare

che questa definizione è indipendente dagli elementi di L scelti per determinare le classi; se infatti $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, sia $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, con a' formato da elementi indipendenti; allora è $\begin{bmatrix} a' \\ xb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ xb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ xd \end{bmatrix}$, onde $x \begin{bmatrix} a' \\ b \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$.

Si definisca la somma fra due classi di L come segue: se $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ sono classi, con a, b, c, d complessi orizzontali, indicati con A, C i sistemi formati dalle combinazioni degli elementi di a e di c rispettivamente, sia $D = A \cap C$; sia h' una base di D , h una base di un complementare di D in A , h'' una base di un complementare di D in C ; esisteranno i k, k', k'', k_i' tali che:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h, h' \\ k, k' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h', h'' \\ k_i', k'' \end{bmatrix};$$

pongasi

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h, h', h'' \\ k, k' + k_i', k'' \end{bmatrix};$$

si dimostra che questa definizione è indipendente dagli $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ scelti per identificare le classi. Se infatti si scegliessero altri elementi, A, C, D rimarrebbero invariati, e le basi h, h', h'' godrebbero delle stesse proprietà di cui godono h, h', h'' , e si avrebbero dei corrispondenti elementi $\bar{k}, \bar{k}', \bar{k}'', \bar{k}_i'$. Si avrebbe allora:

$$(89) \quad \begin{cases} (\bar{h} | \bar{h}') = (h | h')S & (\bar{h}' | \bar{h}'') = (h' | h'')T \\ (\bar{k} | \bar{k}') = (\bar{k} | \bar{k}')S_{-1} & (\bar{k}_i' | \bar{k}'') = (\bar{k}_i' | \bar{k}'')T_{-1}, \end{cases}$$

ed S, T dovrebbero trasformare h' in $\bar{h}'$ per qualsiasi k, k'' ; perciò:

$$S = \left(\begin{array}{c|c} S' & 0 \\ \hline \bar{S}' & \bar{K} \end{array} \right); \quad T = \left(\begin{array}{c|c} K & T' \\ \hline 0 & \bar{T}' \end{array} \right);$$

si deve dimostrare che se $(h | \bar{h}' | \bar{h}'') = (h | h' | h'')R$, allora $(k | k' + k_i' | k'') = (\bar{k} | \bar{k}' + \bar{k}_i' | \bar{k}'')R_{-1}$.

Ora, in effetti, è

$$R = \left(\begin{array}{c|c|c} S' & 0 & 0 \\ \hline \bar{S}' & \bar{K} & \bar{T}' \\ \hline 0 & 0 & \bar{T}' \end{array} \right),$$

e per le (89) si vede che la relazione è verificata. Ogni elemento $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ si può esprimere come somma di elementi del tipo $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, con a, b elementi, e non complessi orizzontali. Non è detto che ciò possa avvenire in un sol modo.

(90) LEMMA. - Condizione sufficiente affinché sia $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, è che esista una matrice S tale che $c = aS$, $b = dS_{-1}$; se a è formato di elementi fra loro indipendenti, la condizione è anche necessaria.

Dim. - Sia infatti $a = (a_1 | a_2)$, $b = (b_1 | b_2)$, $c = (c_1 | c_2)$, $d = (d_1 | d_2)$, con a_1 e c_1 formati da elementi indipendenti, e tali che $a_2 = a_1 T$, $c_2 = c_1 R$. Posto: $b_3 = b_1 + b_2 T_{-1}$; $d_3 = d_1 + d_2 R_{-1}$, sarà (88): $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ d_3 \end{bmatrix}$; si deve dimostrare che esiste una matrice U tale che $c_1 = a_1 U$, $b_3 = d_3 U_{-1}$; ora, se $c = aS$, la U per cui $c_1 = a_1 U$ esiste certamente, ed è: $a_1(I | T)S = (a_1 | a_2)S = (c_1 | c_2) = c$, $a_1 U(I | R) = c_1(I | R) = (c_1 | c_2) = c$, con I matrice identica di ordine opportuno. Perciò, attesa l'indipendenza degli elementi di a_1 , è $(I | T)S = U(I | R)$, onde

$$S_{-1} \begin{pmatrix} I \\ T_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ R_{-1} \end{pmatrix} U_{-1},$$

ed allora:

$$b_3 = b_1 + b_2 T_{-1} = b \begin{pmatrix} I \\ T_{-1} \end{pmatrix} = d S_{-1} \begin{pmatrix} I \\ T_{-1} \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} I \\ R_{-1} \end{pmatrix} U_{-1} = d_1 U_{-1} + d_2 R_{-1} U_{-1} = d_3 U_{-1}.$$

È così dimostrata la sufficienza delle condizioni. Sia ora a formata da elementi indipendenti; allora certo esiste una S per cui $c = aS$, e se $c_2 = c_1 R$, posto $d_3 = d_1 + d_2 R_{-1}$, esisterà una T tale che $c_1 = aT$, e $b = d_3 T_{-1} = (d_1 | d_2) \begin{pmatrix} I \\ R_{-1} \end{pmatrix} T_{-1}$. Sarà inoltre: $c = (c_1 | c_2) = a(T | TR) = aT(I | R)$, e perciò $S = T(I | R)$; ed allora $dS_{-1} = (d_1 | d_2) \begin{pmatrix} I \\ R_{-1} \end{pmatrix} T_{-1} = (d_1 + d_2 R_{-1}) T_{-1} = d_3 T_{-1} = b$, c. v. d. Si ha poi:

$$(91) \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a, c \\ b, d \end{bmatrix}.$$

Dim. - Siano $h, h', h'', k, k', k'', k'_1$ i complessi usati per la definizione di $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$; sarà (90)

$$\begin{aligned} a &= (h \ h')S & c &= (h' \ h'')T \\ (k \ k') &= bS_{-1} & (k'_1 \ k'') &= dT_{-1}, \end{aligned}$$

e, posto $S = \begin{pmatrix} S' \\ S'' \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} T' \\ T'' \end{pmatrix}$, con S' , T' matrici di tante righe, quante sono le colonne di h, h' rispettivamente sarà:

$$\begin{aligned} a &= hS' + h'S'' & c &= h'T' + h''T'' \\ (k \ k') &= b(S'_{-1} \mid S''_{-1}) & (k'_1 \ k'') &= d(T'_{-1} \mid T''_{-1}); \end{aligned}$$

infine:

$$(a | c) = (h | h' | h'') \left(\frac{S' | 0}{\frac{S''}{0} \frac{T'}{T''}} \right);$$

poichè $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h, & h', & h'' \\ k, & k' + k'_1, & k'' \end{bmatrix}$, basta dimostrare (90) che $(k | k' + k'_1 | k'') = (b | d) \left(\frac{S'_{-1} | S''_{-1} | 0}{\frac{S''_{-1}}{0} \frac{T'_{-1}}{T''_{-1}}} \right)$ per aver dimostrato l'asserto; ora è effettivamente $(b | d) \left(\frac{S'_{-1} | S''_{-1} | 0}{\frac{S''_{-1}}{0} \frac{T'_{-1}}{T''_{-1}}} \right) = (bS'_{-1} | bS''_{-1} + dT'_{-1} | dT''_{-1}) = (k | k' + k'_1 | k'')$, c. v. d.

Con le operazioni così definite, si constata che l'insieme J delle classi di L è un sistema, perchè soddisfa alla (5), (6), (7), (8).

Se $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ sono ora elementi, e non complessi orizzontali, pongasi:

$$\begin{bmatrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1, \dots, c_n \\ d_1, \dots, d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1, \dots, a_1 c_n, \dots, a_r c_1, \dots, a_r c_n \\ b_1 d_1, \dots, b_1 d_n, \dots, b_r d_1, \dots, b_r d_n \end{bmatrix};$$

si vuole dimostrare che questa definizione è indipendente dagli elementi $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1, \dots, c_n \\ d_1, \dots, d_n \end{pmatrix}$ usati per definire la classi. Basterà dimostrare che: se $c'_1, \dots, c'_m$ sono indipendenti, ed ogni c_i è loro combinazione, e se $\begin{bmatrix} c'_1, \dots, c'_m \\ d'_1, \dots, d'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1, \dots, c_n \\ d_1, \dots, d_n \end{bmatrix}$, allora

$$\begin{bmatrix} a_1 c'_1, \dots, a_1 c'_m, \dots, a_r c'_1, \dots, a_r c'_m \\ b_1 d'_1, \dots, b_1 d'_m, \dots, b_r d'_1, \dots, b_r d'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1, \dots, a_1 c_n, \dots, a_r c_1, \dots, a_r c_n \\ b_1 d_1, \dots, b_1 d_n, \dots, b_r d_1, \dots, b_r d_n \end{bmatrix}.$$

Per dimostrare ciò, si osservi che (90) sarà: $(c_1, \dots, c_n) = (c'_1, \dots, c'_m)S$ e $(d'_1, \dots, d'_m) = (d_1, \dots, d_n)S_{-1}$, ossia:

$$c_i = \sum_1^m c'_j S_{j,i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$d'_i = \sum_1^n d_j S_{i,j} \quad (i = 1, \dots, m),$$

e perciò:

$$a_k c_i = \sum_1^m a_k c'_j S_{i,j} \quad \begin{matrix} (i = 1, \dots, n) \\ (k = 1, \dots, r) \end{matrix}$$

$$b_k d'_i = \sum_1^n b_k d_j S_{i,j} \quad \begin{matrix} (i = 1, \dots, m) \\ (k = 1, \dots, r); \end{matrix}$$

pongasi:

$$\begin{cases} a_k c'_i = e'_{(k-1)m+i} \\ b_k d'_i = f'_{(k-1)m+i} \end{cases} \quad \begin{matrix} (k = 1, \dots, r) \\ (i = 1, \dots, m) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_k c_i = e_{(k-1)n+i} \\ b_k d_i = f_{(k-1)n+i} \end{cases} \quad \begin{matrix} (k = 1, \dots, r) \\ (i = 1, \dots, n) \end{matrix}$$

L'indice degli e , f varia da 1 ad nr , quello degli e' , f' da 1 ad mr ; pongasi:

$$\begin{aligned} T_{(h-1)m+i, (k-1)n+j} &= 0 \text{ se } h \neq k \\ T_{(k-1)m+i, (k-1)n+j} &= S_{i,j} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} k=1, \dots, r \\ h=1, \dots, r \\ i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Allora: } \sum_1^{mr} e_q' T_{q,p} &= \sum_1^r \sum_1^m e'_{(k-1)m+j} T_{(k-1)m+j, (h-1)n+i} = \sum_1^m e'_{(h-1)m+j} S_{i,j} = a_h \sum_1^m c_j' S_{j,i} = \\ &= a_h c_i = e_{(h-1)n+i} = e_p, \text{ e } \sum_1^{nr} f_q T_{p,q} = \sum_1^r \sum_1^n f_{(k-1)n+j} T_{(h-1)m+i, (k-1)n+j} = \sum_1^n f_{(h-1)n+j} S_{i,j} = \\ &= b_h \sum_1^n d_j S_{i,j} = b_h d_i = f'_{(h-1)m+i} = f_p', \text{ e in forma matriciale, se} \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & \dots & T_{1n,r} \\ \dots & \dots & \dots \\ T_{mr,1} & \dots & T_{mr,nr} \end{pmatrix},$$

è, con evidente significato dei simboli: $e = e'T$, $f' = fT_{-1}$, c. v. d. (90). Si vede allora immediatamente che le (37), (38), (39) sono soddisfatte, onde J , con le operazioni così definite, è un'algebra. Suppongasi ora che A, B abbiano i moduli u, v ; allora le sub-algebre di J formate dagli elementi $\begin{bmatrix} u \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix}$ sono isomorfe a B, A rispettivamente, e, se si indicano con B', A' , si vede che $A'B' = J$, e che ogni elemento di A commuta con ogni elemento di B' . Poi, se $\begin{bmatrix} a_1 \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ b_1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} a_r \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ b_r \end{bmatrix} = 0$, è $\begin{bmatrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_r \end{bmatrix} = 0$, e quindi, se non è $b_1 = \dots = b_r = 0$, le $a_1, \dots, a_r$ sono necessariamente fra loro dipendenti, per (90); quindi $J = A' \times B'$.

Siano poi A, B due algebre qualsiasi, e siano A_1, B_1 due algebre con modulo contenenti le sub-algebre A', B' isomorfe ad A, B rispettivamente (86). Sia $J = A_2 \times B_2$, con A_2, B_2 isomorfe rispettivamente ad A_1, B_1 . Sia $D = A''B''$, con A'', B'' corrispondenti ad A', B' in A_2, B_2 ; è certo $D \neq 0$; inoltre, ogni elemento di A'' commuta con ogni elemento di B'' ; infine, se degli elementi di A'' sono dipendenti in B'' , essi sono elementi di A_2 dipendenti in B_2 , onde sono dipendenti, e perciò $D = A'' \times B''$. Così il (87) resta completamente dimostrato.

2.7. Proprietà del prodotto diretto. — Nell'ultima dimostrazione del n. precedente è implicita anche la dimostrazione del

(92) TEOREMA. — Se $S \times T$ esiste, ed $S' \leq S$, $T' \leq T$, allora $S' \times T'$ esiste.

(93) TEOREMA. — Se esiste $S \times (T + U)$, esistono $S \times T$ ed $S \times U$, ed è $S \times (T + U) = S \times T + S \times U$.

(94) TEOREMA. - Se $A = B \times C$, valgono le seguenti proprietà:

- a) Se B e C sono commutative, tale è A .
- b) Se B_1 è una sub-algebra invariante sinistra (destra) in B , e C_1 in C , tale è $B_1 \times C_1$ in A .
- c) Se t è un intero maggiore di 0, è $A^t = B^t C^t$.
- d) A è pseudonulla se, e solo se tale è almeno una delle B, C .
- e) Se B e C sono dotate di indice, accade che:
se B e C non sono pseudonulle, l'indice di A è il maggiore fra quelli di B e C ;
se B è pseudonulla, ma C non lo è, l'indice di A è uguale a quello di C ;
se B e C sono pseudonulle, l'indice di A è il minore fra quelli di B e C .
- f) Se A è semisemplice, tali sono B e C .
- g) Se B e C hanno modulo, anche A lo ha, ed esso è il prodotto dei moduli di B e C .
- h) Il prodotto di un automodulo di B , e di uno di C , è un automodulo di A .

2.8. Proprietà degli automoduli.

(95) TEOREMA. - Un'algebra dotata di un automodulo non è pseudonulla.

È evidente; non è però vero, in generale, come accade nelle algebre a base finita, il reciproco; anzi, esistono algebre prive di elementi pseudonulli e prive di automoduli. Si dirà *algebra potenziale* generata dall'elemento x di A , l'algebra ogni cui elemento è combinazione degli elementi $x, x^2, x^3, \dots$. Se tali elementi sono fra loro indipendenti, l'algebra potenziale di x non è di ordine finito, e viceversa.

(96) TEOREMA. - Se l'algebra potenziale dell'elemento x di A contiene il modulo u di A , essa è di ordine finito.

Se infatti $u = u_1 x + \dots + u_r x^r$, con $u_1, \dots, u_r$ numeri, è anche $x = u_1 x^2 + \dots + u_r x^{r+1}$, c. v. d.

L'ordine dell'algebra potenziale di x si dirà il *grado* di x .

(97) TEOREMA. - Se l'algebra A ha il modulo u e l'automodulo $v \neq u$, l'elemento $w = u - v$ è un automodulo nullifico di v ; e ogni elemento che abbia in v (o w) un modulo sinistro, o destro, ha in w (o v) un nullifico rispettivamente sinistro o destro.

(98) TEOREMA. - Se l'algebra A ha il modulo u , ogni automodulo $v \neq u$ è un divisore destro e sinistro dello 0.

(99) TEOREMA. - Se v è un automodulo di A , il sistema vA (rispett. Av) è un'algebra, ed è l'insieme di tutti e soli gli elementi di A che hanno in v un modulo sinistro (rispett. destro).

(100) TEOREMA. - Se v è un automodulo di A , l'insieme di tutti e soli gli elementi che hanno in v un modulo è vAv .

(101) TEOREMA. - Se A ha il modulo u e l'automodulo $v \neq u$, e $w = u - v$, l'insieme dei nullifici di v è l'algebra wAw , che ha il modulo w .

(102) TEOREMA. - *Automoduli di un'algebra, che siano a 2 a 2 nullifici, sono indipendenti, e la loro somma è un'automodulo che è un modulo di ciascuno di essi.*

(103) TEOREMA. - *Se u, v sono automoduli mutuamente nullifici, e se $u = u_1 + \dots + u_p$, con $u_1, \dots, u_p$ automoduli a 2 a 2 nullifici, ognuno di questi è nullifico di v .*

Siano ora S, D, N i sistemi formati rispettivamente dai nullifici destri, sinistri, e dai nullifici dell'automodulo v ; si vede subito che $vD \leq D$ è l'insieme degli elementi di A ciascuno dei quali ha in v un modulo sinistro ed un nullifico destro, e perciò $vD \cap N = 0$. Si ha che: $D = vD + N$, e analogamente $S = Sv + N$; $A = Av + D = vA + S$, onde, in definitiva: $A = Av + vD + N = vAv + Sv + vD + N$, e ognuno dei sistemi vAv, Sv, vD, N è disgiunto dalla somma degli altri; si ha perciò il

(104) TEOREMA di PEIRCE. - *Se v è un automodulo di A , ogni elemento di A si può porre, in un sol modo, sotto la forma $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, ove a_1 ha in v un modulo, a_2 un modulo sinistro e un nullifico destro, a_3 un nullifico sinistro e un modulo destro, a_4 un nullifico.*

Si definiscono così, come per le algebre a base finita, il 1°, 2°, 3° e 4° sistema di Peirce, e si ha: $DA = AS = DS$. Si constata anche che vAv è un'algebra, e che N , se non è nullo, è un'algebra; vD e Sv , se non sono nulli, sono zero-algebre. L'automodulo v si dirà *primitivo* se il 1° sistema di PEIRCE legato ad esso è privo di automoduli diversi da v , e si dirà *principale* se il 4° sistema di PEIRCE legato ad esso è privo di automoduli.

(105) TEOREMA. - *Se u è un automodulo non primitivo di A , esiste in A almeno un automodulo $v \neq u$ tale che il 1° sistema di Peirce legato a v sia una sub-algebra propria di quello legato ad u .*

Non è però necessariamente vero che un'algebra dotata di automoduli sia dotata di automoduli primitivi: sia infatti A l'algebra in $C(2)$ che ha per base l'insieme degli elementi x_i (i reale positivo), col prodotto così definito: $x_i x_j = x_j x_i = x_j$ se $j \geq i$; in essa ogni elemento è automodulo; considerato l'elemento $x_{r_1} + \dots + x_{r_n}$ ($r_1 < \dots < r_n$), se n è dispari, un automodulo che abbia in esso un modulo è $x_{r_{n+1}}$, che è certo diverso dall'elemento dato, e se n è pari, è $x_r + x_{r_n}$ ove $r_{n-1} < r < r_n$, che è pure diverso dall'elemento dato.

E non è neppure sempre vero che un'algebra dotata di automoduli sia dotata di automoduli principali; sia infatti B l'algebra in $C(2)$ che ha per base $x_1, x_2, \dots$, ove $x_i^2 = x_i$, e $x_i x_j = 0$ se $i \neq j$; in questa ogni elemento è automodulo, ed ha certamente dei nullifici.

(106) TEOREMA. - *L'unico automodulo principale di un'algebra con modulo è il modulo.*

È evidente che non è sempre vero che un automodulo non primitivo sia sempre somma di automoduli primitivi a due a due nullifici; però:

(107) TEOREMA. - *Un automodulo che sia somma di automoduli a due a due nullifici, non è primitivo.*

2.9. Algebre normali. — Se G è un prolungamento del corpo Γ , esso si potrà considerare come un'algebra su Γ , che si potrà indicare ancora con G . Data un'algebra A su Γ , esiste (87) il prodotto diretto di due algebre isomorfe rispettivamente a G, A su Γ ; un'algebra B sul corpo G prolungamento di Γ , che contenga l'algebra A su Γ come sub-algebra, e che sia isomorfa su Γ al prodotto diretto di due algebre A', G' isomorfe rispettivamente ad A ed a G considerato come algebra su Γ , in un isomorfismo in cui A ed A' si corrispondono, si dirà una *estensione* di A in G . Le considerazioni fatte assicurano che:

(108) TEOREMA. — Se G è un prolungamento del corpo Γ , e A è un'algebra su Γ , e B una estensione di A in G , se A ha una base, B ha la stessa base.

(109) TEOREMA. — Se le algebre A, B sono dotate di base, tale è $A \times B$, e se le basi sono ben ordinabili, tale è la base di $A \times B$.

Dim. — Se T è la base di A , S quella di B , l'insieme V degli elementi di $A \times B$, ciascuno dei quali è prodotto di un elemento di T e di uno di S , consta di elementi indipendenti, e forma una base di $A \times B$; il resto è palese, c. v. d.

Un'algebra si dirà *normale* se ha modulo, e se il suo centro coincide con l'algebra potenziale generata dal modulo.

(110) TEOREMA. — Se $A = B \times C$, e B, C hanno lo stesso modulo, il centro di A è il prodotto diretto del centro di B per quello di C .

Dim. — Evidentemente, se A_1, B_1, C_1 sono i centri di A, B, C , è $B_1 \times C_1 \leq A_1$. Sia poi a un elemento di A_1 ; si può porre sotto la forma $a = c_1 b_1 + \dots + c_r b_r$, con i $c_1, \dots, c_r$ indipendenti, ed i $b_1, \dots, b_r$ indipendenti; per ogni elemento b di B , dovrà essere $ab = ba$, ossia $c_1 b b_1 + \dots + c_r b b_r = c_1 b_1 b + \dots + c_r b_r b$, e cioè: $c_1 (b b_1 - b_1 b) + \dots + c_r (b b_r - b_r b) = 0$, onde $b_1, \dots, b_r$ commutano con ogni elemento di B , e analogamente $c_1, \dots, c_r$ con ogni elemento di C , e perciò $b_1, \dots, b_r$ sono elementi di B_1 , e $c_1, \dots, c_r$ di C_1 ; quindi $A_1 \leq B_1 \times C_1$, e infine $A_1 = B_1 \times C_1$, c. v. d.

(111) COROLLARIO. — Se $A = B \times C$, con B normale, e B, C hanno lo stesso modulo, il centro di A coincide con quello di C , e gli elementi di A che commutano con tutti quelli di B , sono tutti e soli quelli di C .

La seconda parte è implicita nella dimostrazione di (110).

(112) COROLLARIO. — Il prodotto diretto di due algebre normali con lo stesso modulo è un'algebra normale, e gli elementi dell'uno sono tutti e soli gli elementi del prodotto che commutano con ogni elemento dell'altra.

(113) TEOREMA. — Se $A = B \times C$ è normale, tali sono B e C .

2.10. Ulteriori proprietà dei vari tipi di algebra. — Sia $A = A_1 + \dots + A_r$, e sia v un automodulo di A ; sarà (79) $v = v_{r_1} + \dots + v_{r_s}$, con $s \leq r$, ove v_{r_i} è un automodulo di A_{r_i} , nullifico di tutti i v_{r_j} con $j \neq i$. Si ha allora che

(114) TEOREMA. - Il 1° sistema di Peirce legato a v è la somma diretta di quelli legati ai v_{r_i} nelle A_{r_i} .

Poi:

(115) TEOREMA. - Il 4° sistema di Peirce legato a v in A , è la somma diretta di quelli legati ai v_{r_i} nelle A_{r_i} , e delle algebre A_j , ove j sia diverso da $r_1, \dots, r_s$.

Perciò:

(116) TEOREMA. - Se $A = A_1 + \dots + A_r$, gli automoduli primitivi di A sono tutti e soli quelli delle A_i , e quelli principali di A sono tutti e soli quelli che sono somme di automoduli principali delle A_i .

(117) TEOREMA. - Se A_1 è una sub-algebra invariante propria di A , ed A, A_1 sono dotate di modulo, A è somma diretta di A_1 , e di un'algebra A_2 , dotata di modulo e unica. Inoltre, A_1 è l'insieme degli elementi di A che hanno un modulo nel modulo di A_1 .

(118) TEOREMA. - Se A ha il modulo u , e $u' \neq u$ è un automodulo per cui sia $u'A = Au'$, A è riducibile.

(119) CRITERIO di SCHEFFERS. - Condizione necessaria e sufficiente affinché un'algebra con modulo sia riducibile, è che possieda un automodulo diverso dal modulo, che commuti con ogni elemento dell'algebra.

(120) TEOREMA. - Se A è sommatoria ed ha modulo, e $A = B + C$, con B, C sistemi non nulli, tali che $BC = CB = C$, A è riducibile, e B, C sono sub-algebre invarianti proprie di A .

(121) TEOREMA. - Un'algebra riducibile, sommatoria, e dotata di modulo, se è decomponibile nella somma diretta di un numero finito di algebre irriducibili, lo è in un sol modo.

(122) TEOREMA. - Se un'algebra commutativa con modulo è decomponibile nella somma diretta di algebre irriducibili, il numero di tali algebre è uguale al numero degli automoduli primitivi dell'algebra data.

Non è però detto che un'algebra commutativa con modulo abbia un numero finito di automoduli primitivi, o che, essendo ciò verificato, sia somma diretta di algebre irriducibili (cfr. algebre booleane).

(123) TEOREMA. - Se un'algebra è primitiva e dotata di modulo, e l'equazione minima di un suo elemento dotato di equazione minima è $f(x) = 0$, $f(x)$ è un polinomio irriducibile nel corpo in cui l'algebra è definita.

(124) TEOREMA. - Se un'algebra con modulo è irriducibile e non semplice, ogni sua sub-algebra invariante propria è priva di modulo.

Non è però vero, come nelle algebre a base finita, che un'algebra semi-semplce, ma non semplice, sia riducibile.

(125) TEOREMA. - Un'algebra A semisemplice, ma non semplice, che sia somma diretta delle algebre semplici $A_1, \dots, A_t$, non ha altre sub-algebre invarianti proprie all'infuori delle $2^t - 2$ sub-algebre date da $A_1, \dots, A_t$ e (se $t > 2$) delle somme dirette di un numero qualsiasi di esse.

(126) TEOREMA. - *Un'algebra semplice e commutativa ha modulo, purchè non sia una zero-algebra.*

Dim. - Se A non avesse modulo, ogni suo elemento, dovrebbe essere (60), (45) singolare sinistro e destro, o divisore sinistro e destro dello 0. Ed allora, se a è un elemento singolare di A , è $aA = Aa < A$; ma aA è invariante in A , onde $aA = 0$; se invece a non è singolare, l'algebra B dei suoi nullifici esiste, e, poichè è invariante in A , sarà $B = A$, onde in ogni caso $aA = Aa = 0$, contro l'ipotesi che A non sia una zero algebra, c. v. d.

(127) TEOREMA. - *Un'algebra semplice, primitiva, e priva di modulo, è priva di centro.*

Dim. - Se infatti $a \neq 0$ fosse un elemento del centro, ripetendo il ragionamento precedente si vedrebbe che a dovrebbe essere singolare, e perciò $aA = Aa = 0$, onde A non sarebbe primitiva, c. v. d.

(128) TEOREMA. - *Il 1° sistema di Peirce legato ad un automodulo di un'algebra semplice con modulo è un'algebra semplice.*

Dim. - Sia v l'automodulo, e B una sub-algebra invariante di vAv ; è $(vAv)B(vAv) = v(ABA)v \leq B$; ma $ABA \geq B > 0$, onde $ABA = A$, e perciò $vAv \leq B \leq vAv$, c. v. d.