Sulla connessione delle superficie algebriche reali.

Memoria di ANNIBALE COMESSATTI (a Padova)

Tra i risultati delle mie passate ricerche *sulle superficie razionali reali* [1], si segnala, quasi a mo' di conclusione, la formula

$$I + Z = 2(\bar{\rho} - 1), \tag{1}$$

che lega l'*ordine di connessione totale* Z d'una di quelle superficie, cioè della sua *parte reale* (composta di una o più falde) al relativo *numero base reale* $\bar{\rho}$ ed all'*invariante* I di ZEUTHEN-SEGRE.

Il carattere sintetico della (1), conferitole dal pregio di superare tutte le distinzioni, pur abbastanza complesse, inerenti alla classificazione delle superficie razionali nel campo reale, m'induceva, fin da allora, a prevedere la possibilità di far rientrare quella formula in una relazione più generale *valida per tutte le superficie algebriche reali.*

Il presente lavoro vuole appunto confermare tal previsione, mostrando che *per ogni superficie algebrica reale* F della quale con ρ, $\bar{\rho}$ si designino i due *numeri base*, complesso e reale, e con R_2 l'*ordine di connessione bidimensionale* (riferito, ben s'intende, alla *riemanniana* V), si ha

$$Z \leq R_2 - 2(\rho - \bar{\rho}), \tag{2}$$

potendosi scrivere l'eguaglianza almeno quando tutti i *cicli a due dimensioni* della V sono *algebrici*, cioè F è *priva d'integrali doppî di seconda specie* [2];

---

[1] Vedi le Memorie, α) *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale* [Mathem. Annalen 73 (1912) pp. 1-72], β) *Sulla connessione delle superficie razionali reali* [Questi Annali (3) 23 (1915) pp. 215-284]. La dimostrazione della (1) è in β), § 6.

[2] Ricordiamo che, per una formula di PICARD, il numero ρ_0 degl'integrali doppî di 2^a specie vale $R_2 - \rho$; quindi se tutti i cicli bidimensionali di V sono algebrici ($R_2 = \rho$) si ha $\rho_0 = 0$ e viceversa. L'espressione di ρ_0 trovasi nel trattato di E. PICARD-G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* [Paris, Gauthier-Villars (1897-1906)], T. 2°, Cap. 12°, n. 18, e, sotto la forma qui scritta, nella monografia di S. LEFSCHETZ, *L'Analysis situs et la géometrie algébrique* [Paris, Gauthier-Villars (Collec. Borel) (1924)] Nota I, n. 15, alla quale (Cap. IV, segnatamente §§ VI, VII) rinviamo anche per quel che riguarda i *cicli algebrici*. Si osservi poi che quando $\rho_0 = 0 (R_2 = \rho)$ la (2) può scriversi $Z = 2\bar{\rho} - \rho$.

in particolare per *tutte le superficie di genere geometrico zero* [3]. Nel caso delle *superficie razionali,* appena si ricordi che $\rho = R_2 = I + 2$ [4], si vede che la (2) si riduce alla (1).

La conclusione enunciata vien qui raggiunta attraverso ad un'analisi, abbastanza intima, dei *rapporti topologici* che intercedono tra la riemanniana V di F, e la varietà, pure a quattro dimensioni, W, immagine delle coppie di punti associati, in V, dalla simmetria S che ivi rappresenta il coniugio di F. Quest'analisi conduce prima alla relazione, pure notevole

$$Z = R_2 - 2h, \tag{3}$$

nella quale h esprime il massimo di *cicli a due dimensioni reali* (cioè trasformati in cicli omologhi da S, della V,) tra di loro *indipendenti*, cioé il numero analogo ad R_2 per i cicli reali; e dalla (3) si perviene alla (2) precisando il contributo portato al numero h dai cicli algebrici, ch'è appunto $\rho - \bar{\rho}$. Resta così precisato anche il significato della relativa *deficienza*, cioè dell'intero $\tau = h - (\rho - \bar{\rho})$ per cui

$$Z = R_2 - 2(\rho - \bar{\rho} + \tau), \tag{4}$$

e precisamente si vede ch'esso eguaglia il massimo numero di *cicli a due dimensioni reali, indipendenti tra di loro e dai cicli algebrici,* che posson considerarsi entro alla V.

Ulteriori studi intorno a questo carattere τ, potranno condurre a determinare maggiormente la (2). Comunque, è certo che si tratta d'un *invariante* (*assoluto*) *reale,* cioè *non esprimibile mediante i soli invarianti complessi* della F, giacchè due diversi modelli reali (relativi a simmetrie non equivalenti) delle superficie d'una stessa classe complessa, possono dar luogo a valori affatto diversi per τ. È quel che mostro alla fine del lavoro sopra opportuni esempî.

---

(3) Secondo un teorema fondamentale del Lefschetz (cfr. loco cit. (2), Cap. IV, § VII) i cicli algebrici son caratterizzati dall'*annullarsi* dei relativi *periodi degl'integrali doppî di prima specie*; quindi, se $p_g = 0$, mancando addirittura tali integrali, tutti i cicli sono algebrici. Non è ancor certo se, viceversa, una superficie priva d'integrali doppî di 2^a specie sia anche priva d'integrali doppî di 1^a specie ($p_g = 0$), cioè se possano esistere integrali doppî di 1^a specie coi periodi tutti nulli (impropri). Cfr. S. Lefschetz, *On certain numerical invariants of algebraic varieties, with application to abelian varieties,* (Prix Bordin, 1919) [Trans. of the Amer. Math. Soc. 22 (1921) pp. 327-482], n. 26; F. Severi, *Conferencia general sobre la geometria algebraica* [Revista Mat. Hispano-Americana (1926) n. 8].

(4) La $R_2 = I + 2$ rientra nella formula generale di Picard-Alexander, $R_2 = I + 4q + 2$ (q *irregolarità* di F). Cfr. Lefschetz, loco cit. (2) Cap. III, n. 10. Per la $\rho = I + 2$ vedi la Mem. cit. (1) β), § 6, od anche F. Severi, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* [Math. Annalen, 62 (1906) pp. 194-223] n. 13.

che, riferendosi a superficie la cui connessione totale Z è stata determinata direttamente [5], dànno anche, con altri, un multiplo controllo delle formule ottenute.

Anche in queste ricerche, relative ai problemi di realtà per le superficie algebriche, si rivela la fecondità della teoria della base, dovuta al SEVERI, specie ora, che, attraverso al LEFSCHETZ, sono stati annodati intimi rapporti fra quella teoria e l'*analysis situs*.

§ 1. **Preliminari sulle riemanniane delle superficie algebriche reali.**

1. Sia F una *superficie algebrica reale*, appartenente ad uno spazio qualunque, dotata d'un certo numero m (eventualmente nullo) di *falde reali* F_1, $F_2, \ldots, F_m$.

La distinzione fra le varie falde resta precisata senz'ambiguità, qualunque siano le singolarità di F, ricorrendo ad una *trasformata reale* F' di F *priva di punti multipli*, per cui la distinzione stessa si pone in modo evidente.

È pure pressochè evidente la possibilità di sciogliere la singolarità di F mediante una *trasformazione birazionale reale*. Comunque, ecco come si può procedere: Supposto dapprima che F non sia razionale nè riferibile a rigata, la si muti anzitutto in una F'' di S_h priva di punti multipli e di *curve eccezionali*, senza preoccuparsi della realtà della trasformazione; e si dica s la *simmetria* (trasf. antibirazionale involutoria) di F'', immagine del *coniugio* di F. Il sistema lineare $|A + A'|$ individuato su F'' da una sezione iperpiana e dalla sua trasformata A' mediante s, è mutato in sè da s e dotato di curve unite, onde si può riferirlo proiettivamente al sistema degl'iperpiani d'un S_k in modo che all'antiproiettività indotta fra i suoi elementi da s corrisponda il coniugio di quello spazio [6]. Tenendo conto che la s non ha punti fondamentali su F'' in quanto questa è priva di curve eccezionali [7], si vede che così si passa ad una F' priva di punti multipli riferita senza eccezioni ad F'' ed in corrispondenza birazionale reale con F.

---

(5) In un lavoro, *Sulle riemanniane algebriche*, in corso di pubblicazione nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,

(6) Cfr. loco cit. (1) α), nn. 8, 12.

(7) Se una trasformazione *antibirazionale* s, d'una superficie Φ di S_h in se stessa, muta un punto P in una curva γ, questa *è eccezionale nel senso ordinario della parola*. Difatti se k è il coniugio di S_h, $\bar{\Phi}$ la superficie coniugata di Φ, $\bar{P}$ il punto coniugato di P, la ks è una trasformazione *birazionale* di $\bar{\Phi}$ in Φ che muta $\bar{P}$ in γ.

Se la F è razionale o riferibile ad una rigata, non si può escludere sulla F'' priva di punti multipli l'esistenza di punti fondamentali per s; ma essi si potranno far sparire ad uno ad uno trasformando F'' mediante il sistema di tutte le forme d'ordine abbastanza alto passanti per il punto che si considera, e dopo ciò si sarà ricondotti al caso precedente [8].

Indicheremo con $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ gli *ordini di connessione* delle falde F_1, $F_2, \ldots, F_m$ di F. Il numero $Z = \sum_{i=1}^{m} Z_i - 2m + 2$ si dirà *ordine di connessione totale* della superficie [9].

Per fissare senz'ambiguità i valori delle Z_i giova anche qui il riferimento alla F', purchè su questa *si ripristinino le curve eccezionali* (di 1ª specie) della F. La possibilità di tal ripristino mediante una trasformazione birazionale reale che non introduca singolarità è manifesta, dal momento che su F quelle curve son reali o a due a due coniugate e quindi devon dedursi da punti reali o da coppie di punti coniugati della F' [10].

D'altra parte quel ripristino è necessario perchè la connessione delle falde di F' sia fissata in modo confacente alla F e perchè resti individuata senza ambiguità la *connessione bidimensionale* della riemanniana V che andiamo a considerare [11].

La superficie F' così modificata l'indicherà con Φ, e le sue falde con Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_m$

2. Trasportiamoci ora alla *riemanniana* V di F ch'è ormai definita topologicamente in modo preciso, come l'ente i cui elementi (punti) sono in corrispondenza biunivoca, continua, e senza eccezioni, coi punti reali e complessi

---

(8) Avvertasi che F può possedere *linee o punti isolati reali*, ma in ogni caso *multipli* e di *molteplicità pari;* però in senso invariantivo quei punti o i punti di quelle linee *non devon considerarsi come reali*, in quanto spariscono sulla F'.

(9) Cfr. loco cit. (1) β) n. 8. Notiamo che la nostra definizione per l'ordine di connessione d'una falda è in pieno accordo con quella generale del LEFSCHETZ (loco cit. (2), Cap. I, n. 6) relativa agli ordini di connessione di varietà qualunque, ai quali si riferisce la *formula di Eulero generalizzata* (ibid., n. 8) sotto la forma che poi dovremo applicare.

(10) Il caso delle superficie razionali o riferibili a rigate domanderebbe qualche complemento su cui crediamo di poter sorvolare. Ad ogni modo il primo è esaurientemente considerato al n. 13 della Mem, β) citata in (2).

(11) Si ricordi (loco cit. (1) β), § 3) che mutando un punto d'una falda in una curva eccezionale se ne altera la connessione e che la V non è individuata di fronte alla relazione d'*omeomorfismo* se non quando su F è fissato il *regime delle curve eccezionali* (quindi gl'*invarianti relativi*).

di Φ. Al coniugio di Φ (e di F) corrisponde in V una simmetria S, cioè una trasformazione involutoria, dappertutto biunivoca e priva di punti fondamentali, che possiede m superficie $V_1, V_2, \ldots, V_m$ luogo di punti uniti, immagini delle falde Φ_i, quindi *omeomorfe* ad esse, omogenee, chiuse, prive di singolarità e di punti comuni.

Notoriamente la V è *bilatera*, quindi possiamo supporla *orientata*, fissandone la *faccia positiva*, o, ciò ch'è lo stesso, il verso positivo d'un'*indicatrice* (quindi di tutte le altre). Ricordiamo che per *indicatrice orientata* relativa ad un punto P s'intende una *piccola cellula* (*pentaedro*) contenente nel suo interno P, per i cui vertici sia fissata la classe delle *permutazioni positive*.

Se P' è il punto di V associato a P da S, ad una indicatrice positiva di P resta associata un'indicatrice relativa a P' che può avere il verso positivo o l'opposto. Vogliam far vedere che, *contrariamente a quel che ha luogo sulle superficie riemanniane*, la nuova indicatrice è ancor positiva, cioè che *la simmetria* S *è una trasformazione diretta per la varietà* V.

La divergenza fra i due casi bi-e quadri-dimensionale si rivela chiaramente negli esempî elementari relativi alle riemanniane della retta $z (= x + iy)$ e del piano z, $w (w = u + iv)$. Nel primo caso si può assumere come riemanniana il piano xy (non disturbando l'eccezione all'infinito) ove il coniugio di z è rappresentato dalla simmetria $y' = -y$ rispetto all'asse x, nel secondo lo S_4 reale x, y, u, v, ove si ha analogamente la simmetria $y' = -y$, $v' = -v$ rispetto al piano $y = v = 0$. Due indicatrici (triangoli, risp. pentaedri) associate sono, nel primo caso, *contraverse*, nel secondo *equiverse*, perchè i determinanti

$$|x_i, y_i, 1| \quad |x_i, -y_i, 1| \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$|x_i, y_i, u_i, v_i, 1| \quad |x_i, -y_i, u_i, -v_i, 1| \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

hanno segno contrario nell'uno, segno eguale nell'altro.

Quando la *F ha punti reali*, si può sempre ricondursi al caso del piano, bastando limitarsi a considerare l'effetto di S sui punti prossimi ad un punto unito, ed osservare che l'*intorno complesso* d'un generico punto reale di F può riferirsi biunivocamente all'analogo intorno d'un punto reale d'un piano π per proiezione da un punto reale O. Oppure si può osservare che, in V, la S nell'intorno d'un punto (unito) d'una delle superficie V_i ha il carattere d'un'*omografia involutoria di* S_4, quindi, attesa la dimensione di V_i, d'una *simmetria rispetto ad un piano*, che, come s'è visto, è una trasformazione *diretta*.

Ad esuberanza valga infine la seguente dimostrazione, indipendente dall'ipotesi che F contenga punti reali:

Si fissino su F, com'è sempre possibile, due *curve algebriche reali* C, D che abbiano due fra le intersezioni p, p' immaginarie coniugate, ad esempio le intersezioni di F con due forme reali del relativo spazio opportunamente scelte; e siano γ, δ i corrispondenti *cicli a due dimensioni* di V segantisi nei punti P, P' associati in S. Per un teorema di LEFSCHETZ, *orientati* opportunamente γ, δ, il numero effettivo (aritmetico) delle loro intersezioni coincide col *numero algebrico* (γ, δ) di KRONECKER-POINCARÉ (12), onde ciascuno dei punti P, P' porterà quest'ultimo contributo $+1$. Pertanto se PQR, PST, son due *indicatrici positive* di γ, δ, sarà $PQRST$ un'*indicatrice positiva* della V (13).

Ma sul ciclo γ, ch'è riemanniana di C, la *simmetria* indotta da S (immagine del coniugio di C) è una trasformazione *inversa*, quindi detti Q', R' i corrispondenti di Q, R, sarà $P'R'Q'$ un'indicatrice positiva di γ ed analogamente $P'T'S'$ un'indicatrice positiva di δ; onde per il fatto che anche P' porta a (γ, δ) contributo $+1$, la $P'R'Q'T'S'$ sarà un'indicatrice positiva di V. Dopo ciò basta osservare che la permutazione $P'R'Q'T'S'$ è della stessa classe della $P'Q'R'S'T'$ relativa all'indicatrice trasformata di $PQRST$ mediante S per concludere che anche quell'indicatrice è *positiva* per V, c. d. d.

§ 2. Rappresentazione della riemanniana simmetrica V, sopra una varietà doppia W. Relazione fra i cinque ordini di connessione r_1, r_2, R_1, R_2, Z.

3. Indicheremo con W l'ente a quattro dimensioni i cui elementi (punti) rappresentano senza eccezioni le coppie dei punti di V associati in S. La varietà W è topologicamente ben definita, e non ha interesse fissarne un qualsiasi modello.

Le varietà W, V son legate da una corrispondenza $(1, 2)$, T, che ha su W come elementi di *diramazione* m falde W_i riferite biunivocamente senza eccezioni alle V_i (ed alle falde F_i di F) quindi *omeomorfe* ad esse, prive di punti multipli e di punti comuni, ecc.

Proviamo che *anche la varietà W è bilatera* (14).

(12) LEFSCHETZ, loco cit. (2), Cap. II, n. 6.

(13) Ibid., Cap. I, n. 12.

(14) Invece nell'analogo caso relativo alle curve, è noto da KLEIN e WEICHOLD che *la superficie W è unilatera o bilatera, a seconda che V* (colla simmetria S) *è diasimmetrica od ortosimmetrica*. Cfr. F. KLEIN, *Riemann'sche Flächen* [Leipzig, Teubner (1906) Parte 3ª, I, B,

Sia P un punto di W, immagine della coppia P_1, P_2. di V, σ un cammino chiuso qualunque di W che parta da P e vi ritorni, J un' indicatrice (orientata) di W relativa a P. Si tratta di far vedere che, quando un punto Q di W descrive σ in un verso a partire da P portando seco la J, quell' indicatrice non può mai, al ritorno, risultare invertita.

Alla J corrispondono in V due indicatrici J_1, J_2, relative a P_1,P_2 e trasformate l'una nell'altra da S. Poichè S è diretta, le J_1, J_2, saranno *equiverse*, ad es. entrambe *positive* per V.

Ciò premesso, e supposto inoltre, com'è lecito a meno d'una piccola deformazione, che σ non incontri le W_i (del resto tale ipotesi non è essenziale) posson darsi due casi:

a) Al ritorno di Q in P i due punti corrispondenti Q_1, Q_2, che partono da P_1, P_2 ritornano pure alle posizioni iniziali; allora a σ corrispondono su V due cammini σ_1, σ_2, distinti, e privi di punti comuni, l'uno descritto da Q_1, l'altro da Q_2. Quando Q_1 descrive σ_1, l'indicatrice J_1 associata ad J ritorna in P_1 col verso iniziale perchè V è bilatera; dunque lo stesso accade di J al ritorno in P.

b) I due punti P_1, P_2 ritornano scambiati tra di loro; allora mentre Q descrive σ, Q_1, descrive un *cammino aperto* σ_1 coll'origine in P_1 e l'estremo in P_2. Durante il percorso l'indicatrice J_1 relativa a Q_1 ed associata ad J resta sempre positiva per V, dunque all'arrivo in P_2, si trova concorde con J_2; e ciò viene a dire che J al ritorno in P ha ancora il verso di partenza.

Infine è ovvio che *anche la W è chiusa*, dal momento che le W_i essendo *superficie*, non possono produrvi *frontiere*.

4. Immaginiamo ora tracciata su ciascuna W_i una *triangolazione* Δ_i con $\alpha_0^{(i)}$ vertici, $\alpha_1^{(i)}$ lati, $\alpha_2^{(i)}$ facce, e ricordiamo che per la *formula di* EULERO a cui può affidarsi (anche se W_i è unilatera) la definizione di Z_i si ha

$$\alpha_0^{(i)} - \alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} = 2 - Z_i. \tag{5}$$

Fissiamo poi anche in W una *triangolazione* Δ, cioè una *decomposizione in cellule* (senza punti interni comuni, ecc.) *che contenga le* Δ_i, cioè abbia fra i suoi vertici, lati, facce a due dimensioni, quelli delle Δ_i ed indichiamo con a_0, a_1,..., a_4 i numeri dei relativi elementi delle diverse dimensioni.

---

nn. 3-5; G. WEICHOLD, *Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln*, ecc. [Zeitsch. für Math. u Phys. 28 (1883), pp. 321-351] §§ 3-4. Per la relazione tra V e W nel caso delle curve vedi anche il lavoro (5), n. 5.

Ad una cellula K della triangolazione Δ corrispondono in V due cellule K_1, K_2, che, come si vede subito tenendo conto della connessione semplice di K, non hanno *punti interni* comuni. La sovrapposizione può presentarsi soltanto per *elementi di frontiera* di dimensione non superiore a due, e precisamente si verifica per quegli elementi che corrispondono agli (eventuali) elementi di K appartenenti alle Δ_i.

Si vede così che Δ induce in V un'analoga triangolazione Δ', e poichè nel passaggio da W a V ciascun elemento *si sdoppia*, meno quelli che appartengono alle Δ_i, ne viene, che, indicandosi con A_i i numeri analoghi agli a_i per la Δ' sarà

$$
(6) \qquad \begin{gathered} A_4 = 2a_4, \quad A_3 = 2a_3, \quad A_2 = 2a_2 - \sum_{i=1}^{m} \alpha_2^{(i)}, A_1 = 2a_1 - \sum_{i=1}^{m} \alpha_1^{(i)}, \\ A_0 = 2a - \sum_{i=1}^{u} \alpha_0^{(i)}. \end{gathered}
$$

Se ora s'introducono gli *ordini di connessione* R_i $(i = 0, 1, \ldots, 4;\ R_0 = R_4 = 1,\ R_1 = R_3)$ delle diverse dimensioni, relativi a V, e gli analoghi r_i relativi a W, e si combinano le relazioni

$$
(7) \qquad \sum_{h=0}^{4} (-1)^h A_h = \sum_{h=0}^{4} (-1)^h R_h, \quad \sum_{h=0}^{4} (-1)^h a_h = \sum_{h=0}^{4} (-)1^h r_h,
$$

scritte a norma della *formula di Eulero generalizzata* ([15]), colle precedenti (5) (6) e colla formula

$$
(8) \qquad Z = \sum_{i=1}^{m} Z_i - 2m + 2,
$$

che esprime l'ordine di connessione totale di F in funzione degli Z_i, si ottiene la *relazione fondamentale*

$$
(9) \qquad Z = R_2 - 2r_2 - 2(R_1 - 2r_1) \ ([16]).
$$

([15]) Cfr. Lefschetz, loco cit. ([7]), Cap. I, n. 8.

([16]) Se le W_i mancano, cioè se F non ha punti reali, le $\alpha^{(i)}$ della (5) devon porsi eguali allo zero, ed allora si vede che la (9) sussiste ancora purchè si ponga $Z = 2$. Circa l'opportunità di attribuire *convenzionalmente* ordine di connessione 2 alle superficie per così dire *inesistenti* (topologicamente) vedi la nota ([18]) del lavoro citato in ([5]).

§ 3. Confronto tra le connessioni di V, W. Relazione $R_1 = 2r_1$ tra le connessioni lineari, e prima forma della conclusione.

5. Il secondo membro della (9) dipende oltre che dai caratteri topologici R_1, R_2 della V, notoriamente esprimibili mediante gli invarianti (assoluti e relativi) di F, anche dagl'incogniti caratteri r_1, r_2 della W. Si pone pertanto il problema di *eliminare* tali caratteri in base ad un'ulteriore analisi dei rapporti topologici tra le due varietà V, W.

Sia C un *ciclo*, p. es. lineare della varietà V. Esso potrà risultare dal l'insieme di più parti, anche contate piu volte; ma in ogni caso mediante una piccola deformazione e l'aggiunta di segmenti percorsi nei due sensi, che poi si scinderanno ciascuno in due archi distinti, si potrà ridurre C ad un unico continuo *orientato*, tutto costituito da punti semplici. Analogamente per i cicli a due dimensioni, salvo l'eventuale presenza d'un gruppo discreto di punti in cui il ciclo *attraversa se stesso*, che non porta alcun pregiudizio al seguito.

Sempre a meno d'una piccola deformazione si potrà supporre che C non abbia punti comuni (o ne abbia un gruppo discreto se è a due dimensioni) col suo corrispondente C' secondo S. In tali condizioni è ovvio che l'insieme dei punti di W omologhi (in T^{-1}) a quelli di C, è un *ciclo* γ (orientato) di W i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con quelli di C e di C'. Si dirà che γ è il *ciclo corrispondente* a C, oppure a C'; ed è pure ovvio che se ai cicli C, D corrispondono γ, δ, a $C + D$ corrisponde $\gamma + \delta$, ecc.

Partiamoci invece da un ciclo γ di W, ridotto, come prima C, ad un unico continuo orientato, ecc., e consideriamo in V la figura Γ costituita dai punti P_1, P_2 omologhi dei punti P di γ. È chiaro che possono darsi due casi:

a) Al variare di P su γ i due punti P_1, P_2 descrivono due continui distinti; allora questi son due *cicli* C, C' di V associati in S e riferiti (ciascuno) biunivocamente a γ come sopra;

b) I punti P_1, P_2 descrivono un unico continuo Γ in corrispondenza (2, 1) con γ e trasformato in sè da S. Allora la biunivocità della corrispondenza può ristabilirsi *contando due volte ciascun punto di* γ, o, meglio ancora, procedendo come segue: Con una piccola deformazione si muti Γ in un ciclo Γ_1 distinto dal corrispondente Γ_1' (in S) e si dica γ_1 il ciclo corrispondente di W. Si vede allora subito che nel passaggio da γ a γ_1 ciascun punto di γ *si sdoppia*, restando le due parti (archi od aree) di γ_1 prossime ad una parte di γ concordemente orientate; sicchè in definitiva si può dire che al ciclo Γ_1, o, il che è lo stesso, al suo omologo Γ, corrisponde in W il ciclo 2γ [17].

Riassumendo, si ha che ogni ciclo C di V (assieme al suo associato C') ha un determinato corrispondente γ in W; inversamente, un γ di W può non avere corrispondente in V, ma lo ha certo 2γ.

6. Siano C e γ corrispondenti nel senso ora chiarito, C' l'associato di C. Premesso che per esprimere la relazione « *omologo a* » faremo uso del segno $=$ dimostriamo i seguenti *lemmi*:

A) Se $C=0$, anche $\gamma=0$;

B) Se $\gamma=0$, $C+C'=0$.

Ragioneremo per semplicità nel caso dei *cicli lineari*.

A) Se $C=0$, esiste una superficie *bilatera* aperta Ω di cui C costituisce la *frontiera*. Ad Ω corrisponde in W una superficie ω pure bilatera riferita biunivocamente ad Ω (potendosi supporre che Ω sia distinta da Ω' ed abbia con essa in comune solo un gruppo discreto di punti) ed avente per orlo γ; dunque $\gamma=0$.

B) Se $\gamma=0$, si ha analogamente in W una superficie bilatera aperta ω, che potremo raffigurarci intuitivamente sotto la forma d'un *disco* avente per orlo γ. Considerando per ogni punto P di ω i due punti corrispondenti P_1, P_2 di V posson darsi due casi:

b_1) Al variare di P su ω, P_1, P_2 descrivono due continui distinti. Allora ciascuno di essi è un *disco*, *omeomorfo* ad ω avente per orlo C, o C'; dunque $C=0$, $C'=0$, ed infine $C+C'=0$.

b_2) Al variare di P su h, P_1, P_2 descrivono un unico continuo Ω. Allora Ω è uua superficie bilatera, della forma d'un *tubo* avente per orlo $C+C'$; dunque $C+C'=0$.

Il *carattere bilatero* di Ω si mette in evidenza facilmente, notando che, orientata la ω, in ogni punto P_1 di Ω è definita un'indicatrice positiva che è quella corrispondente all'indicatrice positiva J di ω nel punto P corrispondente a P_1. Nè il caso che P_1 coincida con P_2, cioè che P sia una delle eventuali intersezioni (isolate) di ω colle W_i dà luogo ad ambiguità, per quanto ad J corrispondano due indicatrici J_1, J_2 relative a $P_1=P_2$; si tratta invero d'indicatrici *concordi* perchè la S ha, su Ω, nell'intorno di $P_1=P_2$ *carattere diretto*, non essendovi *direzioni unite* per P_1.

---

[17] Per gli scopi finali, se C e γ son corrispondenti, è indifferente sostituirli con *cicli omologhi*. Ma nelle considerazioni del prossimo numero giova supporre che C e γ siano *effettivamente* corrispondenti, cioè associati dalla T.

Importa poi precisar bene che *la frontiera completa di* Ω *è* $C + C'$, *non* $C - C'$, intendendosi che si parli di *frontiera orientata* ([18]), altrimenti la questione non avrebbe senso. Ora se l'orientazione di ω è fissata in modo che γ (col suo verso) ne sia frontiera orientata, detta BC un' indicatrice positiva di γ ed A un punto interno ad ω e prossimo a B, C sarà ABC un' indicatrice positiva di ω; quindi col solito significato dei simboli saranno $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ indicatrici positive di Ω *aderenti a* C, C'. Ma d'altra parte B_1C_1, B_2C_2 sono indicatrici positive di C, C' dunque la frontiera orientata di Ω è proprio $C + C'$ come asserito.

7. Consideriamo ora due ordini di connessione associati (cioè del medesimo indice) di V, W, che, sopprimendo provvisoriamente gl' indici, indicheremo con R, r e proviamo anzitutto che $r \leq R$.

Fissiamo allo scopo, in V, R cicli indipendenti $C_1, C_2, \ldots, C_R$ della dimensione desiderata, ed attribuiamo ai simboli γ_i, C_i' il solito significato. A prova dell'asserto mostreremo che ogni ciclo δ di W è dipendente da $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_R$.

Difatti, se non δ, certo 2δ è il corrispondente d'un ciclo D di V; e poichè i C_i dànno una *base* su V, così si avrà un' omologia

$$\mu D + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_R C_R = 0, \tag{10}$$

dalla quale per il lemma A segue la

$$2\mu\delta + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \ldots + \lambda_R\gamma_R = 0, \tag{11}$$

che esprime quanto asserito.

Dopo ciò è chiaro che il valore di r sarebbe pienamente determinato se lo fosse il numero delle omologie indipendenti che legano i cicli $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_R$. Ora si vede che se ad esempio $C_i' = - C_i$, cioè se $C_i + C_i' = 0$, una di tali omologie, è, per il lemma A, $\gamma_i + \gamma_i = 0$, cioè $2\gamma_i = 0$, e ciò suggerisce il seguente precedimento che conduce a determinare, almeno in un certo senso, il valore cercato, in quanto ne mette in vista un significato importante:

Si considerino gli R cicli $C_i + C_i'$, che la S muta in se stessi (in cicli omologhi) e che perciò, seguendo una terminologia introdotta altrove, diremo *cicli reali* ([19]), e si supponga che fra essi intercedano $R - h$ e non più omologie

---

([18]) Cfr. LEFSCHETZ, loco cit. ([2]), Cap. I, nn. 3, 4, ed anche O. VEBLEN, *Analysis Situs* (The Cambridge colloquium 1916) [Publ. by the Amer. Math. Soc., New York (1922)], Cap. IV, nn. 10, 25.

([19]) Vedi la prima delle Memorie, *Sulle varietà abeliane reali*. [Questi Annali (4) 2 (1924-25), pp. 67-106, e 3 (1925-26), pp. 27-71], n. 3.

indipendenti, di guisa che, sceltine opportunamente h, siano ad esempio i primi, tutti gli altri sian dipendenti da essi. Posto $A_i = C_i + C_i'$ $(i = 1, 2,..., h)$ è facile vedere che $A_1, A_2,..., A_h$ dànno una *base per i cicli reali* di V, cioè che ogni ciclo reale di quella riemanniana dipende dagli A_i.

Ed invero se D è un tal ciclo, legato ai C_i dalla (10), trasformando mediante S e tenendo conto che $D = D'$ si avrà anche

$$\mu D + \lambda_1 C_1' + \lambda_2 C_2' + ... + \lambda_R C_R' = 0,$$

quindi sommando

$$2\mu D + \lambda_1(C_1 + C_1') + \lambda_2(C_2 + C_2') + ... + \lambda_R(C_R + C_R') = 0, \tag{12}$$

da cui, ricordando che tutti i $C_i + C_i'$ dipendono dagli A_i, segue subito l'asserto.

Indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_h$ i cicli di W corrispondenti agli A_i. Vogliam provare che tali cicli *dànno una base in* W, cioè che $r = h$.

Intanto gli α_i sono *indipendenti*, perchè se fosse

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + ... + \lambda_h\alpha_h = 0,$$

risulterebbe per il lemma B

$$\lambda_1(A_1 + A_1') + \lambda_2(A_2 + A_2') + ... + \lambda_h(A_h + A_h') = 0,$$

cioè, tenuto conto che gli A_i son reali e quindi $A_i' = A_i$

$$2\lambda_1 A_1 + 2\lambda_2 A_2 + ... + 2\lambda_h A_h = 0,$$

incompatibile coll'indipendenza degli A_i.

Sia poi β un ciclo qualunque di W. Se non β, certo 2β è il corrispondente d'un ciclo B di V, e poichè $B + B'$ è un ciclo reale quindi dipendente dagli A_i, così sussisterà un'omologia

$$\mu(B + B') + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_h A_h = 0.$$

(con $\mu \neq 0$) dalla quale per il lemma A (e ricordando che anche a B' corrisponde 2β) segue

$$4\mu\beta + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + ... + \lambda_h\alpha_h = 0,$$

col risultato che *ogni ciclo* β *di* W *dipende dagli* α_i. Ricordando il significato di h si ha quindi in definitiva che:

L'ordine di connessione r della varietà W è eguale al massimo numero di cicli reali indipendenti, della relativa dimensione, che appartengono alla riemanniana V.

8. Non è consentito proceder oltre senza separare i due casi fin qui accomunati, facendo appello a proprietà di carattere più specifico. Rivolgendoci dapprima alla *connessione lineare*, per cui le circostanze si presentano più favorevoli, posto $R_1 = 2q$ (q *irregolarità* di F) mostriamo che $h = r_1 = q = \frac{R_1}{2}$.

Perciò fissiamo in F, q integrali picardiani di 1ª specie $u_1, u_2, \dots, u_q$ indipendenti e *reali*, e ricordiamo che i periodi d'uno di essi, presi lungo due cicli C, C' associati in S sono coniugati, quindi quelli relativi ai cicli reali sono reali ([20]). Inoltre aggreghiamo ad $A_1, A_2, \dots, A_h$ altri $R_1 - h = 2q - h$ cicli B_1, $B_2, \dots, B_{2q-h}$, in modo da formare una *base* per i cicli lineari di V.

Basta ora ragionare così: Se fosse $h > q$, quindi $2q - h < q$, dai periodi d'una opportuna combinazione lineare a coefficienti reali u degli u_i, relativi ai cicli B_j, si potrebbero far sparire le parti immaginarie; e così si otterrebbe un integrale *coi periodi tutti reali.* Se poi fosse $h < q$ si potrebbe far sì che i periodi di u relativi agli A_i, e quindi a tutti i cicli reali di V fossero nulli; ma allora, qualunque fosse il ciclo C, sarebbe nullo il periodo di u relativo a $C + C'$, quindi quello lungo C immaginario puro, ed in definitiva sarebbero *immaginarî puri tutti i periodi di u* ([21]). In entrambi i casi si cade in assurdo.

In forza della relazione $R_1 = 2r_1$ l'espressione entro parentesi a secondo membro della (9) è nulla, onde, posto $r_2 = h$, si ha col significato stabilito per quel carattere

$$Z = R_2 - 2h. \tag{13}$$

§ 4. Intervento dei numeri base e loro contributo alla connessione bidimensionale $h = r_2$ di W. Seconda forma della conclusione.

9. A formare l'insieme dei cicli a due dimensioni reali di V, contribuisce, parzialmente o totalmente, la classe dei *cicli algebrici*. Ci proponiamo di dimostrare che *il contributo di questa classe al numero* h *è espresso da* $\rho - \bar{\rho}$, cioè che in V si possono trovare $\rho - \bar{\rho}$ e non più *cicli algebrici reali* fra di loro *indipendenti*. Ne conseguirà che $h \geq \rho - \bar{\rho}$, e, posto $h = \rho - \bar{\rho} + \tau$ si avranno le (2) (4) della prefazione coll'avvertito significato di τ.

Premettiamo alcune osservazioni sui *cicli algebrici* della riemanniana V e sui loro rapporti colle curve tracciate sulla superficie F.

([20]) Vedi loco cit. ([19]), Mem. 1ª, nn, 1-3.

([21]) Si è ripetuto in sostanza il ragionamento della succitata Memoria, n. 2, e, con qualche aggiunta, si potrebbe proprio ricondursi a quello.

Siano A, B due curve irriducibili di F, e supponiamo che il sistema lineare $|A+B|$ sia irriducibile ed infinito, quindi contenga qualche curva irriducibile C; indichiamo inoltre con α, β, γ i cicli a due dimensioni immagini di A, B, C in V, *orientati* per ora in modo *arbitrario*. Tra α, β, γ intercederà certamente una delle omologie $\gamma = \pm\alpha \pm \beta$, ma non si potrà asserire ch'essa sia proprio la $\gamma = \alpha + \beta$ finchè ad α e β non si attribuiscono le orientazioni che derivano *per continuità* da quella di γ, quando C, variando nel proprio sistema lineare, va a spezzarsi in $A+B$.

È però facile vedere, che, se le orientazioni dei cicli α immagini di curve effettive A, si fissano in base al *criterio uniforme* del LEFSCHETZ [22], secondo il quale quelle orientazioni restan assegnate in modo che (orientata opportunamente la V) il numero effettivo (AB) delle intersezioni di due curve risulti eguale al *numero algebrico* $(\alpha\beta)$, allora quando sia $C \equiv A+B$ (o più in generale $C \equiv\equiv A+B$) è sempre $\gamma = \alpha + \beta$. Per persuadersene basta segare le curve considerate con una curva effettiva D a cui corrisponda il ciclo δ, e tener presente che $(A+B, D) = (AB) + (BD)$, $(\alpha+\beta, \delta) = (\alpha\delta) + (\beta\delta)$.

È d'altronde solo in base a tal criterio che si può parlare senz'ambiguità del ciclo di V associato ad una *curva riducibile* di F.

Ciò premesso, suppongasi che la A, irriducibile, sia *reale*. Il ciclo α coinciderà materialmente col suo trasformato α' mediante S; ma poichè α è riemanniana di A, la trasformazione indotta ivi da S è *inversa*, onde, con riguardo alle orientazioni, sarà rigorosamente $\alpha' = -\alpha$. In altre parole, secondo la nostra terminologia, α è un *ciclo immaginario puro* della V.

La conclusione sussiste anche se A è riducibile; e per persuadersene basta aggiungere ad A una B irriducibile e reale, ad es. la sezione di F con una forma reale d'ordine abbastanza elevato, per guisa che nel sistema lineare $|A+B|$ esista qualche curva C irriducibile e reale [23]. Invero allora, col solito significato dei simboli, si ha $\gamma = \alpha+\beta$, $\beta' = -\beta$, $\gamma' = -\gamma$, $\gamma' = \alpha' + \beta'$, quindi $\alpha' = -\alpha$.

Invece se A è qualunque (ma effettiva) in V, ed $\bar{A}$ è la curva coniugata, i due cicli α, $\bar{\alpha}$ son trasformati materialmente uno nell'altro da S, però, con riguardo alle orientazioni, è $\alpha' = -\bar{\alpha}$; bastando per ciò osservare che la curva $A+\bar{A}$ è reale, quindi il ciclo $\alpha+\bar{\alpha}$ è trasformato da S nell'opposto,

---

[22] Vedi la nota [12].

[23] Un sistema lineare reale può non contenere curve reali, ma quando ne contiene una ne contiene infinite, tra cui ve n'è certo di irriducibili se lo è il sistema: e quì una curva reale è la stessa $A+B$. In argomento, cfr. loco cit. [1], α, n. 2.

il che appunto si verifica quando $\alpha' = -\bar{\alpha}$, non quando $\alpha' = \bar{\alpha}$. In conclusione si ha dunque che:

Una curva reale della superficie F *è rappresentata entro alla riemanniana* V *da un ciclo immaginario puro, e due curve coniugate son rappresentate da due cicli ciascuno dei quali è omologo all'opposto dell'altro.*

10. Partiamoci ora da ρ curve $C_1, C_2, \dots, C_\rho$, costituenti una *base* (complessa) sulla superficie F. Per quanto non sia strettamente necessario, supponiamole scelte nella maniera più generale, quindi suscettibili di variare in sistemi lineari infiniti di *dimensione virtuale* positiva, ecc.

Le curve *reali* $C_1 + \bar{C}_1$, $C_2 + \bar{C}_2, \dots, C_\rho + \bar{C}_\rho$ non saranno, in generale, tutte algebricamente indipendenti, ma di tali se ne potranno trovare al più l, siano le prime, per guisa che ogni altra sarà algebricamente dipendente da esse. Posto $A_i = C_i + \bar{C}_i$ $(i = 1, 2, \dots, l)$, basta ripetere un ragionamento del n.° 7 per dedurne che $A_1, A_2, \dots, A_l$ dànno su F una *base reale* (cioè per le *curve reali*) onde l altro non è che *il numero base reale* $\bar{\rho}$.

In dettaglio, se D è una curva (effettiva) reale di F, la relazione

$$\mu D \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_\rho C_\rho,$$

che ne esprime la dipendenza dai C_i sussiste assieme alla

$$\mu D \equiv \lambda_1 \bar{C}_1 + \lambda_2 \bar{C}_2 + \dots + \lambda_\rho \bar{C}_\rho,$$

fra le curve coniugate, e dalle due, sommando, discende

$$2\mu D \equiv \lambda_1(C_1 + \bar{C}_1) + \lambda_2(C_2 + \bar{C}_2) + \dots + \lambda_\rho(C_\rho + \bar{C}_\rho),$$

donde, posto che tutte le $C_j + \bar{C}_j$ dipendono dalle A_i, si trae la conclusione.

Ora ripristiniamo su F una *base complessa includente le* A_i aggregando a queste certe $\sigma = \rho - \bar{\rho}$ curve $B_1, B_2, \dots, B_\sigma$ scelte adeguatamente, ma per il resto nel modo più generale; ed indicate, al solito con $\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_\sigma$ le coniugate, mettiamo in evidenza che le curve reali $B_t + \bar{B}_t$ dipendono dalle A_i scrivendo le relazioni

$$\mu_t(B_t + \bar{B}_t) \equiv \lambda_{t1} A_1 + \lambda_{t2} A_2 + \dots + \lambda_{t\bar{\rho}} A_{\bar{\rho}} \text{ [24]}, \qquad (t = 1, 2, \dots, \sigma) \tag{14}$$

con $\mu_t \neq 0$. Passando ai corrispondenti cicli α_i, β_t, $\bar{\beta}_t$ della V, avremo intanto,

---

[24] Per la maniera generale con cui furono scelti i C_j, B_t è da escludersi che sia necessario aggiungere ai due membri una stessa curva E, che del resto non darebbe alcun incomodo.

perchè le A_i son reali $\alpha_i' = -\alpha_i$ ed inoltre, per quel che s'è visto $\beta_t' = -\bar{\beta}_t$ onde dalle (14) si dedurranno le omologie

$$\mu_t(\beta_t - \beta_t') = \lambda_{t1}\alpha_1 + \lambda_{t2}\alpha_2 + \dots + \lambda_{t\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}}, \tag{15}$$

ed anche, dopo aver moltiplicato i due membri per 2, e tenuto conto che $\alpha_i = -\alpha_i'$

$$2\mu_t\beta_t - (\lambda_{t1}\alpha_1 + \dots + \lambda_{t\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}}) = 2\mu_t\beta_t' - (\lambda_{t1}\alpha_1' + \dots + \lambda_{t\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}}'). \tag{16}$$

Queste vengono a dire che i σ cicli algebrici

$$\gamma_t = 2\mu_t\beta_t - (\lambda_{t1}\alpha_1 + \dots + \lambda_{t\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}}), \qquad (t = 1, 2, \dots, \sigma) \tag{17}$$

son trasformati in cicli omologhi da S, vale a dire son *reali*; e d'altronde, come mostrano le (17), essi posson sostituirsi ai β_t, cioè presi assieme agli α_i dànno un *sistema di ρ cicli algebrici indipendenti*, su cui la simmetria S opera colla sostituzione

$$\alpha_i' = -\alpha_i, \quad \gamma_t' = \gamma_t \text{ [25]}, \quad (i = 1, 2, \dots \bar{\rho};\ t = 1, 2, \dots, \sigma). \tag{18}$$

Ogni ciclo algebrico δ è pertanto dipendente dagli α_i, γ_t, cioè legato ad essi da un'omologia

$$\nu\delta = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_{\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}} + \mu_1\gamma_1 + \dots + \mu_\sigma\gamma_\sigma,$$

($\nu \neq 0$) che, trasformata mediante S, dà, a norma delle (18) l'altra

$$\nu\delta' = -\lambda_1\alpha_1 - \dots - \lambda_{\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}} + \mu_1\gamma_1 + \dots + \mu_\sigma\gamma_\sigma,$$

ed infine sommando porge

$$\nu(\delta + \delta') = 2\mu_1\gamma_1 + 2\mu_2\gamma_2 + \dots + 2\mu_\sigma\gamma_\sigma. \tag{19}$$

In particolare se δ è reale si ha $\delta = \delta'$ ed allora la (19) dimostra che δ dipende dai γ_t. Resta così provato che *ogni ciclo algebrico reale di* V *dipende dagli analoghi cicli indipendenti* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\sigma$, quindi che *i cicli algebrici portano al numero h contributo* $\sigma = \rho - \bar{\rho}$, c. d. d.

Termineremo notando che l'*invarianza assoluta* del carattere $\tau = \frac{1}{2}(R_2 - Z) + \rho - \bar{\rho}$ (nel campo reale) può in generale desumersi, oltrechè dal suo significato, anche dal valutare l'influenza che l'introduzione di curve

---

[25] Si noti che *ad un ciclo algebrico reale* $\gamma(\gamma' = \gamma)$ *non può corrispondere su* F *una curva effettiva* Γ. Difatti detta $\bar{\gamma}$ la coniugata, sarebbe $\gamma' = -\bar{\gamma}$, quindi $\gamma + \bar{\gamma} = 0$ ed allora alla *curva effettiva* $\Gamma + \bar{\Gamma}$ corrisponderebbe un *ciclo nullo*, il che è assurdo (LEFSCHETZ, loco cit. ([2]), Cap. II, n. 6). Invece ad una *curva virtuale* come la $A - \bar{A}$ corrisponde effettivamente un ciclo $\alpha - \bar{\alpha} = \alpha + \alpha'$ *reale*.

eccezionali di 1ª specie ha sulla relativa espressione; bastando, allo scopo, osservare, che per l'intervento d'una (nuova) curva eccezionale *reale*, tutti i numeri R_2, Z, ρ, $\bar{\rho}$ aumentano d'una unità; mentre l'introduzione di due curve eccezionali *immaginarie coniugate* non altera Z, produce in $\bar{\rho}$ l'aumento d'una unità ed in R_2, ρ quello di due unità.

§ 5. Esempî e controlli.

11. Per i varî casi relativi alle *superficie razionali*, rinviamo ai lavori ricordati. Qui esamineremo i seguenti casi nuovi:

a) *Rigate irrazionali di genere q.* — Ci riferiremo ad una rigata reale F d'uno spazio S_h priva di curve eccezionali di 1ª specie (e di punti multipli). Il relativo genere geometrico è nullo, quindi si deve avere $Z = R_2 - 2(\rho - \bar{\rho})$.

Poichè su F la base è costituita da una generatrice e da una sezione iperpiana, entrambe curve reali ([26]), così si ha $\rho = \bar{\rho} = 2$; d'altronde $I = -4q$, $R_2 = I + 4q + 2 = 2$, e pertanto secondo la formula dev'essere $Z = 2$.

Di fatto la F consta d'un certo numero $\mu \geq 0$ di falde (eguale al numero dei rami della sezione iperpiana) ciascuna delle quali ha la connessione d'una quadrica rigata, vale a dire 2. E tal valore ha pure la connessione totale Z come risulta dall'espressione che la definisce (cfr. anche ([16])).

b) *Superficie delle coppie ordinate di punti d'una curva reale C di genere* $p\,(> 0)$. — D'una tal superficie si possono considerare due modelli reali Φ, Φ', distinti per trasformazioni birazionali reali, e legati alle simmetrie ([27]) $(P, Q) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P})$, $(P, Q) \rightarrow (\bar{P}, \bar{Q})$.

Nel citato lavoro abbiamo trovato, mediante investigazione diretta, che $Z = 2p$ per la Φ, e $Z = 2$ per la Φ'. Verifichiamo con tali valori la formula $Z = R_2 - 2h$, determinando il valore di h ed attribuendo ad R_2 il valore noto $4p^2 + 2$ ([28]); dovremo trovare nei due casi $h = 2p^2 - p + 1$, $h = 2p^2$.

Ove poi si tenga presente, che, supposta la C a moduli generali, si ha $\rho = 2$ ([29]), mentre $\bar{\rho}$ vale rispettivamente 1 e 2 in quanto nel primo caso i

---

([26]) La generatrice può anche non esser reale, ma appartiene ad un sistema algebrico *reale*, il che è equivalente.

([27]) Vedi il lavoro citato ([5]), n. 5.

([28]) Vedi, anche per i cicli ([20]), LEFSCHETZ, loco cit. ([2]), Cap. III, § VII.

([29]) F. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti d'una curva algebrica*, ecc. [Memorie della R. Acc. di Torino, 64 (1903), pp. 1-49], Parte 2ª.

due fasci unisecanti sono immaginarî coniugati, nel secondo reali, si vede che risulterà rispettivamente $\tau = 2p^2 - p$, $\tau = 2p^2$, di guisa che, come avvertito, i valori di τ saranno affatto diversi.

Designata con R la riemanniana di C, con γ_i, δ_i $(i=1, 2,..., 2p)$ due sistemi di cicli *indipendenti* (ma non necessariamente *primitivi*) di R, e con P, Q due punti ivi fissati, si possono considerare in V gli R_2 cicli a due dimensioni indipendenti indicati dalle

$$(20) \qquad M=(P, R), \quad N=(R, Q), \quad \Gamma_{ik}=(\gamma_i, \delta_k), \quad (i, k=1, 2,..., 2p),$$

con ovvio significato dei simboli.

Orientata la R, lo sono senz'altro i cicli M, N; le orientazioni dei Γ_{ik} si fisseranno nel modo seguente: Scelto su γ_i un punto H_i, e su δ_k un punto K_k, si considerino su Γ_{ik} i due cicli (orientati perchè lo sono i γ_i, δ_k) $c_i=(\gamma_i, K_k)$, $d_k=(H_i, \delta_k)$ che s'incontrano nel punto (H_i, K_k), indi si orienti Γ_{ik} in modo che quel punto porti al *numero algebrico* (c_i, d_k) contributo $+1$.

A questo punto conviene procedere separatamente:

b$_1$) *Primo modello*. Scelti come δ_i i *coniugati* dei γ_i, si vede facilmente, tenendo conto del modo come vennero fissate le orientazioni, che la simmetria S di V produce sui cicli (20) la sostituzione

$$(21) \qquad M'=-N, \quad N'=-M, \quad \Gamma'_{ik}=-\Gamma_{ki},$$

onde si ottengono subito i *cicli reali indipendenti*

$$M-N, \quad \Gamma_{ik}-\Gamma_{ki} \qquad (i<k),$$

e coll'aiuto delle (21) si trova che ogni altro ciclo reale a due dimensioni di V dipende da essi. Dunque $h=1+\binom{2p}{2}=2p^2-p+1$ come previsto.

b$_2$) *Secondo modello*. Si scelgano i γ_i in modo che la simmetria s di R immagine del coniugio di C produca su essi la sostituzione

$$\gamma_i'=\gamma_i, \quad \gamma_j'=-\gamma_j \text{ [30]}, \quad (i=1, 2,..., p;\ j=p+1,..., 2p)$$

ed i δ_i identici ai γ_i; allora si trova che la sostituzione indotta da S sui cicli (20) è

$$(22) \qquad M'=-M, \quad N'=-N, \quad \Gamma'_{ik}=\Gamma_{ik}, \quad \Gamma'_{rs}=-\Gamma_{rs},$$

dove gl'indici i, k assumono valori entrambi non maggiori o maggiori di p,

[30] Cfr. loco cit. [19], Memoria I, prime righe del n. 3. Qui nulla importa aver cicli *non primitivi*.

e gl'indici r, s i rimanenti. Ne viene che stavolta il *sistema fondamentale per i cicli algebrici reali* è dato dai Γ_{ik}, talchè, conformemente alla previsione, si ha $h=2p^2$.

c) *Superficie delle coppie non ordinate di punti della curva precedente.* — Se la C è a moduli generali, si ha un solo modello reale Ψ corrispondente alla simmetria $(P, Q)\rightarrow(\overline{P}, \overline{Q})$, che supporremo privo di curve eccezionali. La connessione totale Z della sua parte reale, determinata direttamente nel lavoro testè ricordato, ha il valore $p+1$.

Per la nostra Ψ si ha $I=2p^2-5p-1$ ([31]), $q=p$, quindi $R_2=2p^2-p+1$; inoltre $\rho=\overline{\rho}=1$, onde si dovrà trovare $h=\tau=2\binom{p}{2}$.

Scelti come in b$_2$) i γ_i, δ_i, si hanno adesso in V gli $R_2=1+\binom{2p}{2}$ cicli a due dimensioni indipendenti indicati dai simboli

$$M=(P,\ R),\quad \Gamma_{ik}=(\gamma_i,\ \gamma_k),$$

dove ad i, k si diano i valori delle *combinazioni* binarie degli elementi 1, 2,..., $2p$; e la sostituzione su essi indotta da S è

$$M'=-M,\quad \Gamma'_{ik}=\Gamma_{ik},\quad \Gamma'_{rs}=-\Gamma_{rs},$$

gl'indici variando come nelle (22) (coll'avvertenza che ora $\Gamma_{ik}=\Gamma_{ki}$). Il *sistema fondamentale per i cicli algebrici reali* è dato dai Γ_{ik}, che sono appunto, come previsto, in numero di $2\binom{p}{2}$.

Padova, febbraio 1928.

([31]) F. SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti d'una curva algebrica.* [Atti della R. Acc. di Torino, 38 (1903)], n. 6.