Sui veli elastici.

Memoria di B. FINZI (a Milano).

Un pezzo di superficie elastica, isotropa, che diremo σ , sia in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze. Lo spostamento di un generico punto P di σ sia infinitesimo e tangente a σ in P . Tale condizione si verifica, ad esempio, se un velo elastico è teso su di una superficie rigida ⁽¹⁾.

Mi propongo di caratterizzare deformazioni e sforzi in un generico punto P di σ . Se σ è superficie piana, il problema coincide con quello della deformazione elastica piana, ed è problema questo di cui si conosce la soluzione ⁽²⁾. Non mi risulta invece che sia nota la soluzione del problema (più generale) del quale mi voglio occupare.

§ 1. Equazioni indefinite.

Sia s lo spostamento elastico di un punto P di σ , λ e μ le due costanti d'isotropia di LAMÉ. L'omografia degli sforzi sarà ⁽³⁾

$$\beta = -\lambda \operatorname{div} s - 2\mu \frac{dv}{dP} + \mu(\operatorname{rot} s) \wedge.$$

Sia F la forza unitaria di massa, ρ la densità: l'equazione vettoriale indefinita di equilibrio sarà ⁽⁴⁾

$$(1) \quad \rho F = \operatorname{grad} \beta,$$

cioè ⁽⁵⁾

$$(1') \quad \rho F + (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} s - \mu \operatorname{rot}^2 s = 0.$$

⁽¹⁾ Lo studio generale dei veli flessibili fu fatto dal prof. B. CALDONAZZO, *Sulla meccanica della superficie*. *Monitore Tecnico*, n. 1 e 2, 1920.

⁽²⁾ J. CL. MAXWELL, *Edinburgh Roy. Soc. Trans.* 26 (1872), p. 1; M. LÉVY, *Paris, C. R.* 26 (1898), p. 1236; J. H. MICHELL, *London Math. Soc. Proc.* 31 (1899), p. 100. Cfr. anche *Encyk. der math. Wiss.* Band IV, Teilband 4, p. 161.

⁽³⁾ C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*. II, Pavia 1913, p. 29.

⁽⁴⁾ C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *loc. cit.*, p. 26.

⁽⁵⁾ C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *loc. cit.*, pag. 31.

Sia

$$(2) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^2 a_{ik} dx_i dx_k$$

il quadrato dell'elemento lineare su σ . Consideriamo altresì lo spazio definito dalla seguente forma differenziale quadratica:

$$(3) \quad dS^2 = \sum_{i,k}^3 b_{ik} dx_i dx_k.$$

Le superficie $x_3 = \text{cost.}$ siano parallele a σ . Le loro traiettorie ortogonali saranno rette: le rette x_3 . Se (ad esempio) la superficie $x_3 = 0$ coincide con σ , si avrà:

$$b_{ik} = a_{ik} \text{ per } x_3 = 0 \ (i, k = 1, 2), \quad b_{i3} = 0 \ (i = 1, 2), \quad b_{33} = 1.$$

Definiscono u_1, u_2, u_3 covariantemente nella metrica (3) il vettore $\mathbf{s}$ ⁽¹⁾. Poichè il sistema u_i è definito soltanto nei punti di σ , le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico della superficie σ si otterranno dalla (1') ponendo in essa $x_3 = 0$ e supponendo nulla ogni dipendenza da x_3 : quindi u_i indipendente da x_3 . Ricordando che $\mathbf{s}$ è tangente a σ , dovremo dunque porre nella (1'):

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0.$$

Siano $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ le componenti controvarianti di $\text{rot } \mathbf{s}$: nei punti di σ si avrà ⁽²⁾:

$$\omega^1 = \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),$$

e quindi (ricordando le note relazioni tra le componenti covarianti e le controvarianti di uno stesso vettore):

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

Il vettore $\text{rot } \mathbf{s}$ è dunque normale a σ , e il suo modulo è dato dal valore assoluto di ω , essendo ω definito dalla seguente relazione:

$$(4) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

⁽¹⁾ T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. Roma 1925, p. 113 e 139.

⁽²⁾ T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 183.

Le componenti controvarianti di $\text{rot}^2 \mathbf{s}$ saranno allora (sempre nei punti di σ):

$$v^1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \quad v^2 = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \quad v^3 = 0$$

e quindi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(a_{11} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right), \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(a_{21} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{22} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right), \quad v_3 = 0.$$

Osserviamo ora che il coefficiente di dilatazione, che chiamiamo θ , non è altro che $\text{div } \mathbf{s}$. Le componenti covarianti di $\text{grad div } \mathbf{s}$ saranno allora $\frac{\partial \theta}{\partial x_i}$ ⁽¹⁾.

Analogamente al caso della deformazione piana, supponiamo che le forze unitarie di massa abbiano componente tangenziale a σ nulla ⁽²⁾. Ne segue $F_1 = F_2 = 0$. Dalla (1') si otterranno allora, nel caso in esame, le seguenti due relazioni:

$$(5) \quad \begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \frac{\mu}{\sqrt{a}} \left(a_{11} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \frac{\mu}{\sqrt{a}} \left(a_{21} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{22} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = 0. \end{cases}$$

Queste saranno le equazioni indefinite d'equilibrio elastico della superficie σ ⁽³⁾.

Per procedere oltre, è opportuno porre il ds^2 , definito dalla (2), sotto forma isoterma: se $x_1 + ix_2$ è variabile complessa su σ , sarà

$$(6) \quad ds^2 = l^2(dx_1^2 + dx_2^2) \quad (4),$$

essendo

$$l^2 = \frac{1}{\Delta_1 x_1} = \frac{1}{\Delta_1 x_2}.$$

Le (5) allora assumono la seguente forma:

$$(7) \quad \begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

⁽¹⁾ T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 176.

⁽²⁾ Nel caso del velo elastico teso su di una superficie rigida, e non soggetto ad alcuna forza attiva, tale condizione equivale a considerare la superficie rigida liscia.

⁽³⁾ La terza equazione che si ottiene dalla (1') proiettando sulla normale a σ , definisce F_3 . Nel caso di un velo teso su di una superficie rigida, essa determinerà la reazione del vincolo. Di questa reazione ci occuperemo in appendice al § 3.

⁽⁴⁾ L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*. Pisa 1920, I, p. 124.

Queste due relazioni ci dicono che $w = (\lambda + 2\mu)\theta + i\mu\omega$ è funzione della variabile complessa $x_1 + ix_2$. Diremo allora — *qualunque* sia il sistema coordinato x_1, x_2 (anche non isotermo) — che w è funzione di variabile complessa su σ , e quindi $(\lambda + 2\mu)\theta$ e $\mu\omega$ sono soluzioni coniugate dell'equazione $\Delta_2\Phi = 0$, essendo $\Delta_2\Phi$ il ben noto invariante $\sum_{i,k}^2 a^{ik}\Phi_{ik}$. Dunque

$$(8) \quad \Delta_2\theta = 0, \quad \Delta_2\omega = 0.$$

In particolare, riferendoci alla forma (6), si avrà ⁽¹⁾:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} = 0, \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} = 0, \end{cases}$$

come, del resto, si poteva tosto dedurre dalle (7).

§ 2. Funzioni ausiliarie.

Introduciamo due funzioni ausiliarie φ e ψ , tali che

$$(10) \quad \begin{cases} 2\mu u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \\ 2\mu u_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Riferiamoci alla metrica (6): in virtù della (4) si avrà:

$$2\mu l^2\omega = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2},$$

cioè ⁽²⁾

$$(11) \quad \Delta_2\psi = 2\mu\omega.$$

Ricordando che $\theta = \operatorname{div} \mathbf{s}$, e quindi ⁽³⁾

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_r^2 \frac{\partial(\sqrt{a}u^r)}{\partial x_r},$$

⁽¹⁾ Cfr. ad es. L. BIANCHI, loc. cit., p. 86.

⁽²⁾ Cfr. ad es. L. BIANCHI, loc. cit., p. 86.

⁽³⁾ T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 174, cfr. formula 17''.

si avrà:

$$\theta = \frac{1}{2\mu} \Delta_2 \varphi,$$

cioè

$$(12) \quad \Delta_2 \varphi = 2\mu\theta.$$

Ma, in virtù della prima delle (8), $\Delta_2 \theta = 0$: dunque $\Delta_2 \Delta_2 \varphi = 0$; cioè, ponendo $\Delta_4 = \Delta_2 \Delta_2$:

$$(13) \quad \Delta_4 \varphi = 0.$$

Ma anche $\Delta_2 \omega = 0$; dunque

$$(14) \quad \Delta_4 \psi = 0.$$

Le funzioni ausiliarie φ e ψ sono dunque biarmoniche sulla superficie ⁽¹⁾: soluzioni cioè dell'equazione differenziale di quarto ordine:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}} = 0.$$

In più le due funzioni φ e ψ non sono indipendenti, perchè le due funzioni armoniche $\Delta_2 \psi$ e $\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \Delta_2 \varphi$ sono coniugate.

§ 3. Sforzi.

Consideriamo un solido elastico. Π sia il potenziale elastico. Lo sforzo che si esercita su di una superficie di normale $\mathbf{n}$, ha per proiezione ortogonale secondo la tangente alla linea x_p (riferendoci alla metrica (3)) la seguente espressione:

$$\frac{1}{\sqrt{b_{pp}}} \sum_{q,s}^3 \frac{\cos \widehat{nx_s}}{\sqrt{b_{ss}}} b_{qp} \Pi^{qs} \quad (2).$$

Π^{qs} rappresenta la derivata controvariante di

$$\Pi^q = \sum_h^3 b^{hq} \frac{\partial \Pi}{\partial x_h}.$$

⁽¹⁾ B. FINZI, *Funzioni biarmoniche sopra una superficie*. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, serie VI, vol. VI (1927), p. 210.

⁽²⁾ Questa formula e le seguenti, fino alla (15), sono state tolte dalle lezioni di teoria dell'elasticità che il compianto prof. RICCI svolse all'Università di Padova.

Se la superficie considerata è una superficie $x_r = \text{cost.}$, sarà $\cos \widehat{nx}_s = 0$ per $s \neq r$, $\cos \widehat{nx}_s = \frac{1}{\sqrt{b_{rr}b^{rr}}}$ per $s = r$ ⁽¹⁾. Allora la proiezione ortogonale secondo la linea x_p dello sforzo esercitantesi su di una superficie x_r sarà:

$$\frac{1}{\sqrt{b_{pp}}} \sum_q^3 \frac{1}{b^{rr} \sqrt{b_{rr}}} b_{qp} \Pi^{qr}.$$

Se Γ_{rp} è il tensore che caratterizza tale sforzo, sarà

$$\frac{\Gamma_{rp}}{\sqrt{b_{pp}b_{rr}}} = \frac{1}{\sqrt{b_{pp}}} \sum_q^3 \frac{1}{b^{rr} \sqrt{b_{rr}}} b_{qp} \Pi^{qr}$$

e quindi

$$(15) \quad b^{rr} \Gamma_{rp} = \sum_q^3 b_{qp} \Pi^{qr}.$$

Sulla superficie σ allora, il tensore che caratterizza gli sforzi sarà definito dalla seguente relazione

$$a^{rr} \Gamma_{rp} = \sum_q^2 a_{qp} \Pi^{qr} \quad (p, r = 1, 2).$$

In particolare poi, riferendoci alla forma isoterma (6), si avrà:

$$(16) \quad \Gamma_{rp} = l^4 \Pi^{pr} \quad (p, r = 1, 2).$$

Deriviamo covariantemente u_r : se $\left\{ \begin{smallmatrix} rs \\ j \end{smallmatrix} \right\}$ rappresenta un simbolo di CHRISTOFFEL di seconda specie, si avrà ⁽²⁾:

$$u_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial x_s} - \sum_j \left\{ \begin{smallmatrix} rs \\ j \end{smallmatrix} \right\} u_j.$$

Poniamo

$$(17) \quad 2\xi_{rs} = u_{rs} + u_{sr};$$

sarà:

$$(18) \quad \Pi^{pr} = -\lambda \theta \alpha^{pr} - 2\mu \xi^{pr} \quad (3).$$

⁽¹⁾ Cfr. ad es. E. BELTRAMI, *Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità*. Memorie della R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo VI, p. 405, formula (2) α .

⁽²⁾ T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 168.

⁽³⁾ Anche questa formula è stata tratta dalle citate lezioni di RICCI. Essa è tosto dedotta se si ricorda che $\Pi^{rs} = \frac{d\Pi}{d\xi_{rs}}$ e $2\Pi = -\lambda\theta^2 - 2\mu J$ dove la dilatazione $\theta = \Sigma_{pq} \alpha^{pq} \xi_{pq}$, e $J = \Sigma_{pq} \xi^{pq} \xi_{pq}$.

In virtù delle (16), (17), (18), si avrà:

$$(19) \quad \begin{cases} \Gamma_{11} = -\lambda l^2 \theta - 2\mu u_{11}, \\ \Gamma_{22} = -\lambda l^2 \theta - 2\mu u_{22}, \\ \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = -\mu(u_{12} + u_{21}). \end{cases}$$

Valutiamo ora l'invariante lineare del tensore Γ_{pr} ($p, r = 1, 2$):

$$\Gamma = \sum_1^2 a_{rp} a^{rp} \Gamma_{rp}.$$

Riferendoci alla metrica (6), si avrà:

$$\Gamma = -2\lambda\theta - 2\mu \frac{u_{11} + u_{22}}{l^2}.$$

Ma, su σ , ⁽⁴⁾

$$\theta = \sum_1^2 a^{rp} u_{,p} = \frac{u_{11} + u_{22}}{l^2},$$

dunque

$$\Gamma = -2(\lambda + \mu)\theta;$$

e, in virtù della (12)

$$(20) \quad \Gamma = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \Delta_2 \varphi.$$

L'invariante del tensore degli sforzi su σ è dunque uguale (a meno di un fattore costante) all'invariante differenziale secondo della funzione ausiliaria φ .

Esprimiamo ora le componenti covarianti del tensore degli sforzi mediante le funzioni φ e ψ :

Riferendoci alla metrica (6), e derivando covariantemente u_i , si avrà:

$$(21) \quad \begin{cases} u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial l^2}{\partial x_1} u_1 - \frac{\partial l^2}{\partial x_2} u_2 \right), \\ u_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial l^2}{\partial x_1} u_1 - \frac{\partial l^2}{\partial x_2} u_2 \right), \\ u_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial l^2}{\partial x_2} u_1 + \frac{\partial l^2}{\partial x_1} u_2 \right), \\ u_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial l^2}{\partial x_2} u_1 + \frac{\partial l^2}{\partial x_1} u_2 \right). \end{cases}$$

⁽⁴⁾ T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 174, formula 17.

Le (19), ricordando la (12), le (21) e le (10), si scriveranno dunque così:

$$(22) \quad \begin{cases} -\Gamma_{11} = \frac{\lambda}{2\mu} l^2 \Delta_2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial l^2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial l^2}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial l^2}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial l^2}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right), \\ -\Gamma_{22} = \frac{\lambda}{2\mu} l^2 \Delta_2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial l^2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial l^2}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial l^2}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial l^2}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right), \\ -\Gamma_{21} = -\Gamma_{12} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) - \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial l^2}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial l^2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial l^2}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial l^2}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \quad (1). \end{cases}$$

Queste relazioni determinano Γ_{rs} mediante espressioni lineari nelle derivate prime e seconde delle funzioni biarmoniche φ e ψ .

Velo teso su di una superficie liscia. — Lo stato di tensione di un velo teso su di una superficie liscia sarà definito dalle (22) con la limitazione però che gli sforzi abbiano in ogni punto del velo carattere di tensione. Determiniamo ora la reazione opposta dal vincolo:

Il Prof. CALDONAZZO ⁽²⁾ stabilì le equazioni indefinite di equilibrio di un velo flessibile qualsiasi. Egli ottenne tre equazioni indefinite ⁽³⁾ di cui le prime due non sono altro che la proiezione sulle linee x_1 e x_2 della nostra (1): ad esse la nostra soluzione — riguardante i veli elastici — manifestamente soddisfa. La terza delle (15) di CALDONAZZO ci permetterà di calcolare la reazione che il vincolo liscio esercita sul velo. Tale reazione sarà diretta come la normale alla superficie σ : indichiamola con F . Poichè nessuna forza attiva agisce sul velo, sarà $F = F_3$, cioè, in virtù della terza delle (15) di CALDONAZZO:

$$F = -\frac{T_{11}}{R_1} - \frac{T_{22}}{R_2} - 2 \frac{T_{12}}{\tau}.$$

In questa formula le linee x_1 e x_2 sono supposte ortogonali, $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{R_2}$ sono

(1) Se φ_{ik} , ψ_{ik} rappresentano le derivate seconde covarianti di φ e ψ , si può dare alle (22) la seguente forma:

$$(22') \quad \begin{cases} -\Gamma_{11} = \frac{\lambda}{2\mu} l^2 \Delta_2 \varphi + \varphi_{11} - \psi_{21} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \varphi_{11} + \frac{\lambda}{2\mu} \varphi_{22} - \psi_{21}, \\ -\Gamma_{12} = -\Gamma_{21} = \frac{1}{2} (\varphi_{12} + \varphi_{21} + \psi_{11} - \psi_{22}), \\ -\Gamma_{22} = \frac{\lambda}{2\mu} l^2 \Delta_2 \varphi + \varphi_{22} + \psi_{12} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \varphi_{22} + \frac{\lambda}{2\mu} \varphi_{11} + \psi_{12}. \end{cases}$$

(2) Loc. cit.

(3) Loc. cit., formula (15).

le curvature normali delle linee x_1 e x_2 , e $\frac{1}{\tau}$ è la torsione geodetica delle linee stesse. Le componenti di tensione T_{ik} sono definite dalla relazione

$$T_{ik} = \frac{\Gamma_{ik}}{\sqrt{a_{ii}a_{kk}}}.$$

Sia

$$\sum_1^2 c_{ik} dx_i dx_k$$

quella che è nota con il nome di seconda forma differenziale quadratica, relativa alla superficie σ ⁽¹⁾. Sarà ⁽²⁾:

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{c_{22}}{a_{22}}, \quad \frac{1}{\tau} = -\frac{c_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}};$$

e quindi

$$F = \sum_1^2 \frac{c_{ik} \Gamma_{ik}}{a_{ii} a_{kk}}.$$

In particolare, riferendoci alla forma (6), si avrà:

$$F = \frac{1}{l^4} \sum_1^2 c_{ik} \Gamma_{ik}.$$

Questa relazione, ricordando le (22), risolve il problema propostoci.

§. 4. Condizioni al contorno.

Sia H_p il sistema covariante che definisce le componenti dello sforzo che si esercita su di una superficie di normale n . In virtù di una formula già ricordata (tratta dalle lezioni di RICCI), si avrà:

$$H_p = \sum_{qs}^3 \frac{\cos \widehat{nx_s}}{\sqrt{b^{ss}}} b_{pq} \Pi^{qs}, \quad (p = 1, 2, 3)$$

e sulla superficie σ :

$$H_p = \sum_{qs}^2 \frac{\cos \widehat{nx_s}}{\sqrt{a^{ss}}} a_{pq} \Pi^{qs}, \quad (p = 1, 2).$$

⁽¹⁾ L. BIANCHI, loc. cit., capitolo IV.

⁽²⁾ L. BIANCHI, loc. cit., p. 192 e p. 297.

Se dn è l'elemento di linea appartenente a σ e normale a una data linea γ di σ , $\cos \widehat{nx_s} = \frac{\sqrt{a_{ss}} dx_s}{dn}$, e quindi lo sforzo su γ sarà definito da

$$H_p = \sum_1^2 a_{ps} \sqrt{\frac{a_{ss}}{a^{ss}}} \frac{dx_s}{dn} \Pi^{qs}.$$

Nella metrica (6) allora

$$H_p = \sum_1^2 l^4_s \frac{dx_s}{dn} \Pi^{ps},$$

e, ricordando la (16):

$$H_p = \Gamma_{1p} \frac{dx_1}{dn} + \Gamma_{2p} \frac{dx_2}{dn}.$$

Sia ora γ il contorno di σ : se son date le forze al contorno di σ , sarà (su γ):

$$\begin{cases} H_1 = \Gamma_{11} \frac{dx_1}{dn} + \Gamma_{21} \frac{dx_2}{dn}, \\ H_2 = \Gamma_{12} \frac{dx_1}{dn} + \Gamma_{22} \frac{dx_2}{dn}, \end{cases}$$

o anche, ricordando le (22),

$$(23) \quad \begin{cases} -H_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{dx_1}{dn} + \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{dx_1}{dn} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_2}{dn} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) \frac{dx_2}{dn} - \\ - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1}{dn} - \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dl^2}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dl^2}{dn} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{dl^2}{dn} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{dl^2}{dn} \right), \\ -H_2 = \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{dx_2}{dn} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{dx_2}{dn} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1}{dn} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) \frac{dx_1}{dn} + \\ + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_2}{dn} + \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dl^2}{dn} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dl^2}{dn} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{dl^2}{dn} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{dl^2}{dn} \right) \quad ('). \end{cases}$$

A queste due relazioni, lineari nelle derivate prime e seconde, debbono soddisfare al contorno le due funzioni biarmoniche φ e ψ .

(') Ricordando le (22'), ed indicando con ρ^1 e ρ^2 i parametri della direzione $\mathbf{n}$, scriveremo le (23) così:

$$(23') \quad \begin{cases} -H_1 = \rho^1 \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \varphi_{11} + \frac{\lambda}{2\mu} \varphi_{22} - \psi_{21} \right) + \frac{1}{2} \rho^2 (\varphi_{12} + \varphi_{21} + \psi_{11} - \psi_{22}), \\ -H_2 = \rho^2 \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \varphi_{22} + \frac{\lambda}{2\mu} \varphi_{11} + \psi_{12} \right) + \frac{1}{2} \rho^1 (\varphi_{12} + \varphi_{21} + \psi_{11} - \psi_{22}). \end{cases}$$

Osserviamo che le due condizioni al contorno, pur individuando u_1 e u_2 su σ , non individuano però le due funzioni φ e ψ . Infatti: ci vogliono due condizioni al contorno per individuare la funzione biarmonica φ (ad esempio) ⁽¹⁾, e ricordando che l'armonica $\Delta_2 \varphi$ è coniugata di $\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 \psi$, ci vorrà una ulteriore condizione al contorno per individuare ψ : in totale tre condizioni. Le (23) lasciano dunque arbitraria una condizione al contorno.

Caratterizziamo l'arbitrarietà delle funzioni φ e ψ : Dimostriamo intanto che se φ' e ψ' sono soluzioni del problema, lo sono anche $\varphi'' = \varphi' + f$, $\psi'' = \psi' + g$, se f e g sono funzioni armoniche coniugate. Infatti: se φ' e ψ' sono soluzioni, sarà $\Delta_4 \varphi' = 0$, $\Delta_4 \psi' = 0$, e $\Delta_2 \varphi'$ sarà armonica coniugata di $\frac{\mu}{2\mu + \lambda} \Delta_2 \psi'$. Essendo, per le ipotesi fatte, $\Delta_2 f = \Delta_2 g = 0$, sarà dunque ancora $\Delta_4 \varphi'' = \Delta_4 \psi'' = 0$, e $\Delta_2 \varphi''$ sarà coniugata di $\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 \psi''$. In più, se al contorno le (23) sono soddisfatte per $\varphi = \varphi'$, $\psi = \psi'$, lo saranno ancora per $\varphi = \varphi'' = \varphi' + f$, $\psi = \psi'' = \psi' + g$: basta infatti ricordare che, essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0,$$

allorchè si pone nelle (22) al posto di φ, f , al posto di ψ, g , il corrispondente Γ_{rp} si annulla. Con esso si annulla il corrispondente H_p . La linearità delle equazioni (23) dimostra allora la tesi.

Dimostriamo ora che la soluzione trovata è la più generale: dimostriamo cioè che se φ', ψ' è una soluzione particolare, la soluzione più generale è la seguente:

$$(24) \quad \varphi = \varphi' + f, \quad \psi = \psi' + g;$$

dove $f + ig$ è funzione della variabile complessa $x_1 + ix_2$. Siano, infatti, $\begin{Bmatrix} \varphi' \\ \psi' \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \varphi'' \\ \psi'' \end{Bmatrix}$ due soluzioni distinte del problema: in virtù delle (10) si avrà:

$$\begin{cases} 2\mu u'_1 = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi'}{\partial x_2} \\ 2\mu u'_2 = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi'}{\partial x_1} \end{cases} \quad \begin{cases} 2\mu u''_1 = \frac{\partial \varphi''}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi''}{\partial x_2} \\ 2\mu u''_2 = \frac{\partial \varphi''}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi''}{\partial x_1} \end{cases}$$

⁽¹⁾ B. FINZI, loc. cit.

Se le condizioni al contorno individuano un unico valore per u_1 e per u_2 , sarà $u'_1 = u''_1$, $u'_2 = u''_2$, cioè

$$\frac{\partial(\varphi'' - \varphi')}{\partial x_1} - \frac{\partial(\psi'' - \psi')}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial(\varphi'' - \varphi')}{\partial x_2} + \frac{\partial(\psi'' - \psi')}{\partial x_1} = 0.$$

Ma queste non sono altro che le condizioni di monogenità per le due funzioni $\varphi'' - \varphi'$ e $\psi'' - \psi'$. Ne segue allora che

$$\varphi'' = \varphi' + f, \quad \psi'' = \psi' + g.$$

Le (24) rappresentano dunque la soluzione più generale del nostro problema. Diremo dunque che, in generale, φ e ψ sono definite a meno di una funzione di variabile complessa su σ . Per assegnare questa funzione occorrerebbe dare una terza condizione al contorno, da unirsi alle (23). Quest'ultima condizione sarebbe però inessenziale per la determinazione di spostamenti e sforzi elastici, in quanto che — qualunque sia f (e quindi g) — unico è il valore di u_i , definito dalle (10), e unico quello di Γ_{rp} , definito dalle (22).

§ 5. Superficie sviluppabili.

Supponiamo, in particolare, che la superficie σ sia sviluppabile. In tal caso è sempre determinabile un sistema isotermino per cui $l=1$. Mostriamo come possa determinarsi una funzione ψ tale che, pur essendo essa biarmonica insieme a φ , e tale che $\Delta_2 \psi$ sia coniugato armonico di $\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \Delta_2 \varphi$, nelle (22) compaia soltanto la funzione biarmonica φ , da determinarsi mediante le (23).

Poniamo, infatti,

$$(25) \quad \begin{cases} \xi = -\psi_2 + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \varphi_1 \\ \eta = \psi_1 + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \varphi_2 \end{cases}$$

(l'indice 1 o 2 rappresenta la derivazione rispetto ad x_1 o ad x_2). La (11) e la (12) diverranno allora:

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi}{\partial x_2} = 2\mu\omega \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = 2(2\mu + \lambda)\theta. \end{cases}$$

Ricordiamo che $w = (\lambda + 2\mu)\theta + i\mu\omega$ è funzione della variabile complessa $z = x_1 + ix_2$: ne segue che, pur essendo ξ e η soluzioni delle (26), potremo prendere $\xi + i\eta$ funzione di z . All'uopo dovrà essere

$$(27) \quad \eta_1 + \xi_2 = 0, \quad \xi_1 - \eta_2 = 0$$

cioè (ricordando la posizione (25)):

$$(28) \quad \begin{cases} 2\varphi_{12} = -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}(\psi_{11} - \psi_{22}) \\ 2\psi_{12} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}(\varphi_{11} - \varphi_{22}). \end{cases}$$

In virtù delle (27), le (26) ci permetteranno di calcolare $\xi + i\eta$. Sarà:

$$\xi + i\eta = \int w dz = \int \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \Delta_2 \varphi + i \text{ coniugato } \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \Delta_2 \varphi \right\} \right] dz,$$

e quindi (dalle (25))

$$\psi_1 = \eta - \frac{2\mu + \lambda}{\mu} \varphi_2, \quad \psi_2 = -\xi + \frac{2\mu + \lambda}{\mu} \varphi_1.$$

Queste relazioni determinano (a meno di costanti inessenziali) la funzione biarmonica ψ , una volta nota la funzione biarmonica φ .

Calcoliamo ora gli sforzi: in virtù della seconda delle (28), le (22) diverranno:

$$-\Gamma_{11} = \frac{\mu + \lambda}{\mu} \varphi_{22}, \quad -\Gamma_{22} = \frac{\mu + \lambda}{\mu} \varphi_{11}, \quad -\Gamma_{12} = -\Gamma_{21} = -\frac{\mu + \lambda}{\mu} \varphi_{12}.$$

La funzione $-\frac{\mu + \lambda}{\mu} \varphi$ non è altro dunque che la funzione χ di AIRY ⁽¹⁾.

Scriveremo dunque:

$$(29) \quad \begin{cases} \Gamma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \\ \Gamma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \end{cases} \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Poste le (22) sotto la forma (29), le condizioni al contorno (le (23)) ci permetteranno, notoriamente ⁽²⁾, di caratterizzare i valori che χ e la sua derivata

⁽¹⁾ Brit. Ass. Report, 1862.

⁽²⁾ J. H. MICHELL, loc. cit.

normale assumono al contorno. Precisamente si avrà al contorno:

$$(30) \quad \begin{cases} \chi = \int_0^\gamma \left[\frac{dx_2}{d\gamma} \int_0^\gamma H_1 d\gamma - \frac{dx_1}{d\gamma} \int_0^\gamma H_2 d\gamma \right] d\gamma + Ax_1 + Bx_2 + C, \\ \frac{d\chi}{dn} = \frac{dx_1}{d\gamma} \int_0^\gamma H_1 d\gamma + \frac{dx_2}{d\gamma} \int_0^\gamma H_2 d\gamma - A \frac{dx_2}{d\gamma} + B \frac{dx_1}{d\gamma}. \end{cases} \quad (A, B, C \text{ costanti}).$$

Osserviamo che, essendo biarmonica φ , lo sarà pure χ . Sarà dunque, essendo $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \right) = 0;$$

cioè χ è biarmonica nel piano su cui σ può svilupparsi ⁽¹⁾. I valori che χ e $\frac{d\chi}{dn}$ assumono al contorno determineranno allora la funzione χ in ogni punto di σ , e quindi le condizioni al contorno individueranno la biarmonica φ .

Osserviamo che le (26), (29), (30) sono del tutto identiche alle relazioni analoghe relative alla deformazione elastica piana. Concludendo, potremo allora dire: dato un velo elastico sviluppabile, lo stato di deformazione e di tensione è dato dalle stesse formule che caratterizzano deformazioni e tensioni di un velo piano, purchè si scelga un tal sistema coordinato sulla sviluppabile che il quadrato del suo elemento lineare abbia la forma $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$.

Esempio. — A mo' d'illustrazione delle considerazioni precedenti consideriamo il seguente semplice esempio:

In un velo elastico piano sia praticato un foro circolare. O sia il centro del foro, R ne sia il raggio. Consideriamo due assi cartesiani ortogonali di centro O , che diciamo x e y . Supponiamo il velo indefinitamente esteso in ogni senso; e supponiamo ancora che per $|x| \rightarrow \infty$ sia nullo lo sforzo che si esercita su di una parallela all'asse x , e lo sforzo che si esercita su di una parallela all'asse y sia diretto come l'asse x , abbia modulo costante T , e carattere di tensione.

Assumiamo l'asse x come asse polare, O come polo: siano r e ϑ le coordinate polari di un punto del piano. La funzione di AIRY, per il problema ela-

⁽¹⁾ Cfr. B. FINZI, loc. cit.

stico piano in esame, sarà ⁽¹⁾:

$$(31) \quad \chi = \frac{1}{4} T \left(r^2 - 2R^2 \log r - \frac{(r^2 - R^2)^2}{2} \cos 2\vartheta \right).$$

Consideriamo ora una superficie cilindrica: se dx_1 è l'elemento di direttrice e dx_2 l'elemento di generatrice, sarà: $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$.

Immaginiamo di avvolgere il velo piano precedentemente considerato sulla superficie cilindrica, che supporremo rigida e liscia. L'avvolgimento avvenga in modo tale che l'asse delle x si avvolga su di una linea x_1 , e quindi l'asse delle y su di una linea x_2 . La funzione χ relativa al velo elastico cilindrico sarà identica a quella definita dalla (31), purchè si sostituisca in essa ad x , x_1 , ad y , x_2 . Sarà dunque:

$$(31') \quad \chi = \frac{1}{4} T \left(x_1^2 + x_2^2 - R^2 \log (x_1^2 + x_2^2) - \frac{(x_1^2 + x_2^2 - R^2)^2}{2} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Le (29) allora ci permetteranno di determinare lo stato di tensione in ogni punto del velo elastico cilindrico, purchè in esse si ponga per χ l'espressione fornita dalla (31') ⁽²⁾.

Da quanto constatammo precedentemente si deduce allora che, in un punto P del velo, lo stato di tensione è lo stesso, sia se il velo è teso su di un piano, sia se esso è teso su di una superficie cilindrica.

Quanto constatammo nel caso particolare precedente può estendersi in generale, osservando che lo stato di tensione e di deformazione di un velo elastico dipende unicamente dalle condizioni al contorno e dalla prima forma differenziale quadratica, caratterizzante la metrica del velo ⁽³⁾. Diremo allora che lo stato di tensione e di deformazione di un velo σ' in un suo punto P , non muta se si tende il velo su di una superficie σ'' applicabile su σ' , purchè — ben si intende — restino inalterate le condizioni al contorno.

Milano, 31 ottobre 1927.

⁽¹⁾ G. CASTELFRANCHI, *Sulla determinazione degli sforzi nelle moderne caldaie a vapore ad altissima pressione*. Milano, Hoepli 1926, pp. 45-56.

⁽²⁾ La reazione F esercitata dal vincolo sarà (come constatammo in appendice al § 3) $F = \sum_{ik} c_{ik} \Gamma_{ik}$. Ma se $\frac{1}{\rho}$ è la curvatura della direttrice, sarà $c_{11} = \frac{1}{\rho}$, $c_{12} = c_{22} = 0$, e quindi $F = \frac{\Gamma_{11}}{\rho}$.

⁽³⁾ Solo la reazione del vincolo dipende dalla seconda forma differenziale quadratica, non lo stato di tensione e di deformazione del velo.