Sulla pressoflessione del cemento armato.

Memoria di A. SIGNORINI (a Napoli).

§ 1. Sunto della Memoria. Il teorema di riduzione.

1. La resistenza a trazione dei conglomerati (e delle murature in genere) è molto scarsa ed incerta: e questo costituisce il principale motivo per cui la risoluzione dei problemi della statica del cemento armato (e delle murature semplici) non può essere sistematicamente domandata alla teoria dell'elasticità [1].

Già da tempo i tecnici hanno concesso un'incondizionata patente d'esercizio ad una teoria della pressoflessione del cemento armato (e delle murature semplici) costruita combinando alcune proprietà dei solidi perfettamente elastici coll'ipotesi estremamente schematica di assoluta mancanza di resistenza a trazione nel conglomerato (e di perfetta validità della legge di HOOKE nella sollecitazione a compressione dello stesso materiale).

I fondamenti di tale teoria non sono stati finora sottoposti ad una prova di resistenza in riguardo alla loro capacità a ridurre il problema tecnico ad una questione puramente analitica: cioè, in riguardo alla loro capacità ad individuare una ed una sola soluzione del problema per qualunque tipo di trave (o pilastro) in cemento armato ed in qualunque caso di sollecitazione a pressoflessione.

Il desiderio di colmare tale lacuna mi indusse ad iniziare gli studi esposti nella presente Memoria, studi che in definitiva si sono informati al doppio

---

[1] Cfr. ad es. A. SIGNORINI, *Sulla statica del cemento armato.* [Rend. del Seminario Matematico della R. Università di Roma (1924-25), serie 2ª, vol. III]. In questa conferenza sono enunciati quasi tutti i risultati della Memoria. Un sunto delle dimostrazioni relative al caso particolare delle murature semplici è già stato pubblicato nelle due Note: *Un teorema d'esistenza ed unicità nella statica dei materiali poco resistenti a trazione* e *Sulla pressoflessione delle murature* [Rend. della R. Accademia dei Lincei, vol. II, serie 6ª (2° semestre 1925), pagg. 401-406 e 484-489]. I risultati della Memoria furono pure esposti in una comunicazione al 2° Congresso internazionale di Meccanica applicata [V. « Verhandlungen des zweiten internationalen Kongresses für Technische Mechanik », pagg. 278-283 (Orell Füssli, Zurigo, 1927)].

scopo di consolidare i fondamenti della teoria ordinaria e di mettere in evidenza tutta la sua portata.

Ho cercato di raggiungere il primo scopo sviluppando nelle sue parti essenziali la teoria che risulta dall'abbandono dell'usuale schema di rappresentazione delle prove di resistenza dei conglomerati (e delle murature).

Successivamente ho stabilito dei teoremi di confronto che riconducono i calcoli di stabilità relativi alla teoria generalizzata nell'ambito della teoria ordinaria, in modo semplice e facendo intervenire soltanto elementi facilmente e sicuramente deducibili dai diagrammi delle prove di resistenza: ed un teorema di riduzione che implica la perfetta equivalenza analitica della teoria ordinaria colla teoria meno semplicista in cui il conglomerato obbedisce alla legge di HOOKE (non solo nella sollecitazione a compressione, ma anche) fino ad un certo allungamento unitario positivo, a partire dal quale la tensione unitaria si conserva costante.

Si possono immaginare dei casi nei quali il prescindere dalla resistenza a trazione nel conglomerato risulta sfavorevole alla stabilità: ove essi presentassero un effettivo interesse pratico, il teorema di riduzione fornirebbe il procedimento più conveniente per i relativi calcoli di verifica e di progetto.

I titoli dei singoli numeri del presente paragrafo possono servire come un indice quasi completo.

2. Costituzione e sollecitazione del sistema. — Sia C un cilindro retto in cemento armato (trave o pilastro): precisamente supponiamo C costituito per una parte, C_c, da materiale omogeneo poco resistente a trazione (conglomerato) e per la parte residua, C_a, da un'armatura metallica, pure omogenea, risultante da un certo numero di cilindri ognuno dei quali abbia in comune con C tanto la direzione delle generatrici quanto l'altezza.

Dette S, S' le due basi di C, rappresenteremo con S_c, S_a le due regioni di S rispettivamente spettanti a C_c e C_a, cioè *la sezione del conglomerato* e *la sezione dell'armatura:* con G_c e G_a i baricentri di S_c ed S_a. Il caso particolare delle murature semplici corrisponderà ad $S_a \equiv 0$. Non può escludersi che l'area piana S sia molteplicemente connessa o, pur essendo semplicemente connessa, non sia convessa (travi a T, etc.): in relazione a ciò risulta conveniente definire come *contorno corretto* di S la curva piana convessa s inviluppata dalle tangenti ad S che non tagliano S. Sempre per amore di brevità, converrà pure — in corrispondenza alla regione generica σ_c di S_c e ad un qualunque valore positivo del parametro ν — adottare il simbolo

$$\sigma_c + \nu S_a$$

per indicare la superficie piana non omogenea ottenuta attribuendo a σ_c ed S_a densità rispettivamente eguali ad 1 e ν.

La più generale sollecitazione a pressoflessione del nostro cilindro corrisponde all'ipotesi che su S agisca un sistema di forze superficiali Σ equivalente alla pressione normale $\boldsymbol{P}$ applicata in un certo punto O del piano di S — *centro di pressione* —; su S' (o direttamente, o per effetto di un vincolo opportuno) sia distribuito un sistema di forze superficiali equivalente a $-\Sigma$; siano trascurabili le forze di massa e le forze agenti sulla superficie laterale (anche se il vincolo di S' corrisponde ad un incastro).

Per ridursi al caso della *flessione semplice* basterà supporre P infinitesima ed O infinitamente lontano, in modo però che il momento risultante di Σ (rispetto ad un punto qualunque di S) abbia un valore finito e $\neq 0$. Le condizioni che caratterizzano il caso della *pressione semplice* saranno specificate in appresso (V. n.i 3 e 7).

Contrassegneremo colla qualifica di *simmetrico* il caso che S_c ed S_a abbiano in comune un asse di simmetria (ortogonale od obliqua) passante per O: asse che evidentemente conterrà tutti e tre i punti O, G_c, G_a.

3. Ipotesi della teoria ordinaria. — Rappresentiamo con A il punto generico di C: con (x, y, z) una terna trirettangola di origine O avente l'asse positivo z orientato come la normale interna a C; con S_z la sezione normale generica del cilindro; con ε_z il coefficiente di dilatazione lineare nella direzione z [1] e con σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z le caratteristiche dello stress in A; con ε_{max} ed ε_{min} i valori algebrici del massimo e del minimo assoluto di ε_z in tutto C; con k_c il carico di sicurezza a compressione pel conglomerato; con k_p e k_t i carichi di sicurezza dell'armatura, rispettivamente a compressione ed a trazione.

Con queste notazioni le ipotesi della teoria ordinaria, quando debbano essere espresse in forma precisa e completa, possono enunciarsi nel modo appresso indicato.

A_1) *Indipendenza dello stress dalla distribuzione locale delle forze agenti sulle basi (Postulato di Saint-Venant).*

Per la base S le condizioni d'equilibrio possono identificarsi colle condizioni d'equivalenza tra la forza $-\boldsymbol{P}$ applicata in O ed il sistema delle forze interne applicate ai singoli elementi di S: ed analogamente per S'.

---

[1] Le altre caratteristiche dello strain rimangono *ignorate* in tutta la teoria.

A_2) *In tutto* C *è — come nella pressoflessione di un cilindro elastico —*

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0.$$

A_3) *Perfetta aderenza tra armatura e conglomerato e conservazione delle sezioni piane (Postulato di Bernoulli).*

In tutto C i valori di ε_z sono gli stessi che si avrebbero ove nella deformazione del cilindro ogni S_z ruotasse rigidamente di un angolo infinitesimo proporzionale a z attorno ad uno stesso asse l da scegliersi opportunamente nel piano di S — *asse limite* —.

A_4) *Validità della legge di Hooke nella sollecitazione delle armature.*

In C_a (qualunque sia il segno di ε_z)

$$\sigma_z = E_a \varepsilon_z$$

con E_a = cost. positiva = modulo di elasticità (normale) dell'armatura.

A_5) *Condizioni di stabilità per l'armatura*

$$-E_a \varepsilon_{min} \leq k_p, \quad T = E_a \varepsilon_{max} \leq k_t.$$

b_1) *Validità della legge di Hooke nella sollecitazione a compressione del conglomerato e sua assoluta mancanza di resistenza a trazione.*

In ogni punto di C_c ove sia $\varepsilon_z < 0$,

$$\sigma_z = E_m \varepsilon_z$$

con E_m = cost. positiva = modulo medio di elasticità (normale) del conglomerato: mentre in ogni punto di C_c ove sia $\varepsilon_z > 0$,

$$\sigma_z = 0.$$

b_2) *Condizione di stabilità pel conglomerato*

$$\tilde{\omega} = -E_m \varepsilon_{min} \leq k_c.$$

La denominazione *asse limite* è forse preferibile ad altre in uso per indicare la retta l, anche pel fatto che spontaneamente viene suggerita dal teorema enunciato al n.° 12 e dimostrato al n.° 33.

Invece, data in generale una superficie piana K (anche non omogenea) ed un punto A del suo piano, manterremo la denominazione classica *asse neutro di A rispetto a* K per indicare la retta antipolare di A rispetto all'ellisse centrale di K.

Non è escluso che l'asse limite possa ridursi alla retta all'infinito del piano (x, y) (caso della *pressione semplice*) e corrispondentemente la rotazione

degeneri in una traslazione. Ad ogni modo, se l'asse neutro di O rispetto ad $S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a$ non taglia S_c, l coincide con tale asse neutro, l'intera sezione è sollecitata a compressione, l'ipotesi b_1) rimane inavvertita. È pure ben noto che se fosse perfettamente elastico anche il materiale costituente C_c [cioè, al posto di b_1) si avesse $\sigma_z = E_m \varepsilon_z$ per ogni valore di ε_z] l'asse limite non differirebbe mai dall'asse neutro di O rispetto ad $S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a$: del resto tutto ciò risulterà dalle considerazioni del n.° 27.

4. Ipotesi della teoria generale e relative notazioni. — Chiameremo *teoria generale* quella che risulta dalla sostituzione delle ipotesi b) colle seguenti B).

B_1) *Comportamento del conglomerato.*

In ogni punto di C_c è

$$\sigma_z = r[\varepsilon_z]$$

ove r rappresenta una funzione caratteristica del materiale — *funzione resistente* — che per $\varepsilon_z \neq 0$ ha sempre il segno di ε_z; per $\varepsilon_z <$ di un certo valore $\varepsilon_\tau \geq 0$ ha sempre derivata r' finita ($\leq r'_{max}$) e $\geq$ ad una certa costante positiva r'_{min} [1]; è continua anche per $\varepsilon_z = \varepsilon_\tau$ e per $\varepsilon_z > \varepsilon_\tau$ è costante ed eguale ad un certo valore τ (≥ 0).

B_2) *Condizione di stabilità pel conglomerato.*

$$\tilde{\omega} = - r[\varepsilon_{min}] \leq k_c.$$

In corrispondenza alle ipotesi suindicate sarà comodo introdurre subito le notazioni

$$\begin{cases} \text{per } \varepsilon_z < 0, \quad r[\varepsilon_z] \equiv - p[-\varepsilon_z], \quad E_c = \dfrac{p[-\varepsilon_z]}{-\varepsilon_z}, \\ \text{per } \varepsilon_\tau > \varepsilon_z > 0, \quad r[\varepsilon_z] \equiv t[\varepsilon_z]; \end{cases}$$

ed osservare che in corrispondenza ad ogni $\varepsilon_z < 0$ risulta

$$r'_{min} \leq E_c \leq r'_{max}. \tag{1}$$

Inoltre chiameremo *funzione resistente ridotta* la funzione $-\bar{p}[-\bar{\varepsilon}_z]$ rappresentata dal diagramma della $r[\varepsilon_z]$ quando, con una traslazione, ai primi-

[1] Dal lato fisico non si guadagnerebbe nulla in generalità permettendo alla r di tendere asintoticamente a τ per $\varepsilon_z = +\infty$: mentre la forma adottata nel testo rende più agili alcune locuzioni e dimostrazioni.

tivi assi coordinati (ε_z, r) si sostituiscano gli assi $(\bar{\varepsilon}_z, \bar{r})$ di origine (ε_τ, τ): ciò che equivale a porre

$$\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_z - \varepsilon_\tau, \quad -\bar{p}[\varepsilon_\tau - \varepsilon_z] = r[\varepsilon_z] - \tau.$$

Evidentemente sarà $\bar{p} \equiv 0$ per $\bar{\varepsilon}_z \geq 0$: mentre per $\bar{\varepsilon}_z < 0$, ponendo

$$\bar{E}_c = \frac{\bar{p}[-\bar{\varepsilon}_z]}{-\bar{\varepsilon}_z} = \frac{\tau - r[\varepsilon_z]}{\varepsilon_\tau - \varepsilon_z},$$

risulterà sempre

$$r'_{min} \leq \bar{E}_c \leq r'_{max}. \tag{2}$$

La funzione resistente ridotta non differisce dalla funzione resistente effettiva tutte le volte che si prescinda dalla resistenza a trazione del conglomerato.

5. Casi particolari interessanti. — Le ipotesi B) si riducono alle b) non appena si supponga $p' = \text{cost.} = E_m$, $\tau = 0$: ed offrono un larghissimo margine per la più fedele rappresentazione dei risultati delle prove di resistenza, perchè non ritraggono neppure tutte le proprietà della r che sono suggerite dalle meno delicate esperienze.

Così, sul diagramma della funzione resistente di un qualunque conglomerato (o muratura in genere) si constata che E_c sempre decresce al crescere di $|\varepsilon_z|$: in particolare che, posto

$$E_0 = \lim_{|\varepsilon_z|=0} E_c = r'[-0], \quad k_c = p[\varepsilon_s], \quad E_s = \frac{k_c}{\varepsilon_s},$$

[non solo sussiste la (1), ma anche] per $-\varepsilon_s \leq \varepsilon_z \leq 0$ è sempre

$$E_s \leq E_c \leq E_0. \tag{6}$$

Nel seguito useremo spesso anche le notazioni

$$\rho = \frac{E_s}{E_0}, \quad n = \frac{E_a}{E_0}.$$

Per i materiali ordinari è

$$\rho = \sim \frac{9}{10}, \quad n = \sim 10: \tag{3}$$

inoltre τ è sempre abbastanza piccolo in confronto al carico di rottura a compressione del conglomerato e *la condizione di stabilità* B_2) *assorbe*

la 1ª *delle condizioni* A_5), perchè $\left(\text{mentre } \frac{E_a}{E_s} = \frac{n}{\rho} = \sim 11\right) \frac{k_p}{k_c}$ non è mai molto discosto da 30 [1].

Per quanto la cosa non possa avere grande interesse pratico, non sarà superfluo il rilevare che le ipotesi A), B) si adattano non soltanto alle murature semplici ($S_a \equiv 0$) ed ai materiali elastici $\left(S_a \equiv 0, \frac{r[\varepsilon_z]}{\varepsilon_z} \equiv \text{cost.}\right)$, ma anche ($S_a \equiv 0$, $\tau = \infty$) ai materiali che, come la ghisa, resistono a trazione meno che a compressione, senza che si possa trattarli come materiali assolutamente privi di resistenza a trazione (Cfr. la nota al n.° 23).

Nel seguito avremo ripetutamente a riferirci, oltre che alla teoria ordinaria, ai seguenti casi particolari della teoria generale.

Teoria semilineare:

$$r[\varepsilon_z] = -p[|\varepsilon_z|] \text{ per } \varepsilon_z \leq 0, \quad r[\varepsilon_z] = E_0\varepsilon_z \text{ per } 0 \leq \varepsilon_z \leq \varepsilon_\tau > 0,$$
$$r[\varepsilon_z] = \tau = E_0\varepsilon_\tau \text{ per } \varepsilon_z \geq \varepsilon_\tau.$$

Teoria ridotta:

$$r[\varepsilon_z] = -p[|\varepsilon_z|] \text{ per } \varepsilon_z \leq 0, \quad r[\varepsilon_z] = 0 \text{ per } \varepsilon_z \geq 0.$$

Teoria lineare:

$$r[\varepsilon_z] = E_0\varepsilon_z \text{ per } -\infty < \varepsilon_z \leq \varepsilon_\tau > 0, \quad r[\varepsilon_z] = \tau = E_0\varepsilon_\tau \text{ per } \varepsilon_z \geq \varepsilon_\tau.$$

Teoria elastica:

$$r[\varepsilon_z] = E_0\varepsilon_z \text{ per } -\infty < \varepsilon_z < +\infty.$$

È evidente che la teoria ridotta e la teoria ordinaria rispettivamente si ricavano dalla teoria generale e dalla teoria lineare *prescindendo dalla resistenza a trazione* ($\tau = 0$): mentre la teoria semilineare è quella che, in relazione alla scarsezza ed incertezza di dati circa la resistenza a trazione dei conglomerati (e delle murature in genere) si presenta come l'unica a cui ci si possa attenere in un qualunque concreto apprezzamento quantitativo sugli effetti della resistenza a trazione.

Si noti che, posto

$$\bar{E}_s = \frac{\tau + p[\varepsilon_s]}{\varepsilon_\tau + \varepsilon_s} = E_s \frac{\tau + k_c}{\rho\tau + k_c} > E_s,$$

[1] E un pò anche perchè, per ovvie ragioni costruttive, l'armatura è sempre protetta da un certo strato di conglomerato.

nella teoria semilineare [subordinatamente alla ($\mathcal{E}$)] risulta

$$(\mathcal{E}) \qquad \bar{E}_s \leq \bar{E}_c \leq E_0$$

tutte le volte che $-\varepsilon_\tau - \varepsilon_s \leq \bar{\varepsilon}_z \leq 0$.

6. Condizioni d'equilibrio nella teoria generale. — Sia L il piede della perpendicolare condotta da O all'asse limite l, (ξ, η) la coppia ortogonale di origine O, complanare e congruente ad (x, y), avente il suo asse positivo ξ sovrapposto al raggio OL [1].

Ponendo

$$\Xi = |OL|,$$

l'ipotesi A_3) può tradursi nell'eguaglianza

$$(4) \qquad \varepsilon_z = \omega(\xi - \Xi),$$

pur d'intendere che ω sia una costante da scegliersi opportunamente.

Invero, se per un momento si rappresenta con j il versore di η (che è parallelo ad l) l'ipotesi in questione equivale ad ammettere che ε_z risulti lo stesso che si avrebbe ove lo spostamento del punto generico A di C fosse del tipo [2]

$$-\omega z j \wedge LA.$$

Ora ad un tale spostamento corrispondono secondo la terna (ξ, η, z) le componenti

$$u = -\omega z^2, \quad v = 0, \quad w = \omega z(\xi - \Xi):$$

onde per convincersi dell'asserto basta ricordare che

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Da (4) ed A_1), B_1) segue che in tutto C

$$(5) \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0:$$

naturalmente la stessa 4) rende evidente che il caso della pressione semplice — $\Xi = \infty$ — è caratterizzato sia da $\omega = 0$ sia dall'essere ε_z indipendente da A.

---

[1] O non può appartenere ad l (Cfr. questo stesso numero, in fine).

[2] Con questa notazione risulta $\omega \geq 0$ (Cfr. questo stesso numero, in fine).

In conseguenza di A_2) e (5), le equazioni indefinite della statica dei sistemi continui in assenza di forze di massa, cioè

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_z}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_z}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_y}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

sono soddisfatte in tutto C indipendentemente dal valore di ω e dalla posizione di l: al tempo stesso, per solo effetto di A_2) restano soddisfatte le condizioni ai limiti su tutta la superficie laterale di C_c e di C_a.

Vuol dire che — *finchè si prescinde dalle condizioni di stabilità* — le condizioni d'equilibrio di C si riassumono in quelle che traducono la A_1), cioè nelle tre equazioni

$$(6) \qquad \begin{cases} -P = \int_S \sigma_z dS \\ 0 = \int_S \xi \sigma_z dS \\ 0 = \int_S \eta \sigma_z dS, \end{cases}$$

ove $\sigma_z = E_a \omega(\xi - \Xi)$ oppure $\sigma_z = r[\omega(\xi - \Xi)]$ a seconda che A appartiene ad S_a o ad S_c.

Osserviamo subito che da queste equazioni, pel solo fatto che in ogni punto di S la σ_z deve avere il segno di $\omega(\xi - \Xi) = \varepsilon_z$, necessariamente segue che:

1°) in S esiste sempre una regione $\mathcal{S}$ sollecitata a compressione ($\varepsilon_z \leq 0$);

2°) $\Xi > 0$;

3°) rispetto ad l la $\mathcal{S}$ giace dalla banda di O;

4°) $\omega\Xi > 0$, cioè (non essendosi ancora escluso il caso della pressione semplice) $\omega \geq 0$.

7. Pressione semplice. — Sia ε_P il numero positivo definito dall'equazione

$$(7) \qquad S_c p[\varepsilon_P] + S_a E_a \varepsilon_P = P,$$

G_P il baricentro di $S_c + \dfrac{E_a \varepsilon_P}{p[\varepsilon_P]} S_a$. Nella teoria lineare (e quindi anche nella

teoria ordinaria) G_P coinciderà col baricentro G di $S_c + nS_a$: così pure nel caso delle murature semplici G_P non potrà differire da $G \equiv G_c$: invece in generale la posizione di G_P dipenderà dalla grandezza di P.

Il caso della pressione semplice richiede la coincidenza di O con G_P.

Invero basta supporre

$$\varepsilon_z = \text{cost.} = -c,$$

perchè la $(6)_1$ fornisca $c > 0$, e quindi da (6) sia permesso dedurre

$$(8) \qquad \begin{cases} P = S_c p[c] + S_a E_a c \\ 0 = p[c] \int_{S_c} \xi dS_c + E_a c \int_{S_a} \xi dS_a \\ 0 = p[c] \int_{S_c} \eta dS_c + E_a c \int_{S_a} \eta dS_a. \end{cases}$$

Da $(8)_1$ e (7) segue

$$c = \varepsilon_P,$$

ciò che indica che nel caso della pressione semplice in tutto C deve essere $\varepsilon_z = -\varepsilon_P$: successivamente le $(8)_2$ e $(8)_3$ si identificano colle equazioni che esprimono l'asserto.

Nel seguito escluderemo il caso della pressione semplice supponendo sempre $O \neq G_P$, $\omega > 0$: ed intenderemo che si sia disposto dell'arbitrarietà dell'orientamento dell'asse positivo x facendolo coincidere col raggio OG_P.

Evidentemente nel caso simmetrico l'asse di simmetria non potrà differire da x.

8. Enunciato del teorema d'esistenza ed unicità. — Sia (ξ_i, η_i) la coppia ortogonale di origine O, complanare e congruente ad (x, y), definita dal valore i dell'anomalia del suo asse positivo ξ_i rispetto ad (x, y) [1]: in modo che, ponendo

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta. \qquad (\rho \geq 0; \ -\pi \leq \vartheta < \pi),$$

si abbia

$$(9) \qquad \xi_i = \rho \cos(\vartheta - i), \quad \eta_i = \rho \sin(\vartheta - i).$$

Indichiamo con $\mathfrak{J}$ il valore di i pel raggio OL [2]. I due parametri Ξ, $\mathfrak{J}$ bastano ad individuare la posizione di l nel piano di S: e col concorso di ω

---

[1] E sottintesa la condizione consueta $-\pi \leq i < \pi$.

[2] Onde $\xi \equiv \xi_{\mathfrak{J}}$, $\eta \equiv \eta_{\mathfrak{J}}$.

perfettamente caratterizzano lo stress di C. Anzi, se — in corrispondenza a valori qualunque delle tre variabili i, q, δ — poniamo

$$\mathfrak{J}_{m,n}(i, q, \delta) = -\int_{S_c} \nu[q(\xi_i - \delta)]\xi_i^m \eta_i^n dS_c + \\ + E_a q \int_{S_a} (\delta - \xi_i)\xi_i^m \eta_i^n dS_a, \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

le condizioni d'equilibrio di C si riducono a

$$(\mathfrak{S}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{J}_{0,0}(\mathfrak{J}, \omega, \Xi) = P, \\ \mathfrak{J}_{1,0}(\mathfrak{J}, \omega, \Xi) = 0, \\ \mathfrak{J}_{0,1}(\mathfrak{J}, \omega, \Xi) = 0. \end{cases}$$

Nel § 2 dimostreremo il ***Teorema d'esistenza ed unicità.*** *Escluso il caso delle murature semplici* ($S_a \equiv 0$, τ *quantità finita*), *qualunque sia la posizione di* O *nel piano di* S *e la grandezza di* **P**, *il sistema* ($\mathfrak{S}$) *nelle tre incognite* $\mathfrak{J}$, ω, Ξ *ammette una ed una sola soluzione che soddisfi alle condizioni*

$$(\mathfrak{C}) \qquad -\pi \leq \mathfrak{J} < \pi, \quad \omega > 0, \quad \Xi > 0.$$

Nello stabilire questo teorema sarà anche dimostrato che

$$(\mathfrak{J}) \qquad -\frac{\pi}{2} < \mathfrak{J} < \frac{\pi}{2}.$$

Nel caso delle murature semplici il teorema ora enunciato — insieme a tutte le conclusioni della Memoria — sussiste ancora, come subito preciseremo [1], subordinatamente ad un ben prevedibile vincolo per la posizione di O (vincolo che, per $\tau = 0$, si riduce al dover essere O interno ad s).

9. Nello stabilire il teerema d'esistenza ed unicità si dimostra (cfr. n.i 19 e 26) che, pensando fissato il carico $\boldsymbol{P}$ ed invece disponibile la posizione del centro di pressione, per tutti i valori di i tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ — e soltanto per essi — esiste una sollecitazione Σ_i del nostro cilindro che simultaneamente soddisfa alle due condizioni:

1°) che il suo centro di pressione O_i appartenga alla retta η_i;

[1] V. n.° 10, ($\mathfrak{M}$).

2°) che il suo asse limite l_i sia normale ed incidente all'asse positivo ξ_i.

Al tempo stesso si dimostra che per ognuno dei considerati valori di i tale sollecitazione è unica: e che l_i si può anche interpretare come l'asse limite corrispondente al caso in cui, lasciando il centro di pressione in O, si trasformi S in una sezione S_i simmetrica rispetto alla retta ξ_i, imprimendo alle singole striscie infinitesime di S_a e di S_c parallele ad η_i una conveniente traslazione nella direzione η_i.

La semplice infinità di punti O_i è proprio quella che nella teoria ordinaria viene presa in esame dai tecnici per la riduzioue del problema dal caso generale al caso simmetrico (Cfr. n.° 27).

La dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità si completa stabilendo che al variare di i da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ il punto O_i descrive una curva chiusa c, partendo dalla posizione G_P e ritornandovi dopo essersi sovrapposto una ed una sola volta ad O (per $i = \mathfrak{J}$): la tangente in O alla c risulta parallela all'asse limite, etc. (Cfr. n.° 26).

10. Il teorema di riduzione [1]. — Vogliamo subito mettere in evidenza che dal lato analitico la teoria generale è perfettamente equivalente alla teoria ridotta — in particolare, la teoria lineare è perfettamente equivalente alla teoria ordinaria —.

Sia G_τ il baricentro di $S_c + \frac{E_a \varepsilon_\tau}{\tau} S_a$. Nella teoria semilineare (in particolare, nella teoria lineare) sarà $E_a \varepsilon_\tau = n\tau$ e G_τ coinciderà col baricentro G di $S_c + nS_a$: così pure nel caso delle murature semplici G_τ non potrà differire da $G \equiv G_c$.

Chiamiamo *carico ridotto* il vettore $\overline{\boldsymbol{P}}$ orientato come $\boldsymbol{P}$, di grandezza

$$\overline{P} = P + \tau S_c + E_a \varepsilon_\tau S_a ;$$

centro di pressione ridotto il baricentro $\overline{O}$ dei due punti O e G_τ rispettivamente caricati dei pesi P ed $E_a \varepsilon_\tau S_a + \tau S_c$: *asse limite ridotto* la retta $\overline{l}$ del piano di S (parallela ad l e situata rispetto ad l dalla banda opposta di O) d'equazione

$$\xi = \Xi + \frac{\varepsilon_\tau}{\omega} = \Xi_\tau .$$

[1] Si esclude il caso $S_a \equiv 0$, $\tau = \infty$. (Cfr. n.° 5).

Facendo intervenire anche la funzione resistente ridotta, il sistema (S) si può scrivere

$$\left\{\begin{aligned}
&P+\tau S_c+E_a\varepsilon_\tau S_a=\int_{S_c}\bar{p}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_c+E_a\int_{S_a}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_a\\
&\tau S_c(\xi_{\mathfrak{J}})_{Gc}+E_a\varepsilon_\tau S_a(\xi_{\mathfrak{J}})_{Ga}=\int_{S_c}\xi_{\mathfrak{J}}\bar{p}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_c+E_a\int_{S_a}\xi_{\mathfrak{J}}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_a\\
&\tau S_c(\eta_{\mathfrak{J}})_{Gc}+E_a\varepsilon_\tau S_a(\eta_{\mathfrak{J}})_{Ga}=\int_{S_c}\eta_{\mathfrak{J}}\bar{p}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_c+E_a\int_{S_a}\eta_{\mathfrak{J}}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_a,
\end{aligned}\right.$$

ovvero (ricordando la definizione di $\bar{O}$ e combinando la 2ª e 3ª equazione colla 1ª)

$$\left\{\begin{aligned}
&\bar{P}=\int_{S_c}\bar{p}[\omega(\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int_{S_a}[\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}}]dS_a\\
&O=\int_{S_c}\{\xi_{\mathfrak{J}}-(\xi_{\mathfrak{J}})_{\bar{O}}\}\bar{p}[\omega(\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int_{S_a}\{\xi_{\mathfrak{J}}-(\xi_{\mathfrak{J}})_{\bar{O}}\}[\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}}]dS_a\\
&O=\int_{S_c}\{\eta_{\mathfrak{J}}-(\eta_{\mathfrak{J}})_{\bar{O}}\}\bar{p}[\omega(\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int_{S_a}\{\eta_{\mathfrak{J}}-(\eta_{\mathfrak{J}})_{\bar{O}}\}[\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}}]dS_a:
\end{aligned}\right.$$

ed anche, rappresentando con $(\bar{\xi}_{\mathfrak{J}},\ \bar{\eta}_{\mathfrak{J}})$ la coppia di assi in cui si trasporta $(\xi_{\mathfrak{J}},\eta_{\mathfrak{J}})$ per la traslazione $O\bar{O}$ e con $\bar{\Xi}$ il valore di $\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}$ comune a tutti i punti di $\bar{l}$,

$$(11)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\bar{P}=\int_{S_c}\bar{p}[\omega(\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int_{S_a}[\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}]dS_a\\
&O=\int_{S_c}\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}\bar{p}[\omega(\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int_{S_a}\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}[\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}]dS_a\\
&O=\int_{S_c}\bar{\eta}_{\mathfrak{J}}\bar{p}[\omega(\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int_{S_a}\bar{\eta}_{\mathfrak{J}}[\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}]dS_a.
\end{aligned}\right.$$

Vuol dire che $\mathfrak{J}$, ω, $\bar{\Xi}$ rendono soddisfatto il sistema che si ricava da (S) sostituendo funzione resistente, carico e centro di pressione effettivi coi corrispondenti elementi ridotti: e soddisfano anche a tutte le (C) perchè, subordinatamente all'essere $\omega>0$, delle (11) stesse si può trarre $\bar{\Xi}>0$ (Cfr. n.° 6, in fine).

Le precedenti osservazioni si riassumono nel seguente

Teorema di riduzione. — *Assegnati* P *ed* O, *la determinazione dello stress può sempre effettuarsi riferendosi alla teoria ridotta invece che alla teoria generale: basta sostituire* P, O *con* $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{O}}$ *e simultaneamente assumere come funzione resistente la funzione resistente ridotta.*

Applicando il teorema di riduzione, l resta sostituito da $\bar{l}$, ε_z da $\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_z - \varepsilon_\tau$, σ_z da

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z - \tau \quad \ldots S_c,$$
$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z - E_a\varepsilon_\tau \ldots S_a:$$

onde le condizioni di stabilità assumono la forma

$$\bar{A}_5) \qquad -E_a\bar{\varepsilon}_{min} \leq k_p + E_a\varepsilon_\tau, \quad E_a\bar{\varepsilon}_{max} \leq k_t - E_a\varepsilon_\tau$$
$$\bar{B}_2) \qquad \bar{p}[-\bar{\varepsilon}_{min}] \leq k_c + \tau.$$

La teoria ridotta delle murature semplici esclude l'equilibrio di C se il centro di pressione è esterno al contorno corretto di S [1]; invece nello stabilire il teorema d'esistenza ed unicità si dimostra (V. n.° 23) che se il centro di pressione è interno ad s la stessa teoria (ed anche la corrispondente teoria generale) fornisce una ed una sola espressione per lo stress. Riferendoci alla teoria generale delle murature semplici e supponendo O esterno ad s, indichiamo con I il punto comune ad s ed al segmento $OG = OG_\tau$. Il centro di pressione ridotto $\bar{O}$ sarà interno ad s allora ed allora soltanto che sia

$$|OI| < |O\bar{O}| = \frac{\tau S}{P + \tau S}|OG|$$

cioè

$$(\mathfrak{M}) \qquad \frac{|OI|}{|IG|} < \frac{\tau S}{P}.$$

In base al teorema di riduzione (ed al fatto che se O è interno ad s, $\bar{O}$ è senz'altro interno ad s) la $(\mathfrak{M})$ dà la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza ed unicità della soluzione del sistema $(\mathfrak{S})$-$(\mathfrak{C})$ nella teoria generale delle murature semplici.

11. Un teorema di massimo nella teoria lineare. — Nel corso della dimostrazione del teorema d'esistenza ed unicità, si stabilisce una certa relazione

[1] Infatti il centro di un sistema di forze parallele e *concordi* applicate ad S necessariamente è interno ad s.

che nel caso particolare della teoria ordinaria mette in evidenza come *tra tutte le sollecitazioni* Σ_i *la* $\Sigma\mathfrak{J}$ *(cioè la sollecitazione effettiva) è quella cui corrisponde la massima pressione unitaria in* O.

Ma, sempre restando nel campo della teoria ordinaria, per ognuna delle sollecitazioni Σ_i il valore della pressione unitaria in O risulta proporzionale al lavoro di deformazione. Onde resta stabilito un teorema che ricorda [1] il celebre teorema di MENABREA nella statica elastica:

Tra tutte le sollecitazioni Σ_i *è la sollecitazione effettiva quella cui corrisponde il* ***massimo*** *lavoro di deformazione.*

Il teorema di riduzione permette l'immediata generalizzazione dei precedenti teoremi dalla teoria ordinaria alla teoria lineare.

12. L'asse limite come limite dell'asse neutro. — Nella teoria ordinaria si hanno, come è noto, varî procedimenti grafici per la determinazione dell'asse limite di una sezione qualunque, comunque sollecitata. Un procedimento specialmente adatto pel calcolo numerico risulta dal teorema che ora enuncio riferendomi al caso simmetrico.

Sia n_1 l'asse neutro di O rispetto ad $S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a$. Se n_1 non taglia S_c, notoriamente l coincide con n_1. Ponendoci nel caso contrario, rappresentiamo con $\mathfrak{S}_{\beta_1}$ ciò che resta di S_c quando se ne sopprima tutta la regione situata rispetto ad n_1 dalla banda opposta di O: e sia n_2 l'asse neutro di O rispetto a $\mathfrak{S}_{\beta_1} + \frac{E_a}{E_m} S_a$.

Si dimostra (V. n.° 33) che n_2 taglia $\mathfrak{S}_{\beta_1}$ e dopo questo, pensando costruita con procedimento ricorrente tutta la successione di assi neutri $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ si riconosce che al crescere indefinito di s l'asse neutro n_s va costantemente (ma non indefinitamente) approssimandosi ad O: dal che si ricava che esiste per esso una posizione limite la quale non differisce dall'asse limite l della sezione inizialmente assegnata.

Naturalmente, quando si voglia eliminare il passaggio al limite e ci si accontenti di conoscere una sottile striscia nella quale sia compreso l'asse limite, il procedimento ora indicato si può ridurre alla costruzione di un certo numero d'assi neutri.

---

[1] L'analogia è puramente formale. Nel teorema di MENABREA si considerano infiniti valori di un certo integrale in corrispondenza ad un'unica sollecitazione attiva: qui invece si prendono in esame ∞^1 sollecitazioni, le Σ_i, a ciascuna delle quali viene coordinato il solo valore del corrispondente lavoro di deformazione effettivo.

13. Teoria ordinaria e teoria elastica: un apparente paradosso. — Il teorema del numero precedente implica che — ove l non coincida con n_1 — O giace rispetto ad l dalla banda opposta di n_1: cioè, *la sostituzione della teoria elastica alla teoria ordinaria* (*a parità di* O, P, S_a, S_c, E_m, E_a) *allontana l'asse limite dal centro di pressione* (¹).

La stessa sostituzione (V. n.° 35) *impiccolisce il massimo della trazione unitaria nell'armatura:* favorendo così il verificarsi della seconda condizione di stabilità A_5). Onde resta messo in evidenza che pel cemento armato l'adozione sistematica della teoria elastica, non solo darebbe luogo ad un'approssimazione molto più grossolana di quella inerente alla teoria ordinaria, ma sarebbe pure da ritenersi nociva alla stabilità.

Lo stesso può dirsi per le murature semplici perchè (indipendentemente dall'essere $S_a \neq 0$) si stabilisce (V. n.° 36) *che se* O *è interno ad s, la sostituzione della teoria elastica alla teoria ordinaria* (nonostante che allontani l'asse limite dal centro di pressione) *impiccolisce il massimo* $\bar{\omega}$ *della pressione unitaria nel conglomerato.*

Invece (per $S_a \neq 0$) se O è esterno ad s può darsi che il valore di $\bar{\omega}$ fornito dalla teoria ordinaria risulti *minore* di quello fornito dalla teoria elastica ed anche dalla teoria lineare: cioè, si possono immaginare dei casi (V. n.° 36) nei quali il prescindere dalla resistenza a trazione nel conglomerato risulta sfavorevole alla stabilità.

Questa conclusione perde ogni apparenza di paradosso quando si rifletta che l'ipotesi di assoluta mancanza di resistenza a trazione nel conglomerato porta ad equilibrare il carico $\boldsymbol{P}$ con un sistema di sforzi paralleli che nel conglomerato hanno *tutti* il senso della loro risultante.

14. Primo teorema di confronto: *O* interno ad *s*. — Stabilito il teorema generale d'esistenza ed unicità, non ho affatto pensato a ricavare dalla sua dimostrazione un esatto procedimento di calcolo per le tre incognite ω, Ξ, $\mathfrak{J}$ e per i conseguenti valori dei massimi di tensione da introdurre nelle condizioni di stabilità. Un tale procedimento sarebbe risultato troppo complesso per una qualunque applicazione alla tecnica: ed anche dal lato puramente teorico la sua complessità sarebbe apparsa ingiustificata in causa del necessario intervento di un'espressione esatta per ambedue le funzioni sperimentali p e t. Ho quindi preferito cercare se era possibile ottenere condizioni sufficienti per il

(¹) Questo risultato può essere esteso al confronto della teoria generale colla teoria ordinaria. [V. n.° 39, (83) e n.° 42, (96)].

verificarsi delle condizioni di stabilità in riguardo alla teoria generale, col semplice uso della teoria ordinaria riferita, non ai dati effettivi della questione, ma a dati ausiliari; precisamente a dati ausiliari ricavati dai dati effettivi con qualche semplice correzione che non facesse intervenire altro che elementi facilmente e sicuramente deducibili dai diagrammi delle prove di resistenza.

Naturalmente in una simile ricerca mi sono limitato al caso simmetrico, che dal lato teorico è forse il solo che interessi e del resto è sempre quello cui in ultima analisi ci si trova ricondotti partendo dal caso generale; ed ho anche potuto valermi sistematicamente della ($\mathcal{E}$), proprietà comune a tutti i materiali ordinari, e non preoccuparmi affatto della prima delle condizioni di stabilità A_5) (Cfr. n.° 5).

I risultati si presentano in forma notevolmente diversa a seconda che il centro di pressione è interno oppure esterno ad s. Per le murature semplici è solo il primo caso che interessa: invece pel cemento armato è specialmente il secondo, in quanto include il caso della flessione semplice.

Supposto O interno ad s ed S simmetrica rispetto all'asse OG_P, sia S^* la sezione in cui si trasforma la sezione effettiva quando — senza distruggerne la simmetria rispetto ad OG_P — si accorcino nel rapporto $\rho = \frac{E_s}{E_0}$ tutte le corde della sezione del conglomerato parallele ad y e corrispondenti a valori negativi di x (cioè, situate rispetto ad O dalla banda opposta di G_P) [1]. Chiamiamo problema ausiliare quello che corrisponde all'applicazione della teoria ordinaria alla sezione S^* sollecitata in O dal solito carico P, ove si assuma $E_m = \nu'[-0] = E_0$ e si sostituisca k_t con ρk_t: lasciando naturalmente la denominazione di problema effettivo all'applicazione della teoria generale alla sezione e sollecitazione effettiva.

Sussiste allora il

***Primo teorema di confronto:* O *interno ad* s.** — *Basta che siano soddisfatte le condizioni di stabilità nel problema ausiliare, perchè lo stesso si verifichi nel problema effettivo.*

Le correzioni che intervengono in questo teorema non fanno uso di alcun elemento relativo all'incerto diagramma delle t, ma si servono solo del rapporto ρ, di cui è facile ricavare dalle prove di resistenza un valore molto approssimato, o almeno un buon limite inferiore, che serve egualmente per lo scopo voluto. La stessa correzione è di tal forma che si adatta non solo alle verifiche di stabilità, ma anche ai calcoli di progetto.

---

[1] Nella teoria lineare S^* non differisce da S.

15. Secondo teorema di confronto: *O* esterno ad *s*. — Abbiamo già avvertito (Cfr. n.° 13, in fine) che quando il centro di pressione è esterno al contorno corretto di S non sempre il prescindere dalla resistenza a trazione del conglomerato risulta favorevole alla stabilità. Quando O è esterno ad s non si può dunque pretendere di stabilire un teorema di confronto che riconduca *in ogni caso* le verifiche di stabilità della teoria generale nell'ambito della teoria ordinaria, senza alcun intervento della resistenza a trazione del conglomerato.

D'altro canto basta apportare ad O, P, k_c, k_t ed alla funzione resistente le semplici correzioni specificate al n.° 10 perchè la teoria generale resti automaticamente sostituita dalla teoria ridotta [1].

Sembra dunque perfettamente soddisfacente segnare il termine della nostra ricerca col seguente

***Secondo teorema di confronto:* O *esterno ad* s.** — *Basta che la sezione* S *sollecitata in* O *dal carico* $\frac{P}{\rho}$ *sia stabile in riguardo alla teoria ordinaria (ove si assuma* $E_m = E_0$*) perchè lo stesso si verifichi per la sezione e sollecitazione effettiva in riguardo alla teoria ridotta.*

§ 2. Il teorema d'esistenza ed unicità.

16. In corrispondenza a valori qualunque delle tre variabili i, q, δ poniamo

$$(12) \qquad f_{m,n}(i, q, \delta) = \int_{S_c} r'[q(\xi_i - \delta)]\xi_i^m \eta_i^n dS_c + E_a \int_{S_a} \xi_i^m \eta_i^n dS_a, \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

rilevando subito che se la retta λ (del piano (xy)) d'equazione $q(\xi_i - \delta) = \varepsilon_\tau$ taglia S_c, la r' è discontinua in S_c: in quanto allora λ divide S_c in due regioni, in una delle quali $r' \geq r'_{min} > 0$, mentre nell'altra $r' \equiv 0$. Nonostante ciò, l'incondizionata continuità della funzione resistente permette sempre di derivare le (10) come se la r' non presentasse alcuna singolarità. Precisamente, derivando (10) rispetto a q e confrontando il risultato ottenuto con (12), si trova subito

$$(13) \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}_{m,n}}{\partial q} = \delta f_{m,n} - f_{m+1,n}.$$

[1] Partendo dalla teoria semilineare (Cfr. n.° 5) alla $(\mathfrak{S})$ viene a corrispondere la $(\bar{\mathfrak{S}})$.

In modo analogo, osservando che da (9) segue $\frac{\partial \xi_i}{\partial i} = \eta_i$, $\frac{\partial \eta_i}{\partial i} = -\xi_i$, si ottiene

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_{m,n}}{\partial i} = -qf_{m,n+1} + m\mathfrak{F}_{m-1,n+1} - n\mathfrak{F}_{m+1,n-1}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_{m,n}}{\partial \delta} = qf_{m,n}. \tag{15}$$

17. Assumendo

$$\begin{cases} k = r'[q(\xi_i - \delta)] \geq 0 & \dots S_c \\ k = E_a > 0 & \dots S_a, \end{cases}$$

risulta

$$f_{m,n} = \int_S \xi_i^m \eta_i^n k dS.$$

Ne segue che la forma quadratica nelle tre variabili x_0, x_1, x_2,

$$\sum_0^2{}_{r,s} f_{r,s} x_r x_s = \int_S k \{ x_0 + x_1 \xi_i + x_2 \eta_i \}^2 dS$$

è definita [1] positiva: e ciò basta per affermare che, oltre alla diseguaglianza evidente

$$f_{0,0} > 0 \tag{16}$$

ed alla diseguaglianza di SCHWARZ

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{0,0} & f_{1,0} \\ f_{1,0} & f_{2,0} \end{vmatrix} > 0, \tag{17}$$

sussiste anche l'altra

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{0,0} & f_{1,0} & f_{0,1} \\ f_{1,0} & f_{2,0} & f_{1,1} \\ f_{0,1} & f_{1,1} & f_{0,2} \end{vmatrix} > 0. \tag{18}$$

18. Apparirà manifesto che (16), (17), (18) devono intervenire in modo essenziale nella dimostrazione del teorema d'esistenza ed unicità, non appena

---

[1] Se $S_a \equiv 0$, k è identicamente nulla in S tutte le volte che in ogni punto di S è $q(\xi_i - \delta) \geq \varepsilon_\tau$: ma risulta del tutto superfluo il preoccuparsi di una tale eventualità [Cfr. n.° 20, (26)].

si rilevi che da (13), (14), (15) segue

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_{0,0}}{\partial \delta} = q f_{0,0}, \quad \frac{\partial(\mathfrak{F}_{0,0}, \mathfrak{F}_{1,0})}{\partial(q, \delta)} = q \Delta_2, \tag{19}$$

ed anche

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial(\mathfrak{F}_{0,0}, \mathfrak{F}_{1,0}, \mathfrak{F}_{0,1})}{\partial(i, q, \delta)} = -q^2 \Delta_3 - q \mathfrak{F}_{0,1} \begin{vmatrix} f_{0,0} & f_{0,1} \\ f_{1,0} & f_{1,1} \end{vmatrix} - q \mathfrak{F}_{1,0} \Delta_2 :$$

onde basta che sia $q > 0$ ed $\mathfrak{F}_{0,1}$, $\mathfrak{F}_{1,0}$ abbiamo valori nulli (o convenientemente prossimi a zero) perchè risulti $\mathfrak{D} < 0$.

Ma non si può ricavare da questa osservazione una dimostrazione immediata, se pure non perfettamente rigorosa, del teorema di esistenza ed unicità: perchè in ambedue i casi in cui la risoluzione del sistema ($\mathfrak{S}$) si effettua a vista (cioè quando $P = 0$ e quando $O \equiv G_P$) risulta $\omega = 0$, $\mathfrak{D} = 0$.

19. Pensiamo fissato il valore di i e consideriamo il sistema in q, δ

$$\begin{cases} P = \mathfrak{F}_{0,0}(i, q, \delta) \\ 0 = \mathfrak{F}_{1,0}(i, q, \delta) \\ q > 0. \end{cases} \tag{20}$$

Basandoci sulle (16) e (17), ricorrendo anche direttamente alle proprietà della r specificate sotto B_1) ed approfittando del fatto che la convenzione $y_{G_P} = 0$, $x_{G_P} > 0$ dà luogo a $(\xi_i)_{G_P} > 0$ quando e soltanto quando $-\frac{\pi}{2} < i < \frac{\pi}{2}$, dimostreremo che (conformemente a quanto abbiamo affermato al n.° 9) sussiste il seguente

Lemma. — Se i non è interno all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ il sistema (20) non ammette alcuna soluzione; nel caso opposto lo stesso sistema ammette una ed una sola soluzione

$$q = \omega_i > 0, \quad \delta = \Xi_i,$$

la quale gode delle proprietà seguenti

$$\begin{cases} \Xi_i > 0 \\ \lim\limits_{i = \mp \frac{\pi}{2}} \omega_i = 0 \\ \lim\limits_{i = \mp \frac{\pi}{2}} (\omega_i \Xi_i) = \varepsilon_P. \end{cases} \tag{21}$$

Successivamente, per ogni valore di i interno a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, porremo

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{J}_{0,1}(i, \omega_i, \Xi_i) \tag{22}$$

e proveremo che

$$\frac{d}{di}\left(\frac{\mathfrak{M}_i}{\omega_i}\right) < 0, \tag{23}$$

mentre

$$\lim_{i=\mp\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathfrak{M}_i}{\omega_i}\right) = \pm\infty. \tag{24}$$

Questi risultati implicano l'esistenza $\left[\text{entro}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$ di una ed'una sola radice dell'equazione $\mathfrak{M}_i = 0$ e quindi corrispondono ad una simultanea dimostrazione della ($\mathfrak{J}$) e del teorema d'esistenza ed unicità: perchè il Lemma garantisce che è perfettamente legittimo sostituire le ($\mathfrak{S}$) e ($\mathfrak{C}$) con

$$\begin{cases} \omega = \omega_{\mathfrak{J}} \\ \Xi = \Xi_{\mathfrak{J}} \\ 0 = \mathfrak{M}_{\mathfrak{J}}. \end{cases}$$

20. Introduciamo le notazioni $-\alpha_i$, β_i per rappresentare i valori algebrici del minimo e del massimo di ξ_i nell'intera S: per ogni valore di i interno a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ β_i risulterà positivo e lo stesso accadrá di α_i ove O non sia esterno ad s.

Attribuito a q un valore positivo (e pensando i comunque fissato) prendiamo in esame l'equazione in δ_q

$$P = \mathfrak{J}_{0,0}(i, q, \delta_q). \tag{25}$$

Basta aver presenti le proprietà specificate per la funzione resistente sotto B_1) per riconoscere che (per ogni valore positivo di q)

$$\begin{cases} \mathfrak{J}_{0,0}(i, q, -\alpha_i) \leq 0 \\ \mathfrak{J}_{0,0}(i, q, +\infty) = +\infty: \end{cases}$$

onde ricordando la $(19)_1$ si può asserire che per ogni valore positivo di q la (25) ammette una ed una sola radice δ_q la quale soddisfa sempre alla condizione

$$\delta_q > -\alpha_i. \tag{26}$$

Anzi da (25) si ricava

$$P < q(\delta_q + \alpha_i)\{r'_{max} S_c + E_a S_a\},$$

in particolare

(27) $$\lim_{q=0} \delta_q = \infty.$$

Successivamente dalla stessa (25) si trae

$$P = \lim_{q=0} \{p[q\delta_q]S_c + q\delta_q E_a S_a\},$$

cioè [Cfr. (7)]

(28) $$\lim_{q=0} (q\delta_q) = \varepsilon_P.$$

Osserveremo infine che derivando (25) rispetto a q si ottiene [Cfr. (13) e (15)]

$$0 = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_{0,0}}{\partial q}\right)_{\delta=\delta_q} + \frac{d\delta_q}{dq}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_{0,0}}{\partial \delta}\right)_{\delta=\delta_q} = \delta_q f_{0,0}(i, q, \delta_q) - f_{1,0}(i, q, \delta_q) + \frac{d\delta_q}{dq} q f_{0,0}(i, q, \delta_q).$$

Più concisamente scriveremo

(29) $$0 = f_{0,0} \frac{d(q\delta_q)}{dq} - f_{1,0}.$$

21. Sempre pensando i arbitrariamente fissato, consideriamo la funzione della variabile q

(30) $$\mathfrak{G}(q) = \mathfrak{F}_{1,0}(i, q, \delta_q).$$

Procedendo come alla fine del numero precedente si trova

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dq} = f_{1,0} \frac{d(q\delta_q)}{dq} - f_{2,0}$$

e successivamente [Cfr. (29) e (17)]

(31) $$\frac{d\mathfrak{G}}{dq} = \frac{1}{f_{0,0}}\{f_{1,0}^2 - f_{0,0} f_{2,0}\} = -\frac{1}{f_{0,0}} \Delta_2 < 0.$$

D'altra parte da (30) e (27) segue

$$\mathfrak{G}_0 = \lim_{q=0} \mathfrak{G}(q) = \lim_{q=0} \left\{p[q\delta_q]\int_{S_c} \xi_i dS_c + E_a q\delta_q \int_{S_a} \xi_i dS_a\right\} = p[\varepsilon_P]\int_{S_c} \xi_i dS_c + E_a \varepsilon_P \int_{S_a} \xi_i dS_a :$$

onde basta aver presenti la definizione di G_P e la convenzione in base alla

quale si è fissato l'orientamento dell'asse positivo x, per riconoscere che

$$\mathcal{G}_0 = P(\xi_i)_{G_P} \tag{32}$$

e risulta positivo quando e soltanto quando i è interno all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dopo questo la (31) rende evidente che:

1°) se i non è interno a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ il sistema (20) non ammette alcuna soluzione;

2°) se i è interno a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la condizione

$$\mathcal{G}_\infty = \lim_{q=\infty} \mathcal{G}(q) < 0 \tag{33}$$

è necessaria e sufficiente affinchè l'equazione $\mathcal{G}(q) = 0$ ammetta una ed una sola radice positiva ω_i e simultaneamente il sistema (20) ammetta una ed una sola soluzione

$$q = \omega_i > 0, \quad \Xi_i = [\delta_q]_{q=\omega_i}.$$

22. Sia $\mathcal{S}_{i,\delta}$ la regione di S_c compresa tra le rette $\xi_i = -\alpha_i$, $\xi_i = \delta$; $\mathcal{T}_{i,\delta}$ la regione residua di S_c [1]. Rappresentiamo con $C_{i,\delta}$, con C_i, con A_i il momento d'inerzia di $\mathcal{S}_{i,\delta}$, di S_c, di S_a rispetto al *proprio* asse baricentrale parallelo a ξ_i: e con c_{min}, C_{min}, A_{min}, $\mathcal{S}_{min}$ rispettivamente il minimo valore assunto da $C_{i,0}$, C_i, A_i e dell'area $\mathcal{S}_{i,0}$ al variare di i da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Inoltre teniamo presente che assumendo

$$\begin{cases} k = r'[q(\xi_i - \delta)] & \ldots S_c \\ k = E_a & \ldots S_a \end{cases}$$

risulta

$$f_{0,0} = \int_S k\,dS, \quad f_{1,0} = \int_S k\xi_i\,dS, \quad f_{2,0} = \int_S k\xi_i^2\,dS:$$

e, per un momento, poniamo

$$\bar{\xi}_i = \frac{\int_S k\xi_i\,dS}{\int_S k\,dS} = \frac{f_{1,0}}{f_{0,0}}.$$

---

[1] Naturalmente si deve intendere $\mathcal{S}_{\mathcal{J},\Xi} = \mathcal{S}$, $\mathcal{S}_{i,\delta} \equiv 0$ se $\delta < -\alpha_i$, $\mathcal{S}_{i,\delta} \equiv S_c$ se $\delta > \beta_i$, etc.

L'applicazione ripetuta di un celebre teorema di EULERO dà

$$\Delta_2 = \int_S k dS \left\{ \int_S k \xi_i^2 dS - \bar{\xi}_i^2 \int_S k dS \right\} = \int_S k dS \int_S k(\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 dS >$$

$$> E_a S_a \int_{S_a} E_a (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 dS_a + r'_{min} \mathfrak{J}_{i,\delta_q} \int_{\mathfrak{J}_{i,\delta}} r'_{min} (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 dS_c ,$$

(34) $$\Delta_2 > E_a^2 S_a A_i + r'^2_{min} \mathfrak{J}_{i,\delta_q} C_{i,\delta_q} .$$

D'altra parte, essendo in generale

(35) $$\delta \mathfrak{J}_{0,0}(i, q, \delta) - \mathfrak{J}_{i,0}(i, q, \delta) \geq 0,$$

da (30) e (25) segue

$$\mathfrak{G}(q) < P\delta_q ,$$

ciò che implica che per tutti i valori di q pei quali è $\mathfrak{G}(q) > 0$ deve essere $\delta_q > 0$.

Si può dunque affermare che per gli stessi valori di q

(36) $$\Delta_2 > E_a^2 S_a A_i + r'^2_{min} \mathfrak{J}_{i,0} C_{i,0}$$

ed anche

$$\Delta_2 > E_a^2 S_a A_{min} + r'^2_{min} \mathfrak{J}_{min} C_{min} .$$

Successivamente la (31) porta a concludere che, indipendentemente dal valore di i, fin quando è $\mathfrak{G}(q) > 0$ è pure

(37) $$\frac{d\mathfrak{G}}{dq} < - \frac{E_a^2 S_a A_{min} + r'^2_{min} \mathfrak{J}_{min} C_{min}}{E_a S_a + r'_{max} S_c} .$$

23 [1]. La (37) rende evidente che la (33) è soddisfatta per ogni valore di i tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ tanto nel caso del cemento armato ($S_a \neq 0$) quanto in quello delle murature semplici se O è interno ad s [perchè la condizione che O sia interno ad s equivale all'essere $\alpha_i \geq$ ad una certa costante positiva per ogni valore di i e quindi ha come necessaria conseguenza $\mathfrak{J}_{min} > 0$, $c_{min} > 0$].

---

[1] Le conclusioni di questo numero si applicano anche al caso $S_a \equiv 0$, $\tau = \infty$ (Cfr. n.° 5) perchè riprendendo le considerazioni del numero precedente si riconosce subito che nelle (34), (36) si possono sostituire $\mathfrak{J}_{i,\delta_q}$, C_{i,δ_q}, $\mathfrak{J}_{i,0}$ $C_{i,0}$ rispettivamente con S_c, C_i, S_c, C_i, arrivando alla conclusione che $r'_{max} \frac{d\mathfrak{G}}{dq} < - r'^2_{min} C_{min}$.

Inoltre, sia nell'uno che nell'altro caso, essendo (Cfr. (32))

$$\lim_{i=\mp\frac{\pi}{2}} \mathcal{G}_0 = 0,$$

la (37) rigorosamente fornisce

$$(21)_2 \qquad \lim_{i=\mp\frac{\pi}{2}} \omega_i = 0:$$

dopodichè la semplice ripetizione delle considerazioni usate per stabilire (27) e (28) porta a $(21)_3$, cioè al termine della dimostrazione del *Lemma* [perchè $(21)_1$ è evidente conseguenza di $\mathcal{G}(q) < P\delta_q$].

24. Iniziamo lo studio del comportamento della funzione $\mathfrak{M}_i$.

Evidentemente per $i = \mp\frac{\pi}{2}$ è $\eta_i \equiv \pm x$. Quindi da (22) — in base a $(21)_2$, $(21)_3$ ed alla definizione di G_P — segue

$$(38) \qquad \lim_{i=\mp\frac{\pi}{2}} \mathfrak{M}_i = \pm p[\varepsilon_P]\int_{S_c} x dS_c \pm E_a \varepsilon_P \int_{S_a} x dS_a = \pm P|OG_P|.$$

Richiamando ancora $(21)_2$ si conclude

$$(24) \qquad \lim_{i=\mp\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathfrak{M}_i}{\omega_i}\right) = \pm\infty.$$

25. Per provare la (23) deriviamo rispetto ad i tutte e tre le equazioni

$$(39) \qquad \begin{cases} P = \mathfrak{F}_{0,0}(i, \omega_i, \Xi_i) \\ 0 = \mathfrak{F}_{1,0}(i, \omega_i, \Xi_i) \\ \mathfrak{M}_i = \mathfrak{F}_{0,1}(i, \omega_i, \Xi_i). \end{cases}$$

Ricorrendo a (13), (14), (15) [e tenendo conto delle stesse (39)] si trova, con evidente significato dei simboli,

$$(40) \qquad \begin{cases} 0 = f_{0,0}\dfrac{d(\omega_i\Xi_i)}{di} - f_{1,0}\dfrac{d\omega_i}{di} - \omega_i f_{0,1} \\ -\mathfrak{M}_i = f_{1,0}\dfrac{d(\omega_i\Xi_i)}{di} - f_{2,0}\dfrac{d\omega_i}{di} - \omega_i f_{1,1} \\ \dfrac{d\mathfrak{M}_i}{di} = f_{0,1}\dfrac{d(\omega_i\Xi_i)}{di} - f_{1,1}\dfrac{d\omega_i}{di} - \omega_i f_{0,2}. \end{cases}$$

Risolvendo le prime due di queste equazioni rispetto a $\frac{d(\omega_i \Xi_i)}{di}$ e $-\frac{d\omega_i}{di}$, si ottiene

$$(41)\qquad \begin{cases} \Delta_2 \dfrac{d(\omega_i \Xi_i)}{di} = \omega_i (f_{0,1} f_{2,0} - f_{1,1} f_{1,0}) + \mathfrak{M}_i f_{1,0} \\ -\Delta_2 \dfrac{d\omega_i}{di} = \omega_i (f_{0,0} f_{1,1} - f_{1,0} f_{0,1}) - \mathfrak{M}_i f_{0,0}: \end{cases}$$

mentre dall'intero sistema risulta

$$\omega_i \Delta_3 = -\frac{d\mathfrak{M}_i}{di} \Delta_2 - \mathfrak{M}_i (f_{0,0} f_{1,1} - f_{0,1} f_{1,0})$$

cioè

$$(42)\qquad \Delta_2 \frac{d\mathfrak{M}_i}{di} = -\omega_i \Delta_3 + \mathfrak{M}_i (f_{1,0} f_{0,1} - f_{0,0} f_{1,1}).$$

Basta allora osservare che

$$\frac{d}{di}\left(\frac{\mathfrak{M}_i}{\omega_i}\right) = \frac{1}{\omega_i^2}\left\{\omega_i \frac{d\mathfrak{M}_i}{di} - \mathfrak{M}_i \frac{d\omega_i}{di}\right\},$$

per concludere [Cfr. (42) e $(41)_2$]

$$(43)\qquad \Delta_2 \omega_i^2 \frac{d}{di}\left(\frac{\mathfrak{M}_i}{\omega_i}\right) = -\Delta_3 \omega_i^2 - \mathfrak{M}_i^2 f_{0,0}.$$

Quest'equazione rende evidente la (23) non appena si ripensi a (17) e (18). Il teorema d'esistenza ed unicità resta così completamente dimostrato.

26. Sia l_i la retta d'equazione $\xi_i = \Xi_i$ ed $a_i(\xi_i)$ [ovvero $c_i(\xi_i)$] la somma delle lunghezze dei segmenti eventualmente comuni ad S_a (ovvero ad S_c) ed alla retta normale all'asse ξ_i nel punto di ascissa ξ_i [1].

Dimostrato il teorema d'esistenza ed unicità, l'osservazione finale del n.° 7 — combinata col fatto che nelle $(\mathfrak{S})_1$ ed $(\mathfrak{S})_2$ non figura la $\eta_{\mathfrak{J}}$ — permette di affermare che l_i è la posizione assunta dall'asse limite quando — lasciando invariati il carico, il centro di pressione, la $a_i(\xi_i)$ e la $c_i(\xi_i)$ — si trasformi la S in una sezione S_i simmetrica rispetto all'asse ξ_i.

Un'altra semplice proprietà degli assi l_i può mettersi in evidenza facendo corrispondere al valore generico di i in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ il punto O_i di coordinate

[1] Ciò che implica $a_i(\xi_i) = 0$, $c_i(\xi_i) = 0$ non appena sia $\xi_i < -\alpha_i$ oppure $\xi_i > \beta_i$.

$\xi_i = 0$, $\eta_i = H(i)$, dove

$$H(i) = \frac{\mathfrak{M}_i}{P}. \tag{44}$$

Invero, chiamando (ξ'_i, η'_i) la coppia ortogonale in cui si trasporta (ξ_i, η_i) per effetto della traslazione $O \to O_i$, si ha

$$\xi'_i = \xi_i, \quad \eta'_i = \eta_i - H(i):$$

e, tenuto conto di (22), $(20)_1$ e (10), la (44) può scriversi

$$0 = -\int_{S_c} \eta'_i r[\omega_i(\xi'_i - \Xi_i)]dS_c + E_a\omega_i \int_{S_a} \eta'_i(\Xi_i - \xi'_i)dS_a.$$

Vuol dire che l_i rappresenta la posizione dell'asse limite nella sollecitazione Σ_i del cilindro C, corrispondente al solito carico $\boldsymbol{P}$, ma al centro di pressione O_i.

Risultando $H(i) = 0$ allora ed allora soltanto che $i = \mathfrak{J}$ ed avendosi [Cfr. (38)]

$$\lim_{i = \mp\frac{\pi}{2}} \frac{\mathfrak{M}_i}{P} = \pm |OG_P|,$$

al variare di i da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ il punto O_i partirà dalla posizione G_P per ritornarvi dopo essersi sovrapposto ad O una ed una sola volta (per $i = \mathfrak{J}$). Rispetto alla curva c luogo di O_i, la retta η_i — in quanto congiunge O con O_i — rappresenta la generica secante per O: onde la tangente in O alla c (coincide colla retta $\eta_{\mathfrak{J}}$, cioè) è parallela all'asse limite.

Restano così giustificate tutte le affermazioni del n.° 9.

La curva c gode di altre proprietà interessanti. Ad es. si può stabilire che la sua tangente in G_P è ortogonale alla retta OG_P allora ed allora soltanto che questa coincide con uno degli assi principali d'inerzia di $S_c + \frac{E_a}{p'[\varepsilon_P]} S_a$ rispetto ad O, ecc.

§ 3. Teoremi della teoria lineare.

27. Il teorema di riduzione (n.° 10) stabilisce una perfetta equivalenza analitica tra la teoria ordinaria e la teoria lineare: motivo per cui nelle dimostrazioni e negli enunciati di questo paragrafo ci atterremo alla teoria ordinaria, con tutto vantaggio della semplicità.

Passando dalla teoria generale alla teoria ordinaria $[p \equiv -E_m \varepsilon_z,\ t \equiv 0]$ il sistema $(\mathfrak{S})$ si riduce alla forma [1]

$$
(45)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{P}{\omega} &= E_m \int_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{J},\Xi}} (\Xi - \xi)\, dS_c + E_a \int_{S_a} (\Xi - \xi)\, dS_a, \\
0 &= E_m \int_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{J},\Xi}} \xi(\Xi - \xi)\, dS_c + E_a \int_{S_a} \xi(\Xi - \xi)\, dS_a, \\
0 &= E_m \int_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{J},\Xi}} \eta(\Xi - \xi)\, dS_c + E_a \int_{S_a} \eta(\Xi - \xi)\, dS_a,
\end{aligned}
\right.
$$

si riduce cioè ad un sistema di due equazioni per le due incognite [2] $\mathfrak{J}$, Ξ.

Posto $\delta = \Xi - \xi =$ distanza del punto generico di S da l, le ultime due equazioni esprimono che O coincide col centro del sistema di forze-momenti statici [3] δdS_c, $\delta \frac{E_a}{E_m} dS_a$ applicate ai singoli elementi di $\mathfrak{S}_{\mathfrak{J},\Xi} + \frac{E_a}{E_m} S_a$: ne risulta notoriamente l'identità di l coll'asse neutro di O rispetto a $\mathfrak{S}_{\mathfrak{J},\Xi} + \frac{E_a}{E_m} S_a$ $\left(\text{che non differisce da } S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a \text{ se } l \text{ non taglia } S_c\right)$.

In particolare resta stabilito che l_i coincide sempre coll'asse neutro di O_i rispetto a $\mathfrak{S}_{i,\Xi_i} + \frac{E_a}{E_m} S_a$: e simultaneamente (Cfr. n.° 26) che l_i rappresenta anche l'asse neutro di O rispetto alla superficie non omogenea (simmetrica rispetto a ξ_i) ottenuta attribuendo densità rispettivamente eguali ad 1 ed $\frac{E_a}{E_m}$, alle due regioni di S_i che (nella trasformazione di S in S_i) rispettivamente corrispondono a $\mathfrak{S}_{i,\Xi_i}$ ed S_a.

---

(1) Nella teoria elastica varrebbero ancora le (45) purchè si identificasse $P_{\mathfrak{J},\Xi}$ con S_c; donde deriverebbe l'identità di l coll'asse neutro di O rispetto ad $S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a$.

(2) La stessa circostanza semplificativa si presenterebbe nella teoria delle murature semplici assumendo $t \equiv 0$, p proporzionale ad una qualunque potenza di $|\varepsilon_z|$ (come, ad es., quando si adotta la legge di BACH).

(3) Cfr. ad es. GUIDI, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni*, vol. I (8ª ediz., Torino, 1917) pag. 112 e segg.

28. Nella teoria ordinaria le equazioni che definiscono ω_i, Ξ_i (Cfr. n.° 19) possono scriversi

$$(46)\qquad \begin{cases} P = \omega_i \{ f^*_{00}\Xi_i - f^*_{10} \} \\ 0 = f^*_{10}\Xi_i - f^*_{20} \end{cases}$$

con

$$(47)\qquad f^*_{m,n}(i, \Xi_i) = E_m \int_{\mathfrak{F}_{i,\Xi_i}} \xi_i{}^m \eta_i{}^n dS_c + E_a \int_{S_a} \xi_i{}^m \eta_i{}^n dS_a \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Simultaneamente si ha [Cfr. (22)]

$$(48)\qquad \mathfrak{M}_i = \omega_i \{ f^*_{0,1}\Xi_i - f^*_{1,1} \} :$$

mentre da $(46)_2$ risulta $\left(\text{naturalmente, per } -\frac{\pi}{2} < i < \frac{\pi}{2}\right)$

$$(49)\qquad \begin{cases} f^*_{1,0} > 0, \\ \Xi_i = \dfrac{f^*_{20}}{f^*_{10}}. \end{cases}$$

Combinando (48) con $(49)_2$ si ottiene

$$\mathfrak{M}_i = \frac{\omega_i}{f^*_{1,0}} \{ f^*_{0,1} f^*_{2,0} - f^*_{1,1} f^*_{1,0} \},$$

ciò che permette di dedurre da $(41)_1$ che

$$\Delta_2 \frac{d(\omega_i \Xi_i)}{di} = 2 f^*_{1,0} \mathfrak{M}_i ;$$

in particolare [Cfr. (17) e $(49)_1$] che entro $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la $\frac{d(\omega_i \Xi_i)}{di}$ ha sempre il segno di $\mathfrak{M}_i$.

D'altra parte, per l'attuale Σ_i, $(\sigma_z)_0$ non differisce da $(\varepsilon_z)_0 = -\omega_i \Xi_i$ altro che per un fattore costante [1].

Si può dunque concludere che:

« Tra tutte le sollecitazioni Σ_i la sollecitazione effettiva (cioè $\Sigma_{\mathfrak{F}}$) è caratterizzata dal fatto che rende massima la pressione unitaria in O [2].

---

[1] Non val la pena d'insistere sul fatto che O può non appartenere ad S.

[2] Invece in generale $\Xi_{\mathfrak{F}}$ non dà il minimo di Ξ_i. Perchè ciò si verifichi è necessario che uno degli assi centrali di $P_{\mathfrak{F},\Xi} + \frac{E_a}{E_m} S_a$ passi per O: condizione che nella teoria elastica si riduce all'appartenenza di O ad uno degli assi centrali di $S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a$.

29. Riferendosi a Σ_i (ed all'unità di lunghezza del nostro cilindro) poniamo

$$\mathfrak{L}_i = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{F}_{i,\Xi_i}} \varepsilon_z \sigma_z dS_c + \frac{1}{2}\int_{S_a} \varepsilon_z \sigma_z dS_a = \text{lavoro di deformazione.}$$

Avremo [Cfr. (47)]

$$\mathfrak{L}_i = \frac{\omega^{i^2}}{2}\left\{E_m \int_{\mathfrak{F}_{i,\Xi_i}} (\Xi_i - \xi_i)^2 dS_c + E_a \int_{S_a} (\Xi_i - \xi_i)^2 dS_a\right\} =$$

$$= \frac{\omega_i^2}{2}\left\{\Xi_i (f^*_{0,0}\Xi_i - f^*_{10}) - (f^*_{10}\Xi_i - f^*_{20})\right\}$$

ed infine [Cfr. (46)]

$$\mathfrak{L}_i = \frac{P\Xi_i\omega_i}{2}.$$

Il teorema or ora dimostrato si può dunque enunciare anche nella forma seguente:

« tra tutte le sollecitazioni Σ_i, la sollecitazione effettiva è caratterizzata dal fatto che rende *massimo* il lavoro di deformazione ».

30. Volendo approfondire la trattazione del caso simmetrico, conviene introdurre le notazioni semplificative $\mathfrak{F}_\delta = \mathfrak{F}_{0,\delta}$, $c(x) \equiv c_0(\xi_0)$, $a(x) \equiv a_0(\xi_0)$ (V. n.i 22 e 26) ed anche le seguenti — in corrispondenza ad ogni valore positivo del parametro ν e dell'intero r —:

$$\begin{cases} m_r(\delta, \nu) = \displaystyle\int_{\mathfrak{F}_\delta} x^r dS_c + \nu \int_{S_a} x^r dS_a = \int_{-\alpha_0}^{\delta} x^r c(x) dx + \nu \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x^r a(x) dx, \\ D(\delta, \nu) = m_0(\delta, \nu) m_2(\delta, \nu) - m_1^2(\delta, \nu), \\ F_r(\delta, \nu) = \delta m_r(\delta, \nu) - m_{r+1}(\delta, \nu) = \displaystyle\int_{-\alpha_0}^{\delta} (\delta - x) x^r c(x) dx + \nu \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} (\delta - x) x^r a(x) dx, \\ q(\delta, \nu) = \delta F_0(\delta, \nu) - F_1(\delta, \nu) = \delta^2 m_0(\delta, \nu) - 2\delta m_1(\delta, \nu) + m_2(\delta, \nu). \end{cases}$$

$m_0(\delta, \nu)$, $m_1(\delta, \nu)$, $m_2(\delta, \nu)$ vengono così a rappresentare rispettivamente l'area, il momento statico ed il momento d'inerzia di $\mathfrak{F}_\delta + \nu S_a$ rispetto all'asse y:

mentre

$$\frac{dm_r}{d\delta} = \delta^r c(\delta), \tag{50}$$

$$\frac{dF_r}{d\delta} = m_r(\delta), \tag{51}$$

$$\frac{dq}{d\delta} = 2F_0(\delta). \tag{52}$$

Risultando

$$q(\delta, \nu) = \int_{-\alpha_0}^{\delta} (\delta - x)^2 c(x) dx + \nu \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} (\delta - x)^2 a(x) dx,$$

resta stabilita — per ogni δ — la diseguaglianza [Cfr. (35)]

$$q(\delta, \nu) = \delta F_0(\delta, \nu) - F_1(\delta, \nu) > 0 \tag{53}$$

ed insieme l'altra [1]

$$\frac{dD}{d\delta} = c(\delta) q(\delta, \nu) > 0. \tag{54}$$

31. Passando dal caso generale al caso simmetrico della teoria ordinaria ($\mathfrak{J} = 0$) le (45) forniscono

$$\begin{cases} P = \omega E_m F_0(\Xi), \\ 0 = F_1(\Xi), \end{cases} \tag{55}$$

pur d'intendere

$$\nu = \frac{E_a}{E_m}:$$

ciò che riduce l'espressione di ε_z e le condizioni di stabilità [2] alla forma rispettiva

$$\varepsilon_z = -\frac{P(\Xi - x)}{E_m F_0(\Xi)}$$

$$T = \frac{E_a}{E_m} \frac{P(\beta_0 - \Xi)}{F_0(\Xi)} \leq k_t \text{ (condizione di stabilità per l'armatura)}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{P(\Xi + \alpha_0)}{F_0(\Xi)} \leq k_c \text{ (condizione di stabilità pel conglomerato).}$$

---

[1] Non val la pena d'insistere sul fatto che nelle (53) e (54) per $S_a \equiv 0$ e $\delta < -\alpha_i$ il segno $>$ va sostituito con $=$ [Cfr. (26)].

[2] Si prescinde dalla 1ª delle A_5) (Cir. n.° 5).

Al tempo stesso la convenzione $x_{G_P} > 0$ resta espressa da

$$m_1(\beta_0) > 0. \tag{56}$$

32. Verifichiamo che l'equazione fondamentale

$$F_1(\delta) = 0,$$

subordinatamente all'essere $m_1(\beta_0) > 0$, ammette una ed una sola radice positiva, che per $\alpha_0 < 0$ è sempre compresa tra $-\alpha_0$ e β_0.

Poichè

$$\frac{dF_1}{d\delta} = m_1(\delta), \quad \frac{d^2F_1}{d\delta^2} = \delta c(\delta),$$

al variare di δ da 0 a $+\infty$ la $F'_1(\delta)$ non potrà cambiar di segno più di una volta e per $\delta \geq \beta_0$ coinciderà sempre con $F'_1(\beta_0) = m_1(\beta_0) > 0$.

D'altra parte [1]

$$F_1(0) = -m_2(0) < 0:$$

onde resta verificato che l'equazione fondamentale ammette una ed una sola radice positiva, Ξ. Se $\alpha_0 < 0$ tale radice è certamente compresa tra $-\alpha_0$ e β_0 perchè

$$\left\{\begin{aligned} F_1(-\alpha_0) &= -\nu\int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(x+\alpha_0)a(x)dx < 0 \\ F_1(\beta_0) &= \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(\beta_0 - x)\{c(x) + \nu a(x)\}dx > 0: \end{aligned}\right.$$

ed è l'*unica* radice dell'equazione fondamentale perchè per $\delta \leq 0 < -\alpha_0$

$$F'_1(\delta) = m_1(\delta) = \nu\int_{-\alpha_0}^{\beta_0} xa(x)dx > 0.$$

In ogni caso, almeno per $\delta > 0$, sarà

$$F_1(\delta) \lesseqgtr 0 \quad \text{a seconda che} \quad \delta \lesseqgtr \Xi. \tag{57}$$

La (58) rende agevole il calcolo numerico di Ξ: anzi, quando

$$F_1(\beta_0) < 0, \quad \text{cioè} \quad \beta_0 < \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)},$$

---

[1] Naturalmente si esclude il caso $S_a \equiv 0$, $\alpha_0 < 0$.

essa fornisce $\Xi > \beta_0$ e successivamente

$$m_r(\Xi) = m_r(\beta_0) \qquad (r = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

$$\Xi = \frac{m_2(\Xi)}{m_1(\Xi)} = \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)}.$$

È il caso in cui la S_c non è tagliata dall'asse neutro n_1 di O rispetto ad $S_c + \nu S_a$ e quindi n_1 coincide con l.

33. Sempre restando nel caso simmetrico della teoria ordinaria, riprendiamo in esame l'equazione fondamentale $F_1(\delta) = 0$, supponendo

$$F_1(\beta_0) > 0, \quad \text{cioè} \quad \beta_0 > \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)}, \quad \Xi < \beta_0. \tag{58}$$

Definiamo la successione $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \ldots$ mediante la relazione ricorrente

$$\beta_s = \frac{m_2(\beta_{s-1})}{m_1(\beta_{s-1})} \qquad (s = 1,\ 2, \ldots): \tag{59}$$

ciò che equivale a considerare la successione $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ degli assi neutri di O rispetto ad

$$S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a \equiv \mathfrak{S}_{\beta_0} + \frac{E_a}{E_m} S_a, \quad \mathfrak{S}_{\beta_1} + \frac{E_a}{E_m} S_a, \ldots, \quad \mathfrak{S}_{\beta_{s-1}} + \frac{E_a}{E_m} S_a, \ldots$$

Risulterà

$$\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_s > \ldots > 0. \tag{60}$$

Infatti, essendo

$$m_1(\beta_0) > 0, \quad \beta_0 > \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)} = \beta_1 > 0, \tag{61}$$

sarà pure

$$\int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(x - \beta_1)c(x)dx + \frac{E_a}{E_m}\int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(x - \beta_1)a(x)dx = 0,$$

cioè

$$\int_{\beta_1}^{\beta_0} x(x - \beta_1)c(x)dx + m_2(\beta_1) - \beta_1 m_1(\beta_1) = 0:$$

e quindi

$$m_2(\beta_1) - m_1(\beta_1) < 0,$$

mentre $\beta_1 > 0$. Ne segue

$$m_1(\beta_1) > 0, \quad \beta_1 > \frac{m_2(\beta_1)}{m_1(\beta_1)} = \beta_2 > 0. \tag{62}$$

Il confronto di (62) con (61) basta per mettere in evidenza che la (60) può essere completamente dimostrata per induzione.

Da (60) segue l'esistenza di un limite per β_s al crescere indefinito di s: successivamente (59) e (57) dimostrano che

$$\lim_{s=\infty} \beta_s = \Xi, \tag{63}$$

cioè che « al variare di s da 1 ad ∞, l'asse neutro n_s si approssima costantemente ed indefinitamente all'asse limite ».

34. Pel seguito, conviene fare l'osservazione seguente.

Determinato Ξ, modifichiamo comunque i valori della funzione positiva $c(x)$ nell'intervallo (Ξ, β_0), senza toccare i valori della stessa funzione nell'intervallo (α_0, Ξ) e neppur quelli della $a(x)$ in tutto l'intervallo (α_0, β_0). Per la sezione modificata l'asse limite corrispondente al centro di pressione O sarà ancora la retta $x = \Xi$. Dal lato meccanico, la cosa è intuitiva: ma è resa evidente anche dal teorema d'unicità, non appena si ricordi che l'equazione che definisce Ξ può scriversi

$$\Xi = \frac{m_2(\Xi)}{m_1(\Xi)}.$$

§ 4. Teoremi di confronto.

35. Mantenendo le notazioni del numero precedente e l'ipotesi (58) applichiamo la teoria elastica alla sezione $\mathfrak{S}_{\beta_{s-1}} + \frac{E_a}{E_m} S_a$ sollecitata dal solito carico P applicato in O. Come asse limite troveremo l'asse neutro di O rispetto a $\mathfrak{S}_{\beta_{s-1}} + \frac{E_a}{E_m} S_a$, cioè la retta $x = \beta_s$: onde il massimo T_s della trazione unitaria nell'armatura ed il massimo $\tilde{\omega}_s$ della pressione unitaria nel conglomerato saranno rispettivamente rappresentati da

$$\left\{ \begin{aligned} T_s &= \frac{P(\beta_0 - \beta_s)}{\beta_s m_0(\beta_{s-1}) - m_1(\beta_{s-1})} = \frac{P\{\beta_0 m_1(\beta_{s-1}) - m_2(\beta_{s-1})\}}{D(\beta_{s-1})} \\ \tilde{\omega}_s &= \frac{P(\alpha_0 + \beta_s)}{\beta_s m_0(\beta_{s-1}) - m_1(\beta_{s-1})} = \frac{P\{\alpha_0 m_1(\beta_{s-1}) + m_2(\beta_{s-1})\}}{D(\beta_{s-1})}. \end{aligned} \right. \tag{64}$$

In conseguenza di (54) si trova subito

$$D^2(\delta)\frac{d}{d\delta}\frac{\beta_0 m_1 - m_2}{D} = (\beta_0 - \delta)\delta c(\delta)D(\delta) - (\beta_0 m_1 - m_2)c(\delta)q(\delta) =$$
$$= c(\delta)[-\beta_0(m_1\delta - m_2)(m_0\delta - m_1) + (m_1\delta - m_2)^2]:$$

cioè

$$D^2(\delta)\frac{d}{d\delta}\frac{\beta_0 m_1 - m_2}{D} = -c(\delta)F_1(\delta)\{\beta_0 F_0(\delta) - F_1(\delta)\}. \tag{65}$$

Essendo sempre [Cfr. (53)]

$$F_1(\delta) < \delta F_0(\delta) \tag{66}$$

da (65) segue che quando $\Xi < \delta < \beta_0$ certamente

$$\frac{d}{d\delta}\frac{\beta_0 m_1 - m_2}{D} < 0.$$

Ricordando allora le $(64)_1$, (60) e (63) si conclude

$$T_1 < T_2 < \ldots < T_s < \ldots < T:$$

in particolare che *sostituendo alla teoria ordinaria la teoria elastica* [1] *il massimo della trazione unitaria nell'armatura impiccolisce sempre.*

36. Cambiando in (65) β_0 in $-\alpha_0$ si ottiene

$$D^2\frac{d}{d\delta}\frac{m_1\alpha_0 + m_2}{D} = -c(\delta)F_1(\delta)\{\alpha_0 F_0(\delta) + F_1(\delta)\}: \tag{67}$$

donde risulta che se $\alpha_0 > 0$ la condizione $\delta > \Xi$ è sufficiente perchè sia

$$\frac{d}{d\delta}\frac{m_1\alpha_0 + m_2}{D} < 0.$$

Vuol dire che quando $\alpha_0 > 0$ dalle $(64)_2$ (60) e (63) discende

$$\tilde{\omega}_1 < \tilde{\omega}_2 < \ldots < \tilde{\omega}_s < \ldots < \tilde{\omega}:$$

e si può affermare che *se* O *è interno ad s, sostituendo alla teoria ordinaria la teoria elastica* [1] *il massimo della pressione unitaria nel conglomerato diminuisce.*

---

[1] A parità di O, P, S_a, S_c, E_m, E_a.

Invece quando $\alpha_0 < 0$ — e quindi $\Xi < \beta_0$ [1] — se pure non è

$$\tilde{\omega}_1 > \tilde{\omega}, \tag{68}$$

è sempre possibile modificare S_c — senza distruggere la connessione di S — in modo da render soddisfatta la (68).

Per convincerci di questo riprendiamo la (67) ponendo $-\alpha_0 = \alpha > 0$ ed $M(\delta) = F_1(\delta) - \alpha F_0(\delta)$: in guisa da avere

$$D^2 \frac{d}{d\delta} \frac{m_1 \alpha_0 + m_2}{D} = -c(\delta) F_1(\delta) M(\delta). \tag{69}$$

Risultando

$$\begin{cases} M(\delta) = \displaystyle\int_\alpha^\delta (x - \alpha)(\delta - x) c(x) dx + \frac{E_a}{E_m} \int_\alpha^\beta (x - \alpha)(\delta - x) a(x) dx \\ \dfrac{dM}{d\delta} = \displaystyle\int_\alpha^\delta (x - \alpha) c(x) dx + \frac{E_a}{E_m} \int_\alpha^\beta (x - \alpha) a(x) dx, \end{cases}$$

insieme ad

$$M(\Xi) = F_1(\Xi) - \alpha F_0(\Xi) = -\alpha F_0(\Xi) < 0$$

si avrà $M(\beta) > 0$ e per $\delta > \alpha$ (in particolare, per $\delta > \Xi$) $\dfrac{dM}{d\delta} > 0$.

Ciò basta per asserire che nell'intervallo (Ξ, δ) esiste uno ed un sol valore Ξ' pel quale $M(\Xi') = 0$ e (nello stesso intervallo) è

$$M(\delta) \lesseqgtr 0 \quad \text{a seconda che} \quad \delta \lesseqgtr \Xi'. \tag{70}$$

Anzi, tale valore Ξ' (Cfr. n.° 34) resta invariato comunque si modifichi la funzione positiva $c(x)$ nel primitivo intervallo (Ξ', β): naturalmente posseggono la stessa invarianza

$$\tilde{\omega}' = P \frac{m_1(\Xi')\alpha_0 + m_2(\Xi')}{D(\Xi')}$$

ed $h = \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}$.

Integrando (69) da Ξ a Ξ' e ricordando la (70) si trova

$$h > 0:$$

integrando la stessa (69) da Ξ a β_0

$$\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega} = h - \int_{\Xi'}^{\beta} \frac{1}{D^2(\delta)} c(\delta) F_1(\delta) M(\delta) d\delta. \tag{71}$$

---

[1] Cfr. n.° 32.

Ora (Cfr. n.° 30) per $\Xi' < \delta < \beta$

$$D(\delta) > D(\Xi'),$$

$$F_1(\delta) < \beta(\beta - \alpha)S_c + \frac{E_a}{E_m}\beta\int_\alpha^{\beta_0} xa(x)dx = H,$$

$$M(\delta) < \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2 S_c + \frac{E_a}{E_m}\int_\alpha^\beta (\beta - x)(x - \alpha)a(x)dx = K:$$

onde da (71) si può trarre

$$\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega} > h - \frac{H \cdot K}{D^2(\Xi')}\int_{\Xi'}^{\beta} c(\delta)d\delta = h - \frac{H \cdot K}{D^2(\Xi')}(S_c - \mathfrak{S}_{\Xi'}).$$

Partendo da una qualunque sezione, si potrà dunque sempre ottenere che risulti $\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega} > 0$, semplicemente riducendo convenientemente piccola l'area $S_c - \mathfrak{S}_{\Xi'}$ — senza toccare i valori della $c(x)$ nell'intervallo (α, Ξ') e neppure quelli della $a(x)$ nell'intero intervallo (α, β_0) —.

La conclusione è indipendente dal valore di P: in modo che, scegliendo P convenientemente piccolo, si potrà anche ottenere che la trazione massima nel conglomerato risulti $< \tau$.

Con ciò agli effetti della sollecitazione presa in esame la teoria elastica verrà a confondersi [1] colla teoria lineare e si potrà affermare che *se* O *è esterno ad s, anche la sostituzione della teoria lineare alla teoria elastica può fare ingrandire il massimo della pressione unitaria nel conglomerato.*

37. Nel caso simmetrico della teoria generale i valori di ω e Ξ, subordinatamente alla condizione di esser positivi, restano individuati dal sistema [2].

$$(72)\quad \begin{cases} P = \displaystyle\int_{-\alpha_0}^{\Xi} p[\omega(\Xi - x)]c(x)dx - \int_{\Xi}^{\beta_0} t[\omega(x - \Xi)]c(x)dx + \omega E_a \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} (\Xi - x)a(x)dx \\ 0 = \displaystyle\int_{-\alpha_0}^{\Xi} xp[\omega(\Xi - x)]c(x)dx - \int_{\Xi}^{\beta_0} xt[\omega(x - \Xi)]c(x)dx + \omega E_a \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(\Xi - x)a(x)dx. \end{cases}$$

(1) Si ripensi al teorema d'unicità.

(2) Cfr. (8), per $\mathfrak{J} = 0$.

Contemporaneamente, ove si ritenga la 1ª delle A_5) assorbita da B_2), le condizioni di stabilità si riducono a

(73) $E_a\omega(\beta_0 - \Xi) \leq k_t$ (condizione di stabilità per l'armatura),

(74) $p[\omega(\Xi + \alpha_0)] \leq k_c$ (condizione di stabilità pel conglomerato).

Abbiamo pure già avvertito che nella dimostrazione dei due teoremi di confronto sistematicamente supporremo verificata la

(&) $$E_s \leq E_c \leq E_0$$

per $-\varepsilon_s \leq \varepsilon_{\bar{s}} \leq 0$.

38. Passando alla dimostrazione del 1° teorema di confronto [1] contrassegneremo con * tutti gli elementi del relativo problema ausiliare, che differiscono o possono differire dai loro corrispondenti nel problema effettivo (applicazione della teoria generale alla sezione e sollecitazione effettive): in particolare porremo

$$\begin{cases} c_*(x) \equiv \dfrac{E_s}{E_0}\, c(x) & \text{per} \quad x < 0 \\ c_*(x) \equiv c(x) & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$$

e successivamente

$$m_r^*(\delta, \nu) = \int_{-\alpha_0}^{\delta} x^r c_*(x)dx + \nu \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x^r a(x)dx, \quad \text{ecc.}$$

Procediamo per assurdo, ammettendo in un primo tempo che, pur essendo verificate le condizioni di stabilità nel problema ausiliare, nel problema effettivo risulti $k_c = p[\omega(\Xi + \alpha_0)]$, cioè

(75) $$\omega(\Xi + \alpha_0) = \varepsilon_s = \frac{k_c}{E_s},$$

in corrispondenza ad una grandezza del carico minore di quella assegnata: grandezza che continueremo a rappresentare con P, mantenendo in relazione ad essa tutte le notazioni abituali. Evidentemente le condizioni di stabilità nel problema ausiliare non cesseranno di esser soddisfatte per una tale diminuzione del carico.

Nell'ipotesi (75), anzi, nell'ipotesi meno restrittiva

(76) $$p[\omega(\Xi + \alpha_0)] \leq k_c,$$

[1] Enunciato al n.° 14 ($\alpha_0 > 0$).

la ($\mathcal{E}$) permette di asserire che per ogni valore di x in $(-\alpha_0, \Xi)$ è

$$E_s \leq \frac{p[\omega(\Xi - x)]}{\omega(\Xi - x)} \leq E_0. \tag{77}$$

In conseguenza, scrivendo la $(72)_2$ nella forma

$$0 = \int_{-\alpha_0}^{0} x p[\omega(\Xi - x)] c(x) dx + \int_{0}^{\Xi} x p[\omega(\Xi - x)] c(x) dx -$$
$$- \int_{\Xi}^{\beta_0} x t[\omega(x - \Xi)] c(x) dx + \omega E_a \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(\Xi - x) a(x) dx,$$

si riconosce che

$$0 < \omega E_s \int_{-\alpha_0}^{0} x(\Xi - x) c(x) dx + \omega E_0 \int_{0}^{\Xi} x(\Xi - x) c(x) dx + \omega E_a \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(\Xi - x) a(x) dx:$$

cioè — essendo $\omega > 0$, $\dfrac{E_a}{E_0} = n$ —

$$0 < F_1^*(\Xi, n) = \Xi m_1^*(\Xi, n) - m_2^*(\Xi, n). \tag{78}$$

39. Da (78), poichè $\Xi > 0$, segue

$$m_1^*(\Xi, n) > 0 \tag{79}$$

e successivamente

$$m_1^*(\beta_0, n) > 0. \tag{80}$$

Invero se $\Xi \geq \beta_0$ la (79) s'identifica colla (80): mentre se $\Xi < \beta_0$ da $\dfrac{dm_1^*}{d\delta} = \delta c(\delta)$ si può sicuramente trarre $m_1^*(\Xi, n) < m_1^*(\beta_0, n)$ e ricondurre così ancora la (80) alla (79).

La (80) — in quanto afferma che l'asse positivo x risulta orientato da O verso il baricentro di $S_c^* + nS_a$ — dà la condizione voluta per poter scrivere le relazioni fondamentali del problema ausiliare nella forma [1]

$$F_1^*(\Xi^*, n) = 0, \quad \omega^* = \frac{P}{E_0 F_0^*(\Xi^*, n)}. \tag{81}$$

$$\frac{E_a}{E_0} \frac{P(\beta_0 - \Xi^*)}{F_0^*(\Xi^*, n)} \leq \frac{E_s}{E_0} k_t, \quad \frac{P(\Xi^* + \alpha_0)}{F_0^*(\Xi^*, n)} \leq k_c. \tag{82}$$

---

[1] Cfr. n.° 31.

Dal confronto di $(81)_1$ con (78) segue (Cfr. (57) del paragrafo precedente)

$$\Xi > \Xi^* : \tag{83}$$

ciò che corrisponde all'affermare che l'asse limite del problema ausiliare risulta compreso tra O e l'asse limite del problema effettivo.

Anche in questo numero non abbiamo supposto necessariamente verificata la (75), ma solo la (76).

40. Moltiplichiamo $(72)_1$ per Ξ e successivamente sottragghiamo membro a membro $(72)_2$. Avremo così

$$P\Xi = \int_{-\alpha_0}^{\Xi} (\Xi - x) p[\omega(\Xi - x)] c(x) dx + \tag{84}$$

$$+ \int_{\Xi}^{\beta_0} (x - \Xi) t[\omega(x - \Xi)] c(x) dx + \omega E_a \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} (\Xi - x)^2 a(x) dx.$$

Tenendo conto che la t è sempre positiva e che da (75) ed (6) — oltre che (77) — discende

$$p[\omega(\Xi - x)] > \frac{k_c}{\Xi + \alpha_0} (\Xi - x)$$

per ogni x in $(-\alpha_0, \Xi)$, dalla (84) si trae

$$P\Xi > \frac{k_c}{\Xi + \alpha_0} \int_{-\alpha_0}^{\Xi} (\Xi - x)^2 c(x) dx + \frac{k_c}{\Xi + \alpha_0} \frac{E_a}{E_s} \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} (\Xi - x)^2 a(x) dx >$$

$$> \frac{k_c}{\Xi + \alpha_0} \left\{ \int_{-\alpha_0}^{\Xi} (\Xi - x)^2 c_*(x) dx + n \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} (\Xi - x)^2 a(x) dx \right\}$$

cioè (Cfr. n.° 30)

$$k_c < P \frac{\Xi(\Xi + \alpha_0)}{q_*(\Xi, n)}. \tag{85}$$

Tenendo presente che $\frac{dq}{d\delta} = 2F_0(\delta)$, si trova subito

$$q^2_*(\delta) \frac{d}{d\delta} \frac{\delta(\delta + \alpha_0)}{q_*(\delta)} = (2\delta + \alpha_0) q_*(\delta) - 2\delta(\delta + \alpha_0) F_0^*(\delta) =$$

$$= \alpha_0 [q_*(\delta) - 2\delta F_0^*(\delta)] + 2\delta [q_*(\delta) - \delta F_0^*(\delta)],$$

cioè

$$q^2_*(\delta)\frac{d}{d\delta}\frac{\delta(\delta+\alpha_0)}{q_*(\delta)} = -\alpha_0[\delta F_0^*(\delta)+F_1^*(\delta)] - 2\delta F_1^*(\delta).$$

Ora [Cfr. $(81)_1$] per $\delta > \Xi^* > 0$, non solo è $F_1^*(\delta, n) > 0$, ma anche [Cfr. (66) o (53)] $F_0^*(\delta, n) > 0$: onde si conclude [1] che almeno per $\delta > \Xi^*$

$$\frac{d}{d\delta}\frac{\delta(\delta+\alpha_0)}{q_*(\delta, n)} < 0.$$

Ciò permette di dedurre da (83)

$$\frac{\Xi(\Xi+\alpha_0)}{q_*(\Xi, n)} < \frac{\Xi^*(\Xi^*+\alpha_0)}{q_*(\Xi^*, n)}. \tag{86}$$

Osservando infine che $q_*(\Xi_*, n) = \Xi^* F_0^*(\Xi^*, n) - F_1^*(\Xi^*, n) = \Xi_* F_0^*(\Xi_*, n)$, si riesce a sostituire alla (85) la diseguaglianza

$$k_c < P\frac{\Xi^*+\alpha_0}{F_0^*(\Xi^*, n)},$$

la quale è in contrasto colla $(82)_2$.

Vuol dire che il verificarsi della condizione di stabilità pel conglomerato nel problema ausiliare, è sufficiente perchè nel problema effettivo, in corrispondenza al carico assegnato e ad ogni carico minore, sia

$$p[\omega(\Xi+\alpha_0)] < k_c \tag{87}$$

ed insieme valgano tutte le proprietà indicate ai n.i 38 e 39 come conseguenze dell'ipotesi (76).

41. Completiamo la dimostrazione del 1° teorema di confronto, stabilendo che il verificarsi della $(82)_1$, insieme ad

$$p[\omega(\Xi+\alpha_0)] < k_c \tag{87}$$

$$\Xi > \Xi^*, \tag{83}$$

è sufficiente perchè risulti

$$E_a\omega(\beta_0 - \Xi) \leq k_t: \tag{73}$$

anche se $\Xi < \beta_0$.

---

[1] In questo punto è essenziale l'ipotesi $\alpha_0 > 0$: nell'ipotesi opposta, almeno per δ convenientemente prossimo a Ξ^* risulta $\frac{d}{d\delta}\frac{\delta(\delta+\alpha_0)}{q_*(\delta, n)} > 0$.

Anche qui procederemo per assurdo, ammettendo che in corrispondenza ad una grandezza del carico minore di quella assegnata sussista l'eguaglianza

$$E_a\omega(\beta_0 - \Xi) = k_t. \tag{88}$$

Riprendendo la (84) — che ha validità generale — in conseguenza di (87) si trova

$$P\Xi > \omega \left\{ E_s \int_{-\alpha_0}^{\Xi} (\Xi - x)^2 c(x)dx + E_a \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} (\Xi - x)^2 a(x)dx \right\} >$$

$$> \omega E_s \left\{ \int_{-\alpha_0}^{\Xi} (\Xi - x)^2 c_*(x)dx + \frac{E_a}{E_0} \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} (\Xi - x)^2 a(x)dx \right\}$$

cioè

$$P\Xi > \omega E_s q_*(\Xi, n):$$

onde si riconosce che la (88) non può sussistere senza che sia

$$k_t < P \frac{E_a}{E_s} \frac{(\beta_0 - \Xi)\Xi}{q_*(\Xi, n)}. \tag{89}$$

D'altra parte [Cfr. (52)]

$$q^2_*(\delta, n) \frac{d}{d\delta} \frac{\delta}{q_*(\delta, n)} = q_*(\delta) - 2\delta F_0^*(\delta) = -\delta F_0^*(\delta) - F_1^*(\delta):$$

mentre per $\delta > \Xi^*$ si ha simultaneamente $F_1^*(\delta) > 0$, $\delta F_0^*(\delta) > 0$.

Vuol dire che — senza neppur bisogno di utilizzare direttamente l'ipotesi $\alpha_0 > 0$ — si arriva a concludere che per $\delta > \Xi^*$

$$\frac{d}{d\delta} \frac{\delta}{q_*(\delta, n)} < 0: \tag{90}$$

in particolare [Cfr. (83)]

$$\frac{\Xi}{q_*(\Xi, n)} < \frac{\Xi^*}{q_*(\Xi^*, n)} = \frac{1}{F_0^*(\Xi^*, n)}. \tag{91}$$

Questa diseguaglianza permette di dedurre da (89) [Cfr. ancora (83)]

$$\rho k_t < P \frac{E_a}{E_0} \frac{\beta_0 - \Xi_*}{F_0^*(\Xi_*, n)}:$$

ciò che è in contrasto con $(82)_1$, c. d. d.

Così il 1° teorema di confronto resta completamente dimostrato.

42. Passiamo a trattare il caso che O sia esterno ad S, cioè $-\alpha_0 = \alpha > 0$.

Attualmente, essendo la x positiva in tutta S, risulta evidente la diseguaglianza

$$m_1(\beta_0, n) > 0: \tag{92}$$

mentre il solo ricorso alla ($\mathcal{E}$) permette di trarre da $(72)_2$

$$0 < E_0 \int_\alpha^\Xi x(\Xi - x)c(x)dx + E_a \int_\alpha^{\beta_0} x(\Xi - x)a(x)dx$$

ovvero

$$0 < F_1(\Xi, n). \tag{93}$$

Verificandosi la (92) le equazioni fondamentali del problema ausiliare — applicazione della teoria ordinaria alla sezione effettiva sollecitata in O dal carico $\frac{P}{\rho}$, per $E_m = E_0$ — possono scriversi nella forma [1]

$$F_1(\Xi_*, n) = 0, \quad \omega_* = \frac{P}{E_0 F_0(\Xi_*, n)} \tag{94}$$

$$\frac{E_a}{E_0}\frac{P}{\rho}\frac{\beta_0 - \Xi_*}{F_0(\Xi_*, n)} \leq k_t, \quad \frac{P}{\rho}\frac{\Xi_* - \alpha}{F_0(\Xi_*, n)} \leq k_c. \tag{95}$$

Il semplice confronto di (93) con $(94)_1$ fornisce [2]

$$\Xi > \Xi_*. \tag{96}$$

43. Volendo dimostrare il 2° teorema di confronto, limitiamoci alla teoria ridotta e procediamo per assurdo [3] ammettendo che — in corrispondenza alla grandezza effettiva del carico P o ad una grandezza minore — la $(95)_2$ possa coesistere con

$$\omega(\Xi - \alpha) = \varepsilon_s. \tag{97}$$

Posto $n' = \frac{E_a}{E_s}$, limitando la $(72)_2$ alla teoria ridotta $[t \equiv 0]$, ricordando che attualmente $x > 0$ in tutta S, utilizzando infine la (97) e la ($\mathcal{E}$), si trova

$$0 > \int_\alpha^\Xi x(\Xi - x)c(x)dx + n' \int_\alpha^{\beta_0} x(\Xi - x)a(x)dx$$

---

(1) Cfr. n.i 15 e 31.
(2) Cfr. n.° 32, (57).
(3) Cfr. n.i 38 e 41.

ovvero

$$0 > F_1(\Xi, n').$$

Se dunque si rappresenta con Ξ'_* la radice [certamente positiva [1]] dell'equazione

$$0 = F_1(\Xi'_*, n'),$$

si può asserire che

$$\Xi < \Xi'_*. \tag{98}$$

D'altra parte la (97), combinata come di solito colla (δ), permette pure di dedurre da (84) (Cfr. n.° 40)

$$k_c < P \frac{\Xi(\Xi - \alpha)}{q(\Xi, n)}, \tag{99}$$

mentre (Cfr. n.° 41) per $\delta > \Xi_*$

$$\frac{d}{d\delta} \frac{\delta}{q(\delta, n)} < 0:$$

in particolare

$$\frac{\Xi}{q(\Xi, n)} < \frac{\Xi_*}{q(\Xi_*, n)} = \frac{1}{F_0(\Xi_*, n)}. \tag{100}$$

Da (99), (98) e (100) segue

$$k_c < \frac{\Xi'_* - \alpha}{\Xi_* - \alpha} \frac{\Xi_* - \alpha}{F_0(\Xi_*, n)}. \tag{101}$$

Nel numero seguente dimostreremo che

$$\frac{\Xi'_* - \alpha}{\Xi_* - \alpha} < \frac{n'}{n} = \frac{1}{\rho}. \tag{102}$$

Questa diseguaglianza mette in evidenza l'incompatibilità di (101) con $(95)_2$: cioè prova che il verificarsi della condizione di stabilità pel conglomerato nel problema ausiliare è sufficiente affinchè, applicando la teoria ridotta alla sezione effettiva sollecitata in O dal carico P o da un carico minore, risulti

$$p[\omega(\Xi - \alpha)] < k_c. \tag{103}$$

Dopo questo per giungere alla completa dimostrazione del 2° teorema di

[1] Cfr. ancora n.° 32.

confronto basta riprendere le considerazioni del n.° 41, sostituendo $(82)_1$, (87), (83) con $(95)_1$, (103), (96).

44. Riprendiamo in esame la solita equazione

$$0 \equiv F_1(\delta, \nu) = \int_\alpha^\delta x(\delta - x)c(x)dx + \nu \int_\alpha^{\beta_0} x(\delta - x)a(x)dx \tag{104}$$

per un qualunque valore positivo di ν: la sua radice δ, sempre $> \alpha > 0$, per $\nu = n$ e $\nu = n' > n$ rispettivamente s'identifica con Ξ_* e Ξ'_*.

Derivando (104) rispetto a ν si trova

$$0 = \frac{d\delta}{d\nu} m_1(\delta, \nu) + \int_\alpha^{\beta_0} x(\delta - x)a(x)dx:$$

equazione che combinata colla (104) stessa fornisce

$$\frac{d\delta}{d\nu} m_1(\delta, \nu) = \frac{1}{\nu} \int_\alpha^\delta x(\delta - x)c(x)dx: \tag{105}$$

in particolare $\frac{d\delta}{d\nu} > 0$, conformemente a $\Xi_* < \Xi'_*$.

Ma (104) può anche scriversi

$$\delta m_1(\delta, \nu) = \int_\alpha^\delta x^2 c(x)dx + \nu \int_\alpha^{\beta_0} x^2 a(x)dx, \tag{106}$$

mentre

$$\alpha m_1(\delta, \nu) < \int_\alpha^\delta x^2 c(x)dx + \delta\nu \int_\alpha^{\beta_0} x a(x)dx. \tag{107}$$

Sottraendo (107) da (106) si trova

$$(\delta - \alpha)m_1(\delta, \nu) > \nu \int_\alpha^{\beta_0} x(x - \delta)a(x)dx$$

e successivamente [Cfr. ancora (104)]

$$(\delta - \alpha) m_1(\delta, \nu) > \int_\alpha^\delta x(\delta - x) c(x) dx > 0. \tag{108}$$

Basta allora dividere (105) per (108) per trovare

$$\frac{1}{\delta - \alpha} \frac{d\delta}{d\nu} < \frac{1}{\nu},$$

cioè

$$\frac{d}{d\nu} \log \frac{\delta - \alpha}{\nu} < 0:$$

in particolare

$$\frac{\Xi_* - \alpha}{n} > \frac{\Xi'_* - \alpha}{n'}. \tag{102}$$