Sur les groupes de difféomorphismes des variétés différentiables.

Memoria di JACQUELINE LELONG-FERRAND (a Parigi, Francia)

A M. Enrico Bompiani pour son Jubilé scientifique.

Résumé. - Nous établissons ici deux conditions, nécessaires et suffisantes, pour qu'une algèbre de LIE de champs de vecteurs tangents à une variété différentiable V , engendre un groupe global de difféomorphismes de V .

§ 1. - Une étude antérieure [1 et 2] nous permet d'énoncer le résultat suivant ⁽¹⁾.

PROPOSITION 1. - Pour qu'un champ de vecteurs $\xi(x)$, de classe C_1^0 sur une variété V de classe C_1^1 , engendre un groupe global à un paramètre de difféomorphismes de V

a) il suffit qu'il existe une fonction $r(x) \geq 0$ de classe C_1^0 sur V , dont les « nombres dérivés » de Lie soient bornés et telle que l'ensemble E_k défini par $r(x) \leq k$ soit compact quelque soit k

b) il faut que V soit la réunion d'une famille de domaines invariants satisfaisant à la condition précédente.

Le présent article a pour but d'étendre ce résultat aux groupes de LIE de dimension finie quelconque. En fait, nous établirons deux critères différents, généralisant tous deux la proposition 1 et découlant d'un même principe général (théorème I). Dans le premier critère (théorème II) la fonction r est remplacée par une application propre de V dans le groupe de LIE G présumé agir sur V , ou, plus généralement, par une application propre de V dans une variété $\bar{V}$ sur laquelle G agit globalement ; ce critère a été déjà énoncé partiellement dans [3]. Le deuxième critère (théorème III) généralise plus étroitement la proposition 1.

⁽¹⁾ Dans les articles cités nous avons supposé la variété V pourvue d'une structure uniforme de variété complète, car nous avions en vue l'étude des variétés à bord. En fait cette hypothèse est inutile et la démonstration s'applique sans modification aux variétés ouvertes (sans bord) indépendamment de la donnée de toute structure uniforme.

§ 2. Position du problème.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par V une variété différentiable ⁽²⁾ séparée, de classe C^2 , de dimension n (variété ouverte) et par G un groupe de LIE connexe de dimension r . Un G -groupe global de difféomorphismes de V est défini par une application φ de classe C^1 de $G \times V$ dans V satisfaisant à

$$(2,1) \quad \varphi(e, x) = x$$

et à

$$(2,2) \quad \varphi(hg, x) = \varphi[h, \varphi(g, x)]$$

quel que soient $x \in V$ et $g, h \in G$.

Si nous posons $\varphi^x(g) = \varphi(g, x) = y$ et $\psi^g(h) = hg$, la relation (2,2) équivaut à $\varphi^x \circ \psi^g = \varphi^y$ et entraîne

$$\delta\varphi^x(L_g) = \delta\varphi^y(L_e)$$

où L_e désigne un vecteur quelconque tangent en e à G et L_g le champ de vecteurs invariant à droite sur G , défini par $L_g = \partial\psi^g(L_e)$.

Nous identifions l'algèbre de LIE $\mathfrak{g}$ de G à l'algèbre de LIE des champs de vecteurs L_g invariants à droite sur G ; à chaque $L \in \mathfrak{g}$ correspond ainsi sur V un champ de vecteurs ξ_L défini par

$$\xi_L(x) = \delta\varphi^x(L_e).$$

Nous supposons désormais que pour chaque $x \in V$ la différentielle $\delta\varphi^x$ est de classe C^1 ; alors les champs de vecteurs ξ_L sont eux-mêmes de classe C^1 et l'application $\Theta: L \rightarrow \xi_L$ définit un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre de LIE de champs de vecteurs de classe C^1 sur V .

Inversement supposons donné un homomorphisme Θ de l'algèbre de LIE de G dans une algèbre de LIE de champs de vecteurs de classe C^1 sur V : nous dirons que Θ définit un G -groupe de *transformations infinitésimales* de V .

Le problème posé consiste à chercher les conditions que doivent remplir les données (G et Θ) pour qu'il existe une application φ de $G \times V$ dans V , satisfaisant à (2,1) et à

$$(2,3) \quad \delta\varphi^x(L_g) = \Theta(L)_{\varphi(g, x)}.$$

⁽²⁾ Dans [1] et [2] la variété V avait été supposée seulement de classe $C_{1,1}$ [ce qui signifie que les changements de coordonnées, sont définis par des fonctions pourvues de dérivées du premier ordre lipschitziennes], et les champs de vecteurs considérés, de classe $C_{1,0}$ [c'est à dire lipschitziens]. Nous avons été amenés à faire ici des hypothèses plus restrictives.

Si une telle application existe, nous dirons que Θ engendre un G -groupe global de difféomorphismes de V : on sait en effet que les relations (2,1) et (2,3) entraînent (2,2).

Or il est connu ⁽³⁾ que tout G -groupe de transformations infinitésimales de V engendre un groupe local de difféomorphismes de V : autrement dit, il existe un voisinage Ω de $\{e\} \times V$ dans $G \times V$ et une application φ de Ω dans V , définie de manière unique, satisfaisant aux relations (2,1) et (2,3). Pour que le groupe local φ se prolonge ⁽⁴⁾ en un groupe global, il faut et il suffit que pour chaque $a \in V$ l'application $\varphi^a: g \rightarrow \varphi(g, a)$ soit prolongeable à G tout entier sans cesser de satisfaire aux relations (2,3); et si G est connexe, ce problème se décompose à son tour en deux

P_1) Prolongement de $\varphi^a(g)$ le long d'un arc quelconque issu de e et tracé dans G .

P_2) Uniformité du prolongement ainsi défini.

Nous nous bornerons ici à étudier le problème P_1 ; la question P_2 est en effet résolue automatiquement si G est simplement connexe, car la valeur de $\varphi^a(g)$ obtenue par prolongement le long d'un arc γ joignant e à g ne dépend que de la classe d'homotopie de γ . Or la définition du groupe infinitésimal Θ ne fait intervenir que l'algèbre de LIE $\mathfrak{g}$ et non le groupe G lui-même: nous pouvons donc toujours supposer que G est simplement connexe. Cependant, pour plus de clarté, le problème P_1 sera étudié sans cette hypothèse.

DEFINITION. - Nous dirons que la distribution Θ est *régulière* si quel que soit $a \in V$, l'application φ^a est prolongeable le long de tout arc issu de e et tracé dans G .

Il est possible d'étudier directement le problème P_1 et de montrer ensuite que l'application obtenue par prolongement de φ^a répond aux conditions voulues quand elle est uniforme. Nous avons préféré nous ramener à un autre problème, dont l'équivalence avec P_1 (théorème 1) sera établie à l'aide des résultats de R. S. PALAIS [4]: le point de vue topologique ainsi adopté permet en effet certaines généralisations.

NOTATION. - Nous adoptons les principales notations utilisées par R. S. PALAIS et nous désignons par Θ^* la distribution involutive définie sur $G \times V$ par $\Theta_{(g,x)}^*(L) = \{L_g, \Theta(L)_x\}$; par Σ_a la feuille intégrale de la distribu-

⁽³⁾ Ce résultat, sous sa forme locale, constitue le second théorème fondamental de LIE. L'énoncé que nous donnons ici est établi par R. S. PALAIS dans [4], p. 36 à 58.

⁽⁴⁾ Le groupe local $\bar{\varphi}$ est dit prolonger φ si le domaine $\bar{\Omega}$ de $\bar{\varphi}$ contient Ω , et si on a $\bar{\varphi} = \varphi$ sur Ω .

tion Θ^* passant par le point (e, a) ; et par π_G [resp. π_V] la projection canonique de $G \times V$ sur G [resp. sur V]. L'existence du groupe local φ résulte alors essentiellement de la règle suivante ([4], Th. VII, p. 43) :

« Pour chaque $a \in V$ le graphe de φ^a dans $G \times V$ est une sous variété ouverte et connexe de Σ_a , sur laquelle π_G se réduit à un difféomorphisme ».

On en déduit immédiatement la propriété suivante

PROPOSITION 2. — *Pour que la distribution Θ soit régulière, il faut et il suffit que pour chaque $a \in V$, le couple (Σ_a, π_G) définisse un recouvrement de G .*

La notion de distribution régulière coïncide donc avec celle de distribution uniforme introduite par R. S. PALAIS (Cf. [4], th. XVII, p. 80) : la distribution Θ est régulière si, et seulement si, il existe un voisinage U de e dans G , et une application φ de $U \times V$ dans V , satisfaisant à (2,1) et à (2,3).

§ 3. Etude topologique préliminaire.

Nous allons d'abord montrer comment la donnée d'un groupe de transformations infinitésimales détermine sur V une structure uniforme $\mathcal{Q}$ et étudier les propriétés de cette structure. Nous verrons alors que la condition « Θ est régulière » équivaut à « V est complète pour la structure $\mathcal{Q}$ ».

Bien que la structure $\mathcal{Q}$ puisse être définie indépendamment de toute donnée métrique, il nous sera commode pour la suite de définir sur G une métrique riemannienne invariante à droite ; la structure $\mathcal{Q}$ peut alors être définie par un écart $e(x, y)$.

DÉFINITION. — Deux points x, y de V seront dits *G -équivalents* s'il existe un arc Γ tracé dans une feuille intégrale de Θ^* et dont la projection sur V joigne x à y .

La relation d'équivalence ainsi définie est évidemment symétrique et réflexive ; il nous faut montrer qu'elle est transitive : à cet effet, nous remarquerons d'abord que s'il existe un arc Γ tracé dans une feuille Σ et répondant aux conditions voulues, l'arc Γ_h déduit de Γ par la translation droite $R_h^* : (g, x) \rightarrow (gh, x)$ répond encore à ces conditions. Nous pouvons donc, sans restreindre la définition, imposer à Γ d'être issu du point (e, x) , par conséquent, d'être contenu dans Σ_x .

Si le point z est aussi G -équivalent à x , il existe de même un arc Γ' issu de (e, x) et contenu dans Σ_x , tel que $\pi_V(\Gamma')$ joigne x à z ; et en utilisant l'arc Γ'' constitué par la réunion de Γ et de Γ' parcourus dans des sens convenables, on voit que y est G -équivalent à z . C. q. f. d.

REMARQUE. — Nous pouvons sans modifier la relation d'équivalence précédente, imposer à Γ d'être de classe C^1 ; $\pi_G(\Gamma)$ est alors de classe C^1 .

DÉFINITION. — Si x et y sont deux points G -équivalents de V , nous poserons

$$e(x, y) = \inf [\text{longueur } \pi_G(\Gamma)]$$

où Γ désigne un arc quelconque de classe C^1 tracé dans une feuille intégrale de Θ^* et tel que $\pi_V(\Gamma)$ joigne x à y (l'existence de tels arcs résultant de la remarque précédente).

Si x et y ne sont pas G -équivalents, nous poserons $e(x, y) = +\infty$.

Par le même procédé qui nous a servi à établir la transitivité de la G -équivalence, on établirait sans peine que $e(x, y)$ satisfait à l'inégalité triangulaire [la translation droite R_h^* ne modifie pas en effet la longueur de $\pi_G(\Gamma)$]. Nous désignerons par $\mathcal{Q}$ la structure uniforme définie sur V par l'écart $e(x, y)$: et pour éviter les confusions, la structure topologique qui se déduit de la structure de variété de V sera désignée par $\mathbf{f}$.

La distance géodésique de deux points g, h de G (c'est à dire la borne inférieure des longueurs des arcs joignant g à h dans b) sera désignée par $d(g, h)$.

PROPRIÉTÉS DE LA STRUCTURE $\mathcal{Q}$.

PROPOSITION 3. — La structure topologique associée à $\mathcal{Q}$ est plus fine que $\mathbf{f}$.

Soit, en effet, w un $\mathbf{f}$ -voisinage donné d'un point a de V . La restriction de π_V à Σ_a étant $\mathbf{f}$ -continue, $S = \pi_V^{-1}(w) \cap \Sigma_a$ est un voisinage de (e, a) dans Σ_a ; et puisque la restriction de π_G à Σ_a est un difféomorphisme local, $\pi_G(S)$ est un voisinage de e . Il existe donc un nombre $\alpha > 0$ tel que $\pi_G(S)$ contienne la boule de G définie par $d(e, g) < \alpha$; il en résulte que w contient la boule de V définie par $e(a, x) < \alpha$: donc w est un $\mathcal{Q}$ -voisinage de a . C. q. f. d.

PROPOSITION 4. — *Quel que soit le point a de V , $e(a, x)$ est une fonction semi-continue supérieurement de x pour la topologie $\mathbf{f}$.*

Chaque point de V admettant une base dénombrable de $\mathbf{f}$ -voisinages, il nous suffit d'établir que si $b \in V$ est limite (pour la topologie $\mathbf{f}$) d'une suite x_n satisfaisant à $e(a, x_n) \leq \alpha$, alors $e(a, b) \leq \alpha$, quel que soit $a \in V$.

La propriété n'a besoin d'être démontrée que si $\alpha < \infty$. Alors, les points x_n sont G -équivalents à a , et, quel que soit $\varepsilon > 0$ donné il existe dans Σ_a une suite d'arcs Γ_n tels que $\pi_V(\Gamma_n)$ joigne a à x_n et que la longueur de $\pi_G(\Gamma_n)$ soit inférieure à $\alpha + \varepsilon$. Désignons par g_n l'extrémité de $\pi_G(\Gamma_n)$. La boule de G définie par $d(e, g) \leq \alpha + \varepsilon$ étant compacte ⁽⁵⁾ nous pouvons, par

⁽⁵⁾ Pour une démonstration de ce fait, voir par exemple, L. CARLING, • Bull. Soc. Math. France •, t. 88 (1960), p. 74.

extraction d'une suite partielle, supposer que la suite g_n converge vers un point g de G , et que la série $\sum d(g_n, g_{n+1})$ est convergente. On sait ⁽⁶⁾ qu'il existe un voisinage U de e dans G et un voisinage w de b dans V tels que, pour chaque $x \in w$, la restriction de π_G à la composante connexe de (e, x) dans $\Sigma_x \cap \pi_G^{-1}(U)$ soit un difféomorphisme. Il existe d'autre part un entier N tel que, pour $n \geq N$, le point $g_{n+1}g_n^{-1}$ puisse être joint à e par un arc de longueur inférieure à $2d(g_n, g_{n+1})$ et tracé dans U . Par relèvement dans Σ_{x_n} et translation droite, on en déduit, pour $n \geq N$, l'existence d'un arc Γ'_n joignant (g_n, x_n) à (g_{n+1}, x_{n+1}) dans Σ_a , et tel que la longueur de $\pi_G(\Gamma'_n)$ soit inférieure à $2d(g_n, g_{n+1})$. La réunion de Γ_k ($k \geq N$) et des arcs Γ'_n ($n \geq k$) constitue un arc C_k joignant (e, a) à (g, b) dans Σ_a , et tel que la longueur de $\pi_G(C_k)$ soit inférieure à $\alpha + \varepsilon + 2 \sum_{n \geq k} d(g_n, g_{n+1})$. En faisant tendre k vers l'infini, on en déduit l'inégalité $e(a, b) \leq \alpha + \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$. C. q. f. d.

PROPOSITION 5. — Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy pour la structure $\mathcal{Q}$, admettant une valeur d'adhérence a pour la topologie $\mathbf{f}$. Alors cette suite converge vers a pour la topologie définie par $\mathcal{Q}$ (et à fortiori pour la topologie $\mathbf{f}$).

Donnons nous en effet $\varepsilon > 0$, et soit N assez grand pour que les inégalités $n > N$ et $p > N$ entraînent $e(x_n, x_p) < \varepsilon$; en choisissant une suite d'entiers p_k telle que x_{p_k} tende vers a , on a, par passage à la limite et application de la proposition précédente, l'inégalité $e(x_n, a) < \varepsilon$. Cette dernière inégalité étant vraie pour $n > N$, on en déduit que x_n tend vers a pour la structure $\mathcal{Q}$.

THÉOREME I. — Pour que la distribution Θ soit régulière, il faut et il suffit que V soit complète pour la structure $\mathcal{Q}$.

a) La condition est nécessaire.

Si Θ est régulière nous savons qu'il existe un voisinage U de e dans G tel que, pour tout $a \in V$, π_G réalise un difféomorphisme de la composante connexe de (e, a) dans $\Sigma_a \cap \pi_G^{-1}(U)$ sur U ; et il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que U contienne la boule de G définie par $d(e, g) \leq \alpha$.

Soit alors $\{x_n\}$ une suite de CAUCHY pour la structure $\mathcal{Q}$, et soit N assez grand pour que les inégalités $p > N$ et $n > N$ entraînent $e(x_n, x_p) < \alpha$. Fixons x_n ($n > N$); à chaque point x_p d'indice $p > N$ nous pouvons faire correspondre un arc Γ_p issu de (e, x_n) et contenu dans $\Sigma_{x_n} \cap \pi_G^{-1}(U)$, tel que $\pi_V(\Gamma_p)$ joigne x_n à x_p , et que la longueur de $\pi_G(\Gamma_p)$ soit inférieure à α . De la suite $\pi_G(\Gamma_p)$ nous pouvons extraire une suite partielle convergeant vers un arc γ issu de e , contenu dans U , et de longueur inférieure à α ; cet arc γ

⁽⁶⁾ Voir [4], p. 48 (corollaire du th. IX).

admet dans Σ_{x_n} un relèvement Γ d'origine (e, x_n) , et Γ est limite d'une suite partielle extraite de Γ_p . Par projection sur V on en déduit qu'il est possible d'extraire, de la suite $\{x_p\}$, une suite partielle convergeant dans la topologie $\mathbf{f}$. Comme cette suite est de CAUCHY pour la structure $\mathcal{Q}$, il résulte de la proposition 5, que la suite $\{x_p\}$ est convergente pour la structure $\mathcal{Q}$.

b) *La condition est suffisante.*

Supposons Θ non régulière. Il existe alors un point a de V et un arc γ joignant e à un point g_0 dans G , tels que $\varphi(g, a)$ soit défini sur l'arc semi ouvert $[eg_0[$ est ne soit pas prolongeable en g_0 ; et on sait ([4], Ch. III, th. VI, p. 67) que $\varphi(g, a)$ tend vers le point à l'infini de V quand g tend vers g_0 sur γ : si $\{g_n\}$ est une suite de points de γ convergeant vers g_0 , la suite $x_n = \varphi(g_n, a)$ est une suite de CAUCHY pour la structure $\mathcal{Q}$, non convergente. C. q. f. d.

§ 4. Une condition de régularité suffisante.

Le théorème 1 nous a fourni un critère permettant (en principe) de reconnaître si la distribution Θ est régulière. Mais ce critère a l'inconvénient de faire intervenir le groupe local engendré par Θ , c'est à dire de supposer qu'on a intégré localement le système différentiel (2,3). Nous allons maintenant établir d'autres critères qui n'utilisent pas le groupe local φ , mais seulement les données $(G$ et $\Theta)$. Dans chacun des cas nous commencerons par établir une condition suffisante qui sera ensuite transformée de façon à fournir une condition nécessaire et suffisante. La première s'appuie sur le principe suivant.

PROPOSITION 6. — Soient V et $\bar{V}$ deux variétés portant chacune un G -groupe de transformations infinitésimales et soient $\mathcal{Q}$, $\bar{\mathcal{Q}}$ les structures uniformes respectivement associées à ces groupes. Pour que V soit complète pour la structure $\mathcal{Q}$ il suffit que $\bar{V}$ soit complète pour $\bar{\mathcal{Q}}$ et qu'il existe une application f de $\bar{V}$ dans V satisfaisant aux conditions suivantes

a) f est propre ⁽⁷⁾ pour les structures de variété $\mathbf{f}$ et $\bar{\mathbf{f}}$.

b) f est uniformément continue pour les structures $\mathcal{Q}$ et $\bar{\mathcal{Q}}$.

Soit en effet $\{x_n\}$ ($n \geq 1$) une suite de CAUCHY pour la structure $\mathcal{Q}$ sur V ; d'après b) la suite $y_n = f(x_n)$ est une suite de CAUCHY pour $\bar{\mathcal{Q}}$ sur $\bar{V}$; soit y_0 sa limite. L'ensemble $\bar{e}$ constitué par tous les y_i ($i \geq 0$) est compact pour $\bar{\mathbf{f}}$, donc $e = f^{-1}(\bar{e})$ est compact pour $\mathbf{f}$; on en déduit que la suite $\{x_n\}$,

⁽⁷⁾ Rappelons qu'une application est dite propre si l'image réciproque d'un compact quelconque est un compact.

qui est contenue dans e , admet au moins une valeur d'adhérence pour la topologie $\mathbf{f}$; et comme cette suite est de CAUCHY pour la structure $\mathfrak{A}$, elle est convergente (application de la proposition 5). C. q. f. d.

Nous sommes donc ramenés à chercher un critère permettant d'affirmer qu'une application de V dans $\bar{V}$ est uniformément continue pour les structures $\mathfrak{A}$ et $\bar{\mathfrak{A}}$.

PROPOSITION 7. — Soient V et $\bar{V}$ deux variétés sur lesquelles les distributions Θ et $\bar{\Theta}$ définissent respectivement un G -groupe de transformations infinitésimales, et soient $\mathfrak{A}$ et $\bar{\mathfrak{A}}$ les structures uniformes associées. Pour qu'une application f de V dans $\bar{V}$ soit uniformément continue pour les structures $\mathfrak{A}$, $\bar{\mathfrak{A}}$, il suffit qu'il existe une application continue et bornée ⁽⁸⁾ $x \rightarrow A(x)$ de V dans l'espace $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ des transformations linéaires de $\mathfrak{g}$, satisfaisant à

$$(4,1) \quad \delta f_x \circ \Theta_x = \bar{\Theta}_{f(x)} \circ A(x).$$

DÉMONSTRATION. — Convenons de dire, pour abréger, qu'un arc C de V et un arc γ de G sont homologues s'il existe un arc Γ , tracé dans une feuille Σ de Θ^* , telle que $C = \pi_V(\Gamma)$ et $\gamma = \pi_G(\Gamma)$. Pour montrer que f est uniformément continue pour les structures $\mathfrak{A}$ et $\bar{\mathfrak{A}}$, il nous suffit d'établir la propriété suivante :

« Si l'arc C de V a un homologue γ de classe C^1 dans G , alors $f(C)$ a un homologue $\bar{\gamma}$ dans G , et le rapport (longueur $\bar{\gamma}$)/(longueur γ) est borné ».

Soit donc γ un arc de G , d'origine e , image de $[01]$ dans l'application de classe C^1 $t \rightarrow g(t)$; ses homologues dans V sont définis par des équations de la forme

$$(4,2) \quad x = \varphi[g(t), a] = X(t),$$

où a désigne un point quelconque de V .

A l'arc C défini par (4,2) correspond dans $\bar{V}$ l'arc $\bar{C}$ d'équation

$$y = f[X(t)] = Y(t)$$

et nous avons

$$Y'(t) = \delta f_{X(t)} \cdot X'(t) = [\delta f_{X(t)} \circ \delta \varphi_{g(t)}^a] \cdot g'(t)$$

soit encore, en utilisant les relations (1,3) et l'hypothèse (4,1)

$$(4,3) \quad Y'(t) = [\delta f_{X(t)} \circ \Theta_{X(t)}] \cdot g'(t) = \{ \bar{\Theta}_{Y(t)} \circ A[X(t)] \} \cdot g'(t).$$

⁽⁸⁾ La norme de $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ se déduit de celle de $\mathfrak{g}$.

Désignons par $L(t)$ le champ de vecteurs invariant à droite sur G , tel que $L_{g(t)} = g'(t)$; et soit $M(t) = A[X(t)] \cdot L(t)$ le champ de vecteurs invariant à droite qui s'en déduit par l'endomorphisme $A[X(t)]$. Nous aurons

$$Y'(t) = \bar{\Theta}_{Y(t)}[M(t)].$$

L'application A ayant été supposée continue, l'application de $\mathbb{R} \times G$ dans $\mathfrak{g}$ définie par $(t, h) \rightarrow M(t)_h$ est continue; d'autre part, pour t fixé, elle définit un champ de vecteurs invariant à droite; elle est donc de classe C^1 en h . De plus, les champs de vecteurs invariants à droite ayant une norme constante, nous avons

$$\|M(t)_h\| = \|M(t)\| \leq \alpha \|L(t)\| = \alpha \|g'(t)\|$$

où

$$\alpha = \sup_{x \in V} \|A(x)\|.$$

L'arc γ étant supposé de classe C^2 , cela prouve que $\|M(t)_h\|$ est borné. Donc l'équation différentielle

$$\frac{dh}{dt} = [M(t)]_h$$

admet une solution unique définie sur $[0, 1]$ et satisfaisant à $h(0) = e$.

Désignons par $\bar{\gamma}$ l'arc de G admettant pour représentation paramétrique la fonction $h(t)$ ainsi obtenue; et soit $Z(t) = \bar{\varphi}[h(t), \bar{a}]$ où l'on a posé $\bar{a} = f(a)$ et où $\bar{\varphi}$ désigne le groupe local engendré par $\bar{\Theta}$. Nous aurons

$$\frac{dZ}{dt} = \bar{\Theta}_{Z(t)}[M(t)] \quad \text{et} \quad Z(0) = \bar{a}$$

ce qui prouve que $Z(t)$ satisfait à la même équation différentielle (4,3) que la fonction $Y(t) = f[X(t)]$, avec la même valeur initiale $Z(0) = Y(0) = f(a)$; cette équation différentielle (4,3) satisfaisant aux hypothèses de CAUCHY-LIPSCHITZ, on en déduit l'identité $Z(t) \equiv Y(t)$.

Ainsi l'arc $\bar{C}$ admet l'arc $\bar{\gamma}$ pour homologue dans G ; et nous avons l'inégalité

$$\left\| \frac{dh}{dt} \right\| \leq \alpha \left\| \frac{dg}{dt} \right\|$$

ce qui prouve que le rapport $\frac{\text{longueur } \bar{\gamma}}{\text{longueur } \gamma}$ est borné par α . C. q. f. d.

REMARQUE. - Définissons un système de coordonnées locales sur chacune des variétés V et $\bar{V}$, et soit $\{x^i\}$ [resp. $\{y^j\}$] ce système. Désignons par $\{L_\alpha\}$ une base de $\mathfrak{g}$, et par $\{\xi_\alpha^i(x)\}$ [resp. $\bar{\xi}_\alpha^i(y)$] les composantes de $\Theta_x(L_\alpha)$ [resp. $\bar{\Theta}_y(L_\alpha)$]. La condition (4,1) équivaut aux relations ⁽⁹⁾

$$(4,4) \quad \xi_\alpha^i(x) \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^i} = A_\alpha^\beta(x) \bar{\xi}_\beta^\sigma[f(x)]$$

les coefficients $A_\alpha^\beta(x)$ étant des fonctions continues et bornées sur V .

§ 5. Premier critère.

Nous allons d'abord examiner deux cas particuliers importants des résultats précédents.

a) Cas où $\bar{V} = G$.

Le groupe G peut être considéré comme agissant sur lui-même à gauche et tenir le rôle de la variété $\bar{V}$. Si nous désignons par $\{\lambda_\alpha^\beta(g)\}$ les composantes de $(L_\alpha)_g$ dans un système de coordonnées locales $\{g^\beta\}$ sur G , et par $\rho_\alpha^\beta(g)$ la matrice inverse de $\lambda_\alpha^\beta(g)$, les conditions (4,4) s'écrivent ici

$$(5,1) \quad \xi_\alpha^i(x) \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^i}(x) \rho_\alpha^\beta[f(x)] = A_\alpha^\beta(x).$$

En rapprochant la proposition (4,2) et le théorème I, nous obtenons, dans ce cas particulier, le résultat suivant.

PROPOSITION 8. - *Pour que le G -groupe infinitesimal Θ soit régulier sur la variété V , il suffit qu'il existe une application propre f de classe C^1 de V dans G telle que les quantités*

$$A_\alpha^\beta(x) = \xi_\alpha^i(x) \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^i}(x) \rho_\alpha^\beta[f(x)]$$

soient bornées.

En effet, la continuité des $A_\alpha^\beta(x)$ résulte ici des hypothèses

Si G est de dimension 1, on retrouve, avec des hypothèses un peu plus restrictives, le résultat rappelé au début de cet article.

Il est à noter que les quantités $A_\alpha^\beta(x)$ définies par (5,1) ne dépendent que de l'application f et de la base $\{L_\alpha\}$ choisie: elles ne dépendent pas des systèmes de coordonnées locales.

⁽⁹⁾ Nous adoptons ici la convention des indices muets.

b) Cas où $\bar{V}$ est un espace homogène G/H .

Soit H un sous groupe fermé de G et soit G/H l'espace homogène constitué par les classes d'équivalence à gauche modulo H : on peut considérer que G agit à gauche sur G/H , et par conséquent appliquer la proposition 7 en prenant $\bar{V} = G/H$. Cette remarque, va nous permettre d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de régularité.

DÉFINITION 1. - Soit Θ un G -groupe de transformations infinitésimales sur une variété V . Nous dirons que Θ satisfait à la condition $\mathcal{C}_1$ s'il existe un sous groupe fermé H de G , une application propre f de V dans G/H , et une application continue et bornée A de V dans $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, satisfaisant à

$$(5,2) \quad \delta f_x \circ \Theta_x = \bar{\Theta}_{f(x)} \circ A(x)$$

où $\bar{\Theta}$ désigne le G -groupe infinitésimal associé à l'action (par translations gauches) de G sur G/H .

DÉFINITION 2. - Une partie M de V sera dite G -invariante si on a défini sur M une structure $\mathcal{S}$ de variété séparée de classe C^2 et un G -groupe infinitésimal Θ^M tels que l'injection i de M dans V soit de classe C^2 pour la structure $\mathcal{S}$, et que sa différentielle satisfasse à

$$(5,3) \quad \delta i \circ \Theta^M = \Theta.$$

THÉOREME II. - Pour que le G -groupe infinitésimal Θ engendre un G -groupe global sur la variété V , il faut et (si G est simplement connexe) il suffit que V soit la réunion d'une famille $\mathfrak{M}$ de parties G -invariantes satisfaisant à la condition $\mathcal{C}_1$.

a) La condition est nécessaire.

Si Θ engendre un G -groupe global, nous pouvons considérer V comme réunion des orbites de ses points. Si M est l'orbite de a , prenons pour H le sous groupe fermé de G laissant a invariant, et à chaque $x \in M$ faisons correspondre la classe d'équivalence à gauche modulo H constituée par les éléments $g \in G$ tels que $\varphi(g, a) = x$. Nous définissons ainsi une application biunivoque f de M sur G/H ; l'image réciproque par f de la structure de variété de G/H est une structure de variété de classe C^∞ sur M ; et l'application f satisfait évidemment à la condition (5,2) quand on prend pour A la matrice unité. D'autre part l'injection i de M dans V vérifie la relation

$$(5,4) \quad \varphi^a = i \circ f^{-1} \circ p$$

où p désigne l'application canonique de G sur G/H . L'application $f^{-1} \circ p$ étant intérieure et de classe C^∞ , la relation (5,4) détermine entièrement i , et montre que i est de classe C^2 comme φ^a .

Enfin, nous pouvons considérer G comme agissant à gauche sur G/H , le groupe infinitésimal associé $\bar{\Theta}$ étant défini par

$$\bar{\Theta}(L)_{p(g)} = \delta p(L_g).$$

Par transposition dans M , on en déduit l'existence d'un G -groupe global de difféomorphismes de M , le groupe infinitésimal associé étant défini par l'homomorphisme $\Theta^M = \delta(f^{-1}) \circ \bar{\Theta}$.

Or en différentiant la relation (5,4) on obtient

$$\delta i \circ \delta(f^{-1}) \circ \delta p(L_g) = \delta \varphi_a(L_g) = \Theta(L)_{\varphi^a(g)}$$

où L désigne un élément quelconque de $\mathfrak{g}$. Posant $y = f^{-1}[p(g)]$ et $x = i(y) = \varphi^a(g)$ on en déduit la relation

$$\delta i_y \circ \Theta^M(L)_y = \Theta(L)_x$$

qui peut s'écrire symboliquement

$$\delta i \circ \Theta^M = \Theta.$$

C. q. f. d.

b) *La condition est suffisante.*

Si G est simplement connexe, il résulte immédiatement du théorème I et des propositions 6 et 7 que G agit globalement sur chaque variété $M \in \mathfrak{M}$. Autrement dit, quels que soient $M \in \mathfrak{M}$ et $b \in M$, il existe une application φ_M^b de G dans M satisfaisant à

$$\delta \varphi_M^b(L_g) = \Theta^M(L)_y \quad [\text{où } y = \varphi_M^b(g)]$$

et à $\varphi_M^b(e) = b$.

Donc $\bar{\varphi}_M^b = i \circ \varphi_M^b$ est une application de G dans V satisfaisant à

$$\delta \bar{\varphi}_M^b(L_g) = \delta i_y \circ \delta \varphi_M^b(L_g) = \Theta(L)_x$$

si l'on a posé $x = i(y) = \bar{\varphi}_M^b(g)$.

Posons $a = i(b) = \bar{\varphi}_M^b(e)$. L'application φ_M^b coïncide avec φ^a aux points où celle-ci est définie; donc s'il existe une autre variété $M' \in \mathfrak{M}$ et un point

$b' \in M'$ tel que $i(b') = a$, on a $\bar{\varphi}_M^b(g) = \bar{\varphi}_{M'}^{b'}(g)$ pour g assez voisin de e . Si on pose $y' = \varphi_{M'}^{b'}(g)$ et $x' = i(y')$, les relations

$$\bar{\varphi}_M^b(hg) = \bar{\varphi}_M^y(h) \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_{M'}^{b'}(hg) = \bar{\varphi}_{M'}^{y'}(h)$$

montrent que l'ensemble des $g \in G$ tels que $\bar{\varphi}_M^b(g) = \bar{\varphi}_{M'}^{b'}(g)$ est ouvert. Comme cet ensemble est fermé par suite de la continuité des φ , il coïncide avec G tout entier. La valeur de $\bar{\varphi}_M^b(g)$ ne dépend donc que des points g et $a = i(b)$; si nous posons $\bar{\varphi}_M^b(g) = \Phi(g, a)$, nous obtenons un prolongement de $\varphi(g, a)$ à tout G . Chaque point a de V appartenant à un ensemble M au moins, on en déduit que le groupe infinitésimal Θ engendre bien un groupe global sur U .

§ 6. Deuxième critère.

Comme nous l'avons déjà remarqué, le théorème II a été établi sous des hypothèses de régularité plus fortes que la proposition rappelée au début de cet article. Nous allons maintenant établir un critère constituant une généralisation plus immédiate de cette proposition. Pour l'énoncer, il nous faut d'abord généraliser la notion de dérivée de LIE.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

A chaque élément L de $\mathfrak{g}$, nous faisons correspondre le sous groupe de G à un paramètre engendré par L , soit $\psi_L(t) = e^{Lt}$, c'est à dire la solution de l'équation différentielle $\psi'(t) = L_{\psi(t)}$ qui satisfait à $\psi(0) = e$.

Soit alors V une variété de classe C^1 portant un G -groupe local de transformations défini par l'application $\varphi(g, a)$ et soit $r(x)$ une fonction numérique (non nécessairement continue) définie sur V : les *nombre dérivés de Lie* de $r(x)$ au point $a \in V$, relatifs à L , sont les valeurs d'adhérence, quand t tend vers zéro, du rapport (défini pour $|t|$ assez petit):

$$\frac{1}{t} [r \circ \varphi^a \circ \psi_L(t) - r(a)].$$

[Si r est de classe C^1 ce rapport a une limite qui est la dérivée de LIE de r relative au champ $\Theta(L)$].

Par la suite, la plus grande limite de la valeur absolue de ce rapport sera désignée par $X_L(r, a)$; et nous dirons que la fonction r a tous ses nombres dérivés de LIE bornés si, pour chaque $L \in \mathfrak{g}$, $X_L(r, x)$ est borné sur V (cette borne pouvant dépendre de L).

Enfin nous dirons que r est L -Lipschitzienne de rapport k si on a

$$(6,1) \quad |r \circ \varphi^a \circ \psi_L(t) - r(a)| \leq k |t|$$

pourvu que $\varphi^a[\psi_L(t)]$ soit défini.

PROPOSITION 9. - *Pour que r soit L -Lipschitzienne de rapport k , il faut et il suffit que $X_L(r, a)$ soit borné par k quelque soit a .*

La condition est évidemment nécessaire. Inversement supposons $X_L(r, a) \leq k$ quel que soit a , et posons $\rho = r \circ \varphi^a \circ \psi_L$. Nous aurons

$$\rho(t + u) = r \circ \varphi^b \circ \psi_L(t) \quad \text{avec} \quad b = \varphi^a(u);$$

donc

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \left| \frac{1}{t} [\rho(t + u) - \rho(u)] \right| \leq k;$$

ceci étant vrai quel que soit t pourvu que $\varphi^a[\psi_L(t)]$ soit défini, on en déduit l'inégalité

$$|\rho(t) - \rho(0)| \leq k |t|$$

c'est à dire (6,1).

PROPOSITION 10. - *Pour que tous les nombres dérivés de Lie de r soient bornés, il suffit que tous les nombres dérivés relatifs à une base $\{L_x\}$ de $\mathfrak{g}$ le soient; et les relations*

$$X_{L_\alpha} \leq k_\alpha \quad \text{et} \quad L = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} L_{\alpha}$$

entraînent (6.2) $X_L \leq \sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}| k_{\alpha}$.

La proposition est évidente si r est de classe C^1 [$X_L(r, x)$ étant alors la valeur absolue de la dérivée de LIE de r relative au champ L]. Pour l'établir dans le cas général, posons $R^a = r \circ \varphi^a$. Pour que r soit L -Lipschitzienne de rapport k sur V , il est nécessaire et suffisant que R^a le soit sur G pour tout $a \in V$ [le groupe G étant considéré comme agissant à gauche sur lui-même]. Or si R^a est L_{α} -Lipschitzienne de rapport fini k_{α} pour chaque α , la fonction R^a est continue; et, dans un voisinage suffisamment petit de e , R^a peut être considéré comme limite d'une suite R_n^a de fonctions numérique de classe C^1 , toutes L_{α} -Lipschitziennes de rapport k_{α} pour chaque α : il suffit de considérer une suite S_n de voisinages compacts de e , convergeant vers e , et une

suite ω_n de fonctions positives de classe C^1 , la fonction ω_n ayant son support dans S_n et satisfaisant à

$$\int_G \omega_n(g) d\tau_g = 1$$

où $d\tau_g$ représente une mesure invariante à gauche sur G . Si v est un voisinage symétrique de e tel que R^a soit défini dans $v \times v$, et si n est assez grand pour que S_n soit contenu dans v , alors l'intégrale

$$R_n^a(g) = \int_{v \times v} \omega_n(h^{-1}g) R^a(h) d\tau_h$$

est définie pour $g \in v$; et la suite R_n^a ainsi obtenue satisfait aux conditions voulues. On a en effet, par une transformation simple

$$R_n^a[\psi_L(t)g] = \int_{v \times v} \omega_n(h^{-1}g) R^a[\psi_L(t)h] d\tau_h$$

d'où

$$| R_n^a[\psi_{L_\alpha}(t)g] - R_n^a(g) | \leq k_\alpha | t | \quad \forall \alpha$$

Si pour chaque $L \in \mathfrak{g}$ on pose

$$Y_L(R_n^a, g) = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} | R_n^a[\psi_L(t)g] - R_n^a(g) |$$

on a donc

$$Y_{L_\alpha}(R_n^a, g) \leq k_\alpha \quad \forall \alpha$$

R_n^a étant de classe C^1 , la relation $L = \sum_\alpha \lambda_\alpha L_\alpha$ entraîne alors

$$Y_L(R_n^a, g) \leq \sum_\alpha | \lambda_\alpha | k_\alpha$$

et par application de la proposition 9 appliquée à G lui-même, on en déduit l'inégalité

$$| R_n^a[\psi_L(t)g] - R_n^a(g) | \leq | t | \sum_\alpha | \lambda_\alpha | k_\alpha.$$

Si n tend vers l'infini, on voit, à la limite, que R^a est L -Lipschitzienne de rapport $\Sigma |\lambda_\alpha| k_\alpha$. C. q. f. d.

PROPOSITION 11. — *Pour que la fonction r ait tous ses nombres dérivés de Lie bornés, il faut et il suffit qu'il existe un nombre k vérifiant l'inégalité*

$$(6,3) \quad |r(x) - r(a)| \leq k e(a, x)$$

quels que soient $a, x \in V$.

RAPPEL. — Le groupe G est supposé pourvu d'une métrique riemannienne invariante à droite, qui a servi à définir sur V l'écart $e(x, y)$. A cette métrique est associée une norme sur $\mathfrak{g}$, et on a $\|L_g\| = \|L\|$ quels que soient $g \in G$ et $L \in \mathfrak{g}$.

a) Supposons l'inégalité (6,3) vérifiée quels que soient x et a . Si $|t|$ est assez petit pour que $\psi_L(t)$ soit défini, on a :

$$d[\psi_L(t), e] \leq \left| \int_0^t \|\psi'_L(u)\| du \right| = |t| \|L\|$$

d'où

$$|r \circ \varphi^a \circ \psi_L(t) - r(a)| \leq k |t| \|L\|$$

ce qui entraîne

$$X_L(r, a) \leq k \|L\|.$$

b) Supposons que r ait tous ses nombres dérivés de LIE bornés, et soit $\{L_\alpha\}$ une base de $\mathfrak{g}$. La proposition 10 nous montre que X_L admet une majoration de la forme $X_L(r, a) \leq k \|L\|$, où k est indépendant de L . On a donc

$$(6,4) \quad |r \circ \varphi^a \circ \psi_L(t) - r(a)| \leq k |t| \|L\|$$

pourvu que $\varphi^a[\psi_L(t)]$ soit défini.

Soit d'autre part ε assez petit pour que la boule $d(e, g) < \varepsilon$ soit contenue dans un voisinage canonique de e . Si $e(a, x) < \varepsilon$, nous pouvons poser $x = \varphi^a(g)$ avec $d(e, g) < \varepsilon$, et $g = \psi_L(1)$; de plus, si $\varepsilon \rightarrow 0$, g tend vers e , et le rapport $d(e, g)/\|L\|$ tend vers l'unité. Pour ε assez petit nous aurons donc $\|L\| \leq 2d(e, g)$; et par application de (6,4) on voit alors que l'inégalité entraîne

$$|r(x) - r(a)| \leq 2k\varepsilon.$$

Soient alors deux points quelconques a, x de V tels que $e(a, x)$ soit fini; et soit n la partie entière de $e(a, x)/\varepsilon$. De la façon dont $e(a, x)$ a été défini, on déduit l'existence d'une chaîne de points x_i [$i = 0, 1, 2, \dots, n+1$] tels que $x_0 = a$, $x_{n+1} = x$, et $e(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ quel que soit i . On a donc

$$|r(x) - r(a)| \leq \sum_{i=0}^n |r(x_{i+1}) - r(x_i)| \leq 2(n+1)k\varepsilon \leq 4ke(a, x)$$

c'est à dire une inégalité de la forme (6,3). C. q. f. d.

COROLLAIRE - *Si la fonction numérique r a tous ses nombres dérivés de Lie bornés, alors r est uniformément continue pour la structure $\mathfrak{L}$.*

Ces préliminaires étant établis, nous obtenons sans peine le résultat général suivant, d'où découlera le deuxième critère.

PROPOSITION 12. - *Pour la variété V soit complète pour la structure $\mathfrak{L}$ définie par le G -groupe infinitésimal Θ , il suffit qu'il existe sur V une fonction numérique $r(x)$, dont tous les nombres dérivés de Lie soient bornés, et telle que l'ensemble E_k défini par $|r(x)| \leq k$ soit compact quel que soit k pour la topologie $\mathfrak{f}$.*

Soit en effet $\{x_n\}$ une suite de CAUCHY sur V pour la structure $\mathfrak{L}$; la fonction r étant uniformément continue, la suite $\{r(x_n)\}$ est convergente, donc bornée; la suite $\{x_n\}$ est donc relativement compacte et admet une valeur d'adhérence a pour la topologie $\mathfrak{f}$; il résulte de la proposition 5 que cette suite converge vers a dans la structure $\mathfrak{L}$. C. q. f. d.

Pour énoncer commodément le deuxième critère, nous poserons la définition suivante

DÉFINITION. - *Une variété V portant un G -groupe infinitésimal Θ sera dite satisfaire à la condition $\mathcal{C}_2$ s'il existe sur V une fonction numérique r dont tous les nombres dérivés de Lie soient bornés et telle que $E_k = \{x \in V; r(x) \leq k\}$ soit compact quel que soit k .*

Nous pourrions alors énoncer.

THÉOREME III. - *Pour que le G -groupe infinitésimal Θ engendre un G -groupe global sur la variété V , il faut, et si G est simplement connexe, il suffit, que V soit la réunion de sous-variétés ouvertes G -invariantes V_α de même dimension satisfaisant à la condition $\mathcal{C}_2$.*

a) *La condition est suffisante.*

Si elle est réalisée, il résulte immédiatement de la proposition 12 et du théorème I que le G -groupe Θ est régulier sur chaque V_α . Or si $a \in V_\alpha \cap V_\beta$, les feuilles Σ_a^α et Σ_a^β de Θ relatives à V_α et V_β coïncident: donc Σ_a réalise,

comme Σ_a^2 et Σ_b^2 , un recouvrement de G . Si de plus G est simplement connexe, la restriction de π_G à Σ_a est biunivoque, et Θ engendre un G -groupe global.

b) *La condition est nécessaire.*

Supposons que Θ détermine un G -groupe global sur V , et soit $\{w_x\}$ un recouvrement de V par des cartes ouvertes relativement compactes. A chaque carte w_x faisons correspondre l'ensemble $V_x = \varphi(G, w_x)$: cet ensemble est ouvert, car c'est la réunion des ouverts $\varphi(g, w_x)$ où g parcourt G ; et la restriction de φ à $G \times w_x$ détermine sur V_x un G -groupe global de difféomorphismes. Si $x \in V_x$ désignons par $r_x(x)$ la borne inférieure des nombres $d(e, g)$ où $g \in G$ est assujetté à la condition $\varphi(g^{-1}, x) \in w_x$. La fonction $r_x(x)$ ainsi définie sur V_x satisfait aux conditions voulues: en effet, d'abord, l'ensemble défini par $r_x(x) \leq k$ est contenu dans le compact $\varphi(B_k, w_x)$ où B_k désigne la boule fermée définie par $d(e, g) \leq k$ dans G . D'autre part, si $y = \varphi(h, x)$ et si $\varphi(g^{-1}, x) \in w_x$, alors $\varphi(g^{-1}h^{-1}, y) \in w_x$. On en déduit l'inégalité

$$r_x(y) \leq d(e, hg) = d(h^{-1}, g) \leq d(e, h^{-1}) + d(e, g)$$

puis, en faisant varier successivement g et h

$$r_x(y) \leq r_x(x) + d(e, h^{-1})$$

et

$$r_x(y) \leq r_x(x) + e(x, y).$$

En échangeant les rôles de x et y , on en déduit

$$|r_x(y) - r_x(x)| \leq e(x, y),$$

ce qui prouve d'après la proposition 11, que r_x a tous ses nombre dérivés de LIE bornés.

APPLICATION.

PROPOSITION 13. - Soit V une variété complète pour la métrique riemannienne $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$;

et soit Θ un G -groupe de transformations infinitésimales de V tel que, pour chaque $L \in \mathfrak{g}$, les rapport des formes quadratique $(^{10}) X_L g_{ij} \alpha^i \alpha^j / g_{ij} \alpha^i \alpha^j$ soit borné.

Alors Θ est régulier.

(¹⁰) $X_L g_{ij}$ désigne ici la dérivée de LIE du tenseur g_{ij} relative au champ $\xi_L(x) = \Theta(L)_x$.

DÉMONSTRATION. — Désignons par $r(x)$ la distance géodésique de x à un point fixe x_0 de V ; on sait que l'ensemble $E_k = \{x; r(x) \leq k\}$ est compact quel que soit k . Posons $\xi_L(x) = \Theta(L)_x$; on établit comme dans [2] que les nombres dérivés de LIE de r relatifs à L satisfont à :

$$X_L(r, x) \leq \sup | \xi_L(x) \cdot t_k(x), |$$

où $\{t_k(x)\}$ désigne l'ensemble des vecteurs tangents en x aux diverses géodésiques joignant x_0 à x . Si l'on désigne d'autre part par $x(s)$ le point d'abscisse curviligne s sur l'une de ces géodésiques, et par $\alpha^i(s)$ les composantes de $x'(s)$, on a

$$\frac{d}{ds} [\xi_L[x(s)] \cdot x'(s)] = x'(s) \cdot \frac{D\xi}{ds} = \xi_{i,j}^L \alpha^i \alpha^j = \frac{1}{2} X_L g_{ij} \alpha^i \alpha^j$$

ou $\{\xi_i^L\}$ désigne les composantes covariantes de ξ_L . Et l'inégalité

$$| X_L g_{ij} \alpha^i \alpha^j / g_{ij} \alpha^i \alpha^j | \leq A,$$

que nous pouvons supposer vérifiée quels que soient les nombres α^i , entraîne ici

$$\left| \frac{d}{ds} \{ \xi_L[s] \cdot x'(s) \} \right| \leq \frac{A}{2}$$

puisque $g_{ij} \alpha^i(s) \alpha^j(s) = 1$.

Par intégration, on obtient l'inégalité

$$| \xi[x(s)] \cdot x'(s) | \leq \frac{A}{2} r(x) + | \xi(x_0) |.$$

On a donc

$$| X_L(r, x) | \leq \frac{A}{2} r(x) + | \xi(x_0) |$$

d'où, en posant

$$\rho(x) = \log \left[r(x) + \frac{2}{A} | \xi(x_0) | \right]$$

l'inégalité

$$| X_L(\rho, x) | \leq \frac{A}{2}.$$

La fonction $\rho(x)$ a tous ses nombres dérivés de LIE bornés; et l'ensemble $E_k' = \{x; \rho(x) \leq k\}$ est compact quel que soit k : le résultat annoncé découle du théorème III.

REMARQUE. - Les hypothèses faites sont réalisées en particulier si Θ est un groupe d'isométries (cas où $X_L g_{ij} = 0$) ou si Θ est un groupe de transformations conformes à coefficient borné [cas où $X_L g_{ij} = \lambda(L, x)g_{ij}$, avec $|\lambda|$ borné pour chaque $L \in \mathfrak{g}$].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. LELONG-FERRAND, *Sur les champs de vecteurs définissant un groupe d'homéomorphismes d'une variété différentiable*, « C. R. Acad. Sc. », 245 (1957) 1491-1493.
 - [2] —, *Sur groupes à un paramètre de transformations des variétés différentiables*, « J. Math. pures appl. », 37 (1958), 269-278.
 - [3] —, *Condition pour qu'un groupe de transformations infinitésimales engendre un groupe global*, « C. R. Acad. Sc. », 249 (1959), 1852-1854.
 - [4] R. S. PALAIS, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, « Memoirs of the Amer. Math. Soc. », n. 22 (1957).
-