Equations intégrales aux deux limites variables.

par M. MICHEL GHERMANESCU (à Bucarest, Romania)

À M. Enrico Bompiani pour son Jubilé scientifique

1. Les équations intégrales à limites variables, découvertes par VITO VOLTERRA à la fin du siècle dernier, constituent l'un des puissants instruments de recherche mathématique moderne, grâce auquel le développement de la Physique mathématique et ceux de quelques autres domaines de recherche ont pris un essor considérable.

Parmi ces équations, celles avec les deux limites variables, comprises dans le type général linéaire

$$(1) \quad p\varphi(x) = \lambda \int_{h(x)}^x K(x, s)\varphi(s)ds + qf(x)$$

— où p et q sont des constantes réelles données — forment une classe qui n'est pas toujours en accord avec la théorie de VOLTERRA. En effet, quelques-unes d'entre elles ont plutôt un caractère fonctionnel et non intégral, en ce sens qu'elles se réduisent à des équations fonctionnelles proprement dites, de sorte que leurs ensembles des solutions dépendent parfois d'une fonction arbitraire, ce qui est contraire aux théorèmes d'unicité donnés par la théorie classique de VOLTERRA. Le plus simple exemple, possédant cette particularité, a été donné par C. POPOVICI [1], qui considère l'équation intégrale

$$(2) \quad \int_{-x}^x \varphi(s)ds = f(x).$$

On voit aisément que, si $\varphi_1(x)$ en est une solution, l'équation précédente admet l'ensemble des solutions donné par

$$(3) \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) + \Phi(x),$$

où $\Phi(x)$ est une fonction impaire arbitraire, bornée et intégrable dans l'intervalle donné $(-a, a)$, dans lequel varie x . Si $f(x)$ est impaire, avec $f(0) = 0$, l'équation intégrale (2) s'écrit sous la forme

$$\int_0^x \varphi(s) ds - \int_0^{-x} \varphi(s) ds = f(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{f(-x)}{2},$$

ou encore

$$\int_0^x \varphi(s) ds - \frac{f(x)}{2} = \int_0^x \varphi(s) ds - \frac{f(-x)}{2},$$

qui montre que le premier membre est une fonction paire en x , $\Phi(x) = \Phi(-x)$,

$$(2') \quad \int_0^x \varphi(s) ds = \frac{f(x)}{2} + \Phi(x),$$

d'où, par dérivation, en supposant dérivables les fonctions $f(x)$ et $\Phi(x)$,

$$(4) \quad \varphi(x) = \frac{f'(x)}{2} + \Phi_1(x),$$

qui représente l'ensemble (3) des solutions de (2), $\Phi_1(x)$ étant ce qu'est $\Phi(x)$ dans (3), c'est à dire, une fonction impaire, bornée et intégrable dans $(-a, a)$.

2. Arrêtons-nous un peu sur l'Exemple précédent. L'équation intégrale (2) est ainsi résoluble si $f(x)$ est impaire et dérivable. Mais lorsque $f(x)$ n'est pas impaire ou dérivable, ou les deux à la fois, l'équation paraît être insoluble. Nous allons montrer qu'on peut attribuer dans ces cas une *solution généralisée* à l'équation intégrale (2).

En effet, désignons par $F(x)$ la fonction impaire dérivable, égale à $f(x)$ pour $x > 0$ et à $-f(x)$ pour $x < 0$, $-a \leq x \leq a$: l'équation intégrale (2) sera remplacée par la suivante

$$(2'') \quad \int_{-x}^x \varphi(s) ds = F(x),$$

dont l'ensemble des solutions bornées et intégrables, sera donné par

$$(4') \quad \varphi(x) = \frac{F'(x)}{2} + \Phi_1(x)$$

ou, plus précisément, par

$$(4'') \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{f'(x)}{2} + \Phi_1(x), & \text{pour } x > 0, \\ -\frac{f'(x)}{2} + \Phi_1(x), & \text{pour } x < 0, \end{cases}$$

$\Phi_1(x)$ étant comme précédemment une fonction impaire arbitraire bornée et intégrable dans $(-a, a)$.

Il est clair que (4'') se réduit à (4), lorsque $f(x)$ est impaire.

La fonction $\varphi(x)$, donnée par (4') ou (4'') sera la *solution généralisée de première espèce* de l'équation intégrale (2).

Lorsque $f(x)$ est impaire mais non dérivable dans $(-a, a)$, on ne peut pas obtenir la solution de l'équation intégrale (2) par dérivation. L'équation est d'ailleurs impossible dans le champ des solutions continues, car alors le premier membre est dérivable, tandis-que le second ne l'est pas.

L'équation intégrale (2) est soluble lorsque la fonction impaire $f(x)$ admet une dérivée généralisée,

$$\dot{f}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2}.$$

En effet, on déduit de (2),

$$\int_{-x-h}^{x+h} \varphi(s) ds = f(x+h), \quad \int_{-x+h}^{x-h} \varphi(s) ds = f(x-h),$$

donc

$$\int_{x-h}^{x+h} \varphi(s) ds + \int_{-x-h}^{-x+h} \varphi(s) ds = f(x+h) - f(x-h)$$

et, à l'aide du premier théorème de la moyenne,

$$\varphi(x + (2\theta - 1)h) + \varphi(-x + (2\theta' - 1)h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

avec $0 < \theta, \theta' < 1$. En passant à la limite, pour $h \rightarrow 0$, on obtient

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \dot{f}(x),$$

qui donne

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{2} + \Phi_1(x),$$

avec $\Phi_1(x)$ impaire, bornée et intégrale arbitraire. $\varphi(x)$ sera la *solution généralisée de seconde espèce* de l'équation intégrale (2).

Si $f(x)$ n'admet pas de dérivée généralisée, il est possible d'obtenir encore une solution de l'équation intégrale (2) si l'on peut déterminer, dans (2'), la fonction paire $\Phi(x)$ telle que $\frac{f(x)}{2} + \Phi_1(x) = f_1(x)$ soit dérivable: l'ensemble des solutions bornées de (2) sera donné alors par

$$(4_1) \quad \varphi(x) = f_1'(x) + \Phi_1(x),$$

$\Phi_1(x)$ étant, comme dans (4'), une fonction arbitraire impaire, bornée et intégrable dans $(-a, a)$. Ce sera la *solution généralisée de troisième espèce* de l'équation intégrale (2).

Enfin, il est aisé d'attribuer une *solution généralisée de quatrième espèce*, à l'équation intégrale (2), lorsque $f(x)$ n'est ni impaire ni intégrable dans $(-a, a)$, en remplaçant, dans (4') ou (4''), $f(x)$ par $f_1(x)$ ou par $f_1(x)$.

Ces considérations s'étendent à des équations intégrales plus générales que (2), comme (22), (45), etc.

3. Cependant, les résultats obtenus dans le cas de l'équation intégrale particulière (2), ne se retrouvent pas pour toute équation intégrale aux deux limites variables, quant à la puissance de l'ensemble des solutions.

Considérons en effet, l'équation intégrale suivante,

$$(5) \quad \varphi(x) = \int_{-x}^x \varphi(s) ds = (x).$$

Il est aisé de démontrer que cette équation ne peut pas avoir qu'une seule solution bornée, au plus. En effet, la différence de deux solutions, supposées existantes, satisfait à l'équation homogène

$$(6) \quad \bar{\varphi}(x) = \int_{-x}^x \bar{\varphi}(s) ds.$$

En nous limitant à la classe des solutions bornées, le second membre de cette équation étant impair ou nul, il en est de même du premier, donc $\bar{\varphi}(x)$ est une fonction impaire ou nulle. Mais alors, le second membre est identiquement nul, donc $\bar{\varphi}(x) \equiv 0$.

On peut déterminer la solution unique, bornée et intégrable de l'équation intégrale (5), en supposant $f(x)$ bornée et intégrable dans $(-a, a)$. En effet, en l'écrivant sous la forme

$$\varphi(x) - f(x) = \int_{-x}^x \varphi(s) ds,$$

on en déduit que le premier membre est une fonction impaire intégrable, $\Phi(x)$, donc

$$\varphi(x) = f(x) + \Phi(x).$$

En introduisant dans (5), on obtient, à cause de l'imparité de $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \int_{-x}^x f(s) ds.$$

de sorte que

$$(7) \quad \varphi(x) = f(x) + \int_{-x}^x f(s) ds$$

constitue la solution unique, bornée et intégrable, de l'équation intégrale (5).

4. Les exemples précédents montrent, d'une part, que la théorie de VOLTERRA ne s'applique pas à toute équation intégrale aux deux limites variables et que, d'autre part, le caractère fonctionnel, signalé par C. POPOVICI, n'appartient pas à toute équation de cette classe. C'est pourquoi, nous allons reprendre l'étude des équations intégrales (1), afin de préciser un peu ces deux catégories d'équations. Nous nous limitons au cas des fonctions bornées et intégrables, dans $(-a, a)$ ou dans le carré Γ , défini par $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$. Un résumé partiel de nos résultats a été déjà donné dans [7] et [8].

L'étude des équations intégrales (1) a été déjà faite, en partie, par V. VOLTERRA et J. PÉRÈS [2], dans le cas particulier $\theta(x) = -x$, $p = q = 1$, en réduisant l'équation considéré à un système de deux équations intégrales, du type classique (à une seule limite variable), comme il suit : en changeant x en $-x$ dans l'équation

$$(8) \quad p\varphi(x) - \lambda \int_{-x}^x K(x, s)\varphi(s) ds = qf(x),$$

on obtient le système d'équations intégrales

$$(9) \quad \begin{aligned} p\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds - \lambda \int_0^x K(x, -s)\varphi(-s)ds &= qf(x), \\ p\varphi(-x) - \lambda \int_0^x K(-x, s)\varphi(s)ds - \lambda \int_0^x K(-x, -s)\varphi(-s)ds &= qf(-x), \end{aligned}$$

que les notations

$$(10) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_1(x), & \varphi(-x) &= \varphi_2(x), \\ f(x) &= f_1(x), & f(-x) &= f_2(x), \\ K(x, s) &= K_{11}(x, s), & K(x, -s) &= K_{12}(x, s), \\ -K(-x, s) &= K_{21}(x, s), & -K(-x, -s) &= K_{22}(x, s), \end{aligned}$$

ramènent au système final

$$(11) \quad \begin{aligned} p\varphi_1(x) - \lambda \int_0^x K_{11}(x, s)\varphi_1(s)ds - \lambda \int_0^x K_{12}(x, s)\varphi_2(s)ds &= qf_1(x), \\ p\varphi_2(x) - \lambda \int_0^x K_{21}(x, s)\varphi_1(s)ds - \lambda \int_0^x K_{22}(x, s)\varphi_2(s)ds &= qf_2(x), \end{aligned}$$

qu'on peut encore condenser en une équation matricielle unique

$$(12) \quad p\Phi(x) - \lambda \int_0^x \bar{K}(x, s)\Phi(s)ds = qF(x),$$

avec

$$(13) \quad \begin{aligned} \Phi(x) &= \begin{vmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{vmatrix}, & F(x) &= \begin{vmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{vmatrix}, \\ \bar{K}(x, y) &= \begin{vmatrix} K_{11}(x, y) & K_{12}(x, y) \\ K_{21}(x, y) & K_{22}(x, y) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Le système (11) ou l'équation matricielle (12) admettent une solution unique, donnée dans les conditions de VOLTERRA, non identiquement nulle lorsque $p \neq 0$, $q \neq 0$ et identiquement nulle lorsque $q = 0$. Le cas $p = 0$, $q \neq 0$ sera examiné à part.

Pour que cette solution satisfasse aussi à l'équation intégrale (8) correspondante, il faut et il suffit que l'on ait aussi

$$(14) \quad \varphi_2(-x) = \varphi_1(x) = \varphi(x),$$

ce qui n'est pas évident à priori, mais que nous pouvons démontrer aisément avec les hypothèses faites. En effet, en posant $\varphi_2(-x) = \varphi_2(x)$, la première équation intégrale du système (11) s'écrit sous la forme

$$p\varphi_1(x) - \lambda \int_0^x K(x, s)\varphi_1(s)ds - \lambda \int_0^x K(x, -s)\bar{\varphi}_1(-s)ds = qf(x).$$

D'autre part, en changeant x en $-x$, dans la seconde, on arrive facilement à l'équation

$$p\varphi_1(x) - \lambda \int_0^x K(x, s)\varphi_1(s)ds - \lambda \int_0^x K(x, -s)\varphi_1(-s)ds = qf(-x).$$

de sorte qu'en retranchant ces deux équations, l'une de l'autre et en posant $\bar{\varphi}(x) = \varphi_1(x) - \varphi_1(x)$, on obtient l'équation homogène

$$(15') \quad p\bar{\varphi}(x) - \lambda \int_0^x K(x, s)\bar{\varphi}(s)ds - \lambda \int_0^x K(x, -s)\bar{\varphi}(-s)ds = 0$$

ou encore

$$(15) \quad p\bar{\varphi}(x) - \lambda \int_{-x}^x K(x, s)\bar{\varphi}(s)ds = 0.$$

Si $|K(x, y)|$ est borné dans Γ , l'équation intégrale (15) ne possède pas de solution bornée, autre que $\bar{\varphi}(x) \equiv 0$, donc $\bar{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x)$, ce qu'on démontre facilement par itération, en utilisant (15').

Comme application, on retrouve facilement la solution bornée de l'équation intégrale (5), pour laquelle l'équation matricielle (12) correspondante est

$$(12') \quad \Phi(x) = \int_0^x \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right\| \Phi(s)ds = F(x);$$

on vérifie sans peine que tous les noyaux itérés du noyau-matrice $\bar{K}(x, y)$ sont identiquement nuls (égaux à la matrice nulle), ce qui conduit à la solution (7), obtenue déjà par une autre voie.

Mais, si l'on considère l'équation intégrale (2), l'équation intégrale matricielle (12) devient

$$\int_0^x \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right\| \Phi(s) ds = F(x)$$

et la méthode de VOLTERRA, qui consiste en la dérivation de cette équation, conduit à

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} f'(x) \\ -f'(-x) \end{array} \right\|,$$

de laquelle on ne peut pas déduire $\Phi(x)$, car la matrice $\bar{K}(x, s)$ correspondante est singulière. Cette dernière équation conduit d'ailleurs à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = f'(x),$$

dont la résolution n'est pas comprise dans la théorie de VOLTERRA.

5. C'est donc parmi les équations intégrales de la forme

$$(16) \quad \int_{-x}^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad f(0) = 0,$$

que se trouvent celles qui ont un caractère fonctionnel, telle l'équation (2).

En supposant $K(x, y)$ et $f(x)$ dérivables par rapport à x , on en déduit

$$(17) \quad K(x, x) \varphi(x) + K(x, -x) \varphi(-x) + \int_{-x}^x K_x'(x, s) \varphi(s) ds = f'(x),$$

équation intégral-fonctionnelle, que nous allons réduire aussi à un système de deux équations de VOLTERRA en posant

$$(18) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_1(x), & \varphi(-x) &= \varphi_2(x), \\ f'(x) &= f_1(x), & f'(-x) &= f_2(x), \\ K(x, x) &= K_{11}(x), & K(x, -x) &= K_{12}(x), \\ K_x'(x, s) &= K_{11}'(x, s), & K_x'(x, -s) &= K_{12}'(x, s), \\ -K_x'(-x, s) &= K_{21}'(x, s), & -K_x'(-x, -s) &= K_{22}'(x, s); \end{aligned}$$

on obtient le système intégral

$$(19) \quad \begin{aligned} K_1(x)\varphi_1(x) + K_2(x)\varphi_2(x) + \int_0^x K_{11}(x, s)\varphi_1(s)ds + \int_0^x K_{12}(x, s)\varphi_2(s)ds &= f_1(x), \\ K_2(-x)\varphi_1(x) + K_1(-x)\varphi_2(x) + \int_0^x K_{21}(x, s)\varphi_1(s)ds + \int_0^x K_{22}(x, s)\varphi_2(s)ds &= f_2(x) \end{aligned}$$

qu'on réduit aussi à une équation matricielle unique,

$$(20) \quad \bar{K}(x)\Phi(x) + \int_0^x \bar{K}(x, s)\Phi(s)ds = F(x),$$

où $\Phi(x)$ est la matrice-colonne des fonctions $\varphi_i(x)$, $F(x)$ est la matrice-colonne des fonctions $f_i(x)$, $i = 1, 2$, tandis-que

$$(21) \quad \bar{K}(x) = \begin{vmatrix} K_1(x) & K_2(x) \\ K_2(-x) & K_1(-x) \end{vmatrix}, \quad \bar{K}(x, y) = \begin{vmatrix} K_{11}(x, y) & K_{12}(x, y) \\ K_{22}(x, y) & K_{21}(x, y) \end{vmatrix}.$$

La matrice $\bar{K}(x, y)$ est singulière pour $x = y = 0$, au moins, donc $\bar{K}(x)$ l'est aussi pour $x = 0$.

On démontre, tout comme pour le système (11), que la solution du système (19) satisfait aussi à la condition (14).

La discussion du système (19) ou de l'équation matricielle équivalente (20) se fait aisément.

En multipliant, à gauche, les deux membres de (20) par la matrice $\bar{K}^{-1}(x)$, inverse de $\bar{K}(x)$, on obtient l'équation

$$\Phi(x) + \int_0^x \bar{K}^{-1}(x)\bar{K}(x, s)\Phi(s)ds = \bar{K}^{-1}(x)F(x),$$

du type (12), avec p et q différents de zéro, mais avec un noyau discontinu au moins pour $x = y = 0$. La théorie de VOLTERRA donne le moyens de résolution d'une telle équation, dont la solution, si elle existe, conduira à celle de l'équation intégrale (16).

Si la matrice $\bar{K}(x)$ est singulière pour toute valeur de x — exemple, $K(x, y) = x^2 + x + y^2$ — on peut déterminer une matrice de même ordre, $K'(x)$, telle que le produit $K'(x)\bar{K}(x)$ soit égal à la matrice nulle; en multi-

pliant les deux membres de (20), à gauche, par $K'(x)$ on obtient

$$(21) \quad \int_0^x K'(x)K(x, s)\Phi(s)ds = K'(x)F(x),$$

qu'une ou plusieurs dérivations successives ramènent à une équation de la forme (20), etc.

Il y a, enfin, le cas où la matrice $\bar{K}(x, y)$ est nulle, ce qui arrive lorsque $K(x, y)$ ne dépend que de y , c'est à dire, le cas de l'équation intégrale

$$(22) \quad \int_{-x}^x K(s)\varphi(s)ds = f(x),$$

pour laquelle l'équation (20) correspondante est

$$(23) \quad \bar{K}(x)\Phi(x) = F(x).$$

C'est une équation fonctionnelle matricielle pure dans laquelle la matrice $K(x)$ est singulière pour toutes les valeurs de x , car $K_2(-x) = K_1(x)$, mais il n'est plus besoin de passer par (23) car, en dérivant (22), si cela est permis, on obtient

$$(24) \quad K(x)\varphi(x) + K(-x)\varphi(-x) = f'(x),$$

qui n'est autre que ce que devient la première équation (19) avec l'hypothèse considérée. L'équation fonctionnelle (24) montre que $f'(x)$ est une fonction paire en x , donc $f(x)$ est une fonction impaire ou en diffère par une constante; on peut écrire, si $f(x)$ est paire,

$$\left[K(x)\varphi(x) - \frac{f'(x)}{2} \right] + \left[K(-x)\varphi(-x) - \frac{f'(-x)}{2} \right] = 0,$$

qui montre que

$$(25) \quad K(x)\varphi(x) = \frac{f'(x)}{2} + \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ étant une fonction impaire arbitraire, bornée et intégrable dans $(-a, a)$.

Nous avons obtenu ainsi le résultat suivant

I. Avec les hypothèses faites sur $K(x, y)$ et $f(x)$, les équations intégrales aux deux limites variables (8) admettent une seule solution au plus, lorsque le noyau $K(x, y)$ dépend effectivement de x , donnée par la résolution de l'équation intégrale matricielle du type classique de Volterra (20). La solution est identiquement nulle lorsque $q = 0$.

Si $K(x, y) \equiv K(y)$ est indépendant de x et $p = 0$, l'équation intégrale (8) devient (22) et admet l'ensemble des solutions donné par (25), lorsque $f(x)$ est impaire et dérivable, autrement, l'équation peut admettre une solution généralisée.

6. La possibilité de réduire l'équation aux deux limites variables (8) au système (11) est due exclusivement au fait que $\theta(x) \equiv -x$, ce qui permet d'avoir seulement les limites 0 et x dans les intégrales qui y figurent.

Cette réduction ne saurait donc être possible lorsque $\theta(x) \equiv -x$. C'est pourquoi nous allons indiquer une autre méthode de réduction de l'équation (8) à un système de deux équations intégrales du type classique de VOLTEIRA, méthode utilisable aussi dans des cas plus généraux, comme nous le ferons voir dans la suite.

A cette fin, nous rappelons qu'une fonction d'une variable réelle x , définie dans un intervalle $(-a, a)$, peut s'écrire d'une seule manière comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire en x ; nous avons ainsi

$$(26) \quad K(x, y) = A(x, y) + B(x, y),$$

avec

$$(27) \quad A(x, y) = \frac{K(x, y) + K(-x, y)}{2}, \quad B(x, y) = \frac{K(x, y) - K(-x, y)}{2},$$

$A(x, y)$ étant ainsi une fonction paire, tandis-que $B(x, y)$ est une fonction impaire en x .

Ces précisions faites, l'équation intégrale (8) s'écrit (en supposant que les intégrales ont un sens pour $x = 0$),

$$\begin{aligned} p\varphi(x) - qf(x) &= \lambda \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds - \lambda \int_0^{-x} K(x, s)\varphi(s)ds = \\ &= \lambda \int_0^x [A(x, s) + B(x, s)]\varphi(s)ds - \lambda \int_0^{-x} [A(x, s) + B(x, s)]\varphi(s)ds, \\ p\varphi(-x) - qf(-x) &= \lambda \int_0^{-x} [A(x, s) - B(x, s)]\varphi(s)ds - \lambda \int_0^x [A(x, s) - B(x, s)]\varphi(s)ds \end{aligned}$$

donc, après addition et soustraction,

$$\begin{aligned}
 (28) \quad & p[\varphi(x) - \varphi(-x)] - q[f(x) - f(-x)] = \\
 & = 2\lambda \int_0^x A(x, s)\varphi(s)ds - 2\lambda \int_0^{-x} A(x, s)\varphi(s)ds,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (29) \quad & p[\varphi(x) + \varphi(-x)] - q[f(x) + f(-x)] = \\
 & = 2\lambda \int_0^x B(x, s)\varphi(s)ds - 2\lambda \int_0^{-x} B(x, s)\varphi(s)ds,
 \end{aligned}$$

équations qu'on peut écrire encore sous la forme

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & p\varphi(x) - qf(x) - 2\lambda \int_0^x A(x, s)\varphi(s)ds = \\
 & = p\varphi(-x) - qf(-x) - 2\lambda \int_0^{-x} A(-x, s)\varphi(s)ds,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & p\varphi(x) - qf(x) - 2\lambda \int_0^x B(x, s)\varphi(s)ds = \\
 & = -[p\varphi(-x) - qf(-x) - 2\lambda \int_0^{-x} B(-x, s)\varphi(s)ds],
 \end{aligned}$$

compte tenu de la parité de $A(x, s)$ et de l'imparité de $B(x, s)$ en x .

L'équation intégrale (30) montre que son premier membre est une fonction paire en x ; en la désignant par $2\Phi(x)$, on a

$$(32) \quad p\varphi(x) - 2\lambda \int_0^x A(x, s)\varphi(s)ds = qf(x) + 2\Phi(x).$$

De la même manière, l'équation intégrale (31) conduit à

$$(33) \quad p\varphi(x) - 2\lambda \int_0^x B(x, s)\varphi(s)ds = qf(x) + 2\Psi(x),$$

ou $\Psi(x)$ est une fonction impaire en x .

Nous démontrons maintenant que toute solution commune des équations intégrales (32) et (33), satisfait aussi — si elle existe — à l'équation intégrale initiale (8). Car, en changeant x en $-x$ dans (32) et compte tenu de la parité en x des fonctions $A(x, y)$ et $\Phi(x)$, on en déduit

$$(34) \quad p\varphi(x) - p\varphi(-x) - 2\lambda \int_{-x}^x A(x, s)\varphi(s)ds = qf(x) - qf(-x).$$

De la même manière, on déduit, de (33),

$$(35) \quad p\varphi(x) + p\varphi(-x) - 2\lambda \int_{-x}^x B(x, s)\varphi(s)ds = qf(x) + qf(-x),$$

de sorte que, en ajoutant ces deux équations, on retrouve l'équation intégrale (8).

Nous avons obtenu ainsi le résultat suivant,

II. *Toute solution bornée de l'équation intégrale aux deux limites variables (8) est solution commune des équations du type classique de Volterra (32) et (33) et réciproquement, les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, dont la première est paire et la seconde est impaire en x , étant convenablement déterminées.*

Comme application, prenons $K(x, y) = \delta(x - y)$ ou $K(x, y) \equiv 1$ donc $A(x, y) \equiv 1$, $B(x, y) \equiv 0$, $\delta(x)$ étant la fonction bien connue de DIRAC: les équations intégrales (32) et (33) deviennent

$$\begin{aligned} p\varphi(x) - 2\lambda \int_0^x \varphi(s)ds &= qf(x) + 2\Phi(x), \\ p\varphi(x) &= qf(x) + 2\Psi(x) \end{aligned}$$

dont la première devient, eu égard à la seconde,

$$\Psi(x) - \lambda q \int_0^x f(s)ds = \Phi(x)$$

et encore, en y changeant x en $-x$,

$$-\Psi(x) - \lambda q \int_0^{-x} f(s)ds = \Phi(x),$$

desquelles on déduit

$$2\Psi(x) = \lambda q \int_{-x}^x f(s) ds,$$

donc

$$(36) \quad p\varphi(x) = qf(x) + \lambda q \int_{-x}^x f(s) ds,$$

qui comprend la solution déjà obtenue pour l'équation intégrale (5), correspondant à $p = q = \lambda = 1$.

Si $p = 0$, les deux équations (34) et (35) deviennent

$$-2\lambda \int_0^x \varphi(s) ds = qf(x) + 2\Phi(x),$$

$$0 = qf(x) + 2\Psi(x).$$

La seconde équation montre que $f(x)$ doit être impaire et la dérivation de la première donne ensuite l'ensemble des solutions

$$-2\lambda \varphi(x) = qf'(x) + 2\Phi'(x),$$

qui comprend, pour $q = 1$, $\lambda = -1$, le résultat concernant l'équation intégrale (2).

7. Les résultats sont tout autres lorsque le noyau $K(x, y)$ n'est pas borné dans le carré Γ . On vérifie sans peine les curieux exemples suivants:

III. 1°. L'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-x}^x \frac{u'(s)}{u(s)} \varphi(s) ds$$

admet l'infinité dénombrable de solutions $\varphi_m(x) = u^m(x)$, lorsque $u(x)$ est impaire et m entier impair, correspondant aux valeurs propres $\lambda_m = \frac{m}{2}$.

2°. L'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-x}^x (\cos s + \cotg s) \varphi(s) ds$$

admet l'infinité dénombrable de solutions $\varphi_m(x) = \sin^{2m-1} x$, correspondant aux valeurs propres $\lambda_m = \frac{2m-1}{2}$, m étant entier.

3°. L'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-x}^x (\cos s + \cotg s) \varphi(s) ds + \sin^m x,$$

avec m entier, admet : une solution unique, donnée par l'une des expressions

$$\varphi_1(x) = \frac{2\lambda}{m-2\lambda+1} \sin^{m+1} x + \sin^m x, \quad \varphi_2(x) = \frac{m}{m-2\lambda} \sin^m x,$$

suivant que m est pair ou impair, pour toute valeur de λ qui n'est pas la moitié de $m+1$, respectivement de m ; il y a une infinité de solutions, dépendant d'une constante arbitraire C

$$\varphi(x) = \varphi_i(x) + C \sin^{2i} x,$$

lorsque λ est la moitié d'un entier impair, $\varphi_i(x)$ étant les solutions précédentes.

8. Pour étendre les résultats précédents à des équations intégrales plus générales que (8), remarquons que le passage de x à $-x$ est, en fait, le résultat de la transformation $x \rightarrow \theta(x)$, avec $\theta(x) \equiv -x$, appliquée à la variable x et que $\theta[\theta(x)] = -(-x) = x$, c'est à dire, la transformation considérée reproduit la variable x après deux itérations successives. $\theta(x)$ est, ce que nous avons dénommé ailleurs, un *argument fonctionnel bi-périodique*, cas particulier donc des arguments fonctionnels n -périodiques, considérés par nous dans des travaux antérieurs [3], [4], [5], [6].

L'extension immédiate de l'équation intégrale (8) est donc la suivante

$$(37) \quad p\varphi(x) = \lambda \int_{\theta(x)}^x K(x, s) \varphi(s) ds + qf(x),$$

avec $\theta_n(x) = \theta[\theta_{n-1}(x)] \equiv x$. Comme nous l'avons déjà remarqué, on ne peut pas réduire l'équation intégrale (37) à un système de deux équations intégrales du type classique de VOLTEIRA, tel que (11), mais nous allons la réduire à un système de n équations intégrales, analogue à celui formé par les équations intégrales (32) et (33). Nous supposons que toutes les fonctions utilisées dans ce qui suit sont fonctionnellement continues par rapport à $\theta(x)$, c'est à dire, on a $F(\theta_k) = F[\theta(\theta_{k-1})]$.

On peut écrire l'équation intégrale (37) sous la forme

$$p\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds + \lambda \int_0^{\theta(x)} K(x, s)\varphi(s)ds = qf(x),$$

de laquelle on déduit successivement

$$p\varphi(\theta) - \lambda \int_0^{\theta} K(\theta, s)\varphi(s)ds + \lambda \int_0^{\theta_2} K(\theta, s)\varphi(s)ds = qf(\theta).$$

$$p\varphi(\theta_2) - \lambda \int_0^{\theta_2} K(\theta_2, s)\varphi(s)ds + \lambda \int_0^{\theta_2} K(\theta_2, s)\varphi(s)ds = qf(\theta_2).$$

.

$$p\varphi(\theta_{n-1}) - \lambda \int_0^{\theta_{n-1}} K(\theta_{n-1}, s)\varphi(s)ds + \lambda \int_0^x K(\theta_{n-1}, s)\varphi(s)ds = qf(\theta_{n-1}).$$

En multipliant ces équations respectivement par $\alpha, \dots, \alpha^{n-1}$, avec $\alpha^n = 1$ et en ajoutant, on obtient

$$\begin{aligned} & p\varphi(x) - \lambda \int_0^x [K(x, s) - \alpha^{n-1}K(\theta_{n-1}, s)]\varphi(s)ds - qf(x) + \\ (38) \quad & \alpha p\varphi(\theta) - \lambda \int_0^{\theta} [\alpha K(\theta, s) - K(x, s)]\varphi(s)ds - q\alpha f(\theta) + \\ & \dots \dots \dots \\ & \alpha^{n-1}p\varphi(\theta_{n-1}) - \lambda \int_0^{\theta_{n-1}} [\alpha^{n-1}K(\theta_{n-1}, s) - \alpha^{n-2}K(\theta_{n-2}, s)]\varphi(s)ds - q\alpha^{n-1}f(\theta_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

équation qu'on peut encore écrire sous la forme

[illegible]

de sorte que, en posant

$$(39) \quad p\varphi(x) - \lambda \int_0^x [K(x, s) - \alpha^{n-1} K(\theta_{n-1}, s)] \varphi(s) ds - qf(x) = \Phi_x(x),$$

on obtient

$$(40) \quad \Phi_{\alpha}(x) + \alpha \Phi_{\alpha}(\theta) + \dots + \alpha^{n-1} \Phi_{\alpha}(\theta_{n-1}) = 0.$$

La fonction $\varphi(x)$, solution de l'équation intégrale aux deux limites variables (37), est ainsi solution commune des n équations intégrales du type classique de VOLTERRA (39), dans lesquelles les fonction $\Phi_n(x)$ sont des solutions de l'équation fonctionnelle (40), comprise dans une classe étudiée par nous dans les travaux déjà cités [4], [5], [6].

Réciproquement, toute solution commune aux équations intégrales (39), avec (40), satisfait aussi à l'équation intégrale aux deux limites variables (37). En effet, en remplaçant, dans (39), α successivement par 1, $\alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ et en ajoutant les relations ainsi obtenues, on arrive, compte tenu de (40), à l'équation (38). En désignant par $E(\varphi)$ l'expression

$$(41) \quad E(\varphi) = p\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds - qf(x),$$

l'équation (38) s'écrit

$$E(\varphi) + \alpha E(\varphi_1) + \dots + \alpha^{n-1} E(\varphi_{n-1}) = 0.$$

où $\varphi_k = \varphi(\theta_k)$. En donnant à α les valeurs $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ dans cette dernière relation et en ajoutant, on obtient $E(\varphi) = 0$, qui n'est autre que l'équation intégrale (37).

L'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle (40) est donné par

$$(41') \quad \Phi_\alpha(x) = u(x) - \alpha u(\theta),$$

dans laquelle $u(x)$ est une fonction arbitraire, complexe en général, fonctionnellement continue par rapport à la transformation $x \rightarrow \theta(x)$.

Comme $\alpha \neq 1$ est complexe, pour $n > 2$, les deux membres des équations intégrales (39) le sont aussi. En multipliant par α l'équation intégrale (39) correspondante et en retranchant de la première équation (39) correspondant à $\alpha = 1$, il vient

$$(42) \quad p\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds - qf(x) = \frac{\Phi_1 - \alpha\Phi_\alpha}{1 - \alpha}.$$

Le premier membre de cette équation étant réel et indépendant de α , il doit en être de même du second. En le désignant par $\Phi(x)$, nous avons le résultat suivant

IV. *Toute solution bornée de l'équation intégrale aux deux limites variables (37), avec $K(x, y)$ et $f(x)$ bornés en module, dans laquelle $\theta(x)$ est un argument fonctionnel n -périodique, $\theta_n(x) \equiv x$, est solution commune des équations intégrales du type classique de Volterra (39) et réciproquement, les fonctions $\Phi_\alpha(x)$ étant des solutions des équations fonctionnelles (40), correspondant au même α , données par (41) et telles que le rapport*

$$(43) \quad \frac{\Phi_1 - \alpha\Phi_\alpha}{1 - \alpha}$$

soit égal à une même fonction réelle, $\Phi(x)$, quelle que soit α , racine de $\alpha^n = 1$.

Dans ce cas, $\varphi(x)$ est aussi solution de l'équation intégrale

$$(44) \quad p\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds - qf(x) = \Phi(x).$$

9. Comme dans le cas de l'équation intégrale (8), les équations intégrales (37) ayant un caractère fonctionnel sont comprises dans le type

$$(45) \quad \int_{\theta(x)}^x K(x, s)\varphi(s)ds = qf(x),$$

avec $\theta_0(x) \equiv x$. On suppose que toutes les fonctions utilisées sont définies partout où les $\theta_k(x)$ existent. Une première condition de solubilité est $f(c) = 0$, avec $\theta(c) = c$.

En supposant $\theta(x)$, $f(x)$ et $K(x, y)$ dérivables par rapport à x , on déduit de (45)

$$(46) \quad K(x, x)\varphi(x) - \theta'(x)K(x, \theta)\varphi(\theta) + \int_{\theta}^x K_x'(x, s)\varphi(s)ds = qf'(x),$$

équation intégralo-fonctionnelle équivalente à l'équation intégrale (45) à cause de la condition $f(c) = 0$.

L'intégration de l'équation (46) est assez délicate et nous ne pouvons pas l'achever dans ce travail; nous donnons ici seulement quelques éléments essentiels de la solution, en faisant voir les difficultés qui s'y présentent.

Nous déterminons une solution de l'équation intégralo-fonctionnelle (46) à l'aide des approximations successives, définies par les relations

$$(47) \quad K(x, x)\varphi_k(x) - \theta'(x)K(x, \theta)\varphi_k(\theta) = - \int_{\theta}^x K_x'(x, s)\varphi_k(s)ds = f_k(x),$$

où $k = 0, 1, \dots$ et

$$(48) \quad f_0(x) = qf'(x), \quad f_k(x) = - \int_{\theta}^x K_x'(x, s)\varphi_{k-1}(s)ds.$$

La première équation d'approximation ($K=0$) donne $\varphi_0(x)$, ensuite la seconde relation (48), ($K=1$), donne $f_1(x)$ et la seconde équation d'approximation (46), ($K=1$) donne $\varphi_1(x)$, etc.

Si $K(x, x) \equiv 0$ ou $K(x, \theta) \equiv 0$, les équations intégralo-fonctionnelles (47) deviennent des simples relations de récurrence pour la détermination des approximations successives $\varphi_k(x)$.

Si l'on a, à la fois, $K(x, x) \equiv K(x, \theta) \equiv 0$, l'équation (46) se réduit à une équation du type (45), avec $K_x'(x, y)$ à la place de $K(x, y)$, que l'on dérive autant des fois jusqu'à ce que l'on obtienne une équation du type (46), dans laquelle figure au moins l'un des termes en $\varphi(x)$ ou en $\varphi(\theta)$.

En supposant $K(x, x) \equiv 0$, $K(x, \theta) \equiv 0$, les équations d'approximation (47) sont des équations fonctionnelles linéaires à argument fonctionnel n -périodique $\theta(x)$, du type étudié dans nos travaux antérieurement cités.

L'ensemble des solutions d'une telle équation s'obtient en ajoutant à une solution particulière quelconque l'ensemble des solutions de l'équation

stance assez curieuse pour une équation fonctionnelle, mais assez fréquente dans le cas des arguments fonctionnels n -périodiques, loc. cit. et [11].

La méthode des approximations successives fournit ainsi une solution pour l'équation intégrale (45),

$$(54) \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x),$$

le développement précédent convergeant absolument et uniformément dans des conditions pas très restrictives.

Cependant, nous ne pouvons pas affirmer que la solution obtenue soit unique pour l'équation intégrale (45) car, en considérant le cas particulier $K(x, y) = K(\theta, y)$, en itérant $n - 1$ fois l'équation (45) et en ajoutant les relations ainsi obtenues, il vient

$$(55) \quad f(x) + f(\theta) + \dots + f(\theta_{n-1}) = 0,$$

condition nécessaire — et suffisante d'ailleurs — pour la résolubilité de (45), qui montre, en premier lieu, que la fonction $f(x)$ n'est pas toujours arbitraire : elle doit être de la forme (dans ce cas particulier),

$$(56) \quad f(x) = g(x) - g(\theta),$$

$g(x)$ étant une fonction bien déterminée si $f(x)$ est donnée (loc. cit.). En second lieu, l'équation intégrale (45) devient alors

$$(55) \quad \int_0^x K(x, s) \varphi(s) ds - g(x) = \int_0^{\theta} K(\theta, s) \varphi(s) ds - g(\theta)$$

donc

$$(57) \quad \int_0^x K(x, s) \varphi(s) ds = g(x) + h(x),$$

où $h(x) = h(\theta)$, c'est à dire (loc. cit.)

$$(58) \quad h(x) = u(x) + u(\theta) + \dots + u(\theta_{n-1}),$$

$u(x)$ étant une fonction arbitraire.

(57) est une équation intégrale d'un type étudié par VOLTERRA, qu'on intègre en la dérivant. La solution dépend de la fonction arbitraire $u(x)$.

Si $\bar{K}(x) \equiv 0$, cette relation devient une équation fonctionnelle d'un type aussi étudié par nous (loc. cit.)

$$(59) \quad \lambda(x)\lambda(\theta) \dots \lambda(\theta_{n-1}) = 1, \quad \lambda(x) = \theta'(x) \frac{K(x, \theta)}{K(x, x)},$$

dont l'ensemble des solutions est donné par

$$(60) \quad \lambda(x) = \theta'(x) \frac{K(x, \theta)}{K(x, x)} = \varepsilon \frac{v(x)}{v(\theta)},$$

avec $\varepsilon = 1$ lorsque n est impair et $\varepsilon = \pm 1$ lorsque n est pair, $v(x)$ étant une fonction intégrable, déterminée pour $\theta(x)$ et $K(x, y)$ donnés.

L'équation (59) devient alors

$$\frac{\varphi(x)}{v(x)} = \varepsilon \frac{\varphi(\theta)}{v(\theta)},$$

équation d'un type encore étudié par nous, dont l'ensemble des solutions est donné par

$$(61) \quad \varphi(x) = v(x)[w(x) + \varepsilon w(\theta) + \dots + \varepsilon^{n-1} w(\theta_{n-1})]$$

avec $w(x)$ arbitraire et intégrable.

De ce qui précède, les conclusions suivantes s'imposent

V. *L'équation intégrale aux deux limites variables (45) n'est pas soluble que si $f(c) = 0$, $\theta(c) = c$ et si $f(x)$ satisfait à une éventuelle relation fonctionnelle.*

Si ces conditions sont remplies, l'ensemble des solutions de cette équation dépend en général d'une fonction arbitraire.

Il est clair encore que l'équation intégrale (44), avec $p = 0$, pourrait aussi servir pour l'intégration de (45).

Une première extension du cas $\theta_n(x) \equiv x$ s'obtient en supposant que $\theta(x)$ est solution d'une équation linéaire à coefficients constants

$$(62) \quad E(\theta) = a_0 \theta_n(x) + a_1 \theta_{n-1}(x) + \dots + a_{n-1} \theta(x) = A(x).$$

10. Considérons, enfin, le cas général où l'argument fonctionnel $\theta(x)$ n'est plus n -périodique dans l'équation intégrale (37). Nous écrivons alors cette équation sous la forme suivante

$$(37') \quad p\varphi(x) + \lambda \int_0^{\theta(x)} K(x, s)\varphi(s)ds = \int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds + qf(x),$$

- [5] M. GHERMANESCU, *Equations fonctionnelles à argument fonctionnel n-périodique*, « C. R. Paris », 244, 543-544 (1957).
 - [6] — —, *Ecuatii functionale lineare cu argument functional n-periodic*, « Bull. Acad. R. P. R. section math. et phys. », 9, 43-78 (1957). en roumain.
 - [7] — —, *Equations intégrales aux deux limites variables*, « C. R. Paris », 248, 1104-1105 (1959).
 - [8] — —, *Equations intégrales aux deux limites variables*, « C. R. Paris », 249, 1606-1607 (1959).
 - [9] — —, *Equations fonctionnelles du premier ordre*, « Mathematica », 18, 37-54 (1942).
 - [10] C. POPOVICI, *Les équations fonctionnelles et leur parallélisme avec les équations différentielles*, « Bull. sci. math. », 35, 213-224, 232-247 (1929).
 - [11] M. GHERMANESCU, *Sur une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, « Bull. Soc. Math. de France », 68, 109-128 (1940).
-