Relazioni fra teoremi di esistenza del minimo in campi illimitati.

Memoria di WILLIAM TRANSUE (a Pavia).

Sunto. - *Si studiano le relazioni che sussistono tra diversi teoremi, enunciati da* S. CINQUINI, *di esistenza del minimo in campi illimitati per gli integrali* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$. *Viene stabilito che alcuni di questi teoremi contengono altri come casi particolari, e si costruiscono esempi per mostrare che tra questi teoremi non sussistono altre relazioni oltre a quelle trovate.*

Nella sua opera fondamentale ([1]) L. TONELLI ha dato diversi teoremi di esistenza del minimo in campi illimitati, relativi a problemi, in forma ordinaria, del calcolo delle variazioni. Questi teoremi, e anche un teorema di MC SHANE ([2]), sono stati estesi agli integrali $I_{C^{[n]}}^{[n]} = \int\limits_{C^{[n]}} f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))dx$ da S. CINQUINI ([3]), ([4]), i cui risultati forniscono, in certi casi, estensioni anche per $n = 1$. In una Nota successiva ([5]), il CINQUINI ha modificato alcune delle proposizioni della Memoria ([4]). Recentemente ([6]) anche noi abbiamo dato un' analoga modificazione per un altro di questi teoremi.

In questa Memoria vogliamo studiare sia le relazioni che sussistono fra i teoremi della Memoria ([4]), sia quelle che intercedono fra questi teoremi modificati come in ([5]) e ([6]). Siccome l'equivalenza dei teoremi I e II di ([4]) è stata già notata dal CINQUINI, ci limitiamo allo studio delle relazioni tra i teoremi II, III, IV, e V di questa Memoria. Alcune di queste relazioni sono quasi-immediate, ma quelle tra i teoremi IV e V sono più interessanti.

([1]) L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni,* Vol II, (N. Zanichelli, Bologna, 1923), pagg. 307-312.

([2]) E. J. MC SHANE, *Existence theorems for ordinary problems of the calculus of variations (Part II),* « Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa », Vol. III, 1934, pagg. 287-315, § 11, pagg. 302-304.

([3]) S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n,* « Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa », Vol. V, 1936, pagg. 169-190.

([4]) S. CINQUINI, *Nuovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n,* « Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa », Vol. VI, 1937, pagg. 191-209.

([5]) S. CINQUINI, *Un teorema di esistenza dell'estremo in campi illimitati,* « Rend. Ist. Lombardo », Ser. III, Vol. LXXI, 1938, pagg. 211-218.

([6]) W. TRANSUE, *Sopra un teorema di Cinquini sull'esistenza dell'estremo in campi illimitati* « Rend. Ist. Lombardo », Ser. III, Vol. LXXXV, 1952.

Come vedremo, tra i teoremi della Memoria [4], i teoremi IV e V sono indipendenti e contengono, ciascuno, i teoremi II e III come casi particolari. Quando si introduce la modificazione della quale abbiamo parlato sopra, il teorema IV′ contiene tutti gli altri, compreso quello della Nota [6].

Per le definizioni e le notazioni rinviamo il lettore alle Memorie [3] e [4].

1. Innanzi tutto, richiamiamo alcune condizioni che figurano tra le ipotesi dei teoremi della Memoria [4]. Siccome la maggior parte di queste condizioni è comune a tutti i teoremi, per effettuare tale confronto possiamo limitarci a far presenti quelle che variano col variare del teorema.

C_1) *Esiste un numero finito N tale che, in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$ e per ogni valore finito di $y^{(n)}$, sia*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqq N \tag{1.1}$$

e inoltre, per $|y^{(n)}| \to \infty$, è

$$\left|\frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}}\right| \to \infty \tag{1.2}$$

uniformemente in tutto il campo $A^{[n]}$.

C_2') *In ciascun punto $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ del campo $A^{[n]}$ è, per $|y^{(n)}| \to \infty$,*

$$\left|\frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}}\right| \to \infty.$$

C_2'') *Esistono due numeri finiti $\lambda_0 > 0$, N_0, in modo che si abbia in tutto il campo $A^{[n]}$*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqq \lambda_0 \, |y^{(n)}| + N_0. \tag{1.3}$$

C_3'') *Esiste un numero finito N, in modo che si abbia, in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$, e per tutti gli $y^{(n)}$*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqq N. \tag{1.4}$$

$C_{3,\varphi}'''$) *Esiste un numero positivo λ, e una funzione $\varphi(u)$ definita per $|u| \geqq \lambda$, continua, non negativa e tale che*

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \varphi(u)du = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{-\lambda} \varphi(u)du = +\infty \tag{1.5}$$

in modo che si abbia in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$ con $|y^{(n-1)}| \geqq \lambda$,

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqq |y^{(n)}| \, \varphi(y^{(n-1)}), \tag{1.6}$$

per tutti gli $y^{(n)}$ che verificano la disuguaglianza $|y^{(n)}| \geqq 1 : \varphi(y^{(n-1)})$.

$C_4'')$ *È*

(1.7) $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \equiv g_1(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) - g_2(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ (7)

ed è possibile determinare un numero $h_1 > 2h$ *e due funzioni* $\Psi_1(u)$, $\Psi_2(u)$, *definite e continue per* $u \geq 0$, *non decrescenti, con* $\Psi_1(u)$ *concava verso l'alto, tali che sia, per* $u \to +\infty$,

(1.8) $$\Psi_1(u) - \Psi_2(u) \to +\infty$$

in modo che risulti, in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *e per tutti i valori di* $y^{(n)}$,

(1.9) $$g_1(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geq \Psi_1(h_1 | y^{(n)} |), \quad g_2(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \leq \Psi_2(| y^{(n-1)} |).$$

Ricordiamo anche la condizione $d'_m)$ del n. 3 δ) della Nota (5).

$d'_m)$ *Esiste un numero intero non negativo* $m < n$, *tale che, per* $| y^{(m)} | \to \infty$, *sia* $f \to +\infty$, *uniformemente in tutto* $A^{[n]}$ *e per tutti i valori di* $y^{(n)}$.

Vogliamo dimostrare che tra queste condizioni sussistono le seguenti relazioni, indicando con $A \Rightarrow B$ che la condizione A implica la condizione B.

$$a)\ C_1) \Rightarrow C_2'), \qquad b)\ C_1) \Rightarrow C_2'')$$

$$c)\ C_2'') \Rightarrow C_3''), \qquad d)\ C_2'') \Rightarrow C_{3,\alpha}'''), \qquad e)\ C_2'') \Rightarrow C_4'')$$

$$f)\ C_4'') \Rightarrow C_{3,\alpha}'''), \qquad g)\ C_4'') + d'_{n-1}) \Rightarrow C_3'')$$

a) Che $C_1)$ implica $C_2')$ è evidente.

b) Dimostriamo che anche $C_2'')$ è una conseguenza di $C_1)$. Infatti, per la (1.2), esiste un Y positivo, che possiamo anche supporre maggiore di $| N |$, tale che per ogni $| y^{(n)} | \geq Y$, e in tutto il campo $A^{[n]}$ è

$$| f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) | \geq | y^{(n)} |.$$

Per la (1.1) ne segue

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geq | y^{(n)} |, \qquad \text{per } | y^{(n)} | \geq Y.$$

Allora, per ogni $y^{(n)}$, e in tutto il campo $A^{[n]}$, è

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geq | y^{(n)} | + N - Y$$

e risulta la disuguaglianza (1.3) con $\lambda_0 = 1$, $N_0 = N - Y$.

c) Che $C_2'') \Rightarrow C_3'')$ è evidente; basta prendere $N = N_0$.

d) Dimostriamo che $C_2'') \Rightarrow C_{3,\alpha}''')$. Dalla $C_2'')$ abbiamo

(1.10) $$f(x, y, y, \ldots, y^{(n)}) \geq \lambda_0 | y^{(n)} | - | N_0 |.$$

(7) Diamo la condizione $C_4'')$ in una forma un po' meno restrittiva che quella della Memoria (4). È evidente che la dimostrazione del Teorema V della (4) si applica anche in questo caso.

Prendendo, nella $C'''_{3,\alpha}$), $\varphi(u) = \dfrac{\lambda_0}{1+|N_0|}$ vediamo che le condizioni (1.5) sono soddisfatte con λ scelto ad arbitrio. Fissiamo $\lambda = \dfrac{1+|N_0|}{\lambda_0}$ e abbiamo, per $|y^{(n)}| \geqq \lambda = 1 : \varphi(u)$,

$$\lambda_0 |y^{(n)}| - |N_0| \geqq \frac{\lambda_0}{1+|N_0|} |y^{(n)}|$$

e la (1.6) risulta dalla (1.10).

e) Che $C''_2) \Rightarrow C''_4)$, si vede subito. Basta prendere in $C''_4)$

$$g_1(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) - N_0$$

$$g_2(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = -N_0, \qquad \Psi_1(u) = \frac{\lambda_0}{h_1} u, \qquad \Psi_2(u) = -N_0 .$$

f) Per dimostrare che $C''_4) \Rightarrow C'''_{3,\alpha})$ possiamo supporre che

$$\lim_{u \to \infty} \Psi_2(u) = +\infty \tag{1.11}$$

perchè nel caso contrario si vede facilmente che $C''_4) \Rightarrow C''_2) \Rightarrow C'''_{3,\alpha})$. Osserviamo che, siccome la funzione $\Psi_1(u)$ è non decrescente e concava verso l'alto, è anche crescente e continua ([7']). Di più, abbiamo $\lim\limits_{u\to\infty} \Psi_1(u) = +\infty$. È definita, allora, per $u \geqq \Psi_1(0)$, la funzione inversa $\Psi_1^{-1}(u)$ ([8]), e anche essa è continua e crescente.

In virtù della (1.11), esiste sempre un $\lambda_1 > 0$ tale che

$$\Psi_2(\lambda_1) - \Psi_1(0) \geqq 0 \tag{1.12}$$

e per la (1.8) troviamo un $\lambda_2 > 0$ tale che

$$1 + \Psi_2(u) < \Psi_1(u), \qquad \text{per } u \geqq \lambda_2 . \tag{1.13}$$

Indicato con λ il più grande tra λ_1 e λ_2 e tenuta presente la (1.12), definiamo per $|u| \geqq \lambda$

$$\varphi(u) = \frac{h_1}{\Psi_1^{-1}(1 + \Psi_2(|u|))},$$

e rileviamo che, per $|u| \geqq \lambda$, $\varphi(u)$ risulta positiva e continua. Per verificare le condizioni (1.5), osserviamo che dalla (1.13), siccome Ψ_1^{-1} è crescente, segue

$$\Psi_1^{-1}(1 + \Psi_2(|u|)) < |u| \qquad \text{per } |u| \geqq \lambda$$

e perciò

$$\varphi(u) = \frac{h_1}{\Psi_1^{-1}(1 + \Psi_2(|u|))} > \frac{h_1}{|u|} \qquad \text{per } |u| \geqq \lambda.$$

Pertanto le condizioni (1.5) sono evidentemente soddisfatte.

([7']) Soltanto, ben inteso, per ogni u più grande di un certo u_0 con $u_0 \geqq 0$.

([8]) Vale a dire, se è $z = \Psi_1(t)$, definiamo $t = \Psi_1^{-1}(z)$.

Per verificare (1.6), ricordiamo che è

$$f(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n)}) \geqq \Psi_1(h_1\,|\,y^{(n)}\,|) - \Psi_2(\,|\,y^{(n-1)}\,|). \tag{1.14}$$

Il fatto che Ψ_1 è concava verso l'alto ci dà

$$\Psi_1(h_1\,|\,y^{(n}\,|) \geqq \frac{\Psi_1(k) - \Psi_1(0)}{k}\,h_1\,|\,y^{(n)}\,| + \Psi_1(0) \qquad \text{per } h_1\,|\,y^{(n)}\,| \geqq k > 0$$

e, prendendo $k = \Psi_1^{-1}(1 + \Psi_2(\,|\,y^{(n-1)}\,|)$, per $h_1\,|\,y^{(n)}\,| \geqq \Psi_1^{-1}(1 + \Psi_2(\,|\,y^{(n-1)}\,|))$

$$\Psi_1(h_1\,|\,y^{(n)}\,|) \geqq \frac{1 + \Psi_2(\,|\,y^{(n-1)}\,|) - \Psi_1(0)}{\Psi_1^{-1}(1 + \Psi_2(\,|\,y^{(n-1)}\,|))}\,h_1\,|\,y^{(n)}\,| + \Psi_1(0,$$

$$\Psi_1(h_1|y^{(n)}|) - \Psi_2(|y^{(n-1)}|) \geqq \varphi(y^{(n-1)})|y^{(n)}| + \{\varphi(y^{(n-1)})|y^{(n)}| - 1\}\{\Psi_2(|y^{(n-1)}|) - \Psi_1(0)\}.$$

Tenendo conto di (1.12), abbiamo per $|\,y^{(n)}\,| \geqq 1 : \varphi(y^{(n-1)})$ e $|\,y^{(n-1)}\,| \geqq \lambda$,

$$\Psi_1(h_1\,|\,y^{(n)}\,|) - \Psi_2(\,|\,y^{(n-1)}\,|) \geqq \varphi(y^{(n-1)})\,|\,y^{(n)}\,|.$$

Per la (1.14) la condizione $C''''_{3,\alpha}$) è, così, completamente stabilita.

g) Per dimostrare che la condizione C''_3) è una conseguenza delle C''_4) e d'_{n-1}), osserviamo che dalla d_{n-1}) segue l'esistenza di due numeri positivi M, Y tali che

$$f(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n)}) \geqq M, \qquad\qquad \text{per } |\,y^{(n-1}\,| \geqq Y.$$

Ma dalla C''_4) abbiamo per $|\,y^{(n-1)}\,| \leqq Y$

$$f(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n)}) \geqq \Psi_1(0) - \Psi_2(Y).$$

Da queste due disuguaglianze segue evidentemente la C''_3).

Così abbiamo stabilito tutte le relazioni sopra enunciate.

2. Per completare le relazioni dimostrate nel n. 1 diamo alcuni esempi, supponendo, salvo avviso contrario, che $A^{[n]}$ sia la striscia $-h \leqq x \leqq h$.

α) Esempio di funzione $f(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n)})$ la quale soddisfa alle C_2'), C''_2) e d'_{n-1}), ma non alla C_1). $(n = 2)$

$$f(x,\ y,\ y',\ y'') = \frac{y''^2}{1 + y^2} + \sqrt{1 + y''^2} + y'^2$$

β) Esempio di funzione $f(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n)})$ la quale soddisfa alle condizioni C_2') e C''_4) ma non alla C''_3). $(n = 1)$

$$f(x,\ y,\ y') = y'^2 - y$$

γ) Esempio di funzione $f(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n)})$ la quale soddisfa alle condizioni C_2'), C''_4) e d'_{n-1}) ma non alla C''_2). $n = 1$; onde $d'_{n-1}) = d'_0$)).

Definiamo una funzione $M(z)$ per $z \geqq 1$ mediante le equazioni parametriche

$$z = u^2 - \log u \qquad\qquad \text{per } u \geqq 1 \tag{2.1}$$
$$M(z) = \log u$$

e per $0 \leqq z < 1$ definiamo $M(z) \equiv 0$. Si vede che $M(z)$ è crescente per $z > 1$ e $\lim\limits_{z \to \infty} M(z) = +\infty$. Allora, prendendo

$$g_1(x, y, y') = \max \{ y'^2 - y, \ M(|y|) \} + y \ (^9)$$
$$g_2(x, y, y') = y,$$

abbiamo

$$f(x, y, y') = g_1(x, y, y') - g_2(x, y, y') = \max \{ y'^2 - y, \ M(|y|) \}.$$

È evidente che è soddisfatta la C_2').

Siccome è

$$f(x, y, y') \geqq M(|y|),$$

f soddisfa alla condizione d_0'). Abbiamo anche

$$g_1(x, y, y') \geqq y'^2$$

e la C_4'') è soddisfatta. Ma, in corrispondenza a ogni $y' \geqq 1$, abbiamo un $y > 0$ tale che

$$y'^2 - y = \log y'$$

e per ogni coppia (y, y') così determinata, dalla (2.1) si trae, $M(y) = \log y'$ e

$$f(x, y, y') = \log y'.$$

Questa uguaglianza mostra che la $f(x, y, y')$ non può soddisfare alla condizione C_2'') [10].

δ) Esempio di funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ la quale soddisfa alle condizioni C_2'), C_3''), $C_{3,\alpha}'''$) e d'_{n-1}) ma non alla C_4''). $(n = 1)$

$$f(x, y, y') = \frac{y'^2}{y^2} + |y|,$$

intendendo che nel campo $A^{[1]}$ sia $|y| \geqq \sigma > 0$. Si verifica immediatamente che f soddisfa alla condizione $C_{3,\beta}'''$) della Memoria [4], pag. 204, e pertanto alla $C_{3,\alpha}'''$). È pure evidente che soddisfa alla C_2'), alla C_3'') e alla d_0'). Ma se la f soddisfacesse alla C_4'') avremmo

$$f(x, y, y') \geqq \Psi_1(h_1 |y'|) - \Psi_2(|y|)$$

---

(9) Con $\max \{ y'^2 - y, \ M(|y|) \}$ si intende per ogni coppia (y, y') il maggiore dei valori $y'^2 - y$, $M(|y|)$.

(10) La f che abbiamo dato in questo esempio non ha la derivata $f_{y'}(x, y, y')$ continua nel campo $A^{[1]}$ e per ogni valore di y', ma si vede subito che si può fare una lieve modificazione per avere anche questa proprietà. Per esempio, basta prendere al posto della $\max \{ y'^2 - y, \ M(|y|) \}$ una funzione la quale sia: uguale a $M(|y|) - 1$ per $y'^2 - y \leqq \leqq M(|y|) - 1$; uguale a $y'^2 - y$ per $y'^2 - y \geqq M(|y|)$; definita nel campo $M(|y|) - 1 < < y'^2 - y < M(|y|)$ in modo che sia continua insieme con la derivata $f_{y'}$ per ogni coppia (y, y').

per ogni (x, y) di $\cdot A^{[1]}$ e per tutti i valori di y', dove la Ψ_1 e Ψ_2 hanno le proprietà indicate nella $C_4'')$. In questo caso

$$\frac{y'^2}{y^2} \geqq \Psi_1(h_1 |y'|) - \Psi_2(|y|) - |y|$$
$$\geqq \Psi_1(h_1 |y'|) - \Psi_1(|y|) + \Psi_1(|y|) - \Psi_2(|y|) - |y|$$

e siccome $\Psi_1(u) - \Psi_2(u) \to +\infty$ col tendere di u all'infinito, esiste un $Y_1 > 0$ tale che $\Psi_1(|y|) - \Psi_2(|y|) \geqq 0$ per $|y| \geqq Y_1$, vale a dire per $|y| \geqq Y_1$.

$$\frac{y'^2}{y^2} \geqq \Psi_1(h_1 |y'|) - \Psi_1(|y|) - |y|.$$

Per il fatto che $\Psi_1(u)$ è concava verso l'alto e tende a $+\infty$ per $u \to \infty$, esiste un $k > 0$ con $\Psi_1(k) - \Psi_1(0) > 0$ in modo che per ogni coppia (y, y') tale che $h_1 |y'| - |y| \geqq k$ risulta

$$\Psi_1(h_1 |y'|) - \Psi_1(|y|) \geqq \{h_1 |y'| - |y|\} \frac{\Psi_1(k) - \Psi_1(0)}{k} \equiv K\{h_1 |y'| - |y|\}$$

con

$$K = \frac{\Psi_1(k) - \Psi_1(0)}{k} > 0.$$

Allora, se $|y| \geqq Y_1$, $h_1 |y'| - |y| \geqq k$, avremmo

$$\frac{y'^2}{y^2} \geqq K\{h_1 |y'| - |y|\} - |y| = Kh_1 |y'| - (K+1)|y|$$

ossia

$$y'^2 - y^2 \{Kh_1 |y'| - (K+1)|y|\} \geq 0. \tag{2.2}$$

Consideriamo le coppie (y, y') tali che

$$Kh_1 |y'| = 2(K+1)|y|; \tag{2.3}$$

siccome è

$$h_1 |y'| - |y| = \frac{K+2}{K} |y|,$$

per $|y| \geq k \dfrac{K+2}{K}$ la condizione $h_1 |y'| - |y| \geqq k$ è soddisfatta. Per le coppie che verificano la (2.3), dalla (2.2) segue

$$\left(\frac{2(K+1)}{Kh_1} y\right)^2 - (K+1)|y|^3 \geqq 0;$$

ma questa disuguaglianza non può essere soddisfatta per $|y|$ sufficientemente grande. Da questo assurdo si conclude che la $f(x, y, y')$ non può soddisfare alla condizione $C_4'')$.

3. Utilizzando i risultati dei nn. 1 e 2, possiamo stabilire completamente le relazioni fra i teoremi I, II, III, IV, V della Memoria ([4]), e anche le relazioni fra i teoremi I-IV con la modificazione indicata dal CINQUINI nel n. 3 δ) della Nota ([5]) (che indichiamo con I′, II′, III′, IV′) e il teorema del n. 4 della Nota ([6]) (indicato con V'_{n-1}). Intenderemo, facendo un paragone tra due di questi teoremi, che il valore di m, il quale entra nella condizione d'_m), è lo stesso per i due teoremi paragonati. In particolare, paragonando qualcuno di questi teoremi col V'_{n-1}, intenderemo che $m = n - 1$.

Per questo confronto è utile ricordare che le ipotesi *a*), *b*), *d*) del teorema I di ([4]) sono comuni a tutti i teoremi II, III, IV, V, mentre in luogo della *c*) del citato teorema I figura rispettivamente in

II: la C_1)
III: le C_2') e C_2'')
IV: le C_2') e C_3'') e $C_{3,\alpha}'''$)
V: le C_2') e C_4'').

Tra le modificazioni che compaiono nei teoremi II′, III′, IV′ (in confronto a II, III, IV) richiamiamo quella relativa alla funzione f, la quale consiste nell'aggiunta della condizione d'_m).

Il simbolo $A \supset B$ ($A \not\supset B$) indica che le ipotesi del teorema A contengono (non contengono), come caso particolare, quelle del teorema B; cioè la classe di funzioni, le quali soddisfano alle ipotesi del teorema A, contiene la classe di quelle soddisfacenti alle ipotesi del teorema B.

Sussistono le relazioni

a) I = II (cioè I ⊃ II e II ⊃ I)	[Notata dal CINQUINI nella ([4])]
b) III ⊃ II	[$C_1) \Rightarrow C_2'$), $C_1) \Rightarrow C_2''$) n. 1]
c) II $\not\supset$ III	[Esempio α) n. 2]
d) IV ⊃ III	[$C_2'') \Rightarrow C_3''$), $C_2'') \Rightarrow C_{3,\alpha}'''$), n. 1]
e) III $\not\supset$ IV	[Cfr. il successivo *n*)]
f) IV $\not\supset$ V	[Esempio β) n. 2]
g) V $\not\supset$ IV	[Esempio δ) n. 2]
h) V ⊃ III	[$C_2'') \Rightarrow C_4''$) n. 1]
i) III $\not\supset$ V	[Esempio γ) n. 2]
j) I′ = II′	[per *a*)]
k) III′ ⊃ II′	[per *b*)]
l) II′ $\not\supset$ III′	[Esempio α) n. 2]
m) IV′ ⊃ III′	[per *d*]
n) III′ $\not\supset$ IV′	[ciò segue da *o*) e *p*)]
o) IV′ ⊃ V'_{n-1}	[$C_4'') \Rightarrow C_{3,\alpha}'''$), $C_4'') + d'_{n-1}) \Rightarrow C_3''$) n. 1]
p) III′ $\not\supset$ V'_{n-1}	[Esempio γ) n. 2)
q) V'_{n-1} $\not\supset$ IV′	[Esempio δ) n. 2]
r) V'_{n-1} ⊃ III′	[per *h*)].

Così possiamo dire che non esistono relazioni fra i teoremi I, II, III, IV, V oltre alle seguenti

$$\mathrm{IV} \supset \mathrm{III} \supset \mathrm{II} = \mathrm{I}, \qquad \mathrm{V} \supset \mathrm{III}.$$

Per il caso dei teoremi modificati le relazioni sono

$$\mathrm{IV}' \supset \mathrm{III}' \supset \mathrm{II}' = \mathrm{I}'$$

se $m < n - 1$; e nel caso $m = n - 1$

$$\mathrm{IV}' \supset \mathrm{V}' \supset \mathrm{III}' \supset \mathrm{II}' = \mathrm{I}'.$$

4. Osserviamo che, nelle dimostrazioni delle relazioni $C_4'') \Rightarrow C_{3,\alpha}''')$ e $C_4'') + d_{n-1}) \Rightarrow C_3'')$, non abbiamo fatto uso della condizione $h_1 > 2h$, ma soltanto del fatto che $h_1 > 0$.

Risulta che, per $m = n - 1$, il teorema IV′ contiene come caso particolare il teorema V′ anche se, nel teorema V′, alla condizione $h_1 > 2h$ è sostituita la condizione $h_1 > 0$. Da questo fatto, e dalla dimostrazione del teorema IV′ indicata nella Nota ([5]), si vede che nel teorema del n. 4 della Nota ([6]) si può sostituire alla condizione $h_1 > 2h$ la condizione meno restrittiva $h_1 > 0$.