# Ein elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra in Reellen (*).

Memoria di ERNST MOHR (in Berlin).

**Zusammenfassung.** - *Die folgende Note enthält im Stile einer Anfängervorlesung über Differential- und Integralrechnung einen elementaren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra im Reellen.*

**1.** Da sich von jedem Polynome ungeraden Grades ein Linearfaktor abspalten lässt, genügt es, zu zeigen:

*Jedes Polynom von geradem Grade $n = 2m$ lässt sich als Produkt von quadratischen Faktoren darstellen, m. a. W. ist quadratisch zerfällbar.*

Den Beweis führen wir durch Induktion nach $m$. Für $m = 1$ ist die Behauptung evident; sie sei bereits bewiesen für alle Polynome geraden Grades von einem Grad $< 2m$. Wir dürfen annehmen, dass das vorgegebene Polynom vom Grad $n = 2m$ normiert ist, und weiter, dass es definit, also positiv definit, ist: schreiben wir also dasselbe wie folgt

$$a(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n, \tag{1}$$

so ist $a_0 > 0$. Da mit $a(x)$ auch $a(x-c)$ zerfällbar ist und umgekehrt, denken wir uns den Ursprung auf der $x$-Achse bereits so gewählt, dass $f(0) = a_0$, das (oder ein) Minimum von $f(x)$ ist; dies bedeutet, dass dann $a_1 = 0$ ist. Ferner dürfen wir annehmen, dass $a_2^2 + \dots + a^2{}_{n-1} > 0$ ist, da sonst $a(x) = a_0 + x^n = a_0 + (x^2)^m$ und also nach Induktionsvoraussetzung in $x^2$ quadratisch zerfällbar ist; da aber hiervon jeder (notwendig irreduzible) quadratische Faktor $p + 2qx^2 + x^4$ $(q^2 < p^4)$ gleich $(\alpha + 2\beta x + x^2)(\alpha - 2\beta x + x^2)$ mit $\alpha = \sqrt{p}$, $\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{p} - q}{2}}$ ist (alle Wurzeln positiv genommen), so ist $a(x)$ bereits als quadratisch zerfällbar erkannt Da weiter $g(x) = a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ nach Induktionsvoraussentzung quadratisch zerfällbar ist, bedeutet die Vo-

(*) Man vergl. dazu den auf ganz anderer Grundlage beruhenden Beweis von

O. PERRON, *Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra im Reellen,* » Annali di Matematica », Tomo XXVIII. 1949, S. 184-187,

oder ferner die Arbeiten

E. MOHR, *Beweis des sogen. Fundamentalsatzes der Algebra im reellen Gebiete,* « Journal für reine und angewandte Math. », 184, 175-177, (1942), sowie einen Nachtrag dazu in demselben Journal, Bd. 189, 250-252, (1952),

E. MOHR, *Der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra als Satz der reellen Analysis,* « Math. Nachr. », 6. Bd., 65-69, (1951), nebst einer Berichtigung in derselben Zeitschrift 6. Bd. 385-386, (1952).

raussetzung $a_2^2 + \dots + a^2_{n-1} > 0$, dass $g(x)$ in zwei echte teilerfremde Faktoren zerlegt werden kann

$$
\begin{aligned}
&g(x) \equiv a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = \varphi(x)\psi(x)\\
&\varphi(x),\ \psi(x) \text{ teilerfremd, i. Z. } (\varphi(x),\ \psi(x)) = 1,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ Gradzahlen $> 0$ haben.

**2.** Sei $w(x)$ ein Polynom vom Grad $n$ und als Produkt zweier Polynome $u(x)$, $v(x)$ von einem Grad $> 0$ darstellbar

$$
\begin{aligned}
&w_0 + w_1x + \dots + w_{n-1}x^{n-1} + x^n =\\
&= (u_0 + u_1x + \dots + u_{r-1}x^{r-1} + x^r)(v_0 + v_1x + \dots + v_{s-1}x^{s-1} + x^s).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Dann berechnen sich die $w_\nu$ als Spaltensummen des folgenden Schemas, ausgenommen die letzte Spalte:

$$
\begin{array}{cccccccc}
u_0v_0 & u_0v_1 & u_0v_2 \dots u_0v_{s-1} & u_0 \cdot 1 & & & & \\
 & u_1v_0 & u_1v_1 \dots u_1v_{s-2} & u_1v_{s-1} & u_1 \cdot 1. & & & \\
 & & u_{r-1}v_0 & u_{r-1}v_1 \dots & & u_{r-1}v_{s-1} & u_{r-1} \cdot 1 & \\
 & & & 1 \cdot v_0 & 1 \cdot v_1 \dots & 1 \cdot v_{s-2} & 1 \cdot v_{s-1} & 1 \cdot 1
\end{array}
\tag{4}
$$

Bildet man die Funktionaldeterminante der $n$ « Variablen » $w_r$ nach den $n = r + s$ « Variablen » $u_\lambda$ und $v_\mu$ so ergibt sich

$$
\begin{array}{l}
r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right.\\
s\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right.
\end{array}
\left|\begin{array}{cccccccc}
v_0 & v_1 & v_2 \dots v_{s-1} & 1 & & & & \\
 & v_0 & v_1 \dots & v_{s-1} & 1 & & & \\
 & & & v_0 & v_1 \dots v_{s-1} & 1 & & \\
u_0 & u_1 & u_2 \dots & u_{r-1} & 1 & & & \\
 & u_0 & u_1 \dots & & u_{r-1} & 1 & & \\
 & & u_0 & u_1 \dots & u_{r-1} & 1 & &
\end{array}\right|
\tag{5}
$$

und dies ist bis auf ein belangloses Vorzeichen gerade die Resultante von $u(x)$ und $v(x)$. Sind nun $u(x)$ und $v(x)$ teilerfremd i. Z. $(u(x), v(x)) = 1$, so ist nach einem bekannten Satz die Resultante $\neq 0$, also auch die Funktionaldeterminante (5) $\neq 0$, und es folgt wieder nach einem bekannten Satz über implizite Funktionen, dass analog zu (3) eine Beziehung

$$
\begin{aligned}
&(w_0^* + w_1^*x + \dots + w_{n-1}^*x^{n-1} + x^n) =\\
&= (u_0^* + u_1^*x + \dots + u_{r-1}^*x^{r-1} + x^r)(v_0^* + v_1^*x + \dots + v_{s-1}^*x^{s-1} + x^s).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

gilt für alle Polynome $w_0^* + w_1^* x + \ldots + w_{n-1}^* x^{n-1} + x^n$ für die $| w_\nu^* - w_\nu | < \varepsilon$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ ist, wo $\varepsilon > 0$ eine geeignete Konstante ist. Wir drücken diesen Sachverhalt kurz so aus:

Aus $w(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit $(u(x), v(x)) = 1$ folgt eine analoge Beziehung $w^*(x) = u^*(x) \cdot v^*(x)$ für alle Polynome $w^*(x)$, die dem Polynom $w(x)$ « genügend benachbart » sind.

3. Nunmehr kehren wir zu dem vorgegebenen Polynom (1) zurück, welches positiv definit ist, und für das $a_1 = 0$, $a_2^2 + \ldots + a^2_{n-1} > 0$ ist. Wir betrachten die einparametrige Schar von Polynomen

$$\begin{aligned} (7) \qquad a(x;\, t) &= a_0 t + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \\ &= a_0 t + g(x) \end{aligned}$$

für $t \geqq 0$. Es ist $a(x;\, 0) = g(x)$, $a(x;\, 1) = a(x)$. Da $g(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ mit $(\varphi(x).\ \psi(x)) = 1$, so existiert, nach 2. Schluss eine rechtsseitige Halbumgebung von $t = 0$ derart, dass für alle $t$ aus derselben $a(x;\, t)$ quadratisch zerfällbar ist (man beachte die Induktionsvoraussetzung!). Wir betrachten die Menge aller der Zahlen $\tau > 0$ mit der Eigenschaft, dass $a(x;\, t)$ für $0 \leqq t < \tau$ zerfällbar ist, und bilden die obere Grenze $\tau^* > 0$ dieser $\tau$-Zahlen. Wir behaupten: $\tau^*$ ist nicht endlich. Wäre nämlich $\tau^*$ endlich, so wäre jedenfalls auch $a(x;\, \tau^*)$ zerfällbar. In der Tat existiert dann eine Folge von $t$-Werten $0 < \overset{(1)}{t} < \overset{(2)}{t} < \ldots < \tau^*$ mit $\overset{(k)}{t} \to \tau^*$ derart, dass $a(x;\, \overset{(k)}{t})$ zerfällbar ist für $k = 1, 2, 3, \ldots$.

$$(8) \qquad a(x;\, \overset{(k)}{t}) = \prod_{\nu=0}^{m} \{ \overset{(k)}{p}_\nu + 2 \overset{(k)}{q}_\nu x + x^2 \}$$

wobei — da $a(x;\, t)$ für $t > 0$ positiv definit ist — jeder Faktor rechts ebenfalls definit d. h. $\overset{(k)}{p}_\nu > \overset{(k)}{q}_\nu{}^2$ ist $(\nu = 1, \ldots, m)$. Speziell folgt für $x = 0$

$$(9) \qquad a_0 \overset{(k)}{t} = \prod_{\nu=1}^{m} \overset{(k)}{p}_\nu ,$$

und somit für das kleinste der $\overset{(k)}{p}_\nu$, es heisse $\overset{(k)}{p}$: $|\overset{(k)}{p}| < \sqrt[m]{a_0 \tau^*}$, und daher für das zugehörige $q_\nu$ es heisse kurz $\overset{(k)}{q}$: $|\overset{(k)}{q}| < \sqrt[2m]{a_0 \tau^*}$. Schreiben wir also (8) wie folgt

$$(10) \qquad a(x;\, \overset{(k)}{t}) = (\overset{(k)}{p} + 2 \overset{(k)}{q} x + x^2) \cdot \{ \overset{(k)}{b}_0 + \overset{(k)}{b}_1 x + \ldots + \overset{(k)}{b}_{n-3} x^{n-1} + x^{n-2} \},$$

so hat das Polynom links, sowie der erste Faktor rechts Koeffizienten, die absolut unter einer festen von $k$ nicht abhängigen Schranke liegen. Dasselbe trifft dann aber für die Koeffizienten des zweiten Faktors in (10) zu, wie man sofort aus dem zu (4) analogen Koeffizientenschema von (10) entnimmt. Folglich existiert eine gemeinsame von $k$ unabhängige Schranke $M > 0$ mit der Eigenshaft

$$\left.\begin{array}{l} |\overset{(k)}{p}| \\ |\overset{(k)}{q}| \\ |\overset{(k)}{b}_\nu| \end{array}\right\} < M \qquad (\nu = 0,\ 1, \ldots,\ n-3). \tag{11}$$

Kraft (11) können wir nun eine Teilfolge auswählen, für die $\overset{(k)}{p}$ konvergiert, aus dieser eine Teilfolge, für die auch $\overset{(k)}{q}$ konvergiert, aus dieser eine Teilfolge, für die ausserdem $\overset{(k)}{b}_0$ konvergiert, ..., schliesslich nach insgesamt $n$ Schritten eine Teilfolge, für die auch $\overset{(k)}{b}_{n-3}$ konvergiert;

$$\overset{(k)}{p} \to p, \qquad \overset{(k)}{q} \to q, \qquad \overset{(k)}{b}_\nu \to b_\nu \qquad (\nu = 0,\ 1, \ldots,\ n-3). \tag{12}$$

Dann folgt aus (10) für $k \to \infty$

$$a(x\,;\ \tau^*) = (p + 2qx + x^2) \cdot \{ b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-3} x^{n-3} + x^{n-2} \}, \tag{13}$$

was nach Induktionsvoraussetzun gbesagt: $a(x\,;\ \tau^*)$ ist quadratische zerfällbar, und da $a(x : \tau«)$ positiv definit ist, so ist auch jeder quadratische Faktor positiv definit d. h. irreduzibel.

4. Nun sind zwei Fälle möglich: entweder $a(x\,;\ \tau^*)$ besitzt wenigstens zwei verschiedene quadratische Teiler oder nicht.

Im ersten Falle lässt sich $a(x\,;\ \tau^*)$ als Produkt zweier teilerfremder Polynome mit Gradzahlen $> 0$ schreiben $a(x\,;\ \tau^*) = u(x) \cdot v(x)$ mit $(u(x),\ v(x)) > 0$. Nach 2. Schluss sind dann aber auch noch alle $a(x\,;\ t)$ zerfällbar mit $t$-Werten aus einer gewissen rechtsseitigen Halbumgebung von $t = \tau^*$, im Widerspruch zu der Eigenschaft von $\tau^*$ als oberer Grenze.

Im zweiten Falle ist $a(x\,;\ \tau^*)$ von der Form

$$a(x\,;\ \tau^*) = \{ p + 2qx + x^2 \}^m \qquad p > q^2. \tag{14}$$

Dies bedeutet aber

$$a(x\,;\ t) = a_0(t - \tau^*) + \{ (x+q)^2 + (p - q^2) \}^m, \tag{15}$$

und hier ist die rechte Seite, aufgefasst als Polynom in $(x+q)^2$ nach Induktionsvoraussetzung für alle $t > \tau^*$ quadratisch zerfällbar, folglich nach einer unter 1. gebrachten Bemerkung auch in $(x+q)$ und damit schliesslich auch in $x$ quadratisch zerfällbar. Dies verstösst aber wieder gegen die Eigenschaft von $\tau^*$ als oberer Grenze, und wir sind auch jetzt zu einem Widerspruch gelangt.

In jedem Falle ergab sich also aus der Annahme, $\tau^*$ sei endlich. ein Widerspruch. $\tau^*$ ist also nicht endlich, und folglich speziell $a(x\,;\ 1) = a(x)$ quadratisch zerfällbar.