Über eine Klasse von Hyperflächengeweben.

Memoria di HELMUT BARTSCH (a Hamburg).

Problemstellung und Ergebnisse.

Für den dreidimensionalen Raum hat Herr W. BLASCHKE Flächengewebe untersucht, die aus vier einparametrischen Scharen von Ebenen bestehen und gradlinige Diagonalen besitzen ⁽¹⁾. Zum Begriff der Diagonalen gelangt man wie folgt: Durch einen Gewebepunkt P werden die vier Gewebeebenen gelegt und mit einer von diesen vier verschiedenen, nicht durch P gehenden Ebene geschnitten. Die Schnittfigur ist ein Viereck. Die Diagonalepunkte des Vierecks bestimmen die Richtungen der Diagonalkurven in P ⁽²⁾.

In der vorliegenden Arbeit werden Hyperflächengewebe des n -dimensionalen Raumes R_n aus $n + 1$ Scharen von Hyperebenen betrachtet. In jedem dreidimensionalen Schnittgewebe dieser Hyperebenengewebe sollen die Diagonalen gerade Linien sein. Derartige Gewebe des R_n werden im folgenden Diagonalgewebe genannt.

Der Gang der Untersuchung, bei der Bezeichnungen, Formeln und Sätze über Hyperflächengewebe aus einer Arbeit des Verfassers ⁽³⁾ ohne neue Erklärung übernommen werden, gestaltet sich wie folgt: Für einen im Gewebe beweglichen Punkt werden Ableitungsgleichungen aufgestellt, d. h. die zweiten Netzableitungen (vgl. A - § 3) der Koordinaten des Punktes werden linear aus den Koordinaten des Punktes und ihren ersten Netzableitungen kombiniert und die auftretenden skalaren Faktoren mit Hilfe von Integrierbarkeitsbedingungen und der oben gemachten Voraussetzungen auf die in A - § 2 eingeführten Gewebeinvarianten b_{ikl} zurückgeführt. In einem mit dem Gewebe verknüpften Koordinatensystem lassen sich die Ableitungsgleichungen integrieren. Man erhält: Die Diagonalgewebe bestehen aus $n + 1$ Büscheln von Hyperebenen. Die diese Büschel bestimmenden $(n - 2)$ -dimensio-

⁽¹⁾ W. BLASCHKE, *Topol. Fragen der Differentialgeometrie 19. Flächengewebe und ihre Diagonalen*, § 8 ff. Hamburger Abhdl. Bd. 8, 1931, Seite 56-82.

⁽²⁾ Vgl. die in Anm. ⁽¹⁾ zitierte Arbeit und § 1 dieser Arbeit.

⁽³⁾ H. BARTSCH, *Hyperflächengewebe des n -dimensionalen Raumes*, « Annali di Matematica », Ser. IV, Tomo XXXII, 1951, S. 249-269. Formel und Sätze dieser Arbeit werden durch Voransetzung des Buchstabens A zitiert.

nalen Räume, kurz: die Bündelzentren, liegen auf einer Hyperfläche $(n-1)$ -ter Ordnung. Die Gleichungen der Bündelzentren und der Hyperfläche sind durch die Werte der Gewebeanvarianten im Koordinatenursprung bestimmt. Aus den Gleichungen für die Hyperebenenbündel kann man nun rückwärts, d. h. durch Differentiation, die Gewebeanvarianten b_{ikl} berechnen. Sie sind bis auf einen gemeinsamen Faktor ganzrationale Funktionen, in denen als Konstanten wieder nur die Werte der Invarianten im Koordinatenursprung auftreten. Diagonalgewebe, deren Invarianten in einem Punkt übereinstimmen, sind projektiv aufeinander abbildbar.

Geometrisch lassen sich die Diagonalgewebe dadurch kennzeichnen, dass es durch jeden Punkt jedes Bündelzentrums eine Gerade gibt, welche die anderen Bündelzentren trifft. Wird in einer Schnitt- R_3 -Schar des Gewebes ein Achteckgewebe ausgeschnitten, so ist das Diagonalgewebe ein $(2n+2)$ -Zellgewebe. Wenn Diagonalhyperflächenscharen existieren (vgl. A - § 8), so sind diese Hyperebenenbündel. Für die Bündelzentren des Gewebes erhält man dann anschaulich sehr einfache Ergebnisse. Aus dem Vorhandensein einer Diagonalflächenschar kann stets auf die Existenz weiterer Diagonalflächenscharen geschlossen werden.

§ 1. - Ableitungsgleichungen.

Ein im Gewebe beweglicher Punkt wird in projektiven Koordinaten mit φ bezeichnet. Aus der Definition der Differentialoperatoren Δ_k^m in A - § 3 folgt, dass der Punkt $\Delta_k^m \varphi = \varphi_k^m$ auf der Tangente in φ an die Kurve der Schnittkurvenschar $[j_1, j_2, \dots, j_{n-1}]$ ($j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \neq m, k$) liegt (Vgl. A - § 6). Durch die Wahl eines skalaren Faktors wird erreicht, dass die Determinante

$$|\varphi \varphi_1^0 \varphi_2^0 \dots \varphi_n^0| = 1$$

ist. Wegen A - (3, 2) ist dann jede der Determinanten:

$$(1, 1) \quad |\varphi \varphi_0^m \dots \varphi_{m-1}^m \varphi_{m+1}^m \dots \varphi_n^m| = \pm 1 \quad (m=0, 1, \dots, n).$$

Weil die Gewebemannigfaltigkeiten lineare Räume sind, gilt der Ansatz:

$$(1, 2) \quad \begin{aligned} \varphi_{kk}^m &= p_k^m \varphi + s_k^m \varphi_k^m \\ \varphi_{ik}^m &= q_{ik}^m \varphi + \sum_l^m t_{ikl}^m \varphi_l^m \quad (^1). \end{aligned}$$

(¹) Die Indices können die Werte 0, 1, ..., n annehmen. Ausser unter Summenzeichen bedeuten verschiedene Buchstaben auch verschiedene Indices. $\sum_l^{m,k}$ bedeutet: Man summiere von $l=0$ bis $l=n$, jedoch mit $l \neq m, k$.

Darin ist $\varphi_{ik}^m = \Delta_k^m(\Delta_i^m \varphi)$. p_k^m , q_{ik}^m , s_k^m , t_{ikl}^m sind Funktionen, die noch berechnet werden sollen.

Nun wird $\varphi_{ik}^m - \varphi_{ki}^m$ nach (1, 2) und nach der Vertauschungsregel A - (3, 4) gebildet. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$(1, 3) \quad q_{ik}^m = q_{ki}^m, \quad t_{ikl}^m = t_{kil}^m, \quad t_{iki}^m - t_{kii}^m = b_{ikm}.$$

Nach A - (3, 2) ist:

$$0 = \Delta_k^m(\varphi_k^m + \varphi_m^k) = \varphi_{kk}^m - \varphi_{mm}^k.$$

Zusammen mit (1, 2) folgt:

$$(1, 4) \quad p_k^m = p_m^k, \quad s_k^m + s_m^k = 0.$$

Wiederum nach A - (3, 2) ist

$$\varphi_{kk}^i = (\Delta_k^m - \Delta_i^m)(\Delta_k^m - \Delta_i^m)\varphi = \varphi_{kk}^m + \varphi_{ii}^m - \varphi_{ik}^m - \varphi_{ki}^m.$$

Darin werden die zweiten Ableitungen nach (1, 2) ersetzt. Durch Koeffizientenvergleich und Anwendung von (1, 3) erhält man:

$$(1, 5) \quad \begin{cases} t_{ikl}^m = 0, & q_{ik}^m = \frac{1}{2}(p_i^m - p_k^i + p_m^k), \\ t_{iki}^m = \frac{1}{2}(s_i^m + s_k^i + b_{ikm}), & t_{ikk}^m = \frac{1}{2}(s_k^m + s_i^k - b_{kim}). \end{cases}$$

Um die Gradlinigkeit der Diagonalen auszuwerten, wird zunächst ein Schnitt- R_3 der Schar $[j_1, j_2, \dots, j_{n-3}]$ betrachtet ($j_1, j_2, \dots, j_{n-3} \neq i, k, l, m$).

Abbildung 1.

Die in der Einleitung erklärte Schnittfigur ist in Abbildung 1 wiedergegeben. Die Durchstoßpunkte der Schnittgeraden der Gewebeebenen sind mit den Differentiatoren Δ_k^m versehen, zu deren Bahnkurven die Geraden gehören. Die Diagonalen treffen die Zeichenebene in den Punkten « D ». Eine einfache

Überlegung zeigt: Die Diagonalen sind Bahnkurven der Operatoren $\Delta_k^i + \Delta_l^m$, wo i, k, l, m irgend vier verschiedene der Zahlen $0, 1, \dots, n$ sind, wenn alle im Gewebe möglichen Schnitt- R_s -Scharen berücksichtigt werden. Gradlinigkeit der Diagonalen bedeutet: φ , $(\Delta_k^i + \Delta_l^m)\varphi$ und $(\Delta_k^i + \Delta_l^m)^2\varphi$ sind linear abhängig. Die Umschreibung auf den oberen Index m ergibt:

$$(\Delta_k^m - \Delta_i^m + \Delta_l^m)^2\varphi = f\varphi + g(\Delta_k^m - \Delta_i^m + \Delta_l^m)\varphi$$

mit skalaren Faktoren f und g . Die rechte Seite wird ausgerechnet und die zweiten Ableitungen nach (1, 2) und (1, 5) ersetzt. Dann müssen die Koeffizienten von φ_k^m und φ_l^m gleich, die von φ_k^m und φ_i^m bis auf das Vorzeichen gleich sein. Daraus ergibt sich nach kurzer Rechnung und Beachtung von $s_k^m + s_m^k = 0$:

$$(1, 6) \quad s_k^m + s_l^k + s_m^l = 0.$$

Es ist nach (1, 1):

$$\Delta_k^m | \varphi \varphi_1^m \dots \varphi_n^m | = 0 \quad (\text{unterer Index} \neq m).$$

Mit (1, 1), (1, 2), (1, 5) und (1, 6) erhält man:

$$(1, 7) \quad 0 = s_k^m + \sum_i^{m,k} t_{iki}^m = s_k^m + \frac{1}{2} \sum_i^{m,k} (s_k^m + b_{ikm}),$$

$$s_k^m = \frac{2}{n+1} \sum_i^{m,k} b_{ikm}.$$

Weitere Aussagen ergeben sich durch Bildung von $\varphi_{ikl}^m - \varphi_{ilk}^m$ bzw. $\varphi_{iki}^m - \varphi_{iik}^m$ ⁽⁵⁾: 1.) nach der Vertauschungsregel $A - (3, 4)$ und 2.) durch Differentiation der Gleichungen (1, 2). Die in beiden Fällen auftretenden zweiten Ableitungen von φ werden wiederum nach (1, 2) ersetzt und dann wird Koeffizientenvergleich gemacht. Aus $\varphi_{ikl}^m - \varphi_{ilk}^m$ bekommt man so bei Berücksichtigung der Gleichungen (1, 5), (1, 6) und (1, 7) durch Vergleich der Koeffizienten von φ_i^m :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n+1} \left(\sum_j^{m,k} b_{jmk}^m - \sum_j^{m,l} b_{jml}^m \right) + \\ + \frac{1}{2} (b_{ikml}^m - b_{ilmk}^m) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{n+1} \left(b_{klm} \sum_j^{k,m} b_{jmk} - b_{lkm} \sum_j^{k,m} b_{jml} \right) \\ + \frac{1}{2} (b_{klm} b_{ikm} - b_{lkm} b_{ilm}). \end{aligned} \right.$$

Die Glieder der zweiten Zeile, sowie die Glieder der ersten Zeile für $j \neq k, l, m$ heben sich nach $A - (3, 11)$ fort. Es bleibt:

$$\frac{1}{n+1} (b_{imkl}^m - b_{kmlk}^m) = \frac{1}{n+1} (b_{klm} b_{lmk} - b_{lkm} b_{kml}) = 0,$$

$$b_{lkmm} - b_{klmm} = 0.$$

⁽⁵⁾ $\varphi_{ikl}^m = \Delta_l^m \varphi_{ik}^m$.

Damit ist bewiesen:

Satz: Die Diagonalgewebe sind Flächensechseckgewebe (Vgl. A - § 9).

Nach A - Seite 265 kann man nun die das Gewebe darstellenden Pfaffschen Formen ρ_k so normieren, dass

$$(1, 8) \quad s_k^m = \frac{2}{n+1} \sum_i^{m,k} b_{imk} = 0$$

wird. Diese Normierung wird jetzt vorausgesetzt. Die Gleichungen (1, 2) lauten dann:

$$(1, 9) \quad \begin{cases} \varphi_{kk}^m = p_k^m \varphi \\ \varphi_{ik}^m = q_{ik}^m \varphi + \frac{1}{2} b_{ikm} \varphi_i^m - \frac{1}{2} b_{kim} \varphi_k^m. \end{cases}$$

In der oben beschriebenen Weise erhält man aus $\varphi_{iki}^m - \varphi_{iik}^m$:

$$(1, 10) \quad q_{ik}^m = \frac{1}{2} b_{imki}^m + \frac{1}{4} b_{kim} b_{ikm},$$

$$(1, 11) \quad p_i^m = \frac{1}{2} b_{kmii}^m + \frac{1}{4} (b_{kim})^2,$$

und aus den Koeffizienten von φ_i^m in $\varphi_{ikl}^m - \varphi_{ilk}^m$:

$$(1, 12) \quad q_{ik}^m = \frac{1}{2} b_{imik}^m + \frac{1}{4} (b_{ikm} b_{lim} - b_{kim} b_{lkm} + b_{lkm} b_{lim}).$$

Wird (1, 11) über $k \neq i, m$ summiert, so ergibt sich wegen (1, 8):

$$(1, 13) \quad p_i^m = \frac{1}{4(n-1)} \sum_k^{i,m} (b_{kim})^2.$$

Ähnlich erhält man aus (1, 10) und (1, 12):

$$(1, 14) \quad q_{ik}^m = \frac{1}{4(n-1)} (b_{kim} b_{ikm} + \sum_l^{imk} b_{lim} b_{lkm}).$$

(1, 14) und (1, 15) sind mit der zweiten Gleichung (1, 5) verträglich.

Aus den Formeln (1, 10) bis (1, 14) ergeben sich Ableitungsgleichungen für die Gewebeinvarianten b_{ikl} , die aber nicht benötigt werden, da man die Invarianten auf anderem Wege berechnen kann.

§ 2. - Integration der Ableitungsgleichungen.

φ sei jetzt ein festgewählter, regulärer Gewebepunkt. b_{ikl} , b_{iklj}^m , p_i^m , q_{ik}^m mögen in diesem Punkt die Werte B_{ikl} , B_{iklj}^m , P_i^m , Q_{ik}^m haben. Ein beliebiger Gewebepunkt lässt sich darstellen durch:

$$(2, 1) \quad \psi = \varphi + \sum_l^m \alpha_l^m \varphi_l^m,$$

wo m eine beliebige der Ziffern $0, 1, \dots, n$ bedeutet. Durch (2, 1) sind also $n+1$ Koordinatensysteme definiert. Wegen $A - (3, 2)$ gilt bei Wechsel des oberen Index:

$$(2, 2) \quad x_l^k = x_l^m, \quad x_m^k = - \sum_l^m x_l^m.$$

Liegt ψ im Gewebe- R_{n-1} der Schar $[m]$ durch φ , so ist:

$$(2, 3) \quad \sum_l^m x_l^m = 0,$$

was aus der Lage der Punkte $\Delta_k^m \varphi = \varphi_k^m$ unmittelbar folgt. Liegt ψ im Schnitt- R_{n-2} der Hyperebene der m -ten Schar durch φ mit der «benachbarten» Hyperebene derselben Schar, so müssen die Koordinaten von ψ_k^m für jedes $k \neq m$ der Gleichung (2, 3) gehorchen. Es ist:

$$(2, 5) \quad \begin{aligned} \psi_k^m &= (x_k^m P_k^m + \sum_l^{k, m} x_l^m Q_{lk}^m) \varphi + \\ &+ \sum_l^{m, k} (\Delta_k^m x_l^m + \frac{1}{2} B_{lkm} x_l^m) \varphi_l^m + (1 + \Delta_k^m x_k^m - \frac{1}{2} \sum_l^{m, k} B_{klm} x_l^m) \varphi_k^m. \end{aligned}$$

Die gesuchte Bedingung lautet:

$$1 + \Delta_k^m \sum_l^m x_l^m + \frac{1}{2} \sum_l^{m, k} (B_{lkm} - B_{klm}) x_l^m = 0.$$

Bei Beachtung von (2, 3) und $A - (2, 6)$ bleibt:

$$(2, 6) \quad 2 - \sum_l^{k, m} B_{mlk} x_l^m = 0.$$

(2, 3) und (2, 6) bestimmen den gesuchten R_{n-2} , der mit $\{m\}$ bezeichnet werden soll. $\{m\}$ ist unabhängig von der Wahl des Index $k \neq m$ in (2, 6), was man durch eine einfache Rechnung bestätigen kann. Sind die in (2, 6) vorkommenden Zahlen $B_{mlk} = 0$, so stellt (2, 6) im benutzten Koordinatensystem die uneigentliche Hyperebene dar.

Es soll nun gezeigt werden, dass $\{m\}$ raumfest ist, d. h. nicht von der Wahl des Punktes φ abhängt. Dazu muss man zeigen, dass die Koordinaten von ψ_k^m für jedes $k \neq m$ den Gleichungen (2, 3) und (2, 6) gehorchen, wenn die von ψ es tun. Für (2, 3) ist das selbstverständlich, denn so wurde (2, 6) gewonnen. Beim Einsetzen der Koordinaten von ψ_k^m in (2, 6) kann in (2, 6) derselbe Index k gewählt werden wie in ψ_k^m . Weiter ist zu beachten, dass in ψ_k^m bei φ ein Faktor steht, der in ψ zu 1 normiert ist. Dieser Faktor tritt daher in (2, 6) zum konstanten Glied. Weil nach Gleichung (2, 6):

$$\sum_l^{m, k} B_{mlk} \Delta_k^m x_l^m = - \sum_l^{m, k} B_{mlkk} x_l^m$$

ist, bleibt zu zeigen, dass der Ausdruck:

$$(2, 7) \quad \sum_l^{m,k} x_l^m \left(Q_{lk}^m + \frac{1}{2} B_{mlkk} - \frac{1}{4} B_{mlk} B_{lkmm} \right) + P_k^m x_k^m$$

verschwindet, wenn nur $\sum_l^m x_l^m = 0$ ist. Mit Hilfe der Gleichungen (1, 10), (1, 11) und A - (3, 8) erhält man:

$$Q_{lk}^m + \frac{1}{2} B_{mlkk} - \frac{1}{4} B_{mlk} B_{lkmm} = P_k^m.$$

(2, 7) geht über in $P_k^m \sum_l^m x_l^m = 0$. Die Hyperebenen der Schar $[m]$ treffen sich also im raumfesten $R_{n-2} \{m\}$, d. h. sie bilden ein Büschel. Damit ist bewiesen:

Satz 1: Die Diagonalgewebe bestehen aus $n+1$ Büscheln von Hyperebenen. Die « Büschelzentren » $\{0\}$, $\{1\}$, ..., $\{n\}$ sind durch die Gleichungen (2, 3) und (2, 6) bestimmt.

Die Tatsache, dass Diagonalgewebe aus $n+1$ Büscheln von Hyperebenen bestehen, folgt ohne Rechnung wesentlich einfacher aus den Ergebnissen der in Anmerkung ⁽¹⁾ zitierten Arbeit. Für die folgenden Untersuchungen sind jedoch die Gleichungen der Büschelzentren wesentlich. Dazu wird von den durch (2, 1) erklärten $n+1$ Koordinatensystemen das mit dem oberen Index 0 ausgezeichnet und $x_k^0 = x_k$ gesetzt. Die Gleichungen (2, 3) und (2, 6) lauten dann:

$$(2, 8) \quad \text{Für } \{k\} \ (k=1, \dots, n): \quad x_k = 0, \quad F_k = 2 - \sum_l^{k,0} B_{kl0} x_l = 0.$$

$$(2, 9) \quad \text{Für } \{0\}: \quad \sum_l^0 x_l = 0, \quad F_0^m = 2 - \sum_l^{0,m} B_{0lm} x_l = 0.$$

In der letzten Gleichung kann jeder Index $m \neq 0$ gewählt werden.

Es wird nun die Determinante:

$$(2, 10) \quad W = |w_{kj}| = \begin{vmatrix} F_1 & x_1 B_{120} & x_1 B_{130} & \dots & x_1 B_{1n0} \\ x_2 B_{210} & F_2 & x_2 B_{230} & \dots & x_2 B_{2n0} \\ x_3 B_{310} & x_3 B_{320} & F_3 & \dots & x_3 B_{3n0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n B_{n10} & x_n B_{n20} & x_n B_{n30} & \dots & F_n \end{vmatrix}$$

betrachtet. W ist ein Polynom in $x_1, \dots, x_n$ und hat höchstens den Grad $n-1$ und nicht n , wie es auf den ersten Blick scheint. Um das einzusehen, ziehe man für jedes $k=1, 2, \dots, n$ aus der k -ten Zeile x_k heraus und multipliziere es in die k -te Spalte hinein. Werden dann die zweite bis n -te Spalte zur ersten addiert, so heben sich dort alle Glieder mit $x_1, \dots, x_n$ fort.

Für Punkte der Bündelzentren wird $W=0$. Das ist klar für $\{k\}$ ($k=1, \dots, n$), weil dann eine Zeile nur Nullen enthält. Um $W=0$ für die Punkte von $\{0\}$ zu zeigen, addiert man die zweite bis n -te Zeile zur ersten. Dann steht dort nach einfacher Umrechnung mit $A - (2, 3)$ und der ersten Gleichung (2, 9) in der k -ten Spalte F_0^k ($k=1, \dots, n$). Damit ist gezeigt:

Satz 2: Die Bündelzentren eines Diagonalgewebes liegen auf der durch die Gewebeinvarianten zugeordneten Hyperfläche $W=0$, die höchstens den Grad $n-1$ hat.

Von den $3! \cdot \binom{n+1}{3}$ Zahlen B_{ikl} sind nur $\binom{n}{2} - 1$ frei wählbar, da die Relationen $A - (2, 1)$, $A - (2, 3)$, $A - (2, 6)$ und (1, 8) erfüllt sein müssen. Bevor weitere geometrische Folgerungen gezogen werden, sollen die Gewebeinvarianten b_{ikl} berechnet werden.

§ 3. - Berechnung der Gewebeinvarianten.

Jede Gewebhyperebene der m -ten Schar ($m=1, 2, \dots, n$) gehorcht nach (2, 8) einer Gleichung:

$$(3, 1) \quad f_m = -\frac{F_m}{x_m} = \text{const.},$$

die ganze Schar wird durch

$$(3, 2) \quad \sigma_m = (x_m)^2 df_m = x_m \sum_l^{0, m} B_{mlo} dx_l + F_m dx_m = 0$$

dargestellt. Ebenso hat man für die 0-te Schar:

$$f_0 = \frac{F_0^k}{\sum_l x_l} = \text{const.},$$

$$\sigma_0 = \left(\sum_l x_l \right)^2 df_0 = - \sum_l^{0, k} B_{0lk} dx_l \cdot \sum_j x_j - F_0 \cdot \sum_j dx_j = 0.$$

Es ist $\sum_m \sigma_m = 0$, trotzdem sind $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ nicht die Pfaffschen Formen, die zu den Gleichungen (2, 8) und (2, 9) geführt haben. Dort wurde eine Normierung vorausgesetzt, bei der $\sum_i^{k, m} b_{ikm} = 0$ ist für jede Wahl von k und m . Es muss daher

$$(3, 3) \quad \rho_m = g \sigma_m$$

gesetzt werden, wenn gemäss $A - (2, 5)$:

$$(3, 4) \quad d\rho_m = \sum_j^{i, m} b_{mji} \rho_{mj}$$

ist, und b_{mjk} im ausgezeichneten Gewebepunkt φ den Wert B_{mjk} haben soll. Die Funktion g , die dieses leistet, ist zunächst unbekannt.

Aus (3, 2) folgt:

$$d\sigma_m = 2 \sum_l^{0,m} B_{ml0} [dx_m dx_l]. \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

Damit ist nach (3, 3):

$$(3, 5) \quad d\rho_m = g d\sigma_m + [dg\sigma_m] = 2g \sum_l^{0,m} B_{ml0} [dx_m dx_l] + [dg\sigma_m].$$

In (3, 4) wählt man $i = 0$ und setzt die rechten Seiten von (3, 4) und (3, 5) gleich. In dieser neuen Gleichung wird links und rechts alternierend mit $\sigma_{j_1 j_2 \dots j_{n-2}} (j_1, j_2, \dots, j_{n-2} \neq 0, m, k)$ multipliziert. Das Ergebnis ist:

$$(3, 6) \quad g^2 W b_{mk0} = 2g \sum_l^{0,m} \pm B_{ml0} R_{mk, ml} - g_k^0 W.$$

$R_{mk, ml}$ entsteht aus W durch Streichung der m -ten und k -ten Zeile sowie der m -ten und l -ten Spalte und hat das Vorzeichen, das es bei Entwicklung von W nach zweireihigen Unterdeterminanten erhalten würde. Unter der Summe gilt das Pluszeichen, wenn $(l - m)(k - m) > 0$ ist, sonst gilt das Minuszeichen. Die Netzableitungen g_k^0 beziehen sich auf die Formen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ und nicht auf $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, d. h. es ist:

$$(3, 7) \quad dg = \sum_k^0 g_k^0 \sigma_k.$$

Schliesslich ist zu beachten:

$$[\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n] = W [dx_1 dx_2 \dots dx_n].$$

Bezeichnet man die Adjunkte des Elements w_{km} in W mit W_{km} , so erhält man bei Entwicklung von W_{km} nach der m -ten Zeile ⁽⁶⁾:

$$W_{km} = x_m \sum_l^m \pm B_{ml0} R_{mk, ml}.$$

Das Vorzeichen unter dem Summenzeichen ist gerade umgekehrt wie in (3, 6). Daher erhält man aus (3, 6):

$$(3, 8) \quad b_{mk0} = -\frac{2}{gW} \frac{W_{km}}{x_m} - \frac{g_k^0}{g^2}.$$

Da g so gewählt werden soll, dass $\sum_m^{k,0} b_{mk0} = 0$ ist, muss g den Differentialgleichungen:

$$(3, 9) \quad g_k^0 = -\frac{2}{n-1} \frac{g}{W} \sum_m^{0,k} \frac{W_{km}}{x_m}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

⁽⁶⁾ Zeilen- und Spaltennummern beziehen sich hier und später stets auf W und nicht auf W_{km} .

genügen. Zur Lösung wird bewiesen:

$$(3, 10) \quad 2 \sum_m^{0, k} \frac{W_{km}}{x_m} = \sum_m^0 \frac{\partial W_{km}}{\partial x_m}.$$

Die Funktionaldeterminante:

$$V = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{F_1}{x_1^2} & \frac{B_{120}}{x_1} & \dots & \frac{B_{1n0}}{x_1} \\ \frac{B_{210}}{x_2} & \frac{F_2}{x_2^2} & \dots & \frac{B_{2n0}}{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{B_{n10}}{x_n} & \frac{B_{n20}}{x_n} & \dots & \frac{F_n}{x_n^2} \end{vmatrix}$$

ist mit W verknüpft durch:

$$W = x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2 V.$$

Für die Adjunkten W_{km} von W und V_{km} von V gilt:

$$W_{km} = x_1^2 \dots x_{k-1}^2 x_{k+1}^2 \dots x_n^2 V_{km}:$$

Nach C. G. J. JACOBI ist:

$$\sum_m^0 \frac{\partial V_{km}}{\partial x_m} = 0 \quad (?).$$

Mit diesen Beziehungen bleibt zum Beweis von (3, 10) nur noch eine elementare Rechnung.

Wird in W der Faktor $x_1 x_2 \dots x_n$ aus der Determinante herausgezogen, so ergibt sich durch Bildung von $\frac{\partial W}{\partial x_j}$:

$$(3, 11) \quad \sum_m^{0, j} B_{mj0} W_{mm} + \frac{F_j}{x_j} W_{jj} = \frac{W}{x_j} - \frac{\partial W}{\partial x_j}.$$

Aus den Definitionen (2, 10) für W , (3, 2) für σ_m und (3, 7) für g_k^0 folgt:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_k^0 g_k^0 w_{kj}.$$

Darin werden (3, 9) und (3, 10) eingesetzt:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = - \frac{1}{n-1} \frac{g}{W} \sum_{m, k}^0 \frac{\partial W_{km}}{\partial x_m} w_{kj}.$$

(?) C. G. J. JACOBI, Ges. Werke Bd. 4, Seite 323.

Es ist :

$$\begin{aligned} \sum_k^0 \frac{\partial W_{kn}}{\partial x_m} w_{kj} &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\sum_k^0 w_{kj} W_{kn} \right) - \sum_k^0 W_{km} \frac{\partial w_{kj}}{\partial x_m} = \\ &= \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x_m} & \text{für } m=j \\ -B_{mj0} W_{mn} + B_{jm0} W_{jn} & \text{für } m \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ bei Berücksichtigung der Formel (3, 11) und Beachtung der Entwicklung von W nach einer Zeile :

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{2}{n-1} \frac{g}{W} \frac{\partial W}{\partial x_j},$$

$$(3, 12) \quad g = c W^{-\frac{2}{n-1}}.$$

Setzt man (3, 9) und (3, 12) in (3, 8) ein und setzt $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, so muss $b_{mk0} = B_{mk0}$ sein. Damit ist die Konstante c bestimmt. Es gilt :

$$(3, 13) \quad b_{mk0} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{4W^{n-3}}} \left(-\frac{W_{km}}{x_m} + \frac{1}{n-1} \sum_j^0 \frac{W_{kj}}{x_j} \right).$$

x_j kann man aus W_{kj} herauskürzen, b_{mk0} ist daher bis auf den Faktor vor der Klammer eine ganzrationale Funktion in $x_1, x_2, \dots, x_n$. Die Konstanten dieser Funktion sind durch die Werte der Gewebeinvarianten in einem Punkte bestimmt.

Für $n=3$ ist (3, 13) leicht auszurechnen. Man findet $b_{mk0} = B_{mk0}$, d. h. die Gewebeinvarianten sind konstant. Für $n > 3$ ist das im allgemeinen nicht der Fall. Sind nämlich alle $b_{ikl} = \text{const.}$, so folgt aus den Formeln (1, 11) und (1, 13):

$$(n-1)(b_{kim})^2 = \sum_l^{i,m} (b_{lim})^2.$$

Ausserdem gilt: $\sum_l^{i,m} b_{lim} = 0$. Beide Beziehungen sind für $n > 3$ nur zu erfüllen, wenn gewisse D_2 -Scharen existieren.

Eine wichtige Folgerung kann man unmittelbar aus (3, 13) ziehen:

Satz 1: Zwei Diagonalgewebe, deren Gewebeinvarianten b_{ikl} in einem Gewebepunkt übereinstimmen, sind projektiv aufeinander abbildbar.

Sind φ und ψ die betreffenden Gewebepunkte so führt man gemäss (2, 1) die Koordinatensysteme $(x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0) = (x_1 x_2 \dots x_n)$ und $(y_1^0 y_2^0 \dots y_n^0) = (y_1 y_2 \dots y_n)$ mit den Anfangspunkten φ und ψ ein. Die Abbildung ist dann $x_k = y_k$ ($k=1, 2, \dots, n$). Aus Satz 1 folgt unmittelbar:

Satz 2: Sind zwei Diagonalgewebe topologisch aufeinander abbildbar, so sind sie auch projektiv aufeinander abbildbar.

§ 4. - Geometrische Eigenschaften.

Für $n = 3$ kann man setzen:

$$B_{310} = -B_{210} = c_1, \quad B_{120} = -B_{320} = c_2, \quad B_{230} = -B_{130} = c_3, \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

Damit erhält man leicht die Ergebnisse des § 8 der in Anm. (1) zitierten Arbeit zurück. $W=0$ ist die Quadrik:

$$c_1^2 x_1^2 + c_2^2 x_2^2 + c_3^2 x_3^2 - 2c_1 c_2 x_1 x_2 - 2c_1 c_3 x_1 x_3 - 2c_2 c_3 x_2 x_3 - 4 = 0.$$

1.) Für $c_1, c_2, c_3 \neq 0$ sind die vier Büschelzentren (2, 8) und (2, 9) vier Erzeugende des gleichen Regulus. 2.) Für $c_3 = 0, c_1 = -c_2 \neq 0$ zerfällt die Quadrik in ein Ebenenpaar. Die Büschelzentren $\{0\}$ und $\{3\}$, sowie $\{1\}$ und $\{2\}$ liegen je in einer der Ebenen und schneiden sich in zwei Punkten ihrer Schnittgeraden, ohne mit dieser zusammenzufallen. 3.) Für $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ entartet die Quadrik in die doppelt gezählte uneigentliche Ebene. Es handelt sich um ein Achteflächgewebe.

Zu 2.) ist noch erwähnenswert: Es existiert genau eine Diagonalfächenschar (Vgl. A - § 7). Sie wird gebildet vom Ebenenbüschel durch die Schnittgerade der beiden Ebenen, in die $W=0$ zerfällt.

Für beliebiges n gilt Satz 1: Bilden $n+1$ Hyperebenenbüschel des R_n ein Gewebe, so ist es genau dann ein Diagonalgewebe, wenn es durch jeden Punkt jedes Büschelzentrums mindestens eine Gerade gibt, die alle anderen Zentren trifft.

Für $n=3$ ist Satz 1 die Zusammenfassung der oben aufgezählten drei Fälle. Für $n > 3$ lege man durch $n-3$ beliebig ausgewählte Büschelzentren je eine wiederum beliebig ausgewählte Gewebehyperebene. Diese Gewebehyperebenen treffen sich in einem R_3 und schneiden aus den vier übrigen Büschelzentren je eine Gerade aus. Ist das Schnittgewebe in jedem so möglichen R_3 ein Diagonalgewebe, so folgert man leicht die Existenz der in Satz 1 erwähnten Treffgeraden. Ist umgekehrt die Existenz der Treffgeraden bekannt, so folgt, dass jedes dreidimensionale Schnittgewebe und damit das ganze Gewebe ein Diagonalgewebe ist.

Man kann Satz 1 in anderer Weise interpretieren. Den $\infty^{2(n-1)} R_{n-2}$ des R_n werden mittels der Grassmannschen Koordinaten (8) die Punkte einer $2(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, der sog. Grassmannschen Mannigfaltigkeit in einem $\binom{n+1}{2}$ -1-dimensionalen Raum zugeordnet. Die

(8) Vgl. BERTINI-DUSCHKE, *Einf. in die proj. Geometrie mehrdim. Räume*, Wien 1924, Seite 37-47.

Existenz der Treffgeraden für die $n+1$ Büschelzentren ist äquivalent mit der linearen Abhängigkeit der zugeordneten Punkte auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit. Man kann daher die Diagonalgewebe des R_n klassifizieren, indem man die $(n-1)$ -dimensionalen Schnitte der entsprechenden Grassmannschen Mannigfaltigkeit im $R_{\binom{n+1}{2}-1}$ diskutiert.

Die in Satz 1 erwähnten Treffgeraden der Büschelzentren liegen ganz auf der Hyperfläche $W=0$, denn die Geraden haben sicher $n+1$ Punkte mit der Hyperfläche $(n-1)$ -ter Ordnung gemeinsam. Für $n=4$ ist die «allgemeinste» Hyperfläche $W=0$ gründlich untersucht worden⁽⁹⁾. Man wählt im R_4 vier Ebenen möglichst allgemeiner Lage. Die Treffgeraden dieser Ebenen inzidieren mit genau einer weiteren Ebene. Damit sind die fünf Büschelzentren gegeben. $W=0$ hat die Ordnung 3 und besitzt 20 Doppelpunkte.

Für beliebiges n erhält man Diagonalgewebe wie folgt:⁽¹⁰⁾ Man wählt im R_n zwei zueinander windschiefe Räume R_k und R_{n-k-1} . Die Schmiege- R_{k-1} einer Normkurve k -ter Ordnung im R_k werden auf die Schmiege- R_{n-k-2} einer Normkurve $(n-k-1)$ -ter Ordnung im R_{n-k-1} projektiv bezogen und einander entsprechende Räume zu Räumen der Dimension $n-2$ verbunden. Je $n+1$ dieser $(n-2)$ -dimensionalen Räume sind als Büschelzentren geeignet, weil die zugeordneten Punkte auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit linear abhängig sind.

Eine vollständige Diskussion der möglichen Diagonalgewebe soll hier nicht erfolgen, sondern nur auf die Frage der Existenz besonderer Schnittgewebe, der Existenz von Diagonalhyperflächenscharen usw. eingegangen werden.

Schnittgewebe:

In der Hyperebenenchar $[n]$ werde von den Hyperebenen der Scharen $[0], [1], \dots, [n-1]$ ein $2n$ -Zellgewebe ausgeschnitten. Dann ist $b_{ikm} = b_{jkm}$ für $0 \leq i, j, k, m \leq n-1$ (vgl. A - § 6). Es kann daher in der Determinante $WB_{ik0} = B_k$ ($1 \leq i, k \leq n-1$) gesetzt werden. b_{mk0} ($m, k \neq 0, n$) soll nach (3, 13) berechnet werden. Zur Bildung von $\frac{W_{kj}}{x_j}$ wird x_j aus W_{kj} herausgekürzt und für alle $m \neq j$ die mit x_m multiplizierte j -te Zeile von der m -ten Zeile abgezogen. Entwickelt man nun nach der k -ten Spalte, so folgt:

$$\frac{W_{kj}}{x_j} = -B_k \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (2 - B_1 x_1 - B_2 x_2 - \dots - B_{n-1} x_{n-1} - B_{mn} x_n) \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, n-1 \\ j = 1, 2, \dots, n \\ k \neq j. \end{matrix}$$

Damit folgt aus (3, 13): $b_{mk0} = 0$ ($m, k \neq 0, n$). Jetzt folgert man weiter:

⁽⁹⁾ Vgl. BERTINI-DUSCHECK, Seite 193-205. Weitere Literaturangaben findet man dort.

⁽¹⁰⁾ Herr W. BURAU, Hamburg, hat darauf aufmerksam gemacht.

Aus: $\sum_{m, k}^{0, k} b_{mk0} = 0: b_{mk0} = 0$ ($k \neq 0, n$), aus $b_{ikl} + b_{i0k} + b_{i0l} = 0: b_{ikl} = 0$ ($i \neq 0, k, l \neq n$) und aus $b_{0lk} + b_{lk0} + b_{k0l} = 0: b_{0kl} = 0$ ($k, l \neq 0, n$). Es ist also $b_{ikl} = 0$, wenn $k, l \neq n$ sind. Weiter ist $b_{ikn} + b_{kni} + b_{nik} = 0$, also $b_{ikn} = b_{kin}$, und $b_{ikn} + b_{imk} + b_{imn} = 0$, also $b_{ikn} = b_{imn}$. Daraus erhält man: $b_{kin} = b_{imn}$, wo auch $k = m$ sein darf. In der letzten Gleichung bildet man auf beiden Seiten $\sum_k^{i, n}$ und erhält: $(n-1)b_{imn} = 0$. Es sind also alle $b_{ikl} = 0$. Das Diagonalgewebe ist ein $(2n+2)$ -Zellgewebe, wenn in einer Hyperebene des Gewebes ein $2n$ -Zellgewebe ausgeschnitten wird.

Wird nun in der Schnitt- R_3 -Schar [4, 5, ..., n] des Gewebes ein Achtfachgewebe ausgeschnitten, so folgt nach den obigen Ausführungen schrittweise, dass in [5, 6, ..., n] ein Zehnzellgewebe, in [6, 7, ..., n] ein Zwölfzellgewebe vorliegt usw. Es gilt:

Satz 2: Jedes Diagonalgewebe ist ein $(2n+2)$ -Zellgewebe, wenn nur in einer Schnitt- R_3 -Schar des Gewebes ein Achtfachgewebe ausgeschnitten wird.

Diagonalthyperflächenscharen:

Es möge eine D_{n-1} -Schar mit [2, 3, ..., n] als erzeugender Geradenschar existieren (Vgl. A - § 8). Dann ist nach A - (8, 1) und A - (2, 7) $b_{k10} = b_{m10}$ und nach (1, 8) $b_{k10} = 0$ ($k = 2, 3, \dots, n$). Die Funktionen

$$F_0^4 = 2 - \sum_k^{0,1} B_{0k1} x_k \quad \text{und} \quad F_1 = 2 - \sum_k^{0,1} B_{1k0} x_k$$

sind dann wegen A - (2, 6) identisch, d. h. $\{0\}$ und $\{1\}$ liegen beide in der Hyperebene $F_1 = 0$. [2], [3], ..., [n] haben den Punkt $P = (x_0 x_1 \dots x_n) = (0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ gemeinsam, wobei die inhomogenen Koordinaten x_k durch homogene x_k/x_0 ersetzt sind. P liegt im R_{n-1} , der von $\{0\}$ und $\{1\}$ aufgespannt wird, aber nicht in $\{0\}$ oder $\{1\}$. Die Geraden der Schar [2, 3, ..., n] gehen durch P . Die D_{n-1} -Schar ist das Hyperebenenbüschel, das P und den Schnitt- R_{n-3} von $\{0\}$ und $\{1\}$ enthält, wie sich aus der Definition für D_{n-1} -Scharen unmittelbar ergibt. $W=0$ zerfällt in die Hyperebene $F_1 = 0$ und eine Mannigfaltigkeit von höchstens $(n-2)$ -ter Ordnung.

1. Umkehrung: Wenn $\{0\}$ und $\{1\}$ in einem R_{n-1} liegen, sich also in einem R_{n-3} schneiden, so folgert man aus den Gleichungen (2, 8) und (2, 9) für $\{0\}$ und $\{1\}$, dass $B_{k10} = B_{m10}$ und daher nach (1, 8) $B_{k10} = 0$ ist. Nach (3, 13) ist dann auch $b_{k10} = 0$, d. h. es existiert eine D_{n-1} -Schar mit [2, 3, ..., n] als erzeugender Geradenschar.

2. Umkehrung: Wenn $\{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}$ den Punkt $Q = (x_0 x_1 \dots x_n)$ gemeinsam haben, so ist nach (2, 8) $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, $2x_0 + B_{k10}x_1 = 0$ ($k = 2, 3, \dots, n$). Es muss daher $B_{k10} = B_{m10}$ und $Q = P$ sein. Wie oben folgert man $b_{k10} = 0$.

Satz 3: Die Aussagen:

1.) Es existiert eine D_{n-1} -Schar mit der erzeugenden Geradenschar [2, 3, ..., n],

2.) $\{0\}$ und $\{1\}$ liegen in einem R_{n-1} ,

3.) $\{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}$ gehen durch einen Punkt

sind äquivalent. Die D_{n-1} -Schar ist ein Hyperebenenbüschel, $W=0$ zerfällt.

Es soll für $n=4$ ein Beispiel konstruiert werden, bei dem genau eine D_{n-1} -Schar existiert. Als Büschelzentren $\{0\}$ und $\{1\}$ wählt man zwei Ebenen, die eine Gerade g gemeinsam haben und einen dreidimensionalen Raum R_3' aufspannen. In R_3' wählt man einen Punkt P , der nicht in $\{0\}$ oder $\{1\}$ liegt. Durch g wird ein Regulus gelegt, der g als erzeugende Gerade besitzt, aber nicht in R_3' liegt und auch P nicht enthält. Die Erzeugenden des Regulus verbindet man mit P . Irgend drei dieser Ebenen, ausgenommen diejenige durch g , sind als Büschelzentren $\{2\}, \{3\}, \{4\}$ geeignet. Man überzeugt sich nämlich leicht, dass die Schnittgewebe Diagonalgewebe sind. Für $n > 4$ kann man analog vorgehen.

Wenn zwei D_{n-1} -Scharen existieren, deren erzeugende Geradenscharen in einer Ebenenschar liegen, so ist das Gewebe ein $(2n+2)$ -Zellgewebe, weil nach $A - \S 8 - \text{Satz 4}$ und 5 gewisse dreidimensionale Schnittgewebe Achtfachgewebe sind und dann Satz 2 angewendet werden kann. Liegen die erzeugenden Geradenscharen nicht in einer Ebenenschar, so braucht kein $(2n+2)$ -Zellgewebe vorzuliegen. Beispiel für $n=4$: Man wählt $\{0\}$ und $\{1\}$ mit einer Schnittgeraden g' und dem Vereinigungsraum R_3' und entsprechend $\{2\}$ und $\{3\}$ mit g'' und R_3'' . R_3' und R_3'' mögen sich in einer Ebene schneiden, die von g' im Punkt P' und von g'' im Punkt $P'' \neq P'$ getroffen wird. Als Büschelzentrum $\{4\}$ kommt jede Ebene in Frage, die P' und P'' enthält und im Vereinigungsraum von g' und g'' liegt.

Die in $A - \S 8 - \text{Satz 3}$ erwähnten Scharen von $(r-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten sollen D_{r-1} -Scharen genannt werden. Die Mannigfaltigkeiten der D_{r-1} -Scharen sind lineare Räume, weil sie in einem Schnitt- R_r des Gewebes Diagonalphyperebenen sind. Es gilt für $n \geq 4$:

Satz 4: Aus der Existenz einer D_{k-2} -Schar ($k=4, 5, \dots, n$) folgt für jede Schnitt- R_k -Schar, welche die D_{k-2} -Schar enthält: Es existiert entweder die D_{k-1} -Schar, welche die gleiche erzeugende Geradenschar wie die gegebene D_{k-2} -Schar besitzt, oder es existieren die beiden D_{k-2} -Scharen, welche die gleiche erzeugende R_{k-3} -Schar wie die gegebene D_{k-2} -Schar besitzen.

Der Satz braucht nur für $k=n$ bewiesen werden, weil die Schnittgewebe eines Diagonalgewebes wieder Diagonalgewebe sind. Ist $[2, 3, \dots, n]$ die erzeugende Geradenschar und $[0, 1, 2]$ die erzeugende R_{n-3} -Schar der gegebenen D_{n-2} -Schar, so ist $b_{j10} = b_{k10}$, $j, k=3, 4, \dots, n$. Es kann daher $B_{j10} = B$ ($j=3, 4, \dots, n$) und $B_{210} = -(n-2)B$ gesetzt werden. Ist $B=0$, so ist nach (3, 13) $b_{210} = b_{310} = \dots = b_{n10} = 0$, d. h. die erste Aussage des Satzes ist erfüllt. Es braucht also nur noch der Fall $B \neq 0$ behandelt werden.

In jedem R_{n-1} der Schar $[2]$ existieren alle D_2 -Scharen, welche die Geradenschar $[2, 3, \dots, n]$ enthalten. Nach Satz 3 und $A - \S 8 - \text{Satz 3}$

müssen die Schnitt- R_{n-3} eines beliebigen R_{n-1} der Schar [2] mit den Büschelzentren $|3|, |4|, \dots, |n|$ durch einen Punkt gehen. Aus den Gleichungen (2, 8) folgt durch eine einfache Rechnung, dass dieses wegen $B \neq 0$ d. u. n. d. der Fall ist, wenn $B_{k20} = B_{j20}$ ($k, j = 3, 4, \dots, n$) ist. Es wird daher $B_{k20} = B'$ ($k = 3, 4, \dots, n$) gesetzt. Nach (3, 13) ist:

$$b_{k20} - b_{j20} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{4W^{n-3}}} \left(\frac{W_{2j}}{x_j} - \frac{W_{2k}}{x_k} \right), \quad \begin{matrix} k, j = 3, 4, \dots, n \\ j < k. \end{matrix}$$

Aus W_{2j} wird x_j herausgekürzt und für jedes $m \neq j$ x_m aus der Zeile mit F_m herausgezogen und in die Spalte mit F_m hineinmultipliziert. Entsprechend verfährt man mit $\frac{W_{2k}}{x_k}$. Dann kann man die beiden Determinanten zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & (-1)^{k+j} \sqrt[n-1]{4W^{n-3}} (b_{k20} - b_{j20}) = \\ & = \begin{vmatrix} B_{1k0}x_k + B_{1j0}x_j & F_1 & B_{120} & B_{130}x_3 & \dots & B_{1n0}x_n \\ B_{3k0}x_k + B_{3j0}x_j & Bx_1 & B' & F_3 & \dots & B_{3n0}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{jk0}x_k + F_j & Bx_1 & B' & B_{j30}x_3 & \dots & B_{jn0}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_k + B_{kj0}x_j & Bx_1 & B' & B_{k30}x_3 & \dots & B_{kn0}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{nk0}x_k + B_{nj0}x_j & Bx_1 & B' & B_{n30}x_3 & \dots & F_n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Addiert man die 2., 4., 5., ..., n -te, sowie die mit x_2 multiplizierte 3. Spalte dieser Determinante zur ersten Spalte, so folgt leicht das Verschwinden der Determinante. Es ist also $b_{k20} - b_{j20} = 0$ ($k, j = 3, 4, \dots, n$). Schliesslich folgt aus $b_{k10} - b_{j10} = 0$ und $b_{k20} - b_{j20} = 0$ in bekannter Weise $b_{k12} - b_{j12} = 0$ ($k, j = 3, 4, \dots, n$). Damit ist Satz 4 bewiesen.

Für $n = 4$ geht Satz 4 bei Beachtung von A - § 8 - Satz 2 über in Satz 4a: Aus der Existenz einer D_2 -Schar folgt die Existenz einer D_3 -Schar, deren erzeugende Geradenschar in der D_2 -Schar liegt.

Durch sukzessive Anwendung von Satz 4 auf Schnitt- R_k -Scharen wachsender Dimension ist es möglich, aus einer gegebenen D_2 -Schar die im Gewebe notwendig vorhandenen weiteren D_2 -Scharen anzugeben. Die Zahl der Möglichkeiten wächst mit n .

($2n + 2$)-Zellgewebe:

Für ($2n + 2$)-Zellgewebe sind wegen der Gleichungen (1, 8) und A - (5, 3) alle Invarianten $b_{ikl} = 0$. Die Hyperfläche $W = 0$ entartet in eine Hyperebene. Es gilt:

Satz 5: Ein ($2n + 2$)-Zellgewebe, dessen Gewebemannigfaltigkeiten lineare Räume sind, hat d. u. n. d. gradlinige Diagonalen, wenn das Gewebe aus $n + 1$ Hyperebenenbüscheln besteht, deren Zentren in einem R_{n-1} liegen.