Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di più variabili complesse.

Memoria di ENZO MARTINELLI (a Genova).

Sunto. - *Si dà la completa dimostrazione di risultati generali enunciati in una nota preventiva del 1946* [1], *che assegnano per le funzioni analitiche di* n *variabili complesse formule integrali di tipo* CAUCHY *con varietà d'integrazione di dimensione qualunque compresa tra* n e 2n — 1, *in parallelismo con i già stabiliti teoremi integrali di ugual dimensione.*

INTRODUZIONE

Scopo di questo lavoro è l'estensione alle funzioni di più variabili complesse del 2° teorema, o formula integrale, di CAUCHY. L'analoga estensione del 1° teorema integrale è invece ormai stabilita. Ci sia concesso tuttavia d'indugiarci, in questa introduzione, a ricordare i passi successivi coi quali è stata conseguita la più ampia formulazione dell'estensione del 1° teorema: ne risulterà più chiaro lo spirito dell'attuale ricerca relativa al 2° teorema integrale.

Il 1° teorema integrale per una funzione analitica $f(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$, è espresso dalla formula

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0. \tag{1}$$

Nella (1) il cammino d'integrazione Γ_1 è una linea chiusa qualunque appartenente alla regione (aperta) R_2 di olomorfismo per $f(z)$ nel piano d'ARGAND-GAUSS (x, y) ove si distende la variabile complessa z, se si suppone R_2 semplicemente connessa. Quando non si faccia alcuna ipotesi concernente R_2, e s'indichi con Γ_1 un 1-*ciclo* orientato qualunque, eventualmente *riducibile* (cioè composto di una o più linee chiuse ciascuna con un prefissato verso di percorrenza od orientamento), ed eventualmente *singolare* (cioè trasformato univoco, ma non necessariamente biunivoco, di un 1-ciclo ordinario), la condizione cui deve soddisfare Γ_1 per la validità della (1) si esprime con linguaggio topologico dicendo che Γ_1 deve essere *omologo a zero* ($\Gamma_1 \sim 0$) in R_2 [2].

---

[1] Citata, nella bibliografia posta in fine, col numero [14].

[2] Per le nozioni topologiche occorrenti ved. il § I.

Passiamo alle funzioni analitiche $f(z_1, \dots, z_n)$ delle n variabili complesse z_j ($z_j = x_j + iy_j$; $j = 1, \dots, n$). Rappresentiamo, per un momento, le variabili $z_1, \dots, z_n$ sopra n piani d'ARGAND-GAUSS $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Applicando n volte la (1) si ottiene immediatamente la formula:

$$\int_{\Gamma_1^{(1)}} \dots \int_{\Gamma_1^{(n)}} f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n = 0, \tag{2}$$

dove $\Gamma_1^{(1)}, \dots, \Gamma_1^{(n)}$ sono n 1-cicli degli n piani di ARGAND-GAUSS sottoposti a condizioni analoghe a quella espressa per la validità della (1).

La (2) può considerarsi come un'estensione della (1) al caso di più variabili; ma si tratta di un'estensione molto ristretta. Per convincersene, si rappresentino le variabili $z_1, \dots, z_n$, anzichè nel modo indicato, sopra uno spazio euclideo reale a $2n$ dimensioni S_{2n} $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. L'integrale (2) si interpreta allora come un integrale n-plo sopra un n-ciclo Γ_n' di S_{2n}, prodotto topologico di $\Gamma_1^{(1)}, \dots, \Gamma_1^{(n)}$, il quale ha manifestamente caratteri topologici e di posizione in S_{2n} molto particolari. È ormai classico il risultato di POINCARÉ, secondo cui sussiste la formula ben più generale della (2):

$$\int_{\Gamma_n} f(z_1, \dots, z_n) d(z_1, \dots, z_n) = 0 \quad (^3), \tag{3}$$

dove Γ_n è un qualunque n-ciclo orientato di S_{2n} (se vuolsi riducibile e singolare), omologo a zero eventualmente con divisione ($\Gamma_n \approx 0$) [4] nella regione di olomorfismo R_{2n} della $f(z_1, \dots, z_n)$ in S_{2n}.

Ma la (3) non dà ancora la più ampia estensione della (1). La (3) esprime soltanto il primo teorema di una serie di n teoremi integrali distinti nei quali le varietà d'integrazione sono cicli di dimensioni rispettive $n, n+1, \dots, 2n-1$. Parleremo brevemente di *teorema integrale $(n+l)$-dimensionale* ($l = 0, 1, \dots, n-1$) per alludere alla corrispondente dimensione della varietà d'integrazione. Tale teorema si spezza in realtà in $\binom{n}{l}$ proposizioni distinte, ciascuna delle quali è espressa dalla uguaglianza:

$$\int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \dots, z_n) d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l}) = 0, \tag{4}$$

dove Γ_{n+l} è un qualunque $(n+l)$-ciclo omologo a zero in R_{2n} ($\Gamma_{n+l} \approx 0$), $\bar{z}_\alpha$ è il complesso coniugato di z_α, e $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ è un'arbitraria combinazione di classe l degli interi $1, \dots, n$.

---

(3) Usiamo per i differenziali multipli i simboli della teoria delle forme differenziali a moltiplicazione esterna (ved. il § II).

(4) Quando la dimensione di R_{2n} è > 2 non si può escludere a priori l'esistenza in R_{2n} di cicli divisori dello zero (§ I); donde la opportunità di riferirsi all'omologia con divisione (cfr. § III, n. 1, Oss.).

Le $\binom{n}{l}$ uguaglianze (4) possono anche compendiarsi nella:

$$\int\limits_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \dots, z_n) \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_l} \lambda_{\alpha_1\dots\alpha_l} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l}) = 0, \tag{5}$$

indicando con $\lambda_{\alpha_1\dots\alpha_l}$ parametri complessi *arbitrari.*

Per $l = n - 1$ il teorema (5) è stato stabilito da W. WIRTINGER [22], e per l qualunque da me in [10], dove ho anche stabilito i risultati inversi, dimostrando precisamente che, per ogni valore di l l'uguaglianza (5) garantisce l'analiticità della $f(z_1, \dots, z_n)$, quando sol ne sia nota la continuità: estensione questa del teorema di MORERA e di quello di SEVERI [19] che si riferisce all'inversione del teorema integrale n-dimensionale [5].

Dopo quanto abbiamo detto, appare naturale che la formula di CAUCHY

$$2\pi i f(\zeta) = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz \tag{6}$$

sia suscettibile, nel campo delle funzioni di più variabili, di estensioni via via più generali e parallele a quelle espresse dalle (2), (3), (4) o (5).

Se si suppone semplicemente connessa la regione R_2 di olomorfismo per $f(z)$ e Γ_1 irriducibile, per la validità della (6) occorre che Γ_1 stia in R_2, sia orientato positivamente e racchiuda all'interno il punto $O(\zeta)$ di R_2. Qualora non si faccia alcuna ipotesi particolare su R_2 e Γ_1, le condizioni di validità della (6), espresse con i simboli topologici, sono:

$$\Gamma_1 \subset R_2 - O, \tag{I$_1$}$$

$$\Gamma_1 \backsim 0 \ \text{ in } \ R_2, \tag{II$_1$}$$

$$\mathrm{All}\,(\Gamma_1, O) = 1, \tag{III$_1$)$'$ (}$$

dove con $\mathrm{All}\,(\Gamma_1, O)$ s'indica il *coefficiente d'allacciamento* di Γ_1 col punto O, cioè l'*indice d'intersezione* di KRONECKER) $[K_1, \Gamma_1]$, o numero algebrico di intersezioni, di una semiretta K_1 uscente da O col ciclo Γ_1 (§ I). Se invece della (III$_1$) vale la

$$\mathrm{All}\,(\Gamma_1, O) = N, \tag{III$_1$}$$

la (6) deve sostituirsi con la formula più generale:

$$2\pi i N f(\zeta) = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz. \tag{7}$$

---

(5) Le inversioni del teorema di POINCARÉ quali sono date in precedenti lavori di V. VOLTERRA e di E. PASCAL presuppongono la continuità delle derivate parziali prime delle componenti reale e immaginaria di f, e perciò non costituiscono che una monca estensione del risultato di MORERA (il cui interesse sta invece nel richiedere soltanto la continuità di f). Pertanto la prima vera estensione del teorema di MORERA al caso n-dimensionale deve ritenersi quella citata di SEVERI.

La condizione (III_1) può interpretarsi come determinante il valore dell'interno N che appare nella (7) [6]. Con linguaggio impreciso, può dirsi che N è il numero algebrico complessivo delle volte che Γ_1 avvolge O positivamente e negativamente.

Ora l'estensione della (6) o (7) parallela alla (2) è ovvia e su di essa non mi fermo [7]. L'estensione parallela alla (3) è stata data da me [9] per due variabili, e, con maggior completezza e per un numero qualunque di variabili, da B. SEGRE [16]; essa fornisce la seguente *formula integrale n-dimensionale*:

$$(8) \qquad (2\pi i)^n N f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \int_{\Gamma_n} \frac{f(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 - \zeta_1) \dots (z_n - \zeta_n)} d(z_1, \dots, z_n).$$

Per esprimere le condizioni di validità della (8), occorre considerare la varietà T_{2n-2} costituita dagli n spazi lineari (caratteristici) di dimensione $2n-2$ rappresentati rispettivamente dalle equazioni $z_1 = \zeta_1, \dots, z_n = \zeta_n$, e quindi uscenti dal punto $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ della regione R_{2n} di olomorfismo per f. La T_{2n-2} è (in generale) luogo di poli per la funzione integranda nella (8), onde la chiameremo brevemente *varietà polare*. Ebbene, le condizioni di validità della (8) sono analoghe alle (I_1), (II_1), (III_1), precisamente le prime due si scrivono così:

$$(\mathrm{I}_{n,\,0}) \qquad \Gamma_n \subset R_{2n} - T_{2n-2},$$

$$(\mathrm{II}_{n,\,0}) \qquad \Gamma_n \approx 0 \quad \text{in} \quad (R_{2n} - T_{2n-2}) + O,$$

mentre la terza, $(\mathrm{III}_{n,\,0})$, che non stiamo a scrivere quì (cfr. § IV, n. 18) esprime il valore di N in tal guisa ch'esso appare un carattere intero definente lo *stato di allacciamento* [8] dell'n-ciclo Γ_n con la varietà polare T_{2n-2}.

Nel lavoro già citato [10] ho dato poi la *formula integrale* $(2n-1)$-*dimensionale* seguente:

$$(9) \quad \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} N f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \int_{\Gamma_{2n-1}} f(z_1, \dots, z_n) \sum_{1}^{n}{}_{\alpha} (-1)^{\alpha-1} \frac{\bar{z}_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha}{\rho^{2n}} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots [\alpha] \dots, \bar{z}_n).$$

dove $\rho = \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{j} |z_j - \zeta_j|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ rappresenta la distanza del punto fisso O dal punto $(z_1, \dots, z_n)$ variabile sul $(2n-1)$-ciclo d'integrazione Γ_{2n-1} (ipersuperficie

(6) Le condizioni (I_1), (II_1), (III_1) sono sufficienti per la validità della (7). Non può parlarsi di condizioni necessarie e sufficienti in quanto, se p. es. si assume $f(z) \equiv 0$, le condizioni (II_1), (III_1), non occorrono. Tuttavia è ovvio che le (I_1), (II_1), (III_1) sono le condizioni sufficienti *più ampie* che possono scriversi perchè valga la (7) con riferimento ad una $f(z)$ analitica qualunque. Analoga osservazione sussiste per le generalizzazioni di cui appresso.

(7) Cfr. p. es. GOURSAT [4], pag. 279, ovvero SEVERI-SCORZA DRAGONI [21], pag. 88.

(8) Usiamo qui una recente felice espressione di F. SEVERI.

chiusa). Le condizioni di validità della (9) sono:

$(\mathrm{I}_{n,\,n-1})$ $\qquad \Gamma_{2n-1} \subset R_{2n} - O,$

$(\mathrm{II}_{n,\,n-1})$ $\qquad \Gamma_{2n-1} \backsim 0 \quad \text{in} \quad R_{2n},$

$(\mathrm{III}_{n,\,n-1})$ $\qquad N = \mathrm{All}\,(\Gamma_{2n-1},\ O) = [K_1,\ \Gamma_{2n-1}],$

essendo K_1 una semiretta uscente da O.

La formula (9) è stata posta anche sotto altro aspetto nei miei lavori [11, 12], e, nell'aspetto (9), è stata successivamente ritrovata da S. BOCHNER e D. C. MAY [2, 15].

Le formule (8) e (9) possono considerarsi come estensioni della formula di CAUCHY parallele alla (5) per $l = 0$ ed $l = n - 1$. Nel lavoro [13] ho stabilito altresì l'estensione parallela alla (5) per $l = 1$, e nella nota preventiva [14], già citata in principio, ho enunciato il risultato generale che fornisce una formula integrale $(n + l)$-*dimensionale* parallela alla (5) per ogni valore consentito di l, comprendente naturalmente tutti i casi precedenti.

Nella presente memoria dò la completa dimostrazione di tal formula $(n + l)$-dimensionale, la quale compendia in realtà $\binom{n}{l}$ formule distinte. Non mi fermo in questa introduzione ad indicarne l'aspetto analitico e le condizioni di validità, chè mi occorrerebbe, altrimenti, disporre di vari concetti e simboli di cui parlerò in seguito. Il lettore troverà i risultati conclusivi nel § IV, nn. 16-20 (9).

Le semplici relazioni (III_1), $(\mathrm{III}_{n,\,n-1})$, che definiscono lo stato di allacciamento dei cicli Γ_1 e Γ_{2n-1} col punto O, devono già venir sostituite da una relazione più riposta nel caso della formula integrale n-dimensionale ($l = 0$). Nel caso generale $(n + l)$-dimensionale apparirà poi manifesto che non basta più un solo carattere a definire lo stato d'allacciamento degli $(n + l)$-cicli d'integrazione con una opportuna varietà polare $T_{2n-2l-2}$, della dimensione indicata. È perciò che buona parte di questa memoria è dedicata a considerazioni topologiche rivolte appunto a determinare i caratteri definenti il detto stato di allacciamento, per il che occorrerà far ricorso a strumenti topologici più elevati, quale il teorema di dualità di ALEXANDER.

È d'uopo pertanto cominciare con alcuni richiami di topologia (§ I). Nel § II sono invece richiamate alcune nozioni della teoria delle forme differenziali a moltiplicazione esterna secondo E. CARTAN. Nei successivi §§ III e IV (dei quali il primo dedicato a sviluppi topologici ed il secondo analitici) si entra nel vivo dell'argomento.

(9) Per un'idea sommaria si potrà utilmente tener presente la nota preventiva [14], rispetto alla quale l'attuale memoria presenta soltanto qualche lievissimo cambiamento formale.

§ I. - Richiami di topologia

Raccogliamo in questo paragrafo quelle proprietà di topologia cui dovremo far riferimento nel seguito. Ci limitiamo ad indicazioni sommarie, tuttavia sufficienti per le applicazioni che abbiamo in vista, dove invero occorre soltanto la conoscenza di alcuni fatti fondamentali ([10]).

Orientazioni, contorni, cicli.

1. Nel corso di questa memoria l'ambiente geometrico ove si svolgeranno le nostre considerazioni, sarà sempre uno spazio euclideo reale pluridimensionale. Tuttavia avremo da usare gli strumenti topologici non soltanto direttamente in tale ambiente, ma anche in ambienti ad esso subordinati: p. es. varietà di determinata e semplice definizione, regioni ad esse complementari, o anche regioni (aperte) di natura indeterminata. In ogni caso saranno o si supporranno soddisfatti i requisiti essenziali per lo sviluppo delle proprietà topologiche, i quali si compendiano (almeno rispetto alle ordinarie trattazioni elementari) nella *reticolabilità* dell'ambiente.

Un ambiente o varietà r-dimensionale M_r (di uno qualunque, imprecisato, dei suddetti tipi che c'interessano) si trasforma mediante reticolazione, e previa eventuale aggiunta di punti di frontiera, in un *r-complesso* (finito) K_r, vale a dire in un insieme finito di *k-celle* aperte di dimensione $k = 0, 1, \dots, r$ (o in particolare, se vuolsi, costituito di *k-simplessi*), a due a due disgiunte e soddisfacenti alla condizione che il contorno di ogni k-cella sia costituito di $(k-1)$-celle dell'insieme ([11]).

Entro K_r avremo da considerare varietà k-dimensionali subordinate (p. es. campi d'integrazione). Intenderemo che ogni tal varieta, V_k, sia a sua volta reticolabile (non di necessità con celle di K_r), e che più precisamente la reticolazione trasformi V_k in una *k-catena* C_k, cioè in una combinazione lineare (a coefficienti interi) di k-celle, che si supporranno *orientate*. Quando V_k si consideri come campo d'integrazione, dovremo inoltre supporre che ogni k-cella E_k di C_k sia di *classe di differenziabilità* 1 (almeno), vale a dire che le coordinate cartesiane (relative allo spazio euclideo ove è immersa M_r) di un punto variabile su E_k si esprimano con funzioni continue dotate di deri-

([10]) Per le dimostrazioni e i raffinamenti cfr. i noti trattati di topologia, tra i quali principalmente: SEIFERT-THRELFALL [18], LEFSCHETZ [7, 8], ALEXANDROFF-HOPF [1].

([11]) Ricordiamo che k-cella *chiusa* $\overline{E}_k$ è ogni insieme di punti trasformato per omeomorfismo di una sfera solida k-dimensionale $\overline{\Sigma}_k$, ipersuperficie sferica di contorno H_{k-1} inclusa. L'insieme di punti trasformato di $\Sigma_k = \overline{\Sigma}_k - H_{k-1}$ costituisce la k-cella *aperta* E_k determinata da $\overline{E}_k$, mentre l'insieme di punti trasformato di H_{k-1} ne costituisce il contorno. Ogni 0-cella è un punto. Un k-simplesso è una k-cella considerata come trasformata per omeomorfismo di un k-simplesso *rettilineo* o *poliedro elementare* (per $k = 2$ triangolo, per $k = 3$ tetraedro, ecc.). Il contorno di un k-simplesso è costituito di $(k-1)$-simplessi.

vate parziali prime continue, a determinante jacobiano non nullo, delle coordinate di un punto variabile in una k-sfera solida.

L'orientazione delle singole k-celle di C_k può pensarsi determinata in vari modi. Per le applicazioni che ne faremo, sarà opportuno avere particolarmente presente il procedimento seguente.

Siano $t_1, \dots, t_k$ direzioni orientate e ordinate uscenti da un punto P di una k-cella E_k e tangenti ad E_k (che si suppone di classe ≥ 1). Esse costituiscono un *k-edro di direzioni*, il quale è *non degenere* se appartiene allo spazio tangente in P ad E_k e non ad uno spazio lineare di dimensione inferiore. Siffatti k-edri di origine P si distribuiscono in due classi: quelli di una stessa classe, che diconsi fra loro *equiversi*, sono riducibili l'uno all'altro con una deformazione continua, durante la quale il k-edro variabile, sempre di origine P, si conserva nello spazio tangente in P e mai degenera; tale riduzione non è invece possibile per k-edri di classi diverse, che diconsi *contraversi*. Conviene in particolare ricordare che, alterando l'ordinamento delle direzioni di un k-edro con una permutazione di classe pari o dispari, ovvero alterando il verso di un numero pari o dispari di direzioni, si ottiene un nuovo k-edro risp. equiverso o contraverso col dato. Ebbene, quando si associ all'intorno di P su E_k una classe o l'altra di k-edri, si orienta quell'intorno in un verso o nel verso opposto.

Si riconosce subito che una fissata orientazione in P si può trasportare *univocamente* ad ogni altro punto Q di E_k, trasportando in Q l'assegnato k-edro di origine P, sempre mediante deformazione continua priva di degenerazione e facendone scorrere l'origine lungo un cammino qualunque che porti da P a Q su E_k. Si può così attribuire una determinata orientazione all'intera cella E_k, la quale dicesi perciò *orientabile* ([12]). Se E_k indica una cella orientata, $-E_k$ indicherà la cella stessa con l'orientazione opposta. Una k-catena C_k è dunque una somma di k-celle considerate con molteplicità corrispondente al valore assoluto dei coefficienti della combinazione lineare che esprime C_k, e con orientazioni corrispondenti al segno dei coefficienti.

Notiamo per inciso che, più in generale, dicesi orientabile ogni varietà k-dimensionale per la quale l'orientazione fissata da un k-edro in un suo punto può trasportarsi univocamente ad ogni altro punto in modo simile a quello indicato per una cella. Così ogni regione r-dimensionale connessa di uno spazio cartesiano $(x_1, \dots, x_r)$ è orientabile. Diremo *orientazione naturale* dello spazio $(x_1, \dots, x_r)$ o di una sua regione, quella determinata in ogni

---

([12]) Quando E_k è un simplesso di vertici $P^1, P^2, \dots, P^{k+1}$, se ne può definire un'orientazione assegnando un ordinamento dei vertici, e sia $P^{\alpha}, \dots, P^{\alpha_{k+1}}$, considerato a meno di una permutazione di classe pari. Tale orientazione può identificarsi con quella definita dal k-edro di direzioni $P^{\alpha_1}P^{\alpha_2}, P^{\alpha_1}P^{\alpha_3}, \dots, P^{\alpha_1}P^{\alpha_{k+1}}$ (con riferimento al simplesso rettilineo di cui il dato è immagine).

punto dall'r-edro delle direzioni parallele ed equiverse ai semiassi positivi coordinati $x_1, \ldots, x_r$ considerati nel loro ordine naturale.

2. Una volta fissata un'orientazione per una k-cella E_k, si può determinare in conseguenza un'orientazione per le singole $(k-1)$-celle E_{k-1} che ne costituiscono il contorno, procedendo nel modo seguente. Sia P un punto di una E_{k-1} del contorno di una E_k e $(t_1, \ldots, t_k)$ un k-edro di origine P orientante E_k (ci riferiamo alla k-cella contorno incluso). Previa deformazione (senza degenerazione) del k-edro, può farsi in modo che la sua *prima* direzione t_1 volga verso l'esterno di E_k; allora il $(k-1)$-edro $(t_2, \ldots, t_k)$, che appartiene allo spazio tangente in P ad E_{k-1}, fornisce l'orientazione voluta per E_{k-1}, la quale dicesi *in relazione positiva* con la preassegnata orientazione di E_k.

La $(k-1)$-catena costituita dalle $(k-1)$-celle del contorno di E_k orientate al modo detto, dicesi *contorno orientato* di E_k. Nel caso $k=1$, E_1 si riduce ad un arco di linea di estremi P, Q. Se l'orientazione fissata per E corrisponde al verso che porta da P a Q, si assume come contorno orientato di E_1 l'insieme delle 0-celle P, Q, alla prima delle quali si attribuisca il segno $-$ e alla seconda il segno $+$.

Ritornando alla k-catena C_k che copre un'assegnata V_k, il contorno orientato di C_k o, ciò che è lo stesso, di V_k, è la $(k-1)$-catena somma algebrica dei contorni orientati delle singole celle di C_k. Lo indicheremo con $\mathcal{C}V_k$. Denotando con $-V_k$ la varietà medesima con l'orientazione opposta, risulta $\mathcal{C}(-V_k) = -\mathcal{C}V_k$. Più in generale il contorno di una varietà somma algebrica di varietà della stessa dimensione è somma algebrica dei contorni di queste.

Un *k-ciclo* (orientato) è una k-catena Γ_k senza contorno: $\mathcal{C}\Gamma_k = 0$. Il contorno di una qualunque k-catena è sempre un $(k-1)$-ciclo. Ogni 0-cella si considera (d'ordinario) come uno 0-ciclo.

3. Avremo bisogno altresì di considerare varietà o catene *singolari*, cioè trasformate univoche (ma non necessariamente biunivoche) continue, ed eventualmente di classe di differenziabilità ≥ 1, di catene ordinarie. Per una tale varietà singolare si può parlare di contorno (singolare) come trasformato del contorno della catena ordinaria da cui la varietà singolare ha origine.

Omologia ed omotopia.

4. Ricordiamo la nozione di *omologia* (ordinaria) per i cicli k-dimensionali di M_r $(0 \leq k \leq r)$. Un k-ciclo Γ_k si dice omologo a zero entro M_r e si scrive

$$\Gamma_k \sim 0 \quad \text{in} \quad M_r,$$

allorchè esiste una varietà $(k+1)$-dimensionale V_{k+1}, eventualmente singolare, appartenente ad M_r, tale che sia $\mathcal{C}V_{k+1} = \Gamma_k$. Due k-cicli Γ_k, Γ_k' si diconο omologhi, $\Gamma_k \sim \Gamma_k'$, allorchè $\Gamma_k - \Gamma_k' \sim 0$ (indicando con $-\Gamma_k'$ il ciclo Γ_k' medesimo ma dotato di orientazione opposta).

Ricordiamo altresì la nozione di *omologia con divisione*. Un k-ciclo Γ_k si dice omologo a zero con divisione, $\Gamma_k \approx 0$, allorchè un suo conveniente multiplo intero $t\Gamma_k$ è ~ 0; se nello stesso tempo non risulta $\Gamma_k \sim 0$, Γ_k dicesi *divisore dello zero*. È $\Gamma_k \approx \Gamma_k'$ se $\Gamma_k - \Gamma_k' \approx 0$.

Le definizioni riportate hanno senso qualunque sia la natura dell' am- l' ambiente M_r (n. 1). Quando però M_r sia una varietà aperta, per guisa che essa non coincide esattamente col complesso K_r che la reticola, ma con $K_r - L_s$ [13], essendo L_s un complesso subordinato ($s \leq r-1$), le definizioni sono suscettibili di due interpretazioni diverse entrambe legittime. Invero possono riguardarsi come cicli di M_r le varietà assolutamente prive di contorno (*cicli assoluti*), ovvero le varietà il cui eventuale contorno appartenga ad L_s (*cicli relativi*). D' ordinario ci si riferirà a cicli assoluti, cosicchè verrà omesso in tal caso l' attributo « assoluti ».

Le definizioni si estendono anche al caso di cicli di dimensione $k > r$, necessariamente singolari. Ogni tal ciclo risulta sempre ~ 0 in M_r.

5. Esempi notevoli di relazioni di omologia si ottengono mediante la nozione di *omotopia* (o deformazione omotopica). Siano V_k, V_k' due varietà (eventualmente singolari) di M_r, le quali possano considerarsi trasformate univoche continue della stessa varietà non singolare U_k. Se P, Q sono punti variabili risp. in M_r, U_k, indichiamo le trasformazioni con $P = f_0(Q)$, $P = f_1(Q)$, essendo f_0, f_1 simboli di funzioni continue. Le varietà V_k, V_k' sono *omotope*, o deformabili omotopicamente l' una nell' altra, quando esiste una serie continua di trasformazioni univoche continue di U_k sopra M_r, che faccia passare dalla trasformazione di U_k in V_k a quella di U_k in V_k'. In formule, deve esistere una $f(Q, t)$, funzione continua del punto Q e del parametro t variabile tra 0 ed 1, tale che la trasformazione $P = f(Q, t)$ si riduca per $t = 0$, $t = 1$ risp. alle due trasformazioni sopra indicate. Se V_k', è costituita da un sol punto di M_r, si dice che V_k è omotopa (o riducibile) ad un punto.

Due cicli Γ_k, Γ_k' *omotopi sono omologhi*, giacchè al variare di Q, t, il punto $P = f(Q, t)$ descrive sopra M_r una varietà eventualmente singolare che ha per contorno $\Gamma_k - \Gamma_k'$. Similmente: *un ciclo* Γ_k *omotopo a un punto è omologo a zero.*

6. Le classi di k-cicli di M_r fra loro omologhi (senza divisione, ovvero con divisione) costituiscono in ogni caso un *gruppo abeliano* del quale sono gli elementi (l' elemento unità essendo costituito dai cicli omologhi a zero e il prodotto di due elementi corrispondono alla somma di due cicli). Si dimo-

[13] Si usa qui il segno — nel senso della teoria degli insiemi e non come simbolo di orientazione.

stra che di ogni elemento del gruppo esiste un rappresentante tra i cicli che sono k-catene del complesso K_r reticolante M_r, e che ogni tal ciclo di K_r che sia ~ 0 è di fatto il contorno di una $(k+1)$-catena di K_r [14]. Poichè K_r si è supposto finito, da ciò che segue che il gruppo ammette una *base* finita.

Riferiamoci al gruppo dell' omologia con divisione, o *gruppo di* BETTI *k-dimensionale*, che a noi basterà considerare. Esiste allora un numero finito p_k di k-cicli $\Gamma_k^{(1)}, \dots, \Gamma_k^{(p_k)}$ di M_r, tali che, per un k-ciclo qualunque Γ_k di M_r, risulta

$$\Gamma_k \approx \lambda_1 \Gamma_k^{(1)} + \dots + \lambda_{p_k} \Gamma_k^{(p_k)} \quad \text{in} \quad M_r, \tag{6.1}$$

essendo $\lambda_1, \dots, \lambda_{p_k}$ convenienti interi (positivi, negativi o nulli).

Allorchè p_k è il minor numero di cicli di M_r che permettono di scrivere una relazione del tipo (6.1) per ogni Γ_k, si dirà che $\Gamma_k^{(1)}, \dots, \Gamma_k^{(p_k)}$ costituiscono una *base minima*. Essa riesce altresì caratterizzata dal fatto che i suoi cicli sono *omologicamente indipendenti*, cioè tra essi non può sussistere una relazione del tipo:

$$\lambda_1 \Gamma_k^{(1)} + \dots + \lambda_{p_k} \Gamma_k^{(p_k)} \approx 0 \quad \text{in} \quad M_r, \tag{6.2}$$

con le $\lambda_1, \dots, \lambda_{p_k}$ non tutte nulle. In queste condizioni p_k è il *k-mo numero di* BETTI della varietà M_r. Per $k > r$ (n. 4) è sempre $p_k = 0$.

Indici di intersezione e di allacciamento.

7. Oltre le ipotesi già poste (n. 1), supponiamo ora che la varietà ambiente M_r sia omogenea, orientabile ed orientata in modo prefissato. In queste condizioni è noto come possa svilupparsi rigorosamente la teoria degli indici di intersezione poggiando sulle reticolazioni duali di POINCARÉ. Noi ci conteneremo di riportare qui, in forma semplificata e adatta al nostro scopo, qualche definizione e proprietà relativa.

Siano A_k, B_{r-k} due catene di dimensioni *complementari* k, $r-k$ rispetto alla dimensione dell' ambiente M_r, differenziabili di classe ≥ 1, e sia P un loro punto di intersezione. Facciamo l' ipotesi che le celle di A_k, B_{r-k} cui appartiene P siano semplici per entrambe le catene e che i loro spazi tangenti in P riescano *indipendenti* entro lo spazio tangente in P ad M_r, ovvero, ciò che è equivalente, abbiano in comune il solo punto P.

Consideriamo un k-edro $(t_1, \dots, t_k)$ ed un $(r-k)$-edro $(t_{k+1}, \dots, t_r)$ di origine P, non degeneri ed orientanti le due celle di A_k e B_{r-k} che contengono P secondo l' orientazione che ad esse spetta in quanto celle di A_k, B_{r-k}. Nelle condizioni poste, l' r-edro $(t_1, \dots, t_r)$ risulta anche esso non degenere. Ebbene, si dice che A_k, B_{r-k} hanno in P un' *intersezione positiva* o *negativa*,

[14] In particolare ricordiamo (giacchè ci occorrerà) che, quando K_r si riduce ad una r-cella, ogni k-ciclo di K_r è contornante una $(k+1)$-catena.

a seconda che l' r-edro $(t_1, \ldots, t_r)$ risulta equiverso o contraverso con l' r-edro che determina in P l' orientazione fissata per M_r.

Se A_k, B_{r-k} sono tali che $\mathcal{C}A_k$ non incontra B_{r-k} e $\mathcal{C}B_{r-k}$ non incontra A_k, si dimostra che, previa una eventuale piccola deformazione omotopica di A_k, B_{r-k}, si può fare in modo che in ogni punto comune alle due catene siano soddisfatte le condizioni sopra ammesse. La somma algebrica delle intersezioni positive e negative delle due catene (la quale risulta indipendente dalla deformazione detta) si chiama allora *indice di intersezione* (o di KRONECKER) di A_k, B_{r-k}, e si denota col simbolo $[A_k, B_{r-k}]$.

Dalla definizione si traggono immediatamente le proprietà di uso corrente:

$$[A_k, B_{r-k}] = -[-A_k, B_{r-k}] = -[A_k, -B_{r-k}], \tag{7.1}$$

$$[A_k, B_{r-k}] = (-1)^{k(r-k)}[B_{r-k}, A_k], \tag{7.2}$$

$$[A_k, B^{(1)}_{r-k} + B^{(2)}_{r-k}] = [A_k, B^{(1)}_{r-k}] + [A_k, B^{(2)}_{r-k}]. \tag{7.3}$$

Ricordiamo inoltre che: *Se A_k, B_{r-k} sono cicli, uno dei quali almeno è omologo a zero (eventualmente con divisione), risulta* $[A_k, B_{r-k}] = 0$.

8. Consideriamo ora due cicli orientati Γ_{k-1}, Δ_{r-k} di dimensioni *duali* $k-1$, $r-k$ rispetto alla dimensione dell' ambiente M_r, *non intersecantesi* ed *omologhi a zero in* M_r. Dall' ultima proprietà del n. 7 consegue che, se A_k è una catena di M_r avente per contorno orientato Γ_{k-1}, l' indice di KRONECKER $[A_k, \Delta_{r-k}]$ ha un valore indipendente dalla scelta di A_k. Infatti, indicando con A_k' un' altra catena avente per contorno Γ_{k-1}; risulta

$$[A_k, \Delta_{r-k}] - [A_k', \Delta_{r-k}] = [A_k - A_k' \ \Delta_{r-k}],$$

dove l' ultimo indice è nullo poichè $\Delta_{r-k} \approx 0$ per ipotesi, e la catena $A_k - A_k'$ è un ciclo in quanto $\mathcal{C}(A_k - A_k') = \mathcal{C}A_k - \mathcal{C}A_k' = \Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1} = 0$.

L' *indice di allacciamento* di Γ_{k-1}, Δ_{r-k}, che denotiamo col simbolo $\mathrm{All}(\Gamma_{k-1}, \Delta_{r-k})$, si definisce ponendo

$$\mathrm{All}(\Gamma_{k-1}, \Delta_{r-k}) = [A_k, \Delta_{r-k}]. \tag{8.1}$$

Analogamente, se B_{r-k+1} è una catena di M_r avente per contorno Δ_{r-k}, si pone

$$\mathrm{All}(\Delta_{r-k}, \Gamma_{k-1}) = (B_{r-k+1}, \Gamma_{k-1}). \tag{8.2}$$

Per gli indici di allacciamento sussistono le proprietà espresse dalle relazioni:

$$\mathrm{All}(\Gamma_{k-1}, \Delta_{r-k}) = -\mathrm{All}(-\Gamma_{k-1}, \Delta_{r-k}) = -\mathrm{All}(\Gamma_{k-1}, -\Delta_{r-k}), \tag{8.3}$$

$$\mathrm{All}(\Gamma_{k-1}, \Delta_{r-k}) = (-1)^{(k-1)(r-k)+1}\,\mathrm{All}(\Delta_{r-k}, \Gamma_{k-1}), \tag{8.4}$$

$$\mathrm{All}(\Gamma_{k-1}, \Delta^{(1)}_{r-k} + \Delta^{(2)}_{r-k}) = \mathrm{All}(\Gamma_{k-1}, \Delta^{(1)}_{r-k}) + \mathrm{All}(\Gamma_{k-1}, \Delta^{(2)}_{r-k}). \tag{8.5}$$

Si ha inoltre la proprietà fondamentale seguente: *Se è $\Gamma_{k-1} \approx \Gamma'_{k-1}$ entro la varietà $M_r - \Delta_{k-k}$, complementare di Δ_{r-k} rispetto ad M_r, risulta*

$\mathrm{All}\,(\Gamma_{k-1},\ \Delta_{r-k}) = \mathrm{All}\,(\Gamma'_{k-1},\ \Delta_{r-k})$. Infatti dall' ipotesi segue l' esistenza di una catena A_k di $M_r - \Delta_{r-k}$ che ha per contorno $t(\Gamma_{k-1} - \Gamma'_{k-1})$, onde si ha $\mathrm{All}\,(\Gamma_{k-1} - \Gamma'_{k-1},\ \Delta_{r-k}) = \frac{1}{t}\,[A_k,\ \Delta_{r-k}]$, e l' indice di KRONECKER espresso è nullo perchè A_k non ha alcun punto in comune con Δ_{r-k}.

In particolare, due cicli Γ_{k-1}, Γ'_{k-1} omotopi in $M_r - \Delta_{r-k}$ hanno lo stesso indice d' allacciamento con Δ_{r-k}, in quanto sono necessariamente omologhi (n. 5). Così pure un ciclo omotopo ha un punto, od omologo a zero in $M_r - \Delta_{r-k}$, ha indice di allacciamento nullo con Δ_{r-k}. Questi fatti rendono intuitiva la nozione di indice di allacciamento.

Dualità di Alexander.

9. L' ambiente sia lo *spazio sferico* H_r (che può ottenersi p. es. da uno spazio euclideo mediante l' aggiunta di *un* punto all' infinito). Entro H_r consideriamo una varietà m-dimensionale reticolabile T_m. Il *teorema di dualità* di ALEXANDER pone a confronto i gruppi di omologia ed i corrispondenti numeri di BETTI della varietà T_m e della varietà aperta $H_r - T_m$, complementare di T_m rispetto a H_r.

Come sopra, a noi basterà considerare l' omologia con divisione. Indicati con p_{k-1}, p^*_{r-k} i numeri di BETTI di dimensioni $k-1$, $r-k$ risp. in T_m e $H_r - T_m$, risulta in primo luogo:

$$p_{k-1} = p^*_{r-k} \quad (9.1)$$
([15]).

La relazione (9.1) è valida per $k = 2, \dots, r-1$; invece per $k = 1$, r deve sostituirsi risp. con $p_0 = p^*_{r-1} + 1$ e con $p_{r-1} = p^*_0 - 1$, quando si assuma per p_0 e p^*_0 l' ordinaria definizione (n. 6) che risulta considerando come 0-ciclo ogni punto dall'ambiente (n. 2). Si può però modificare il significato di p_0, p^*_0 considerando come 0-cicli soltanto le coppie di punti (o combinazioni lineari di tali coppie di punti), uno dei quali sia dotato di segno $+$ e l' altro di segno $-$ (qual' è p. es. lo 0-ciclo contorno di una 1-cella; n. 2). Risulta immediatamente che, rispetto alla nuova accezione di 0-ciclo, gli interi p_0, p^*_0 vanno sostituiti con $p_0 - 1$, $p^*_0 - 1$, cosicchè la (9.1) può allora considerarsi valida per $k = 1, \dots, r$.

Il teorema di dualità asserisce inoltre che (con riferimento sempre alla nuova accezione di 0-ciclo per i casi $k = 1$, r):

Scelta arbitrariamente una base minima $\Delta^{(1)}_{k-1}, \dots, \Delta^{(p_{k-1})}_{k-1}$ *per il gruppo di* BETTI $(k-1)$*-dimensionale in* T_m, *può trovarsi una base minima* $\Gamma^{(1)}_{r-k}, \dots, \Gamma^{(p_{r-k})}_{r-k}$ *per il gruppo di* BETTI $(r-k)$*-dimensionale in* $H_r - T_m$ *(o viceversa), in guisa che la matrice dei mutui coefficienti di allacciamento*

([15]) Si noti che, siccome per $k-1 > m$ è sempre $p_{k-1} = 0$ (n. 6), così è anche $p^*_{r-k} = 0$ per $r-k < r-m-1$.

risulti unitaria, cioè si abbia:

$$\mathrm{All}\,(\Delta^{(i)}_{k-1},\ \Gamma^{(j)}_{r-k}) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad i = j \\ 0 & \text{per} \quad i \neq j \end{cases}. \tag{9.2}$$

Le due basi soddisfacenti le (9.2) diconsi mutuamente *duali.*

Si noti il seguente immediato corollario dell'esistenza di basi duali: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un* $(k-1)$*-ciclo* Δ_{k-1} *di* T_m *sia* ≈ 0 *in* T_m*, è che risulti* $\mathrm{All}\,(\Delta_{k-1},\ \Gamma_{r-k}) = 0$ *per ogni* $(r-k)$*-ciclo* Γ_{r-k} *di* $H_r - T_m$ (e analogamente scambiando le veci delle varietà T_m, $H_r - T_m$ e dei cicli in esse considerati). Infatti, la necessità della condizione scende già dal n. 8; per la sufficienza, posto $\Delta_{k-1} \approx \Sigma_i\, \lambda_i \Delta^{(i)}_{k-1}$, in base alle (9.2) risulta: $\lambda_j = \mathrm{All}\,(\Delta_{k-1},\ \Gamma^{(j)}_{r-k}) = 0$, onde $\Delta_{k-1} \approx 0$ in T_m.

Prodotti topologici.

10. Ricordiamo infine la nozione di *prodotto topologico* di più varietà $V^{(1)}_{k_1}, \dots, V^{(s)}_{k_s}$. Si dà questo nome alla varietà, astrattamente definita, $W_{k_1+\dots+k_s} = V^{(1)}_{k_1} \times \dots \times V^{(s)}_{k_s}$, i cui punti rappresentano le s-ple ordinate di punti estratti il primo da $V^{(1)}_{k_1}$, il secondo da $V^{(2)}_{k_2}, \dots$, l's-mo da $V^{(s)}_{k_s}$. Se le varietà $V^{(i)}_{k_i}$ stanno in spazi euclidei $S_{r_i}(x^{(i)}_1, \dots, x^{(i)}_{r_i})$, potremo riferirci al modello concreto della varietà $W_{k_1+\dots+k_s}$ che si ottiene nello spazio euclideo $S_{r_1+\dots+r_s}(x^{(1)}_1, \dots, x^{(1)}_{r_1}, \dots, x^{(s)}_1, \dots, x^{(s)}_{r_s})$ al modo seguente. Un punto di coordinate $x^{(1)}_1, \dots, x^{(1)}_{r_1}, \dots, x^{(s)}_1, \dots, x^{(s)}_{r_s}$ appartiene a $W_{k_1+\dots+k_s}$ se i punti di coordinate $x^{(i)}_1, \dots, x^{(i)}_{r_i}$ in S_{r_i} appartengono a $V^{(i)}_{k_i}$ per $i = 1, \dots, s$.

Supposta ogni varietà $V^{(i)}_{k_i}$ orientabile ed orientata mediante un k_i-edro di direzioni tangenti uscenti da un punto $P^{(i)}$, il prodotto topologico $W_{k_1+\dots+k_s}$ risulta anch'esso orientabile e può pensarsi orientato *in conformità dell'orientazione dei fattori.* Precisamente, si pensi ogni S_{r_i} come quello spazio subordinato ad $S_{r_1+\dots+r_s}$ i cui punti hanno coordinate $0, \dots, 0, x^{(i)}_1, \dots, x^{(i)}_{r_i}, 0, \dots, 0$, e si assuma su $W_{k_1+\dots+k_s}$ l'orientazione definita dal $(k_1 + \dots + k_s)$-edro di direzioni tangenti uscenti dal punto $P = P^{(1)} \times \dots \times P^{(s)}$, delle quali le prime k_1 sono parallele alle direzioni del k_1-edro tangente a $V^{(1)}_{k_1}$, le seconde k_2 alle direzioni del k_2-edro tangente a $V^{(2)}_{k_2}$, e così via.

Se le $V^{(i)}_{k_i}$ sono k_i-catene, $W_{k_1+\dots+k_s}$ è una $(k_1 + \dots + k_s)$-catena, e il suo contorno orientato risulta espresso dalla relazione:

$$\mathfrak{C}\, W_{k_1+\dots+k_s} = \sum_{1}^{s}{}_i\, (-1)^{k_1+\dots+k_{i-1}}\, V^{(1)}_{k_1} \times \dots \times V^{(i-1)}_{k_{i-1}} \times \mathfrak{C}\, V^{(i)}_{k_i} \times V^{(i+1)}_{k_{i+1}} \times \dots \times V^{(s)}_{k_s}, \tag{10.1}$$

dove i prodotti topologici a secondo membro s'intendono orientati in conformità dell'orientazione dei singoli fattori.

§ II. - Richiami sulla teoria delle forme differenziali esterne.

Diamo anche su questo argomento indicazioni sommarie e limitate a quanto ci occorrerà nel seguito ([16]).

Forme esterne.

1. Siano $x_1, \dots, x_r$ variabili reali. Indicheremo un differenziale di grado k, o *k-differenziale*, col simbolo

$$d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \tag{1.1}$$

che si suppone *emisimmetrico* rispetto agli indici $i_1, \dots, i_k$ (ciascun dei quali può assumere i valori $1, \dots, r$). Ciò significa che, se $j_1, \dots, j_k$ è una permutazione di classe p di $i_1, \dots, i_k$, si pone $d(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) = (-1)^p d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$. Ne segue che è nullo un differenziale con due indici uguali, e in particolare ogni differenziale di grado $k > r$.

Una forma differenziale di grado k, o brevemente *k-forma*, è una combinazione lineare di k-differenziali

$$\omega_k = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_r) d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \tag{1.2}$$

dove i coefficienti $a_{i_1 \dots i_k}$ sono funzioni di $x_1, \dots, x_r$, e gl'indici di sommazione possono assumere indipendentemente tutti i valori da 1 ad r (in altri termini la somma s'intende estesa a tutte le disposizioni $i_1, \dots, i_k$ degli interi $1, \dots, r$, con eventuali ripetizioni).

Tenuto conto della emisimmetria dei simboli (1.1), la (1.2) può anche scriversi nella forma seguente, che diremo *contratta*, dove la somma è limitata alle sole combinazioni di classe k degli interi $1, \dots, r$, ordinate secondo la crescenza:

$$\omega_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} A_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_r) d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}). \tag{1.3}$$

Le funzioni $A_{i_1 \dots i_k}$ si ottengono ovviamente come combinazioni lineari delle $a_{i_1 \dots i_k}$, e riescono definite per $i_1 < \dots < i_k$. Ma, se si suppone di attribuire il carattere di emisimmetria anche ai simboli $A_{i_1 \dots i_k}$, questi vengono ad avere significato per tutte le disposizioni $i_1, \dots, i_k$ con eventuali ripetizioni. Così facendo la espressione (1.3) può sostituirsi con l'altra equivalente, che diremo *normalizzata*, particolarmente comoda nei calcoli:

$$\omega_k = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_r) d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}). \tag{1.4}$$

([16]) Cfr. p. es. E. CARTAN [3], E. GOURSAT [5], W. V. D. HODGE [6], o il recente trattato di B. SEGRE [17].

Si noti che, mentre i coefficienti $a_{i_1 \dots i_k}$ non sono individuati da ω_k, lo sono invece i coefficienti $A_{i_1 \dots i_k}$. Intenderemo sempre nel seguito che gli $A_{i_1 \dots i_k}$ siano funzioni univoche di classe 1 (almeno) nel campo di definizione di ogni forma ω_k che avremo da considerare. Tuttavia, per sottolineare questa condizione sui coefficienti $A_{i_1 \dots i_k}$, parleremo talora di *campo di regolarità* di ω_k.

Una forma differenziale di grado 1 non è che un ordinario pfaffiano. Sarà opportuno considerare come forma di grado zero una funzione.

Calcolo simbolico.

2. Sulle forme esterne si può operare con un calcolo simbolico, basato sulle operazioni di prodotto esterno e di differenziazione esterna.

Il *prodotto esterno* di due differenziali $d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, $d(x_{j_1}, \dots, x_{j_h})$ di gradi k, h, è il $(k+h)$-differenziale $d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, x_{j_1}, \dots, x_{j_h})$; cioè (usando il segno $\times$ per indicarne l'operazione corrispondente):

$$d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \times d(x_{j_1}, \dots, x_{j_h}) = d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, x_{j_1}, \dots, x_{j_h}).$$

La definizione si estende alle forme differenziali monomie ponendo

$$a d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \times b d(x_{j_1}, \dots, x_{j_h}) = ab d(x_{i_1}, \dots, x_{j_k}, x_{j_1}, \dots, x_{j_h}),$$

nonchè alle forme differenziali generali ammettendo la proprietà distributiva rispetto alla somma, e al caso di più fattori ammettendo la proprietà associativa. Si ha così in particolare la relazione:

$$d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = dx_{i_1} \times \dots \times dx_{i_k}, \tag{2.1}$$

che esprime un k-differenziale come prodotto esterno di differenziali semplici.

Il prodotto esterno non è ovviamente commutativo ma *alternante*, come risulta dalla emisimmetria dei k-differenziali. Se ω_k, ω_h sono forme di gradi k, h, si ha in generale

$$\omega_k \times \omega_h = (-1)^{kh} \omega_h \times \omega_k. \tag{2.2}$$

Una volta assunta a fondamento la *covarianza* per trasformazioni di variabili dell'operazione di prodotto esterno, si deduce subito il modo di trasformarsi di un k-differenziale (e quindi di una k-forma) mercè la (2.1), assumendo valide le ordinarie regole di trasformazione per i differenziali semplici. Si può in generale riferirsi a trasformazioni che esprimano le $x_1, \dots, x_r$ come trasformate *univoche* (e non necessariamente biunivoche) di nuove variabili $y_1, \dots, y_s$ $(s \gtreqless r)$:

$$x_i = x_i(y_1, \dots, y_s) \qquad (i = 1, \dots, r), \tag{2.3}$$

essendo le funzioni a secondo membro di classe ≥ 1. La (2.1) dà così per la k-forma nelle $y_1, \dots, y_s$ trasformata di $d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ l'espressione:

$$\left(\sum_{j_1} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{j_1}} dy_{j_1} \right) \times \dots \times \left(\sum_{j_k} \frac{\partial x_{i_k}}{\partial y_{j_k}} dy_{j_k} \right), \tag{2.4}$$

nella quale i prodotti esterni vanno naturalmente eseguiti secondo le regole di alternanza.

È immediato dedurre dalla (2.4) una formula esplicita di trasformazione esprimente $d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ in funzione dei k-differenziali $d(y_{j_1}, \dots, y_{j_k})$, ma non ci occorre scriverla poichè in pratica ci riuscirà più comodo usufruire direttamente della (2.4). Notiamo soltanto che, qualora sia $s = k$, si ottiene semplicemente:

$$d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}{\partial(y_1, \dots, y_k)} d(y_1, \dots, y_k). \tag{2.5}$$

3. Il *differenziale esterno* (o di CARTAN) della k-forma (1.2) è la $(k+1)$-forma:

$$d\omega_k = \sum_{i_1, \dots, i_k} da_{i_1 \dots i_k} \times d(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}). \tag{3.1}$$

L'operazione di differenziazione esterna risulta anch'essa covariante per trasformazioni di variabili del tipo detto.

Ci servirà nel seguito aver presente l'espressione esplicita del differenziale esterno della ω_k scritta nella forma normalizzata (1.4). Si ha:

$$d\omega_k = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}} B_{i_1 \dots i_{k+1}} d(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k+1}}), \tag{3.2}$$

con

$$B_{i_1 \dots i_{k+1}} = \frac{\partial A_{i_2 \dots i_{k+1}}}{\partial x_{i_1}} - \frac{\partial A_{i_1 i_3 \dots i_{k+1}}}{\partial x_{i_2}} + \dots + (-1)^k \frac{\partial A_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_{i_{k+1}}}. \tag{3.3}$$

Se si osserva che l'espressione fornita per $B_{i_1 \dots i_{k+1}}$ dalla (3.3) è emisimmetrica rispetto agl'indici, si trae che il secondo membro della (3.2) è anch'esso scritto in forma normalizzata, e che, in forma contratta, può invece scriversi così:

$$d\omega_k = \sum_{i_1 < \dots < i_{k+1}} B_{i_1 \dots i_{k+1}} d(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k+1}}), \tag{3.4}$$

con lo stesso significato per i coefficienti $B_{i_1 \dots i_{k+1}}$.

Notiamo la seguente regola di differenziazione di un prodotto esterno:

$$d(\omega_k \times \omega_h) = d\omega_k \times \omega_h + (-1)^k \omega_k \times d\omega_h. \tag{3.5}$$

Teorema di Volterra-Poincaré.

4. Allorchè esiste una $(k-1)$-forma Ω_{k-1} tale che risulti $d\Omega_{k-1} = \omega_k$ in tutto il campo di regolarità di ω_k, la forma ω_k si dirà *esatta*. Per $k = 1$ Ω_0 si riduce ad una funzione e si ricade nella nozione ordinaria di differenziale esatto.

Se $d\omega_k = 0$ la forma ω_k si dirà *chiusa*. Dalla (3.4) consegue che: condizione necessaria e sufficiente perchè ω_k sia chiusa è che si annullino tutte le espressioni (3.3).

Sussiste il seguente teorema di VOLTERRA-POINCARÉ:

Una forma esatta è sempre chiusa. In simboli: $dd\Omega_{k-1} = 0$.

Il teorema può invertirsi localmente. Cioè: se ω_k è chiusa, nell'intorno di ogni punto del suo campo di regolarità esiste una forma Ω_{k-1} per cui $d\Omega_{k-1} = \omega_k$ (senza che di necessità esista una tale Ω_{k-1} regolare in tutto il campo di regolarità di ω_k).

Avremo nel seguito particolarmente bisogno dell'ultima proposizione, ed anzi di una precisazione di questa risultante dalla sua dimostrazione ([17]). Intanto la Ω_{k-1} non riesce univocamente determinata dalla ω_k (pur con riferimento, come si è detto, ad un fissato intorno), l'indeterminazione dipendendo dalla arbitraria aggiunta di una $(k-1)$-forma chiusa Π_{k-1} $(d\Pi_{k-1} = 0,\ d(\Omega_{k-1} + \Pi_{k-1}) = 0)$. Ora, a cagione di tale arbitrarietà, si può sempre costruire Ω_{k-1} *non contenente uno prefissato dei differenziali* $dx_1, \dots, dx_r$. In altri termini, è lecito supporre identicamente nulli i coefficienti di Ω_{k-1} scritta in forma normalizzata, per i quali uno degli indici abbia un valore arbitrariamente fissato tra $1, \dots, r$.

Integrazione di k-forme.

5. Per definire l'integrale di una k-forma ω_k sopra una k-cella orientata E_k dello spazio euclideo $S_r(x_1, \dots, x_r)$ si può procedere nel modo seguente.

Si supponga E_k di classe differenziale ≥ 1 e rappresentata sopra una k-sfera solida Σ_k dello spazio euclideo $S_k(y_1, \dots, y_k)$ mediante equazioni parametriche del tipo (2.3) con $s = k$. La trasformazione di variabili (2.3) muta la ω_k in una forma monomia $f(y_1, \dots, y_k)d(y_1, \dots, y_k)$ (che, tenuto conto delle (2.5), si scriverebbe subito esplicitamente). Si pone allora per definizione:

$$\int_{\dot{E}_k} \omega_k = \pm \int_{\dot{\Sigma}_k} f(y_1, \dots, y_k)\, dy_1 \dots dy_k, \tag{5.1}$$

dove al secondo membro appare un integrale multiplo ordinario e deve assumersi il segno $+$ o il segno $-$ a seconda che l'orientazione naturale dello $S_k(y_1, \dots, y_k)$ corrisponda o no all'assegnata orientazione di E_k. A norma del § I, n. 1, il significato dell'ultima condizione può intendersi così. Consideriamo in Σ_k un k-edro di direzioni aventi componenti $(dy_1, 0, \dots, 0)$, $(0, dy_2, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, dy_k)$ con ogni $dy_i > 0$, che indicheremo brevemente come k-edro $(dy_1, \dots, dy_k)$. Ebbene, deve assumersi il segno positivo o negativo a seconda che il trasformato mediante le (2.3) del k-edro $(dy_1, \dots, dy_k)$

([17]) Quale può leggersi p. es. in E. GOURSAT [5], pag. 106.

risulti equiverso o contraverso con il k-edro che fornisce l'assegnata orientazione di E_k.

È immediato che la definizione espressa dalla (5.1) risulta indipendente dai cambiamenti della rappresentazione parametrica di E_k, e che può estendersi senz'altro alle k-celle singolari. L'integrale di ω_k sopra una varietà V_k che possa considerarsi come un k-catena, eventualmente singolare, si ottiene come somma degli integrali sulle k-celle che compongono la catena (considerate con l'orientazione e la molteplicità che loro spetta); esso risulta indipendente dalla reticolazione di V_k.

6. Sussiste la seguente *formula generale* di GREEN-STOKES:

$$\int_{\mathcal{C}V_{k+1}} \omega_k = \int_{V_{k+1}} d\omega_k, \tag{6.1}$$

dove la varietà V_{k+1} (che si suppone al solito una $(k+1)$-catena) appartiene al campo di regolarità della k-forma ω_k, e $\mathcal{C}V_{k+1}$ ne è il contorno orientato nel senso precisato nel § I, n. 2. La (6.1) è valida anche con riferimento a varietà singolari. Si noti che per $k=0$, supposto V_1 un arco di linea di estremi P, Q, orientato da P verso Q, risulta $\mathcal{C}V_1 = Q - P$ (I, n. 2) e la (6.1) diviene:

$$\int_{V_1} df = f(Q) - f(P), \tag{6.2}$$

essendo $f \equiv \omega_0$ una funzione definita su V_1.

Occorrerà aver presenti le seguenti immediate conseguenze della (6.1). Indichiamo con R la regione di regolarità di una forma ω_k.

1) *Se ω_k è chiusa* ($d\omega_k = 0$), *è nullo l'integrale di ω_k sopra ogni k-ciclo $\Gamma_k \approx 0$ in R, o, in particolare, ivi omotopo ad un punto.* Invero, per l'ipotesi esiste in R una varietà V_{k+1}, eventualmente singolare, tale che $\mathcal{C}V_{k+1} = t\Gamma_k$, con t intero $\neq 0$ (I, n. 4). Dalla (6.1) segue allora senz'altro 1).

2) *Se ω_k è chiusa, sono uguali gli integrali di ω_k sopra k-cicli Γ_k, Γ_k' fra loro omologhi in R ($\Gamma_k \approx \Gamma_k'$). In particolare non varia l'integrale $\int_{\Gamma_k} \omega_k$ per deformazioni omotopiche di Γ_k in R.* Si trae da 1), riferendo quel teorema al k-ciclo $\Gamma_k - \Gamma_k'$ che è ≈ 0 in R.

3) *Se ω_k è esatta* ($\omega_k = d\Omega_{k-1}$), *è nullo l'integrale di ω_k sopra ogni k-ciclo Γ_k di R.* Consegue dalla (6.1) considerata per $k-1$ in luogo di k, e applicata alle forme Ω_{k-1} e $d\Omega_{k-1}$ integrate sulle varietà $\mathcal{C}\Gamma_k = 0$ e Γ_k.

Estensione al campo complesso.

7. Le proprietà formali delle forme differenziali, richiamate ai nn. 1–4, si estendono ovviamente al campo complesso considerando in luogo di varia-

bili reali, variabili complesse $z_1, \ldots, z_n$ ($z_j = x_j + iy_j$; $j = 1, \ldots, n$) e supponendo analitici in $z_1, \ldots, z_n$ i coefficienti delle forme.

Ma si può fare l'estensione anche in modo un po' più generale. Si consideri invero una k-forma differenziale, a coefficienti analitici reali o complessi dei $2n$ argomenti *reali* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, che indicheremo succintamente con $\omega_k(x_j, y_j)$. La $\omega_k(x_j, y_j)$ si spezza in realtà nel modo seguente:

$$\omega_k(x_j, x_j) = \omega_k'(x_j, y_j) + i\omega_k''(x_j, y_j), \tag{7.1}$$

essendo ω_k', ω_k'' forme reali del tipo già considerato. Ora, a cagione della supposta analicità dei coefficienti, si può estendere la variabilità degli argomenti x_j, y_j al campo complesso, e la forma $\omega_k(x_j, y_j)$ conserva significato. È lecita perciò la sostituzione lineare (complessa) di variabili:

$$x_j = \frac{1}{2}(z_j + \bar{z}_j), \qquad y_j = \frac{1}{2i}(z_j - \bar{z}_j) \tag{7.2}$$

mediante la quale $\omega_k(x_j, y_j)$ si muterà in una forma nelle variabili $z_1, \ldots, z_n$, $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$, che indicheremo con $\tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j)$, del tipo seguente:

$$\tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j) = \sum_{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q} a_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}(z_j, \bar{z}_j) d(z_{i_1}, \ldots, z_{i_p}, \bar{z}_{j_1}, \ldots, \bar{z}_{j_q}), \tag{7.3}$$

dove $p + q = k$ e le $a_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}$ sono funzioni analitiche di z_j, $\bar{z}_j$ ($j = 1, \ldots, n$).

Forme differenziali aventi la struttura (7.3) saranno particolarmente oggetto delle nostre considerazioni. Occorre notare che però noi avremo interesse a considerare la $\tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j)$ soltanto *per valori complessi coniugati degli argomenti* z_j, $\bar{z}_j$. Come segue dalle (7.2), ciò equivale a considerare la primitiva forma $\omega_k(x_j, y_j)$ per valori reali degli argomenti x_j, y_j, vale a dire, usando linguaggio geometrico, *nello spazio $2n$-dimensionale reale* $S_{2n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Pur con riferimento alla $\tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j)$ assumeremo come immagine del campo di definizione tale S_{2n} reale, trattando insomma le z_j, $\bar{z}_j$ come *coordinate isotrope* in S_{2n}. Si ponga però attenzione al fatto che le z_j, $\bar{z}_j$ devono tuttavia riguardarsi talora quali variabili indipendenti (p. es. quando intervengano derivazioni parziali sui coefficienti di $\tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j)$).

È importante l'osservazione seguente. Sia $f(z_1, \ldots, z_n) = u(x_j, y_j) + iv(x_j, y_j)$ funzione analitica di $z_1, \ldots, z_n$. Siccome le componenti u, v di f sono analitiche negli argomenti reali x_j, y_j, la variabilità di questi può estendersi al campo complesso. Eseguendo allora la trasformazione (7.2) la funzione $u + iv$ mutasi in una funzione $\tilde{f}(z_j, \bar{z}_j)$ analitica delle z_j, $\bar{z}_j$ ($j = 1, \ldots, n$), la quale, per z_j, $\bar{z}_j$ complessi coniugati deve coincidere con la $f(z_1, \ldots, z_n)$. In base al principio di identità per le serie multiple di potenze ([18]), si conclude che vale

([18]) Ci riferiamo al principio enunciato nella forma seguente: Due serie di potenze che coincidono per valori reali degli argomenti, coincidono anche per valori complessi. Basterà allora applicare il principio alle serie di potenze che rappresentano le funzioni $\tilde{f}$, f, previo ritorno alle variabili x_j, y_j.

identicamente (cioè anche per valori indipendenti di z_j, $\bar{z}_j$): $\tilde{f}(z_j, \bar{z}_j) \equiv f(z_1, \dots, z_n)$. Dunque, allorchè si pensi f come funzione delle variabili indipendenti z_j, $\bar{z}_j$, le condizioni di monogeneità si esprimono nella forma semplicissima:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0 \text{ [19]} \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{7.4}$$

Dalle (7.4) consegue che la forma $\tilde{\omega}_k$ espressa dalla (7.3) si riduce ad una forma analitica nelle $z_1, \dots, z_n$ del tipo cui si è alluso al principio del presente n., allora e soltanto allora che nè i coefficienti nè i differenziali dipendono dalle variabili $\bar{z}_j$.

8. Il significato dell' integrazione di una forma $\tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j)$ sopra una k-cella E_k (e poi sopra una k-catena) dello $S_{2n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ reale, si presenta spontaneo se si tien conto che, in tale S_{2n} reale, $\tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j)$ uguaglia la forma $\omega_k(x_j, y_j)$ nelle variabili reali x_j, y_j, espressa dalla (7.1). È perciò naturale porre:

$$\int_{\dot{E}_k} \tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j) = \int_{\dot{E}_k} \omega_k(x_j, y_j) = \int_{\dot{E}_k} \omega_k'(x_j, y_j) + i \int_{\dot{E}_k} \omega_k''(x_j, y_j). \tag{8.1}$$

Siano:

$$x_j = x_j(u_1, \dots, u_k), \qquad y_j = y_j(u_1, \dots, u_k) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{8.2}$$

equazioni parametriche rappresentanti E_k sopra una k-sfera solida Σ_k dello spazio $(u_1, \dots, u_k)$. Se la trasformazione di variabili (8.2) muta le forme ω_k', ω_k'' risp. nelle forme $f^{(1)}(u_1, \dots, u_k)d(u_1, \dots, u_k)$, $f^{(2)}(u_1, \dots, u_k)d(u_1, \dots, u_k)$, in base al n. 5 la (8.2) si esplicita nella

$$\int_{\dot{E}_k} \tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j) = \pm \int_{\dot{\Sigma}_k} (f^{(1)} + if^{(2)}) du_1 \dots du_k, \tag{8.3}$$

dove a secondo membro appare un integrale multiplo ordinario della funzione complessa $f^{(1)} + if^{(2)}$, e vale la già detta regola per la scelta del segno.

Convien notare che può anche scriversi direttamente la (8.3), senza passare per il tramite delle forme ω_k', ω_k'', considerando le equazioni parametriche di E_k riferite alle coordinate isotrope:

$$\begin{cases} z_j = x_j(u_1, \dots, u_k) + iy_j(u_1, \dots, u_k) = z_j(u_1, \dots, u_k) \\ \bar{z}_j = x_j(u_1, \dots, u_k) - iy_j(u_1, \dots, u_k) = \bar{z}_j(u_1, \dots, u_k) \end{cases} \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{8.4}$$

ed eseguendo sulla $\tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j)$ la trasformazione di variabili (8.4), con che si ottiene la forma $(f^{(1)} + if^{(2)})d(u_1, \dots, u_k)$.

---

[19] Una immediata verifica formale mostra d'altronde l'equivalenza delle (7.4) e delle condizioni di CAUCHY, tramite le (7.2).

Siccome, in base alla (8.1), gli integrali di forme del tipo di $\tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j)$ si decompongono in due integrali di forme reali, è poi ovvio che *la formula* (6.1) *e le sue conseguenze* (n. 6) *si estendono senz'altro al caso di forme complesse.* Ed è importante osservare che, a cagione della covarianza per trasformazioni di variabili della operazione di differenziazione esterna (n. 3), può calcolarsi $d\tilde{\omega}_k(z_j, \bar{z}_j)$ senza che occorra passare alle variabili x_j, y_j, ma direttamente rispetto alle variabili z_j, $\bar{z}_j$ (considerate come indipendenti, n. 7).

§ III. - Parte topologica della ricerca.

La formula di Cauchy elementare.

1. Abbiamo richiamato nell'INTRODUZIONE la seguente espressione generale della formula di CAUCHY per le funzioni analitiche di una variabile complessa $z = x + iy$:

$$2\pi i N f(\zeta) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \tag{1.1}$$

Nella (1.1) Γ_1 può supporsi un 1-ciclo qualunque (eventualmente riducibile e singolare, § I, n. 3) della regione (aperta) R_2 di olomorfismo di $f(z)$, nel piano di ARGAND-GAUSS (x, y). Essendo $O(\zeta)$ un punto di R_2, le condizioni di validità delle (1.1) possono (come si è detto) esprimersi così:

(I$_1$) $\qquad \Gamma_1 \subset R_2 - O,$

(II$_1$) $\qquad \Gamma_1 \backsim 0 \quad \text{in} \quad R_2,$

(III$_1$) $\qquad \mathrm{All}(\Gamma_1, O) = N.$

Indichiamo con K_1 una semiretta orientata uscente dal punto O, p. es. parallela al semiasse positivo delle x. Secondo le ricordate convenzioni per l'orientazione dei contorni (I, n. 2), risulta

$$\mathcal{C}K_1 = -O,$$

onde, tenuto conto delle definizioni e delle proprietà del § I, n. 8, si ha

$$\mathrm{All}(\Gamma_1, O) = -\mathrm{All}(O, \Gamma_1) = \mathrm{All}(-O, \Gamma_1) = [K_1, \Gamma_1], \tag{1.2}$$

dove l'indice di KRONECKER $[K_1, \Gamma_1]$ s'intenderà valutato con riferimento all'orientazione naturale (I, n. 1) del piano (x, y). La (1.2) permette semplicemente il calcolo dell'intero N.

Benchè si tratti di cosa molto elementare, ricordiamo come si deduce la (1.1) sulla base delle condizioni (I$_1$), (II$_1$), (III$_1$), chè queste, nella forma in cui sono scritte, non risultano forse famigliari od ogni lettore. Dopo di ciò la linea del procedimento con il quale si perviene alle più generali estensioni della (1.1) riuscirà del tutto naturale.

In primo luogo, siccome la funzione $\frac{f(z)}{z-\zeta}$ è regolare nella regione $R_2 - O$, è lecito considerare l'integrale

$$\int \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz \tag{1.3}$$

sopra qualunque cammino contenuto in $R_2 - O$; in particolare, essendo soddisfatta la (I_1), è definito l'integrale a secondo membro della (1.1).

Ora la condizione (II_1) assicura l'esistenza di una varietà 2-dimensionale V_2, eventualmente singolare, contenuta in R_2 ed avente per contorno Γ_1 (I, n. 4). Supponiamo dapprima che V_2 contenga il punto O, senza escludere anzi che V_2, se singolare, possa ricoprire più volte l'intorno del punto O sul piano (x, y) [20]. Sia U_2 la porzione di V_2 che appartiene ad un piccolo intorno circolare C_2 del punto O, e Γ_1' il ciclo (eventualmente singolare) che è contorno di U_2. Si ha (I, n. 2):

$$\mathcal{C}(V_2 - U_2) = \mathcal{C}V_2 - \mathcal{C}U_2 = \Gamma_1 - \Gamma_1',$$

cioè, siccome la varietà $V_2 - U_2$ è contenuta in $R_2 - O$,

$$\Gamma_1 - \Gamma_1' \backsim 0, \quad \text{ovvero} \quad \Gamma_1 \backsim \Gamma_1' \quad \text{in} \quad R_2 - O.$$

Applicando il 1° teorema di CAUCHY si ha dunque che è nullo l'integrale (1.3) sopra il ciclo $\Gamma_1 - \Gamma_1'$, cioè sono uguali gli integrali (1.3) sopra i cicli omologhi Γ_1, Γ_1'. Ciò ci autorizza a sostituire nel secondo membro della (1.1) il ciclo d'integrazione Γ_1 col ciclo Γ_1'; quest'ultimo può poi a sua volta sostituirsi con un ciclo qualunque ad esso omologo in $C_2 - O$, pur di supporre l'intorno circolare C_2 così piccolo da esser contenuto in R_2, perchè allora ogni relazione di omologia valida in $C_2 - O$ è altresì valida in $R_2 - O$. Si vede così che, per il calcolo dell'integrale in oggetto, *si è infine condotti alla determinazione della base del gruppo di omologia per i cicli* 1-*dimensionali di* $C_2 - O$ (I, n. 6).

Tale base è costituita da un ciclo di C_2 che giri una sola volta intorno ad O, p. es. la circonferenza γ_1 contorno di C_2, orientata nel senso positivo ordinario. Si ha così

$$\Gamma_1 \backsim \Gamma_1' \backsim \nu\gamma_1 \quad \text{in} \quad R_2 - O, \tag{1.4}$$

con ν intero conveniente, e il secondo membro della (1.1) si riduce a

$$\nu \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz.$$

---

[20] Ciò che accade p. es. quando Γ_1 avvolge più volte il punto O, essendo allora Γ_1 necessariamente costituito da più circuiti sconnessi o da un sol circuito connesso dotato di punti multipli.

D'altronde il valore della precedente espressione è indipendente dal raggio r di γ_1, quindi coincide col suo limite per r tendente a zero. Un calcolo elementare dà per questo limite il valore $2\pi i \nu f(\zeta)$.

Perchè sia provata la (1.1) resta da far vedere che $\nu = N$. Applicando alla (1.4) la proprietà fondamentale degl'indici d'allacciamento (I, n. 8) e la (1.2), si ottiene

$$\mathrm{All}(\Gamma_1, O) = \mathrm{All}(\nu\gamma_1, O) = \nu[K_1, \gamma_1] = \nu ;$$

quindi, tenuto conto della (III_1), abbiamo appunto $N = \nu$.

Dobbiamo esaminare l'ipotesi in cui V_2 non contenga il punto O ([21]). In tal caso si ha $\Gamma_1 \backsim 0$ in $R_2 - O$ (e non soltanto in R_2). Il secondo membro della (1.1) risulta allora nullo e lo stesso accade per il primo membro poichè si ha anche $N = \mathrm{All}(\Gamma_1, O) = 0$, in base ad una delle conseguenze della proprietà fondamentale degl'indici d'allacciamento (I, n. 8). La formula (1.1) resta dunque valida, ma perde interesse poichè essa non serve più per esprimere il valore di $f(\zeta)$ mediante i valori di $f(z)$ su Γ_1. Si può osservare che questa eventualità si presenta soltanto nel caso considerato in cui $\Gamma_1 \backsim 0$ in $R_2 - O$. Infatti, nell'ipotesi contraria, dalla (1.4) si deduce che è necessariamente $\nu \neq 0$ e quindi $N \neq 0$.

OSSERVAZIONE. - Nella formulazione della condizione (II_1) facciamo uso dell'omologia ordinaria ($\backsim$) e non dell'omologia con divisione ($\approx$), che interverrà invece nella formulazione delle condizioni topologiche analoghe alla precedente, concernenti le estensioni della formula (1.1) al caso di più variabili. Ciò dipende dal fatto che, la sostituzione del segno $\backsim$ con $\approx$ negli enunciati elementari concernenti regioni R_2 del piano d'ARGAND-GAUSS (x, y) darebbe luogo ad una maggiore generalità soltanto apparente, poichè in una siffatta R_2 non esiste alcun 1-ciclo divisore dello zero (I, n. 4). Invero l'esistenza di un ciclo divisore dello zero di dimensione di un'unità inferiore alla dimensione dell'ambiente, implica la non orientabilità dell'ambiente medesimo ([22]), mentre R_2 è sempre orientabile, per es. in conformità con l'orientazione naturale del piano (x, y). Lo stesso può dirsi per le relazioni di omologia $(2n-1)$-dimensionale in una regione $2n$-dimensionale R_{2n} dello spazio euclideo S_{2n}.

Considerazioni generali sull'estensione della formula di Cauchy.

2. Quando si cerca di estendere la formula (1.1) alle funzioni di n variabili complesse $z_1, \dots, z_n$, si hanno di fronte n possibilità distinte, a seconda

([21]) Per quanto anche questo caso possa farsi rientrare nelle considerazioni precedenti aggiungendo a V_2 un 2-ciclo contenente O, p. es. una superficie sferica singolare, H_2, schiacciata su due cerchi sovrapposti contenenti O. Siccome $\mathcal{C}H_2 = 0$, si ha invero $\mathcal{C}(V_2 + H_2) = \mathcal{C}V_2 = \Gamma_1$, e può sostituirsi V_2 con $V_2 + H_2$.

([22]) Cfr. p. es. SEIFERT-THRELFALL [18], pag. 90.

che si voglia costruire una formula di *dimensione* n, $n+1, \ldots, 2n-1$, secondo la terminologia indicata nell'INTROD.

Rappresentiamo al solito le n variabili complesse nello spazio $2n$-dimensionale $S_{2n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, essendo $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Sia $f(z_1, \ldots, z_n)$ una funzione analitica ed olomorfa in una regione (aperta) R_{2n} di S_{2n}, ed $O(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un punto interno ad R_{2n}. Abbiamo già scritto nell'INTROD. le formule (8), (9), risp. di dimensione n e $2n-1$.

La funzione integranda che appare nella (8) si presenta come la più naturale estensione della funzione integranda a secondo membro nella (1.1). Tuttavia, mentre per $n = 1$ la funzione integranda ha un sol punto singolare in O, per n qualunque le singolarità sono distese sopra la varietà $(2n-2)$-dimensionale T_{2n-2}, composta degli n spazi lineari *caratteristici* ([23]) $(2n-2)$-dimensionali, passanti per O, di equazioni rispettive:

$$z_1 = \zeta_1\,;\ z_2 = \zeta_2\,;\ \ldots;\ z_n = \zeta_n\,. \tag{2.1}$$

Come nella (1.1) N è l'indice d'allacciamento del ciclo Γ_1 col punto O, così nella (8) N è un carattere intero che esprime l'analogo *stato di allacciamento* del ciclo d'integrazione Γ_n con la varietà T_{2n-2} (Γ_n essendo naturalmente non incidente la varietà T_{2n-2} luogo di singolarità per la funzione integranda).

Nell'altra formula citata, (9), la forma differenziale integranda risulta invece singolare nel solo punto O, e l'intero N uguaglia l'indice d'allacciamento del ciclo d'integrazione Γ_{2n-1} (non passante per O) col punto O stesso.

Se ora si cerca di scrivere una formula integrale generale $(n+l)$-dimensionale $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$, quale varietà singolare può presumersi per la forma differenziale integranda?

La varietà che, nel modo più naturale, si presenta adatta allo scopo è quella costituita dagli $\binom{n}{l+1}$ spazi caratteristici $(2n-2l-2)$-dimensionali passanti per il punto $O(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, ciascuno dei quali è rappresentato dalle equazioni:

$$z_{\alpha_1} = \zeta_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_{l+1}} = \zeta_{\alpha_{l+1}}, \tag{2.2}$$

essendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1}$ una combinazione qualunque degli interi $1, \ldots, n$. Invero, per $n = 1$, $l = 0$ e per n qualunque, $l = n-1$, le (2.2) si riducono alle equazioni del punto O; per n qualunque, $l = 0$, si riducono invece alle equazioni (2.1) degli n spazi caratteristici che compongono T_{2n-2}.

Indichiamo con $T_{2n-2l-2}$ la varietà definita, e assumiamola senz'altro come varietà singolare per la forma differenziale integranda della formula

([23]) Cioè immagini di spazi lineari complessi dello spazio complesso $(z_1, \ldots, z_n)$ (LEVI-CIVITA, SEVERI).

generale che vogliamo costruire. La diremo *varietà polare* (di centro O), perchè, com' è nei casi contemplati, supporremo ch' essa riesca luogo di poli per la forma integranda.

Un punto fondamentale che dobbiamo affrontare consiste allora nella *determinazione di uno o più caratteri interi definiti dal ciclo* Γ_{n+l}, *che servano a caratterizzare lo stato d' allacciamento del ciclo con la varietà polare considerata*. Tali caratteri dovranno invero apparire nella formula generale che abbiamo di mira, allo stesso modo che il carattere intero N appare nelle formule ricordate.

D' altra parte, abbiamo visto (n. 1) che la dimostrazione della formula (1.1) si fonda essenzialmente sulla considerazione della base del gruppo di omologia per gli 1-cicli di $C_2 - O$, cioè di un intorno circolare del punto O stesso. Analogamente, per stabilire la formula $(n+l)$-dimensionale, ci sarà necessaria la conoscenza della base del gruppo di omologia per gli $(n+l)$-cicli di un intorno del punto O, privato dei punti di $T_{2n-2l-2}$. Conviene assumere come intorno di O l' *n-cilindro* C_{2n} di raggio r definito dalle disuguaglianze:

$$|z_1 - \zeta_1| \leq r, \dots, |z_n - \zeta_n| \leq r. \tag{2.3}$$

Poichè la determinazione di tal base è strettamente legata alla determinazione dello stato d' allacciamento di Γ_{n+l} colla varietà $T_{2n-2l-2}$, *cominceremo appunto con lo studio del gruppo di omologia $(n+l)$-dimensionale di* $C_{2n} - T_{2n-2l-2}$.

Contrazione omotopica di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$.

3. Perverremo alla determinazione del gruppo di omologia, il cui studio ci siamo proposto, estendendo un procedimento di contrazione omotopica della varietà ambiente considerato da B. SEGRE in [16].

Per illustrare chiaramente questo punto un po' delicato, è opportuno ricordare dapprima il caso elementare discusso dall'A. citato. La varietà ambiente era in quel caso la varietà aperta $S_{2n} - T_{2n-2}$, cioè lo S_{2n} privato dei punti della varietà T_{2n-2} definita al n. 2 (varietà cui riducesi la $T_{2n-2l-2}$ per $l=0$). Si costruisce allora nel modo seguente una deformazione omotopica (I, n. 5) che muta $S_{2n} - T_{2n-2}$ nella varietà $\mathfrak{C}_n$, di dimensione n, definita dalle equazioni:

$$|z_1 - \zeta_1| = r, \dots, |z_n - \zeta_n| = r. \qquad (r > 0). \tag{3.1}$$

Sia $P(z_1, \dots, z_n)$ un punto qualunque di $S_{2n} - T_{2n-2}$. Posto

$$z_j = \zeta_j + \rho_j e^{i\theta_j} \qquad (\rho_j > 0\,;\ j = 1, \dots, n), \tag{3.2}$$

si consideri la trasformazione che muta P nel punto $P^{(t)}$ di coordinate

$$z_j^{(t)} = \zeta_j + [\rho_j + t(r - \rho_j)] e^{i\theta_j} \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{3.3}$$

essendo t un parametro reale definito nell'intervallo (0, 1). Per $t=0$, il punto coincide col punto P, e per $t=1$ col punto di coordinate

$$z_j^{(1)} = \zeta_j + re^{i\theta_j} \qquad (j=1, \dots, n),$$

che è un punto della varietà $\mathfrak{C}_n$. Poichè la posizione di $P^{(t)}$ è ovviamente funzione univoca e continua del parametro t e del punto P, resta così definita al variare di t da 0 ad 1, una deformazione omotopica di $S_{2n} - T_{2n-2}$ nella varietà $\mathfrak{C}_n$. A una deformazione di questo tipo si dà anzi il nome di *contrazione omotopica,* in quanto (come subito si verifica) durante la deformazione ogni punto di $S_{2n} - T_{2n-2}$ resta entro $S_{2n} - T_{2n-2}$, mentre ogni punto di $\mathfrak{C}_n$ rimane fisso.

La contrazione costruita non è in fondo altro che quella ottenibile considerando la varietà $S_{2n} - T_{2n-2}$ come prodotto topologico (I. n. 10) degli n piani $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, privati risp. dei punti $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, indi contraendo omotopicamente e simultaneamente ciascuno di quei piani forati nella circonferenza su di esso tracciata con centro nel foro e raggio r.

Nel nostro caso la varietà ambiente che si desidera contrarre omotopicamente è la $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$, che in generale non si può più ottenere come prodotto topologico. Nè può applicarsi utilmente ai punti di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ la trasformazione (3.2); giacchè (per $l>0$) esistono in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ punti per i quali è nullo qualche ρ_j ed indeterminato il corrispondente θ_j. Onde, in tali punti, la trasformazione che muta P nel punto $P^{(t)}$ di coordinate (3.3), non risulta più univoca e continua, cosicchè non ne resta definita una deformazione omotopica.

Di fatto accade che non è in generale possibile una contrazione omotopica di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ sopra la varietà $\mathfrak{C}_n$.

4. Consideriamo allora le varietà $(n+l)$-dimensionali $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$, definite dalle equazioni:

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{aligned} &|z_1 - \zeta_1| = |z_2 - \zeta_2| = \dots[\alpha_1, \dots, \alpha_l]\dots = |z_n - \zeta_n| = r, \\ &|z_{\alpha_1} - \zeta_{\alpha_1}| \leq r, \dots, |z_{\alpha_l} - \zeta_{\alpha_l}| \leq r \qquad (r \geq 0), \end{aligned}$$

dove gli indici $[\alpha_1, \dots, \alpha_l]$, così posti tra parentesi quadre nella prima riga, stanno a significare che s' intendono esclusi dalla uguaglianza multipla scritta i termini corrispondenti a quegli indici. Si hanno $\binom{n}{l}$ varietà $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$, tante quante le combinazioni $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ degli interi $1, \dots, n$. Indicato con π_j il piano caratteristico per O di equazione:

$$\text{(4.2)} \qquad z_1 = \zeta_1, \ z_2 = \zeta_2, \dots[j]\dots, \ z_n = \zeta_n,$$

lo S_{2n} può considerarsi come prodotto topologico di $\pi_1, \dots, \pi_n$. La varietà $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ appare allora come prodotto topologico subordinato degli l cerchi di centro O e raggio r nei piani $\pi_{\alpha_1}, \dots, \pi_{\alpha_l}$, e delle $n-l$ circonferenze con ugual centro e raggio nei piani $\pi_1, \dots[\alpha_1, \dots, \alpha_l]\dots, \pi_n$.

Rappresenteremo con $\mathfrak{A}_{n+l}$ l'insieme delle varietà $A^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{n+l}$:

$$\mathfrak{A}_{n+l} = \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l} A^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{n+l}. \tag{4.3}$$

Ricordando le (2.2) si vede immediatamente che $\mathfrak{A}_{n+l}$ appartiene ad $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$. Vogliamo dimostrare che $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ *può contrarsi omotopicamente sopra la varietà* $\mathfrak{A}_{n+l}$.

Sia $P(z_1, \dots z_n)$ un punto qualunque di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ e si conservino le posizioni (3.2). Fissato P, siano $\rho_{k_1}, \dots, \rho_{k_l}$ l dei $\rho_1, \dots, \rho_n$ di valore più basso, per guisa che risulti

$$\rho_k \leq \rho_j \qquad (k = k_1, \dots, k_l;\ j = 1, \dots [k_1, \dots, k_l] \dots, n), \tag{4.4}$$

ove gli indici tra parentesi quadra s' intendono al solito esclusi. Si indichi inoltre con ρ il *valore minimo* dei ρ_j per $j = 1, \dots [k_1, \dots, k_l] \dots, n$.

Ciò posto, consideriamo la trasformazione che muta P nel punto $P^{(t)}$ di coordinate

$$\left\{ \begin{aligned} z_j^{(t)} &= \zeta_j + [\rho_j + t(r - \rho_j)]e^{i\theta_j} && (j = 1, \dots [k_1, \dots, k_l] \dots, n) \\ z_k^{(t)} &= \zeta_k + \left[\rho_k + t\left(r\frac{\rho_k}{\rho} - \rho_k\right)\right]e^{i\theta_k} && (k = k_1, \dots, k_l). \end{aligned} \right. \tag{4.5}$$

per t variabile tra 0 e 1.

Dimostriamo che la posizione del punto $P^{(t)}$ riesce funzione *univoca e continua* del parametro t e del punto P variabile in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$.

Per accertare che la posizione di $P^{(t)}$ è univocamente definita dalle (4.5) bastano le osservazioni seguenti. 1) Nelle (4.5) è sempre $\rho \neq 0$, perchè, essendo esclusi i punti di $T_{2n-2l-2}$, possono annullarsi al più l dei $\rho_1, \dots, \rho_n$ e quindi soltanto $\rho_{k_1}, \dots, \rho_{k_l}$. 2) Se qualcuno dei $\rho_{k_1}, \dots, \rho_{k_l}$ è nullo, e sia ρ_k, risulta in conseguenza indeterminato θ_k, ma non ne viene indotta alcuna indeterminazione nella posizione di $P^{(t)}$, giacchè si ha allora $z_k^{(t)} = \zeta_k$ per ogni t. 3) Può accadere che, per un dato P, non siano determinati gli indici $k_1, \dots, k_l$ in corrispondenza ai quali $\rho_{k_1}, \dots, \rho_{k_l}$ assumono gli l valori più bassi; e sembrerebbe allora che le (4.5) potessero riuscire diverse a seconda della scelta che si faccia per gl' indici $k_1, \dots, k_l$, onde potesse conseguire indeterminazione per il punto $P^{(t)}$. Ma tale indeterminazione è soltanto apparente, poichè l'ambiguità nella determinazione dei $\rho_{k_1}, \dots, \rho_{k_l}$ minimi fra tutti i $\rho_1, \dots, \rho_n$ può presentarsi soltanto in corrispondenza a taluni di questi valori tra loro uguali e necessariamente coincidenti con ρ, cosicchè uno scambio tra questi non altera le equazioni (4.5) che nell' aspetto formale.

Stabilita così la univocità della posizione di $P^{(t)}$, la sua continuità come funzione di P, t risulta per il fatto che, qualora $k_1, \dots, k_l$ restin fissi, i secondi membri delle (4.5) sono ovviamente funzioni continue di $\rho_1, \dots \rho_n$, $\theta_1, \dots, \theta_n$, t, e d' altronde, qualora al variare continuo di P debban mutarsi $k_1 \dots k_l$, il mutamento si effettua di necessità passando attraverso posizioni di P in corrispondenza alle quali si ha indeterminazione negl' indici $k_1, \dots, k_l$ e quindi, a norma della precedente osservazione 3), due scelte diverse di tali indici sono entrambe legittime.

Si osservi ora che, per $t = 0$ il punto $P^{(t)}$ coincide con $P^{(0)} = P$, e per $t = 1$ col punto $P^{(1)}$ di coordinate:

$$\begin{cases} z_j^{(1)} = \zeta_j + re^{i\theta_j} & (j = 1, \dots [k_1, \dots, k_l] \dots, n) \\ z_k^{(1)} = \zeta_k + r\dfrac{\rho_k}{\rho} e^{i\theta_k} & (k = k_1, \dots, k_l). \end{cases}$$

Tenuto presenti le (4.4) e il significato di ρ, si ha per le coordinate di $P^{(1)}$:

$$|z_j^{(1)} - \zeta_j| = r \qquad (j = 1, \dots [k_1, \dots, k_l] \dots, n)$$

$$|z_k^{(1)} - \zeta_k| = r\frac{\rho_k}{\rho} \leq r \qquad (k = k_1, \dots, k_l),$$

il che, ove si ricordino le (4.1), mostra che $P^{(1)}$ appartiene alla varietà $A_{n+l}^{k_1 \dots k_l}$.

Risulta così in conclusione che la trasformazione costruita definisce una deformazione omotopica di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ nella varietà $\mathfrak{A}_{n+l}$. Per convincersi che si tratta propriamente di una contrazione omotopica, come desiderato, resta ancora da assicurare che sono soddisfatte le condizioni che, durante la deformazione, *a*) ogni punto di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ resta entro $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$, *b*) ogni punto di $\mathfrak{A}_{n+l}$ rimane fisso.

Per provare *a*) si osservi che dalle (4.5) risulta che, per $j = 1, \dots [k_1, \dots, k_l] \dots, n$, $|z_j^{(t)} - \zeta_j|$ con t nell'intervallo (0, 1), è sempre compreso tra ρ_j ed r, e quindi è diverso da zero, essendo ρ_j ed r maggiori di zero. Onde il punto $P^{(t)}$ non può cadere su $T_{2n-2l-2}$, chè altrimenti dovrebbero annullarsi $l + 1$ almeno degli n moduli $|z_1^{(t)} - \zeta_1|, \dots, |z_n^{(t)} - \zeta_n|$, secondo risulta dalle equazioni (2.2). Per provare *b*), si supponga che P cada su $\mathfrak{A}_{n+l}$ ed in particolare sopra la componente $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$, rappresentata dalle (4.1). Risulta allora che gl' indici $k_1, \dots, k_l$ coincidono con $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ [24] e $\rho_j = \rho = r$ per $j = 1, \dots [k_1, \dots, k_l] \dots, n$. Le (4.5) si riducono perciò a

$$z_j^{(t)} = \zeta_j + \rho_j e^{i\theta_j} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

cioè $P^{(t)}$ coincide con P per qualunque t.

5. Limitiamo la deformazione omotopica costruita nel n. prec. alla sola varietà ambiente $C_{2n} - T_{2n-2l-2}$ (anzichè estenderla a tutti i punti di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$, come si è fatto sin qui). Si prova immediatamente che si ottiene anche in questo caso una *contrazione omotopica di* $C_{2n} - T_{2n-2l-2}$ *sopra* $\mathfrak{A}_{n+l}$.

Valgono all'uopo le stesse considerazioni del n. 4. Deve soltanto aggiungersi l'osservazione che, se il punto P è contenuto entro C_{2n}, anche $P^{(t)}$, per

[24] O in ogni caso possono scegliersi coincidenti con $\alpha_1, \dots, \alpha_l$; cfr. l'osservazione 3) di cui poco sopra.

qualunque t dell'intervallo $0, 1)$, è contenuto entro C_{2n}. Infatti, essendo per ipotesi

$$\rho_j = |z_j - \zeta_j| \leq r \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

si deduce dalle (4.5)

$$|z_j^{(t)} - \zeta_j| \leq r \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

Gruppo di omologia $(n+l)$-dimensionale entro $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$.

6. Applichiamo la contrazione determinata al n. 4, ad un ciclo qualunque di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$. Esso si deforma omotopicamente in un ciclo di $\mathfrak{A}_{n+l}$. Pertanto ogni ciclo di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ ha un suo omotopo, e quindi omologo (I, n. 5), sulla varietà $\mathfrak{A}_{n+l}$. D'altronde, se un ciclo k-dimensionale Γ_k di $\mathfrak{A}_{n+l}$ è ~ 0 in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$, vuol dire che esiste una varietà $(k+1)$-dimensionale V_{k+1} di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ che ha per contorno Γ_k. Allora, applicando a V_{k+1} la contrazione omotopica, V_{k+1} si trasforma in una varietà V'_{k+1} ([25]) di $\mathfrak{A}_{n+l}$ che ha ancora per contorno Γ_k: *quindi Γ_k è altresì ~ 0 sopra $\mathfrak{A}_{n+l}$*. Se ne deduce che come base per i cicli di qualunque dimensione di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ può prendersi una base per i cicli della stessa dimensione sopra $\mathfrak{A}_{n+l}$. A noi interessa (n. 2) la dimensione $k = n + l$.

Per procedere è opportuno fissare un'orientazione su ciascuna delle varietà $A_{n+l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ definite dalle (4.1). Abbiamo già osservato (n. 4) che $A_{n+l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ è prodotto topologico di l cerchi e di $n - l$ circonferenze, cosicchè, essendo orientabili le varietà fattori del prodotto, risulta orientabile $A_{n+l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, e potrebbe determinarsi su di essa un'orientazione assegnando orientazioni sulle varietà fattori (I, n. 10). Tuttavia riuscirà più comodo per il seguito fissare altrimenti un'orientazione su $A_{n+l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$. Ricordate le posizioni (3.2), le equazioni (4.1) di $A_{n+l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ possono sostituirsi con le equazioni parametriche:

$$(6.1) \qquad \begin{cases} z_1 = \zeta_1 + re^{i\theta_1}, \ldots [\alpha_1, \ldots, \alpha_l] \ldots, \; z_n = \zeta_n + re^{i\theta_n} \\ z_{\alpha_1} = \zeta_{\alpha_1} + \rho_{\alpha_1} e^{i\theta_{\alpha_1}}, \ldots, \; z_{\alpha_l} = \zeta_{\alpha_l} + \rho_{\alpha_l} e^{i\theta_{\alpha_l}}, \end{cases}$$

essendo i parametri $\theta_1, \ldots, \theta_n$ variabili tra 0 e 2π, e i parametri $\rho_{\alpha_1}, \ldots, \rho_{\alpha_l}$ tra 0 ed r. Ebbene, *assumeremo su $A_{n+l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ l'orientazione determinata, in un suo punto generico, dallo $(n+l)$-edro di direzioni* $(d\theta_1, \ldots, d\theta_n, d\rho_{\alpha_1}, \ldots, d\rho_{\alpha_l})$ (usando il simbolismo abbreviato di cui nel § II, n. 5), vale a dire l'orientazione corrispondente mediante le (6.1) all'orientazione naturale (I, n. 1) dello spazio cartesiano $(\theta_1, \ldots, \theta_n, \rho_{\alpha_1}, \ldots, \rho_{\alpha_l})$.

L'orientazione definita dipende dall'ordine nel quale compaiono gli indici $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$; precisamente essa s'inverte o no a seconda che si esegua una permutazione di classe dispari o pari su $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ (I, n. 1). Cosicchè,

---

([25]) V'_{k+1} può risultare singolare anche se tale non è V_{k+1} (ciò che accade certamente quando $k + 1 > n + l$); ma sappiamo che questo non ha importanza ai fini della determinazione dalle relazioni di omologia (I, n. 4).

p. es., i simboli $A_{n+l}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_l}$, $A_{n+l}^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_l}$ rappresenteranno la stessa varietà con orientazioni opposte e potrà scriversi: $A_{n+l}^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_l} = - A_{n+l}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_l}$ In generale, dunque, il simbolo $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ dovrà d'ora in avanti riguardarsi come *emisimmetrico rispetto agli indici* $\alpha_1, \dots, \alpha_l$.

Ciò posto, determiniamo il contorno orientato di $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ (I, n. 2). Ricordando la formula (I, 10.1) che dà il contorno di un prodotto topologico, e tenendo conto dell'orientazione dianzi definita, si trova senza difficoltà:

$$\mathcal{C} A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l} = \sum_{p=1}^{l} (-1)^{n+p-1} A_{n+l-1}^{\alpha_1\dots[p]\dots\alpha_l}, \tag{6.2}$$

dove con i simboli $A_{n+l-1}^{\alpha_1\dots[p]\dots\alpha_l}$ (cioè $A_{n+l-1}^{\alpha_1\dots\alpha_{p-1}\alpha_{p+1}\dots\alpha_l}$) si rappresentano varietà del tipo delle $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$, corrrispondenti ad un valore di l di una unità inferiore e conformemente orientate.

Si considerino ora le varietà

$$\Gamma_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_{l+1}} = \sum_{q=1}^{l+1} (-1)^{q-1} A_{n+l}^{\alpha_1\dots[q]\dots\alpha_{l+1}}, \tag{6.3}$$

essendo $\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}$ una combinazione qualunque di classe $l+1$ degli interi $1, \dots, n$. Giovandosi della (6.2) è presto visto che *le* $\Gamma_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_{l+1}}$ *sono cicli* $(n+l)$-*dimensionali*. Infatti risulta:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\Gamma_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_{l+1}} &= \sum_{q=1}^{l+1} (-1)^{q-1} \left[\sum_{p=1}^{q-1} (-1)^{n+p-1} A_{n+l-1}^{\alpha_1\dots[pq]\dots\alpha_{l+1}} + \sum_{p=q+1}^{l+1} (-1)^{n+p-2} A_{n+l-1}^{\alpha_1\dots[qp]\dots\alpha_{l+1}} \right] \\ &= \sum_{p<q}^{l+1} A_{n+l-1}^{\alpha_1\dots[pq]\dots\alpha_{l+1}} [(-1)^{n+p+q-2} + (-1)^{n+p+q-3}] = 0.\end{aligned}$$

Ebbene, dimostreremo che:

Gli $\binom{n}{l+1}$ *cicli* $\Gamma_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_{l+1}} (\alpha_1 < \dots < \alpha_{l+1})$ *costituiscono una base per i cicli* $(n+l)$-*dimensionali della varietà* $\mathfrak{A}_{n+l}$, *e quindi di* $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$.

Si tratta cioè di provare (I, n. 6) che ogni $(n+l)$-ciclo di $\mathfrak{A}_{n+l}$ è omologo ad una combinazione lineare dei cicli $\Gamma_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_{l+1}}$.

7. Premettiamo l'osservazione seguente: *ogni* $(n+l)$-*ciclo di* $\mathfrak{A}_{n+l}$ *ha come omologo un* $(n+l)$-*ciclo costituito da una combinazione lineare delle varietà* $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ *componenti di* $\mathfrak{A}_{n+l}$.

Se le varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ fossero $(n+l)$-celle di una reticolazione di $\mathfrak{A}_{n+l}$, l'affermazione sarebbe caso particolare della proprietà generale secondo cui d'ogni ciclo d'una varietà reticolata può trovarsi un omologo tra i cicli che son catene del complesso reticolante (I, n. 6). Di fatto le $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ non sono $(n+l)$-celle; tuttavia ci si può ridurre alla proprietà ricordata costruendo una reticolazione di $\mathfrak{A}_{n+l}$ in guisa che ciascuna $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ risulti costituita da una somma di $(n+l)$-celle della reticolazione. Si può p. es. considerare la reticolazione di $\mathcal{C}_{n+l}$ che si ottiene riguardando ciascuna $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ come prodotto topologico di $n-l$ circonferenze e di l cerchi (n. 4), dopo aver reticolato ciascuna circonferenza decomponendola in due 1-celle, e ciascun cerchio considerandolo come una 2-cella contornata da due 1-celle. In tal modo ogni $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ di $\mathcal{C}_{n+l}$ risulta decomposta in 2^{n-l} $(n+l)$-celle. Ora, se un $(n+l)$-ciclo di $\mathcal{C}_{n+l}$ composto di $(n+l)$-celle del complesso costruito contiene una determinata $(n+l)$-cella, contiene in conseguenza tutta la varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ cui quella $(n+l)$-cella appartiene, chè altrimenti l'$(n+l)$-ciclo verrebbe a possedere punti di contorno interni alla $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$, mentre, per essere un ciclo, non ha contorno. Ne segue che tale $(n+l)$-ciclo è costituito da una combinazione lineare di varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$. Tenuto conto della proprietà generale ricordata, si deduce così la verità dell'osservazione iniziale.

Per stabilire il risultato desiderato siamo allora ridotti a provare che ogni $(n+l)$-ciclo composto con varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ è omologo ad una combinazione lineare dei cicli $\Gamma_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_{l+1}}$. Proveremo, anzi, che coincide con una tale combinazione lineare.

Per giungere a ciò nel modo più rapido, è opportuno osservare che le mutue relazioni di incidenza delle varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$, per $l=1, 2, \dots, n-1$, sono risp. le medesime di quelle delle facce di dimensione $l-1$ di un $(n-1)$-simplesso. Precisamente, siano $P^1, \dots, P^n$ i vertici di un $(n-1)$-simplesso $P^{1\dots n}$ e $P^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ la faccia individuata dai vertici $P^{\alpha_1}, \dots, P^{\alpha_l}$, che è a sua volta un $(l-1)$-simplesso. Facciamo corrispondere alla varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$, orientata nel modo indicato al n. 6, la faccia $P^{\alpha_1\dots\alpha_l}$, orientata secondo risulta dall'ordinamento dei suoi vertici, ovvero — ciò che è lo stesso ([26]) — orientata mediante lo $(l-1)$-edro formato dalle direzioni orientate $P^{\alpha_1}P^{\alpha_2}$, $P^{\alpha_1}P^{\alpha_3}, \dots,$ $P^{\alpha_1}P^{\alpha_l}$. L'identità delle relazioni d'incidenza risulta allora come ovvia conseguenza delle equazioni (4.1); e risulta altresì immediatamente che la relazione tra le orientazioni di due varietà A incidenti e di dimensioni differenti di un'unità, è sempre la medesima o sempre l'opposta che tra i corrispondenti simplessi, a seconda della parità o disparità di n.

In quest'ordine d'idee si riconosce che gli $(n+l)$-cicli $\Gamma_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_{l-1}}$ corrispondono agli $l-1$ cicli $\Pi^{\alpha_1\dots\alpha_{l+1}}$ contornanti le facce l-dimensionali $P^{\alpha_1\dots\alpha_{l+1}}$ dell'$(n-1)$-simplesso $P^{1\dots n}$ ([27]). Ora un $(l-1)$-ciclo comunque formato con $(l-1)$-simplessi di $P^{1\dots n}$, è sempre contornante di una l-catena di $P^{1\dots n}$ (I, n. 6, nota ([14])), onde può ottenersi come somma dei contorni degli l-simplessi della catena, cioè risulta in ogni caso combinazione lineare dei cicli $\Pi^{\alpha_1\dots\alpha_{l+1}}$. Del pari accade dunque che ogni $(n+l)$-ciclo formato con varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ può

([26]) Cfr. la seconda nota a pie' di pagina del n. 1, § I.

([27]) Il fatto che le varietà $\Gamma_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ siano cicli, già dimostrato direttamente al n. 6, risulta qui un'altra volta, poichè a cicli formati con gli $(l-1)$-simplessi $P^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ corrispondono necessariamente cicli formati con le varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$.

ottenersi come combinazione lineare degli $(n+l)$-cicli $\Gamma^{\alpha_1 \ldots \alpha_{l+1}}$. Ciò è quanto si era asserito. Osserviamo ancora soltanto che per $l=1$ il ragionamento esposto sussiste immutato, considerando però come 0-cicli irriducibili di $P^{1 \ldots n}$ le coppie di vertici dotati di segno opposto (e non i singoli vertici, come si fa d'ordinario).

Abbiamo dunque dimostrato che gli $\binom{n}{l+1}$ cicli $\Gamma_{n+l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{l+1}}$ formano una base per il gruppo di omologia $(n+l)$-dimensionale di $\mathfrak{A}_{n+l}$ e quindi di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$. La dimostrazione sviluppata è valida per l'omologia ordinaria, ma a noi basterà ritenere il risultato limitatamente all'omologia con divisione alla quale ci riferiremo perciò d'ora in poi. Non si tratta però, come vedremo, di una base minima (I. n. 6).

8. È facile ormai stabilire il risultato conclusivo seguente:

Una base minima per il gruppo di BETTI *$(n+l)$-dimensionale di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ è fornita dai cicli del tipo $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, essendo k un intero arbitrariamente scelto e fissato tra $1, \ldots, n$ ed $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ una combinazione qualunque di classe l degli interi $1, \ldots [k] \ldots, n$ (tra i quali s'intende escluso k). Il numero di* BETTI *$(n+l)$-dimensionale di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ vale perciò $\binom{n-1}{l}$.*

Ricorriamo alla corrispondenza dianzi considerata tra gli $(n+l)$-cicli $\Gamma_{n+l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ e gli $(l-1)$-cicli $\Pi^{\alpha_1 \ldots \alpha_{l+1}}$ del simplesso $P^{1 \ldots n}$. I cicli del tipo $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, con k fissato, corrispondono agli $(l-1)$-cicli $\Pi^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ contorni delle facce $P^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, che si ottengono congiungendo il vertice P^k con un $(l-1)$-simplesso qualunque $P^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ appartenente alla faccia $(n-2)$-dimensionale $P^{1 \ldots [k] \ldots n}$ opposta a P^k entro $P^{1 \ldots n}$.

Ora è chiaro intanto che tali $(l-1)$-cicli $\Pi^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ sono tra loro indipendenti, poichè ciascun d'essi contiene un simplesso diverso, precisamente $P^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$. Inoltre, un $(l-1)$-ciclo $\Pi^{\alpha_1 \ldots \alpha_{l+1}}$ contornante una faccia l-dimensionale qualunque di $P^{1 \ldots n}$, se contiene il vertice P^k coincide con uno degli $(l-1)$-cicli $\Pi^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, e se non contiene P^k è costituito con un certo numero di $(l-1)$-simplessi appartenenti a $P^{1 \ldots [k] \ldots n}$, onde, come subito si verifica, può ottenersi come somma dei cicli $\Pi^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ contenenti le facce l-dimensionali che da P^k proiettano quegli $(l-1)$-simplessi. Queste proprietà, trasferite dai cicli $\Pi^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ ai cicli $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, conducono senz'altro all'enunciato di cui sopra,

OSSERVAZIONE. - Le considerazioni sviluppate non sono tutte legittime per $l=0$, valore di l che pure c'interessa considerare (n. 2). Osserviamo però che in tal caso le varietà A si riducono ad una sola varietà n-dimensionale A_n, prodotto topologico di n-circonferenze, la quale coincide con $\mathfrak{A}_n$. Così pure i cicli Γ si riducono ad un solo n-ciclo Γ_n coincidente con $\mathfrak{A}_n$. E allora le prime considerazioni del n. 6, applicate nel caso attuale, conducono già a concludere che l'unico n-ciclo $\Gamma_n = \mathfrak{A}_n = A_n$ fornisce una base minima per il gruppo di omologia n-dimensionale in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$. Come si vede, dunque, può considerarsi sempre valido l'enunciato generale precedente.

9. I ragionamenti dei nn. 6, 7, 8 si trasportano immutati con riferimento al gruppo di omologia $(n+l)$-dimensionale di $C_{2n} - T_{2n-2l-2}$, anzichè di $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$. Ciò in virtù del n. 5. Ne segue pertanto che *gli enunciati dei nn. 6, 8 restan validi sostituendo ad* $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ *la varietà* $C_{2n} - T_{2n-2l-2}$. Vale a dire che gli stessi cicli $\Gamma_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_{l+1}}$ ivi considerati sono anche atti a fornire basi per il gruppo di omologia $(n+l)$-dimensionale di $C_{2n} - T_{2n-2l-2}$.

Basi duali in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ e in $T_{2n-2l-2}$

10. Chiudiamo lo spazio euclideo S_{2n} coll' aggiunta di un punto all' infinito Ω, ottenendo uno *spazio sferico* $\overline{S}_{2n}$ ([28]). L' aggiunta del punto Ω medesimo a $T_{2n-2l-2}$, trasforma $T_{2n-2l-2}$ in una varietà chiusa $\overline{T}_{2n-2l-2}$. Le varietà aperte $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ ed $\overline{S}_{2n} - \overline{T}_{2n-2l-2}$ risultano pertanto topologicamente equivalenti, per guisa che la base per il gruppo di omologia $(n+l)$-dimensionale determinata in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ (n. 8) può essere indifferentemente considerata come base per il gruppo medesimo in $\overline{S}_{2n} - \overline{T}_{2n-2l-2}$.

Il teorema di dualità di ALEXANDER (I, n. 9) ci assicura l'esistenza di basi duali per i gruppi di omologia $(n-l-1)$-dimensionale ed $(n+l)$-dimensionale risp. entro $\overline{T}_{2n-2l-2}$ ed entro $S_{2n} - \overline{T}_{2n-2l-2}$ o $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$. Ci proponiamo appunto di determinare una base in $\overline{T}_{2n-2l-2}$ che possa considerarsi come duale di quella già determinata in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$.

Si considerino gli n piani caratteristici $\pi_1, \dots, \pi_n$, uscenti dal punto $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ di equazioni (4.2), e si fissino in essi n semirette orientate $t_1, \dots, t_n$ uscenti da O, una per ciascun piano (p. es. possono fissarsi le n semirette per O parallele ed equiverse ai semiassi positivi $x_1, \dots, x_n$).

Indichiamo con K_n l' *n-edro solido rettangolo* determinato delle semirette $t_1, \dots, t_n$, mutuamente ortogonali. Cioè, assunte $t_1, \dots, t_n$ come semiassi positivi di un riferimento cartesiano ortogonale nello spazio n-dimensionale individuato dalle semirette medesime, e indicate con le stesse lettere $t_1, \dots, t_n$ le coordinate corrispondenti, K_n è la varietà ad n dimensioni definita dalle disuguaglianze: $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$. La varietà K_n può considerarsi come prodotto topologico delle n semirette: $K_n = t_1 \times \dots \times t_n$.

Allo scopo di rendere più rapida e perspicua l' esposizione successiva, conviene considerare l' n-edro solido K_n anche al modo seguente. Si pensi

([28]) La considerazione dello spazio sferico $\overline{S}_{2n}$ non è qui che un artificio topologico tendente a rendere più spedita l'applicazione di teoremi noti. Essa non ha nulla a che vedere con l'aggiunta di punti all'infinito allo S_{2n} che si suol fare quando occorra considerare valori infiniti delle variabili complesse $z_1, \dots, z_n$. In tal caso, come è noto (SEVERI [20]), la più opportuna aggiunta è invece quella che corrisponde, nella rappresentazione reale, all'ampliamento dello $S_n(z_1, \dots, z_n)$ euclideo complesso nello S_n proiettivo complesso.

lo spazio individuato da $t_1, \dots, t_n$ come uno spazio proiettivo, previa aggiunta di un fittizio iperpiano all'infinito; K_n sega tale iperpiano in un $(n-1)$-simplesso k_{n-1} che ha per vertici i punti all'infinito delle semirette $t_1, \dots, t_n$. Viceversa K_n appare allora come *proiezione* da O di k_{n-1}, la proiezione essendo eseguita mediante semirette (e non mediante rette).

Ciò posto, consideriamo le $\binom{n}{l}$ facce $(n-l-1)$-dimensionali di k_{n-1}. Tali facce sono $(n-l-1)$-simplessi; indichiamo con $k_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ quello $(n-l-1)$-simplesso i cui vertici sono punti all'infinito delle semirette $t_{\beta_1}, \dots, t_{\beta_{n-l}}$. Sia $\delta_{n-l-2}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ lo $(n-l-2)$-ciclo contorno di $k_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$. Eseguendo la proiezione da O nel modo indicato, $k_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ dà luogo ad un $(n-l)$-edro solido $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, prodotto topologico di $t_{\beta_1}, \dots, t_{\beta_{n-l}}$:

$$K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}} = t_{\beta_1} \times \dots \times t_{\beta_{n-l}}, \tag{10.1}$$

mentre $\delta_{n-l-2}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ dà luogo alla varietà $(n-l-1)$-dimensionale $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ che è contorno di $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$:

$$\mathfrak{C} K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}} = \Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}. \tag{10.2}$$

S'intende che le varietà $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ e $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, pur essendo ottenute mediante proiezione di varietà fittizie all'infinito, si considerano depurate di elementi all'infinito, e cioè appartenenti allo spazio euclideo S_{2n}. Risulta allora che $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ è un $(n-l-1)$-ciclo relativo (I, n. 4) dello spazio euclideo aperto S_{2n}. Quando invece si chiuda lo S_{2n} coll'aggiunta di un punto all'infinito trasformandolo nello spazio sferico $\bar{S}_{2n}$, il punto all'infinito Ω viene ad aggiungersi anche a $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, che si muta in un $(n-l-1)$-ciclo assoluto $\bar{\Delta}_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ di $\bar{S}_{2n}$.

Intendiamo altresì di fissare sull' $(n-l)$-edro solido $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ l'orientazione determinata dall' $(n-l)$-edro delle direzioni delle semirette $t_{\beta_1}, \dots, t_{\beta_{n-l}}$, e sul ciclo $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ che lo contorna l'orientazione corrispondente alle note convenzioni (I, n. 1). Siccome le orientazioni così definite si alterano o meno a seconda che si esegua una permutazione di classe dispari o pari sugli indici $\beta_1, \dots, \beta_{n-l}$, ***considereremo come emisimmetrici rispetto a tali indici i simboli*** $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, similmente a quanto si è fatto per le varietà $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ (n. 6).

Si riconosce facilmente che *gli* $\binom{n}{l}$ *cicli* $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ *appartengono a* $T_{2n-2l-2}$. Infatti, applicando alla varietà (10.1) la formula (I, 10.1) che dà il contorno di un prodotto topologico, risulta che il ciclo $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ è composto di prodotti topologici di semirette t_β ciascuno contenente $n-l-1$ fattori. Sia $t_{\beta_1} \times \dots \times t_{\beta_{n-l-1}}$ uno di questi prodotti componente di $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$. Indicati con $\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}$ gli interi residui tra i primi n dopo avere scartato $\beta_1, \dots, \beta_{n-l-1}$, è chiaro che $t_{\beta_1} \times \dots \times t_{\beta_{n-l-1}}$ appartiene allo spazio caratteristico di equazioni (2.2), poichè tale spazio caratteristico può considerarsi come prodotto topologico dei piani caratteristici $\pi_{\beta_1}, \dots, \pi_{\beta_{n-l-1}}$ che contengono risp. $t_{\beta_1}, \dots, t_{\beta_{n-l-1}}$. E siccome il considerato spazio caratteristico è a sua volta componente di $T_{2n-2l-2}$, ne segue l'asserto.

Accade invece che, come subito si verifica, la varietà $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ di cui $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l-1}}$ è contorno, non appartiene a $T_{2n-2l-2}$.

Si osserverà anche che, per $l = n-1$, le varietà $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ si riducono alle semirette t_β, e i cicli $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ al punto O (cui si riduce anche $T_{2n-2l-2}$). considerato negativamente. Nello $\bar{S}_{2n}$ sferico, deve aggiungersi a t_β il punto all'infinito Ω, ottenendosi così una 1-cella chiusa $\bar{t}_\beta$, il cui contorno è costituito dallo 0-ciclo $\Omega - O$ (I, n. 2). Il punto $-O$ deve perciò considerarsi come uno 0-ciclo relativo di S_{2n} (o di $T_{2n-2l-2}$) [29].

Nel seguito ci sarà comodo rappresentare i cicli $\Delta_{n-l-1}^{\alpha_1 \dots \beta_{n-l}}$ anche mediante altri simboli. Sia $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l}$ una permutazione degli interi $1, \dots, n$, e s'indichi con $\operatorname{cls}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l})$ la sua classe (che non ci occorre valutare esplicitamente). Porremo:

$$\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = (-1)^{\operatorname{cls}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l})} \Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}. \tag{10.3}$$

Dalla (10.3) risulta ovviamente che, anche il nuovo simbolo $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ va considerato come emisimmetrico rispetto agli indici.

11. Dimostreremo che:

Gli $\binom{n}{l}$ *cicli* $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ *costituiscono una base per il gruppo di* BETTI $(n-l-1)$*-dimensionale entro* $T_{2n-2l-2}$. *Tra di essi gli* $\binom{n-1}{l}$ *cicli* $\Delta_{n-l-1}^{k\beta_1 \dots \beta_{n-l-1}}$, *che si ottengono per* k *arbitrariamente scelto e fissato tra* $1, \dots, n$ *ed essendo* $\beta_1, \dots, \beta_{n-l-1}$ *una qualunque combinazione di classe* $n-l-1$ *estratta da* $1, \dots [k] \dots, n$, *formano una base minima, duale della base per il gruppo di* BETTI $(n+l)$*-dimensionale di* $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ *costituita dai cicli* $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \dots \alpha_l}$ *di cui al n. 8.*

Per stabilire il teorema occorre considerare i mutui indici d'allacciamento dei cicli $\Delta_{n-l-1}^{k\beta_1 \dots \beta_{n-l-1}}$ e $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \dots \alpha_l}$ (I, nn. 8, 9) il che implica sia fissata un' orientazione dell' ambiente S_{2n}. *Intendiamo fissata l'orientazione naturale dello* S_{2n} $(x, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, corrispondente cioè al $2n$-edro dei semiassi positivi delle coordinate considerate nell' ordine scritto (I, n. 1). Tuttavia, per non complicare inutilmente l' esposizione, in una prima fase delle deduzioni non ci preoccuperemo di tale orientazione, lasciando un' ambiguità di segno nella determinazione degl' indici d'allacciamento, che preciseremo più oltre.

---

[29] Esso può considerarsi anche come 0-ciclo assoluto di S_{2n} quando ogni 0-cella si pensi come 0-ciclo, ma qui dobbiamo attenerci alla definizione di 0-ciclo di cui in I, n. 9, ai fini dell'applicazione del teorema di dualità di ALEXANDER.

Ricordando la (10.2) si ha intanto:

$$\text{All}(\Delta^{k\beta_1\ldots\beta_{n-l-1}}_{n-l-1},\ \Gamma^{k\alpha_1\ldots\alpha_l}_{n+l}) = [K^{k\beta_1\ldots\beta_{n-l-1}}_{n-l},\ \Gamma^{k\alpha_1\ldots\alpha_l}_{n+l}]. \tag{11.1}$$

Ora l'indice d'intersezione a secondo membro nella precedente, in virtù della (6.3), uguaglia la somma:

$$[K^{k\beta_1\ldots\beta_{n-l-1}},\ A^{\alpha_1\ldots\alpha_l}] + \sum_{1}^{l}{}_q\ (-1)^q[K^{k\beta_1\ldots\beta_{n-l-1}},\ A^{k\alpha_1\ldots[q]\ldots\alpha_l}], \tag{11.2}$$

cosicchè siamo ridotti a valutare indici di KRONECKER del tipo

$$[K^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}},\ A^{\alpha_1\ldots\alpha_l}]. \tag{11.3}$$

A questo scopo (prescindendo come si è detto dalle orientazioni), pensiamo l'ambiente S_{2n} come prodotto topologico $\pi_1 \times \ldots \times \pi_n$ dei piani caratteristici di equazione (4.2) uscenti dal punto O. Sappiamo (n. 4) che la varietà $A^{\alpha_1\ldots l}$ può considerarsi come prodotto topologico, subordinato al precedente, di l cerchi di centro O nei piani $\pi_{\alpha_1}, \ldots, \pi_{\alpha_l}$ e di circonferenze con lo stesso centro nei rimanenti $n-l$ piani caratteristici. La varietà $K^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$ è invece prodotto topologico di $n-l$ semirette $t_{\beta_1}, \ldots, t_{\beta_{n-l}}$ uscenti da O e situate risp. nei piani $\pi_{\beta_1}, \ldots, \pi_{\beta_{n-l}}$ (n. 10). Ma possiamo trasformare tale prodotto di $n-l$ fattori in un prodotto di n fattori da considerarsi anch' esso subordinato al prodotto $\pi_1 \times \ldots \times \pi_n$, assumendo il punto O come fattore del prodotto in ciascuno degli l piani $\pi_1, \ldots [\beta_1, \ldots, \beta_{n-l}] \ldots, \pi_n$.

Ciò posto, l'intersezione di $K_{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$ ed $A_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$, coincide col prodotto topologico delle intersezioni, in ciascun piano π_j, dei fattori del prodotto esprimente $K^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$ e di quelli del prodotto esprimente $A^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$. Ne segue che $K^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$ ed $A^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ non hanno alcun punto in comune eccetto che nel caso in cui le due combinazioni $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ e $\beta_1, \ldots, \beta_{n-l}$ siano fra loro complementari rispetto alla combinazione $1, \ldots, n$. Infatti, esiste altrimenti almeno un piano π_j sul quale il fattore di $K^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$ si riduce al solo punto O ed il fattore di $A^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ alla circonferenza di centro O, e i due fattori non hanno alcun punto in comune. Nel caso invece in cui l'intersezione di $K^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$ ed $A^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ non è vuota, questa si riduce ad un sol punto che è prodotto topologico dei punti d'intersezione delle semirette $t_{\beta_1}, \ldots, t_{\beta_{n-l}}$ con le circonferenze tracciate sui piani $\pi_{\beta_1}, \ldots \pi_{\beta_{n-l}}$ e del punto O considerato su ciascuno dei residui piani $\pi_{\alpha_1}, \ldots, \pi_{\alpha_l}$. In tal caso l'indice di KRONECKER (11.3) vale pertanto ± 1.

Per precisare il segno occorre (I, n. 7) paragonare un $2n$-edro orientante S_{2n} nel modo convenuto con il $2n$-edro che si ottiene accoppiando ordinatamente un $(n-l)$-edro orientante $K^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}_{n-l}$ e un $(n+l)$-edro orientante $A^{\alpha_1\ldots\alpha_l}_{n+l}$, entrambi aventi origine nel punto di intersezione delle due varietà (quando $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ e $\beta_1, \ldots, \beta_{n-l}$ siano combinazioni complementari di $1, \ldots, n$). All' uopo, stanti le (3.2), immaginiamo di parametrizzare l'intorno in S_{2n} del detto punto d' intersezione mediante i parametri $\rho_1, \ldots, \rho_n, \theta_1, \ldots, \theta_n$. Si riconosce subito che l'orientazione naturale dello $S_{2n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ corrisponde a quella data dal $2n$-edro $(d\rho_1, \ldots, d\rho_n, d\theta_1, \ldots, d\theta_n)$, (con il simbolismo del § II, n. 5). Invero, se si trasporta tal $2n$-edro in un punto ove sia $\theta_j = 0$, $\rho_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, esso viene a coincidere ordinatamente col $2n$-edro $(dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_n)$. D' altronde l' orientazione convenuta per $K_{n-l}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$ (n. 10) è quella data dall' $(n-l)$-edro $(d\rho_{\beta_1}, \ldots, d\rho_{\beta_{n-l}})$ e l' orientazione convenuta per $A_{n+l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ (n. 6) quella data dall' $(n+l)$-edro $(d\theta_1, \ldots, d\theta_n, d\rho_{\alpha_1}, \ldots, d\rho_{\alpha_l})$. Siccome il $2n$-edro $(d\rho_{\beta_1}, \ldots, d\rho_{\beta_{n-l}}, d\theta_1, \ldots, d\theta_n, d\rho_{\alpha_1}, \ldots, d\rho_{\alpha_l})$ si riduce al al $2n$-edro $(d\rho_1, \ldots, d\rho_n, d\theta_1, \ldots, d\theta_n)$ con una permutazione di classe $l + \mathrm{cls}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_{n-l})$, si conclude che l' indice di KRONECKER (11.3) vale (essendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ e $\beta_1, \ldots, \beta_{n-l}$ combinazioni complementari di $1, \ldots, n$):

$$(-1)^{l + \mathrm{cls}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_{n-l})}.$$

Ritornando alla somma (11.2) si ha dunque che gli ultimi l indici di KRONECKER sono sempre nulli poichè le due combinazioni $k\beta_1, \ldots, \beta_{n-l-1}$ e $k, \alpha_1, \ldots [q] \ldots, \alpha_l$ non sono mai complementari (contenendo lo stesso intero k). Pertanto l' espressione (11.2 si riduce al solo primo indice di KRONECKER, il quale vale anch' esso zero eccetto quando le combinazioni $k, \beta_1, \ldots, \beta_{n-l-1}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ sono complementari, nel qual caso la (11.2) ha il valore:

$$(-1)^{l + \mathrm{cls}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, k, \beta_1, \ldots, \beta_{n-l-1})}.$$

In conclusione gli $\binom{n-1}{l}^2$ indici d'allacciamento (11.1) che si ottengono in corrispondenza alla scelta delle combinazioni $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ e $\beta_1, \ldots, \beta_{n-l-1}$ tra gl'interi $1, \ldots [k] \ldots, n$, sono nulli, ad eccezione di quegli $\binom{n-1}{l}$ indici che corririspondono a combinazioni complementari entro la combinazione $1, \ldots [k] \ldots, n$. Per i cicli $\Delta_{n-l-1}^{k\beta_1 \ldots \beta_{n-l-1}}$, $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ sono dunque soddisfatte relazioni di dualità del tipo (I, 9.2).

Se adottiamo per i cicli $\Delta_{n-l-1}^{k\beta_1 \ldots \beta_{n-l-1}}$ gli altri simboli definiti dalle (10.3), le relazioni di dualità possono scriversi più comodamente così:

$$\text{(11.4)} \qquad \mathrm{All}(\Delta_{\gamma_1 \ldots \gamma_l}, \Gamma^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}) = \begin{cases} 0 & \text{per } (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \neq (\gamma_1, \ldots, \gamma_l) \\ (-1)^l & \text{per } (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_l), \end{cases}$$

essendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ e $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ combinazioni ordinate $(\alpha_1 < \ldots < \alpha_l, \gamma_1 < \ldots < \gamma_l)$ degli interi $1, \ldots [k] \ldots, n$.

Una volta provate le (11.4) è immediato concludere che i cicli $\Delta^{k\beta_1 \ldots \beta_{n-l-1}}$, ovvero i $\Delta_{\gamma_1 \ldots \gamma_l}$, costituiscono una base minima per il gruppo di BETTI $(n-l-1)$-dimensionale entro $T_{2n-2l-2}$.

Sia invero Δ_{n-l-1} un $(n-l-1$-ciclo qualunque di $T_{2n-2l-2}$. Posto

$$a_{\gamma_1\dots\gamma_l} = (-1)^l \,\mathrm{All}\,(\Delta_{n-l-1},\ \Gamma^{k\gamma_1\dots\gamma_l}),$$

si consideri il ciclo

$$\Delta'_{n-l-1} = \Delta_{n-l-1} - \sum_{\gamma_1<\dots<\gamma_l} a_{\gamma_1\dots\gamma_l}\Delta_{\gamma_1\dots\gamma_l},$$

la somma essendo estesa a tutte le combinazioni ordinate $\gamma_1,\dots,\gamma_l$ degli interi $1, \dots[k]\dots, n$.

Se si valuta l'indice d'allacciamento del ciclo Δ'_{n-l-1} con uno qualunque dei cicli $\Gamma^{k\alpha_1\dots\alpha_l}$, tenuto conto delle (11.4) si trova che l'indice è nullo. Poichè d'altronde i cicli $\Gamma^{k\alpha_1\dots\alpha_l}$ costituiscono una base per i cicli $(n+l)$-dimensionali di $S_{2n}-T_{2n-2l-2}$, segue che è nullo l'indice d'allacciamento di Δ'_{n-l-1} con qualunque $(n+l)$-ciclo di $S_{2n}-T_{2n-2l-2}$: e ciò implica $\Delta'_{n-l-1} \approx 0$ in $T_{2n-2l-2}$, in base al corollario finale del n. 9, § I. Val quanto dire che risulta

$$\Delta_{n-l-1} \approx \sum_{\gamma_1<\dots<\gamma_l} a_{\gamma_1\dots\gamma_l}\Delta_{\gamma_1\dots\gamma_l} \quad \text{in} \quad T_{2n-2l-2},$$

il che prova appunto che i cicli $\Delta_{\gamma_1\dots\gamma_l}$ costituiscono una base minima per il gruppo di BETTI $(n-l-1)$-dimensionale in $T_{2n-2l-2}$.

12. Dal risultato stabilito consegue che gli $\binom{n}{l}$ cicli $\Delta^{\beta_1\dots\beta_{n-l}}_{n-l-1}$, essendo $\beta_1,\dots,\beta_{n-l}$ una combinazione qualunque di $1,\dots,n$, non sono omologicamente indipendenti, e che devono esprimersi mediante gli $\binom{n-1}{l}$ d'essi del tipo $\Delta^{k\beta_1\dots\beta_{n-l-1}}_{n-l-1}$ $(=\pm\Delta_{\gamma_1\dots\gamma_l})$, essendo $\beta_1,\dots,\beta_{n-l-1}$ una combinazione qualunque di $1,\dots[k]\dots, n$ (e $\gamma_1,\dots,\gamma_l$ la combinazione complementare). Ora è facile provare direttamente che tra gli $\binom{n}{l}$ cicli predetti passano le seguenti relazioni identiche (e non soltanto di omologia):

$$\sum_1^{n-l+1}{}_p\, (-1)^{p-1}\Delta^{\beta_1\dots[p]\dots\beta_{n-l+1}}_{n-l-1} = 0, \tag{12.1}$$

per ogni combinazione $\beta_1,\dots,\beta_{n-l+1}$ degli interi $1,\dots,n$ (e col solito significato di esclusione per il simbolo $[p]$).

Per verificare la (12.1) determiniamo esplicitamente la composizione del ciclo $\Delta^{\beta_1\dots\beta_{p-1}\beta_{p+1}\dots\beta_{n-l+1}}_{n-l-1}$ applicando la formula (I, 10.1) alla determinazione del contorno del prodotto topologico $K^{\beta_1\dots\beta_{p-1}\beta_{p+1}\dots\beta_{n-l+1}}_{n-l} = t_{\beta_1}\times\dots\times t_{\beta_{p-1}}\times t_{\beta_{p+1}}\times\dots\times t_{\beta_{n-l+1}}$. Ricordando la (10.2) e tenendo conto che il contorno di ciascuna semiretta t_β è il punto O considerato negativamente, si ottiene:

$$\Delta^{\beta_1\dots[p]\dots\beta_{n-l+1}}_{n-l-1} = \sum_1^{p-1}{}_q\,(-1)^q t_{\beta_1}\times\dots[q,p]\dots\times t_{\beta_{n-l+1}} + \sum_{p+1}^{n-l+1}{}_q\,(-1)^{q-1} t_{\beta_1}\times\dots[p,q]\dots\times t_{\beta_{n-l+1}}.$$

La somma a primo membro nella (12.1) diviene allora:

$$\sum_{1\,q<p}^{n-l+1}(-1)^{p+q-1} t_{\beta_1} \times \dots [q,p] \dots \times t_{\beta_{n-l+1}} + \sum_{1\,p<q}^{n-l+1}(-1)^{p+q-2} t_{\beta_1} \times \dots [p,q] \dots \times t_{\beta_{n-l+1}} =$$

$$\sum_{1\,p<q}^{n-l+1} t_{\beta_1} \times \dots [p,q] \dots \times t_{\beta_{n-l+1}} [(-1)^{p+q-1} + (-1)^{p+q-2}] = 0,$$

ed è così provata la (12.1) [30].

Sia ora $\beta_1, \dots, \beta_{n-l}$ una combinazione qualunque di $1, \dots [p] \dots, n$. Applicando la (12.1) in relazione alla combinazione $k, \beta_1, \dots, \beta_{n-l}$ di $1, \dots, n$, si ottiene

$$\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}} = \sum_{1\,p}^{n-l} (-1)^{p-1} \Delta_{n-l-1}^{k \beta_1 \dots [p] \dots \beta_{n-l}}, \tag{12.2}$$

formula che esprime ogni ciclo $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, che non sia già nella base minima dei cicli $\Delta_{n-l-1}^{k \beta_1 \dots \beta_{n-l-1}}$, mediante una combinazione lineare di questi ultimi.

Caratterizzazione dello stato d'allacciamento di un $(n+l-)$ciclo con la varietà $T_{2n-2l-2}$.

13. Consideriamo un $(n+l)$-ciclo qualunque Γ_{n+l} di S_{2n}, non incontrante la varietà $T_{2n-2l-2}$. Il ciclo determina gli $\binom{n}{l}$ *caratteri interi:*

$$N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}} = \mathrm{All}\,(\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}},\ \Gamma_{n+l}), \tag{13.1}$$

corrispondenti agli $\binom{n}{l}$ cicli $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, essendo $\beta_1 < \dots < \beta_{n-l}$ una combinazione ordinata estratta da $1, \dots, n$. Quando occorra considerare tutte le disposizioni $\beta_1, \dots, \beta_{n-l}$, sappiamo (n. 10) che il simbolo $\Delta^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ deve riguardarsi come emisimmetrico, lo stesso sarà quindi del simbolo $N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, tenuto conto delle proprietà degli indici d'allacciamento (I, n. 8).

Diremo che *gli interi $N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ caratterizzano lo stato d'allacciamento del ciclo Γ_{n+l} con la varietà $T_{2n-2l-2}$*, nel senso che, assegnato un $(n-l-1)$-ciclo Δ_{n-l-1} qualunque di $T_{2n-2l-2}$ (la dimensione $n-l-1$ di Δ_{n-l-1} essendo duale di quella di Γ_{n+l} rispetto alla dimensione dell'ambiente S_{2n}) l'indice d'allacciamento di Δ_{n-l-1} e Γ_{n+l} può ottenersi come combinazione lineare degli interi $N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, i coefficienti della combinazione dipendendo soltanto dalla posizione di Δ_{n-l-1} entro $T_{2n-2l-2}$ e non da Γ_{n+l}. Quanto si è asserito è conseguenza immediata del fatto che i cicli $\Delta_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ costituiscono una base per gli $(n-l-1)$-cicli di $T_{2n-2l-2}$, per guisa che, entro $T_{2n-2l-2}$, sussiste una

---

[30] La formula stessa poteva anche dedursi dalle relazioni che intercedono tra i cicli $\delta_{n-l-2}^{\beta_1 \dots [p] \dots \beta_{n-l+1}}$ che sono contorni delle facce $(n-l-1)$-dimensionali di uno stesso $(n-l)$-simplesso di k_{n-1} (n. 10).

relazione di omologia del tipo

$$\Delta_{n-l-1} \approx \sum_{\beta_1<\ldots<\beta_{n-l}} b_{\beta_1\ldots\beta_{n-l}} \Delta^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}_{n-l-1},$$

essendo $b_{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$ opportuni interi. La precedente è valida, a maggior ragione, entro l'ambiente $S_{2n} - \Gamma_{n+l}$, che contiene $T_{2n-2l-2}$, onde, tenuto conto delle proprietà degli indici d'allacciamento (I, n. 9), si deduce appunto:

$$\mathrm{All}\,(\Delta_{n-l-1},\ \Gamma_{n+l}) = \sum_{\beta_1<\ldots<\beta_{n-l}} b_{\beta_1\ldots\beta_{n-l}} N^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}.$$

Insieme ai caratteri $N^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$ considereremo anche i caratteri

$$N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} = \mathrm{All}\,(\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_l},\ \Gamma_{n+l}), \tag{13.2}$$

corrispondenti all'uso dei simboli $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ anzichè $\Delta^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$, per rappresentare, come sappiamo (n. 10), sempre gli stessi cicli (con orientazioni però non necessariamente coincidenti). I nuovi caratteri non differiscono dagli altri se non che eventualmente per il segno. Dalle (10.3) si deduce che si ha precisamente:

$$N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} = (-1)^{\mathrm{cls}\,(\alpha_1\ldots\alpha_l\beta_1\ldots\beta_{n-l})} N^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}, \tag{13.3}$$

essendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ e $\beta_1, \ldots, \beta_{n-l}$ combinazioni complementari rispetto alla combinazione $1, \ldots, n$. Anche i simboli $N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ debbono considerarsi emisimmetrici.

Gli $\binom{n}{l}$ interi $N^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$ ($\beta_1 < \ldots < \beta_{n-l}$) non sono fra loro indipendenti. Fra di essi passano le relazioni seguenti, che si deducono dalle (12.1):

$$\sum_{1}^{n-l+1}{}_{p} (-1)^{p-1} N^{\beta_1\ldots[p]\ldots\beta_{n-l-1}} = 0, \tag{13.4}$$

per ogni combinazione $\beta_1, \ldots, \beta_{n-l+1}$ di $1, \ldots, n$.

Dalle (13.4) segue che gli $\binom{n}{l}$ interi $N^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}}$ possono esprimersi in funzione di $\binom{n-1}{l}$ d'essi del tipo $N^{k\beta_1\ldots\beta_{n-l-1}}$ (essendo k arbitrariamente scelto fra i $1, \ldots, n$ e fissato, e $\beta_1, \ldots, \beta_{n-l-1}$ una combinazione qualunque di $1, \ldots [k] \ldots, n$), mediante le relazioni seguenti, corrispondenti alle (12.2):

$$N^{\beta_1\ldots\beta_{n-l}} = \sum_{1}^{n-l}{}_{p} (-1)^{p-1} N^{k\beta_1\ldots[p]\ldots\beta_{n-l}}. \tag{13.5}$$

Per il seguito ci servirà di tradurre le (13.4), (13.5) anche in termini dei caratteri $N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$, ciò che si ottiene senza difficoltà mediante la (13.3).

Si hanno così, in luogo delle (13.4), le:

$$\sum_{[\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}]} {}_h \, N_{h\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}} = 0, \tag{13.6}$$

dove la somma s'intende estesa al variare di h tra gli interi $1, \ldots [\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}] \ldots, n$ (gli indici posti fra parentesi quadra essendo esclusi). Si ha una relazione del tipo (13.6) in corrispondenza ad ogni combinazione $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ di $1, \ldots, n$.

In luogo delle (13.3) si hanno invece le:

$$N_{k\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}} = - \sum_{[k\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}]} {}_h \, N_{h\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}, \tag{13.7}$$

che permettono di esprimere ognuno dei caratteri $N_{k\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}$ per i quali uno degli indici ha il valore k fissato, mediante i rimanenti $\binom{n-1}{l}$ caratteri.

14. La considerazione dei caratteri $N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ determinati dall'$(n+l)$-ciclo Γ_{n+l} ci permette di dare una semplice espressione di Γ_{n+l}, a meno di omologia, mediante i cicli base $\Gamma^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{n+l}$ o addirittura mediante le varietà $A^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{n+l}$, espressione che ci riuscirà utile nel seguito. Possiamo scrivere intanto

$$\Gamma_{n+l} \approx \sum_{[k]} {}_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \Gamma^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{n+l} \quad \text{in} \quad S_{2n} - T_{2n-2l-2}, \tag{14.1}$$

dove la somma è estesa alle combinazioni ordinate $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ di $1, \ldots [k] \ldots, n$, ed essendo $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ interi da determinare.

Uguagliando gli indici d'allacciamento degli $(n+l)$-cicli che appaiono nei due membri della (14.1) con gli $(n-l-1)$-cicli $\Delta_{\gamma_1 \ldots \gamma_l}$ e tenendo conto delle (13.2), (11.4), risulta:

$$N_{\gamma_1 \ldots \gamma_l} = (-1)^l c_{\gamma_1 \ldots \gamma_l};$$

onde la (14.1) diviene:

$$\Gamma_{n+l} \approx (-1)^l \sum_{[k]} {}_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \Gamma^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{n+l} \quad \text{in} \quad S_{2n} - T_{2n-2l-2}. \tag{14.2}$$

Ora ciascun ciclo $\Gamma^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{n+l}$ può esprimersi mediante le (6.3), perciò il secondo membro della (14.2) può anche scriversi (trascurando il segno di $(-1)^l$):

$$\sum_{[k]} {}_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \left\{ A^{\alpha_1 \ldots \alpha_l} + \sum_1^l {}_q (-1)^q A^{k\alpha_1 \ldots [q] \ldots \alpha_l} \right\},$$

ovvero, tenuto conto della emisimmetria dei simboli $A^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, $N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ (nn. 6, 10),

$$\frac{1}{l!} \sum_{[k]} {}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \left\{ A^{\alpha_1 \ldots \alpha_l} + \sum_1^l {}_q (-1)^q A^{k\alpha_1 \ldots [q] \ldots \alpha_l} \right\},$$

dove s'intende che la somma rispetto a $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ senza indicazione di ordinamento, sia riferita alle disposizioni $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ prive di ripetizioni degli interi $1, \ldots, n$. Con analoghi significati per le somme considerate qui di seguito, l'espressione può successivamente trasformarsi così:

$$\frac{1}{l!}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_l} N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} A^{\alpha_1\ldots\alpha_l} - \frac{1}{l!}\sum_{1}^{l}{}_p \sum_{[k]}{}_{\alpha_1\ldots[p]\ldots\alpha_l} N_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}k\alpha_{p+1}\ldots\alpha_l} A^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}k\alpha_{p+1}\ldots\alpha_l} +$$

$$\frac{1}{l!}\sum_{1}^{l}{}_q \sum_{[k]}{}_{\alpha_1\ldots[q]\ldots\alpha_l} \sum_{[k\alpha_1\ldots\alpha_{q-1}\alpha_{q+1}\ldots\alpha_l]}{}_{\alpha_q} (-1)^q N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} A^{k\alpha_1\ldots[q]\ldots\alpha_l} =$$

$$\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} A^{\alpha_1\ldots\alpha_l} + \frac{1}{l!}\sum_{1}^{l}{}_q \sum_{[k]}{}_{\alpha_1\ldots[q]\ldots\alpha_l} (-1)^q A^{k\alpha_1\ldots[q]\ldots\alpha_l} \left\{ \sum_{[\alpha_1\ldots\alpha_{q-1}\alpha_{q+1}\ldots\alpha_l]}{}_{h} N_{\alpha_1\ldots\alpha_{q-1}h\alpha_{q+1}\ldots\alpha_l} \right\}.$$

D'altronde, in base alle relazioni (13.6), l'espressione in parentesi graffa si annulla; quindi la (14.2) diviene in definitiva:

$$\Gamma_{n+l} \approx (-1)^l \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l} \quad \text{in} \quad S_{2n} - T_{2n-2l-2}. \tag{14.3}$$

Si noti che, contrariamente a quel che accadeva per la (14.2), nell'attuale formula (14.3) compaiono simmetricamente tutti gli $\binom{n}{l}$ caratteri $N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ del ciclo Γ_{n+l}, perchè ivi la somma deve intendersi estesa alle combinazioni ordinate $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ di $1, \ldots, n$ senza alcuna esclusione. Si osservi anche che il secondo membro della (14.3), pur essendo naturalmente un ciclo (identicamente uguale al ciclo secondo membro della (14.2), combinazione dei cicli $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1\ldots\alpha_l}$), riesce qui espresso come combinazione lineare delle varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ dotate di contorno.

15. Finalmente rileviamo che, in base al n. 9, la relazione di omologia (14.1), e conseguentemente le (14.2), (14.3), possono ritenersi valide anche nell'ambiente più ristretto $C_{2n} - T_{2n-2l-2}$, essendo C_{2n} l'n-cilindro di centro O e raggio r (coincidente col raggio r che appare nelle (4.1) rappresentanti le varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$).

§ IV. - Parte analitica della ricerca.

1. Per stabilire la formula integrale generale $(n+l)$-dimensionale che è scopo della nostra ricerca, seguiremo una via costruttiva che ci condurrà, mediante successive induzioni al crescere di n e di l, alla completa determinazione della struttura analitica della formula.

Naturalmente si potrebbe invece supporre già nota la formula, quindi procedere alla sua verifica. Non è però difficile convincersi che questa seconda via porterebbe per una prima parte sostanzialmente agli stessi sviluppi espressi in forma diversa, mentre per una seconda parte richiederebbe calcoli assai penosi, che invece riusciremo ad evitare.

La via che abbiamo scelto presenta d'altronde il vantaggio di mostrare che i successivi passi del processo costruttivo tendono ad ottenere la struttura analitica più semplice adatta per una formula integrale $(n+l)$-dimensionale [31]. Perciò è da presumersi che la formula conclusiva, nonostante la sua complessità, sia di fatto la formula $(n+l)$-dimensionale più semplice che possa scriversi.

Condizioni fondamentali sulla forma nucleo.

2. L'esame delle formule (7), (8), (9) dell'INTROD. ci conduce ovviamente a presumere per la formula generale che abbiamo in vista, di cui le formule ricordate devono risultare casi particolari, la struttura seguente:

$$\chi f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \ldots, z_n)\tilde{\varphi}_{n+l} \tag{2.1}$$

essendo $\tilde{\varphi}_{n+l}$ una forma differenziale di grado $n+l$, indipendente da f, che diremo *forma nucleo*, del tipo:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{n+l} &= \frac{1}{l\,!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(z_1-\zeta_1, \ldots, z_n-\zeta_n, \bar{z}_1-\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{z}_n-\bar{\zeta}_n)d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \ldots, \bar{z}_{\alpha_l}) \\ &= \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \ldots, \bar{z}_{\alpha_l}),\end{aligned} \tag{2.2}$$

dove le funzioni $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ si suppongono emisimmetriche rispetto agli indici, i quali s'intende possano assumere tutti i valori interi tra 1 ed n.

Come si è già detto al n. 2 del § III, la $f(z_1, \ldots, z_n)$ si suppone regolare in una regione aperta R_{2n} contenente il punto $O(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$; Γ_{n+l} è un $(n+l)$-ciclo di S_{2n} non incontrante la *varietà polare* $T_{2n-2l-2}$ di centro O; χ è una costante dipendente soltanto dal caratteri interi $N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ che determinano lo *stato d'allacciamento* del ciclo Γ_{n+l} con $T_{2n-2l-2}$ (III, n. 13); $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ sono infine funzioni analitiche degli argomenti indicati, le quali si suppongon dotate al più di singolarità polari su $T_{2n-2l-2}$, in guisa che la forma $\tilde{\varphi}_{n+l}$ riesca regolare su ogni ciclo d'integrazione Γ_{n+l} del tipo indicato.

È inoltre immediato riconoscere che la più semplice struttura per le $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, comprendente come casi particolari le citate formule (7), (8), (9) del-

(31) È ovvio che, una volta scritta una formula integrale di data dimensione, se ne possono ottenere altre della stessa dimensione modificandone opportunamente il nucleo. P. es. già nel caso elementare della formula di CAUCHY si può liberamente aggiungere al nucleo $\frac{1}{z-\zeta}$ una qualunque funzione intera di z.

l'INTROD., si ha assumendo le $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ funzioni razionali del tipo:

$$\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \frac{\vartheta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}{(z_1 - \zeta_1) \dots [\alpha_1, \dots, \alpha_l] \dots (z_n - \zeta_n)}, \tag{2.3}$$

dove le $\vartheta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ sono a loro volta funzioni razionali degli argomenti reali

$$\sigma_j = \rho_j^2 = (z_j - \zeta_j)(\bar{z}_j - \bar{\zeta}_j) = |z_j - \zeta_j|^2 \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{2.4}$$

e il simbolo $[\alpha_1, \dots, \alpha_l]$ indica al solito l'assenza dei fattori $(z_{\alpha_1} - \zeta_{\alpha_1}), \dots, (z_{\alpha_l} - \zeta_{\alpha_l})$ nel prodotto $(z_1 - \zeta_1) \dots (z_n - \zeta_n)$.

Osserviamo ora che, affinchè possa sussistere una formula del tipo (2.1), occorre che l'integrale a secondo membro nella (2.1) non vari se si deforma con continuità il ciclo d'integrazione Γ_{n+l} nel campo di regolarità della funzione integranda, cioè in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$, e che inoltre il ciclo Γ_{n+l} possa deformarsi in tal campo in guisa da venir ridotto in un intorno comunque piccolo del punto O ove si vuole assegnare il valore di $f(z_1, \dots, z_n)$, o quanto meno che Γ_{n+l} abbia un suo omologo in un intorno comunque piccolo di O (cfr. il successivo n. 13. Nel caso elementare della formula di CAUCHY si è visto (III, n. 1) che le condizioni analoghe, analitica e topologica, sono pienamente soddisfatte. e, per quanto concerne la prima, in dipendenza del fatto che all'integrale a secondo membro nella formula in oggetto può applicarsi il 1° teorema integrale di CAUCHY nel campo di regolarità della funzione integranda. Nel caso attuale, invece, i coefficienti della forma integranda in (2.1) non sono funzioni analitiche delle variabili $z_1, \dots, z_n$ soltanto, ma del complesso di variabili $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ [32], onde non sono applicabili al nostro scopo le estensioni del 1° teorema di CAUCHY.

Tuttavia l'indipendenza del valore dell'integrale da una deformazione di Γ_{n+l} (o, più in generale, da una trasformazione per omologia di Γ_{n+l}) resta acquisita se si suppone che la forma integranda sia *chiusa* in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$, cioè si annulli ivi identicamente il suo differenziale di CARTAN (II, nn. 6, 7):

$$d f \tilde{\varphi}_{n+l} = 0. \tag{2.5}$$

Tenuto conto delle (II, 7.4), cui soddisfa la f per essere analitica nelle variabili $z_1, \dots, z_n$, e facendo uso della (II, 3.5), la (2.5) diviene:

$$\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \right) \times \tilde{\varphi}_{n+l} + f d\tilde{\varphi}_{n+l} = 0.$$

Ma il prodotto esterno a primo membro nella precedente è identicamente nullo, onde la (2.5) equivale alla

$$d\tilde{\varphi}_{n+l} = 0. \tag{2.6}$$

Abbiamo fin qui esaminate alcune condizioni cui deve soddisfare una forma nucleo $\tilde{\varphi}_{n+l}$ di più semplice struttura affinchè possa sussistere la (2.1).

---

[32] Un fatto analogo accade già per la formula (9) citata nella INTROD.

Poichè su tali condizioni baseremo l'effettiva costruzione di $\tilde{\varphi}_{n+l}$, è opportuno che ne raccogliamo qui di seguito l'enunciato [33]:

a) condizione di chiusura (2.6);

b) condizione di struttura (2.3);

c) condizione di regolarità in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$.

Trasformazione delle condizioni *a*), *b*).

3. Esplicitando la condizione di chiusura (2.6) si ha (II, n. 3):

$$\sum_{1}^{l+1}{}_r (-1)^{r-1} \frac{\partial \varphi_{\alpha_1 \ldots [r] \ldots \alpha_{l+1}}}{\partial(\bar{z}_{\alpha_r} - \bar{\zeta}_{\alpha_r})} = 0, \tag{3.1}$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1}$ è una qualunque combinazione degli interi $1, \ldots, n$ e $\varphi_{\alpha_1 \ldots [r] \ldots \alpha_{l+1}} \equiv \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} \alpha_{r+1} \ldots \alpha_{l+1}}$.

D'altronde, in base alle (2.3), (2.4), le (3.1) divengono:

$$\sum_{1}^{l+1}{}_r (-1)^{r-1} \frac{\partial \vartheta_{\alpha_1 \ldots [r] \ldots \alpha_{l+1}}}{\partial \sigma_{\alpha_r}} = 0. \tag{3.2}$$

Se allora si considera la forma differenziale reale di grado l nelle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$:

$$\tilde{\vartheta}_l = \frac{1}{l!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} \vartheta_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} d(\sigma_{\alpha_1}, \ldots, \sigma_{\alpha_l}), \tag{3.3}$$

appare che le (3.2) esprimono che la forma $\tilde{\vartheta}_l$ è chiusa, cioè

$$d\tilde{\vartheta}_l = 0. \tag{3.4}$$

Dunque, in virtù della condizione *b*), le equazioni (2.6) e (3.4) sono equivalenti. Il problema della determinazione di una forma nucleo $\tilde{\varphi}_{n+l}$ soddisfacente alle condizioni *a*), *b*), è così ridotto a quello della determinazione di una forma differenziale reale di grado l chiusa.

Naturalmente però non ogni forma $\tilde{\vartheta}_l$ chiusa è buona al nostro scopo, perchè la forma $\tilde{\varphi}_{n+l}$ che se ne deduce deve soddisfare all'ulteriore condizione *c*).

Prima di esaminare questo punto, esprimiamo in generale le soluzioni di (3.4) in maniera opportuna.

4. In base al teorema di VOLTERRA-POINCARÉ (II, n. 4) sappiamo che ogni soluzione di (3.4) può ottenersi come differenziale di una forma di grado

(33) Non sarebbe difficile aggiungere altre condizioni cui a priori deve soddisfare $\tilde{\varphi}_{n+l}$, p. es. concernenti il grado di omogeneità delle $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ (supposte queste funzioni razionali omogenee, ciò che è conforme alla più semplice struttura per $\tilde{\varphi}_{n+l}$). Ma le condizioni elencate risulteranno già sufficienti allo scopo.

$l-1$, e viceversa ([34]). Può scriversi cioè:

$$d\tilde{\Theta}_{l-1} = \tilde{\vartheta}_l, \tag{4.1}$$

dove

$$\tilde{\Theta}_{l-1} = \frac{1}{(l-1)!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}} \Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}} d(\sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_{l-1}}), \tag{4.2}$$

essendo le $\Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}$ funzioni reali di $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, emisimmetriche rispetto agli indici.

Sappiamo anche che, assegnata una $\tilde{\vartheta}_l$ soddisfacente la (3.4), non è univocamente determinata una $\tilde{\Theta}_{l-1}$ per cui valga la (4.1) e che, in particolare, tenendo conto del grado di arbitrarietà esistente nella costruzione di $\tilde{\Theta}_{l-1}$, si possono sempre assumere identicamente nulle le funzioni $\Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}$ coefficienti di $\tilde{\Theta}_{l-1}$ per le quali uno degli indici $\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$ ha un valore prefissato k (scelto tra gli interi $1, \dots, n$), cioè:

$$\Theta_{k\alpha_1 \dots \alpha_{l-2}} = 0 \text{ ([35])}. \tag{4.3}$$

Tenuto conto delle (4.3), la (4.1) si esplicita così:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \sigma_k} \Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}} = \vartheta_{k\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}} \\ \displaystyle\sum_1^l{}_r (-1)^{r-1} \frac{\partial}{\partial \sigma_{\alpha_r}} \Theta_{\alpha_1 \dots [r] \dots \alpha_l} = \vartheta_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \qquad (\alpha_1, \dots, \alpha_l \neq k). \end{cases} \tag{4.4}$$

Le (4.4) forniscono dunque la più generale soluzione dell'equazione (3.4) essendo le $\Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}$ $(\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1} \neq k)$ funzioni arbitrarie di $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

OSSERVAZIONE. - Accanto alla forma $\tilde{\Theta}_{l-1}$ soddisfacente la (4.1) si può considerare una forma $\tilde{\Phi}_{n+l-1}$, di grado $n+l-1$, tale che

$$d\tilde{\Phi}_{n+l-1} = \tilde{\varphi}_{n+l},$$

bastando assumere

$$\tilde{\Phi}_{n+l-1} = \frac{1}{(l-1)!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}} \Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l}),$$

con

$$\Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}} = \frac{\Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}{(z_1 - \zeta_1) \dots [\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}] \dots (z_n - \zeta_n)}.$$

La considerazione della forma $\tilde{\Phi}_{n+l-1}$ può riuscire utile in talune applicazioni delle formule integrali di cui trattiamo. Ne ho mostrato un esempio, per il caso $l = n-1$, deducendo dalla formula $(2n-1)$-dimensionale (9) del-

---

([34]) La prima affermazione ha validità soltanto locale quando si abbia riguardo ai campi di regolarità delle forme. Ma, per il momento, non c'interessa tener conto di questi.

([35]) Siccome le $\Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}$ si suppongono emisimmetriche rispetto agli indici, s'intende che le (4.3) esprimono anche l'annullarsi delle $\Theta_{\alpha_1 k \alpha_2 \dots \alpha_{l-2}}$, $\Theta_{\alpha_1 \alpha_2 k \dots \alpha_{l-2}}$, ..., $\Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-2} k}$. Analoghe avvertenze devono aversi nell'interpretare le formule successive.

l'INTROD. una immediata dimostrazione del teorema di HARTOGS sui campi di regolarità delle funzioni analitiche di più variabili complesse ([36]).

Primo esame della condizione *c*).

5. È ormai il momento di tener conto della condizione *c*) (n. 2), la quale implica che i poli di ciascuna funzione razionale $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ appartengono a $T_{2n-2l-2}$.

Consideriamo $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ e la funzione razionale $\vartheta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ ad essa legata dalla (2.3), entrambe ridotte ai minimi termini. Ricordando le equazioni di $T_{2n-2l-2}$ (III, n. 2), si ha intanto che il denominatore di $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ dev'essere tale che il suo annullarsi tragga seco l'annullarsi di $l+1$ delle quantità $z - \zeta_1, \dots, z_n - \zeta_n$.

Dalla (2.3) segue allora che, non appena $l \geq 1$, la condizione *c*) si spezza nelle due condizioni:

c') il numeratore di $\vartheta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ contenga a fattore il prodotto $\sigma_1 \dots [\alpha_1, \dots, \alpha_l] \dots \sigma_n$;

c'') il denominatore di $\vartheta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ sia composto con fattori del tipo seguente (facendo al solito l'ipotesi di struttura più semplice):

$$\sigma_{\varepsilon_1} + \dots + \sigma_{\varepsilon_{l+1}},$$

dove $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l+1}$ è una combinazione qualunque degli interi $1, \dots, n$.

La *c'*) ci dice dunque che le $\vartheta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ devono annullarsi per $\sigma_p = 0$ con $p = 1, \dots [\alpha_1, \dots, \alpha_l] \dots, n$; cosicchè occorre in primo luogo che le funzioni arbitrarie $\Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}$ che appaiono nelle (4.4) siano vincolate dalle relazioni:

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left[\dfrac{\partial}{\partial \sigma_k} \Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}\right]_{\sigma_p = 0} = 0 & (p = 1, \dots [k\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}] \dots, n) \\ \sum_1^l{}_r (-1)^{r-1} \left[\dfrac{\partial}{\partial \sigma_{\alpha_r}} \Theta_{\alpha_1 \dots [r] \dots \alpha_l}\right]_{\sigma_q = 0} = 0 & (\alpha_1, \dots, \alpha_l \neq k;\ q = 1, \dots [\alpha_1 \dots \alpha_l] \dots, n). \end{array} \right.$$

Assumeremo addirittura:

$$(5.2) \qquad [\Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}]_{\sigma_p = 0} = 0 \qquad (p = 1, \dots [k\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}] \dots, n),$$

con che la prima delle (5.1) è senz'altro soddisfatta e la seconda si riduce semplicemente alla:

$$(5.3) \qquad \sum_1^l{}_r (-1)^{r-1} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma_{\alpha_r}} \Theta_{\alpha_1 \dots [r] \dots \alpha_l}\right]_{\sigma_k = 0} = 0 \qquad (\alpha_1, \dots, \alpha_l \neq k).$$

Ricordando altresì la (4.3), possiamo allora asserire che, assunto un sistema di funzioni razionali $\Theta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}$ compatibili coi vincoli (4.3), (5.2), (5.3) ma peraltro arbitrarie, le equazioni (4.4) permettono la costruzione di funzioni $\vartheta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ mediante le quali riescano soddisfatte le condizioni *a*), *b*), *c'*).

([36]) Cfr. « Comm. Math. Helvetici », 15, p. 340 (1942-43).

Operazione « k ». Processo ricorrente per la costruzione di $\tilde{\vartheta}_l$.

6. V'è ancora un passo per soddisfare anche la condizione c''), e quindi la c).

All'uopo immaginiamo il seguente procedimento ricorrente. Supponiamo di aver già risolto il problema che c'interessa in relazione ad $n-1$ variabili e al grado $l-1$, anzichè in relazione ad n variabili e al grado l. Siano $\sigma_1, \ldots [k] \ldots, \sigma_n$ le $n-1$ variabili, sia $\tilde{\vartheta}_{l-1}$ la forma di grado $l-1$ che sta in luogo della $\tilde{\vartheta}_l$ di grado l, e siano $\vartheta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}(\sigma_1, \ldots [k] \ldots, \sigma_n)$ le funzioni razionali coefficienti di $\tilde{\vartheta}_{l-1}$ (essendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ una combinazione qualunque degli inferi $1, \ldots [k] \ldots, n$). Poichè si suppone che le $\vartheta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}$ verifichino la condizione c'') (con i cambiamenti conseguenti al cambiamento di n, l in $n-1$, $l-1$), si ha che il denominatore di $\vartheta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}$ è composto esclusivamente con fattori del tipo

$$\sigma_{\varepsilon_1} + \ldots + \sigma_{\varepsilon_l}$$

dove $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ è una combinazione qualunque degli interi $1, \ldots [k] \ldots, n$.

Ebbene, si aggiunga a ciascuno dei predetti fattori la variabile σ_k scrivendo

$$\sigma_k + \sigma_{\varepsilon_1} + \ldots + \sigma_{\varepsilon_l}, \tag{6.1}$$

e s'indichi con $\Theta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}$ la funzione razionale nelle n variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ che così si ottiene a partire dalla $\vartheta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}(\sigma_1, \ldots [k] \ldots, \sigma_n)$. Posto inoltre $\Theta_{k\alpha_1 \ldots \alpha_{l-2}} = 0$, si ottengono in tal guisa tutte le funzioni coefficienti di una forma $\tilde{\Theta}_{l-1}$ di grado $l-1$ nelle $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, che diremo ottenuta mediante l'*operazione* « k » dalla forma $\tilde{\vartheta}_{l-1}$ nelle variabili $\sigma_1, \ldots [k] \ldots, \sigma_n$.

È facile stabilire (come indicheremo fra un momento) che le funzioni coefficienti di $\tilde{\Theta}_{l-1}$ costruite soddisfanno ai vincoli (4.3), (5.2), (5.3), onde, in base a quanto si è detto alla fine del n. 5, da esse possono dedursi mediante le (4.4) i coefficienti di una forma $\tilde{\vartheta}_l$ nelle n variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, per la quale riescono soddisfatte le condizioni a), b), c'). Ma possiamo aggiungere che riesce per essa soddisfatta anche la condizione c''), e quindi la c), giacchè nei denominatori dei coefficienti di $\tilde{\vartheta}_l$ non possono comparire altro che i fattori medesimi che compaiono nei denominatori dei coefficienti di $\tilde{\Theta}_{l-1}$, i quali hanno la forma (6.1).

Stabiliamo il punto in sospeso concernente i vincoli (4.3, (5.2), (5.3). Il primo vincolo è già insito nella costruzione data per $\tilde{\Theta}_{l-1}$. Osserviamo poi che:

$$[\Theta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)]_{\sigma_k=0} = \vartheta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}(\sigma_1, \ldots [k] \ldots, \sigma_n) \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1} \neq k). \tag{6.2}$$

Siccome le $\vartheta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}$ soddisfanno le (3.2) con $l-1$ in luogo di l, cioè

$$\sum_1^l {}_r (-1)^{r-1} \frac{\partial \vartheta_{\alpha_1 \ldots [r] \ldots \alpha_l}}{\partial \sigma_{\alpha_r}} = 0 \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_l \neq k),$$

il vincolo (5.3) riesce soddisfatto in virtù delle (6.2).

Infine, poichè la condizione c') è valida per le $\vartheta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}$, si ha

$$[\vartheta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}(\sigma_1, \ldots[k]\ldots, \sigma_n)]_{\sigma_p=0} = 0 \qquad (p = 1, \ldots[k\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}]\ldots, n),$$

le quali, tenuto ancora conto delle (6.2), danno:

$$[\Theta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}]_{\sigma_k=0,\, \sigma_p=0} = 0 \qquad (p = 1, \ldots[k\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}]\ldots, n),$$

e queste, siccome σ_k non appare nel numeratore di $\Theta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}}$, equivalgono al vincolo (5.2).

Mediante l'uso dell'operazione «k» abbiamo così istituito un procedimento ricorrente che permette di costruire, a partire da una forma $\tilde{\vartheta}_{l-1}$ nelle variabili $\sigma_1, \ldots[k]\ldots, \sigma_n$ una forma $\tilde{\vartheta}_l$ nelle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, in guisa tale che se la forma nucleo $\tilde{\varphi}_{(n-1)+(l-1)}$ che si ottiene da $\tilde{\vartheta}_{l-1}$ soddisfa alle condizioni fondamentali a), b), c), lo stesso accade per la forma nucleo $\tilde{\varphi}_{n+l}$ che si ottiene da $\tilde{\vartheta}_l$. Il procedimento ricorrente ci permette dunque la risoluzione del nostro problema per n, l non appena lo si sappia risolvere per $n-l$, 0, ciò che è senz'altro, corrispondendo al caso della formula del tipo (8) dell'INTROD.

Casi $l=0$, $l=1$.

7. Prima di passare alla determinazione di una forma nucleo $\tilde{\varphi}_{n+l}$ generale, sarà opportuno, per maggior chiarezza, fermarsi sui casi $l=0$ e $l=1$.

Per $l=0$, la forma $\tilde{\vartheta}_l$ diviene una forma differenziale di grado zero $\tilde{\vartheta}_0$, vale a dire (II, n. 1) una semplice funzione ϑ. La equazione (3.4), che traduce la condizione a), dà allora

$$d\tilde{\vartheta}_0 = d\vartheta = 0,$$

onde $\tilde{\vartheta}_0 = \vartheta$ non è che una costante arbitraria, che possiamo assumere uguale ad 1. Ricordando le (2.2), (2.3) si ottiene senz'altro la forma nucleo

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{1}{(z_1 - \zeta_1) \ldots (z_n - \zeta_n)} d(z_1, \ldots, z_n),$$

che corrisponde appunto alla formula n-dimensionale (8) dell'INTROD.

Passiamo al caso $l=1$, applicando il procedimento ricorrente. A tal fine si osservi preliminarmente che, volendo considerare valide anche per $l=0$ le condizioni c'), c'') del n. 5, riesce necessario pensare la $\vartheta \equiv 1$ ora determinata scritta come quoziente $\dfrac{\sigma_1 \ldots \sigma_n}{\sigma_1 \ldots \sigma_n}$.

Ciò premesso, partiamo dalla forma $\tilde{\vartheta}_0 = \vartheta = 1$ nelle variabili $\sigma_1, \ldots[k]\ldots, \sigma_n$, cioè da

$$\tilde{\vartheta}_0 = \vartheta = \frac{\sigma_1 \ldots[k]\ldots \sigma_n}{\sigma_1 \ldots[k]\ldots \sigma_n}, \tag{7.1}$$

eseguendo su di essa l'operazione «k». Si ottiene così la forma di grado zero nelle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ che indicheremo con $\overset{(k)}{\tilde{\Theta}}_0 = \overset{(k)}{\Theta}$ (ponendo qui e in seguito, per una ragione che vedremo, l'indice k sopra ai simboli già usati), espressa dalla:

$$\overset{(k)}{\tilde{\Theta}}_0 = \overset{(k)}{\Theta} = \frac{\sigma_1 \ldots [k] \ldots \sigma_n}{(\sigma_k + \sigma_1) \ldots [k] \ldots (\sigma_k + \sigma_n)} . \tag{7.2}$$

Mediante differenziazione esterna, cioè applicando la (4.1) o (4.4), si ottiene la forma di 1° grado $\overset{(k)}{\tilde{\vartheta}}_1 = d\overset{(k)}{\tilde{\Theta}}_0$, di coefficienti:

$$\left\{ \begin{aligned} \overset{(k)}{\vartheta}_k &= \frac{\partial}{\partial \sigma_k} \overset{(k)}{\Theta} = \frac{\sigma_1 \ldots [k] \ldots \sigma_n}{(\sigma_k + \sigma_1) \ldots [k] \ldots (\sigma_k + \sigma_n)} \sum_{[k]}{}_j \frac{-1}{\sigma_k + \sigma_j} \\ \overset{(k)}{\vartheta}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \sigma_\alpha} \overset{(k)}{\Theta} = \frac{\sigma_1 \ldots [\alpha] \ldots \sigma_n}{(\sigma_k + \sigma_1) \ldots [k] \ldots (\sigma_k + \sigma_n)} \, \frac{1}{\sigma_k + \sigma_\alpha} \qquad (\alpha \neq k). \end{aligned} \right. \tag{7.3}$$

Siamo sicuri a priori che la forma $\overset{(k)}{\tilde{\vartheta}}_1$ ha tutti i requisiti necessari per fornire una forma nucleo $\overset{(k)}{\tilde{\varphi}}_{n+1}$ adatta allo scopo. Appare dalle (7.3) che $\overset{(k)}{\tilde{\vartheta}}_1$ non riesce simmetrica rispetto alle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ e quindi del pari accade per $\overset{(k)}{\tilde{\varphi}}_{n+1}$ rispetto alle variabili $z_1, \ldots, z_n$, l'asimmetria dipendendo dall'indice k fissato. In altri termini, le espressioni precedenti forniscono n forme distinte $\overset{(k)}{\tilde{\vartheta}}_1$ e $\overset{(k)}{\tilde{\varphi}}_{n+1}$ in corrispondenza ai valori che può assumere k. Si giungerà quindi, in definitiva, ad n formule $(n+1)$-dimensionali distinte.

Tuttavia si può anche compendiare le n formule in una sola formula simmetrica, dotata di forma nucleo combinazione lineare delle forme nucleo asimmetriche $\overset{(k)}{\tilde{\varphi}}_{n+1}$, mediante parametri complessi arbitrari λ_k $(k = 1, \ldots, n)$.

Si ponga allora

$$\tilde{\vartheta}_1 = \sum_k \lambda_k \overset{(k)}{\tilde{\vartheta}}_1 , \qquad \overset{(k)}{\tilde{\varphi}}_{n+1} = \sum_k \lambda_k \overset{(k)}{\varphi}_{n+1} .$$

Per le funzioni ϑ_α coefficienti di $\tilde{\vartheta}_1$ si trova subito dalle (7.3):

$$\vartheta_\alpha = \sum_k \lambda_k \overset{(k)}{\vartheta}_\alpha = \sigma_1 \ldots [\alpha] \ldots \sigma_n \sum_{[\alpha]}{}_k \frac{1}{\sigma_k + \sigma_\alpha} \left\{ \frac{\lambda_k}{\Pi_{[k]}{}_j (\sigma_k + \sigma_j)} - \frac{\lambda_\alpha}{\Pi_{[\alpha]}{}_j \, \sigma_\alpha + \sigma_j)} \right\} \quad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

dove il simbolo $\Pi_{[k]}{}_j$ rappresenta un prodotto esteso in corrispondenza ai valori dell'indice $j = 1, \ldots [k] \ldots, n$, e similmente. Ricordando le (2.2), (2.3) si ha quindi:

$$\tilde{\varphi}_{n+1} = \sum_\alpha (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) \ldots [\alpha] \ldots (\bar{z}_n - \bar{\zeta}_n) \sum_{[\alpha]}{}_k \frac{1}{\sigma_k + \sigma_\alpha} \left\{ \frac{\lambda_k}{\Pi_{[k]}{}_j (\sigma_k + \sigma_j)} - \frac{\lambda_\alpha}{\Pi_{[\alpha]}{}_j (\sigma_\alpha + \sigma_j)} \right\} d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha),$$

forma nucleo che coincide con quella della formula integrale $(n-1)$-dimensionale simmetrica già considerata nel mio lavoro [13]

Caso generale.

8. Trattiamo ormai il caso generale. Dovendo giungere a costruire una $\tilde{\vartheta}_l$ nelle n variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, bisognerà partire dalla $\tilde{\vartheta}_0 = \vartheta = 1$ in $n - l$ variabili, e siano $\sigma_1, \ldots[k_1 \ldots k_l] \ldots, \sigma_n$.

Posto (per le ragioni già addotte, n. 7):

$$\tilde{\vartheta}_0 = \vartheta = \frac{\sigma_1 \ldots [k_1 \ldots k_l] \ldots \sigma_n}{\sigma_1 \ldots [k_1 \ldots k_l] \ldots \sigma_n},$$

una prima applicazione dell'operazione « k » per $k = k_1$ fa passare alla forma di grado zero $\overset{(k_1)}{\tilde{\Theta}_0} = \overset{(k_1)}{\Theta}$ nelle $n - l + 1$ variabili $\sigma_1, \ldots[k_2 \ldots k_l] \ldots, \sigma_n$. Mediante differenziazione esterna si deduce quindi la forma di grado 1: $\overset{(k_1)}{\tilde{\vartheta}_1} = d \overset{(k_1)}{\tilde{\Theta}_0}$. Con una seconda applicazione dell'operazione « k » per $k = k_2$, si passa poi da $\overset{(k_1)}{\tilde{\vartheta}_1}$ alla forma di grado 1, $\overset{(k_1 k_2)}{\tilde{\Theta}_1}$, nelle $n - l + 2$ variabili $\sigma_1, \ldots[k_3 \ldots k_l] \ldots, \sigma_n$; dalla quale poi mediante differenziazione si ottiene la forma di grado 2: $\overset{(k_1 k_2)}{\tilde{\vartheta}_2} = d \overset{(k_1 k_2)}{\tilde{\Theta}_1}$; e così via.

Indicheremo con $\overset{(k_1 \ldots k_m)}{\tilde{\Theta}_{m-1}}$ la forma di grado $m - 1$ nelle $n - l + m$ variabili $\sigma_1, \ldots[k_{m+1} \ldots k_l] \ldots, \sigma_n$ cui si giunge dopo m $(\leq l)$ successive applicazioni dell'operazione « k » e con $\overset{(k_1 \ldots k_m)}{\tilde{\vartheta}_m}$ la forma di grado m che se ne ottiene per differenziazione:

$$\overset{(k_1 \ldots k_m)}{\tilde{\vartheta}_m} = d \overset{(k_1 \ldots k_m)}{\tilde{\Theta}_{m-1}}. \tag{8.1}$$

Affermiamo che le funzioni $\overset{(k_1 \ldots k_{m-1})}{\vartheta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}}$, $\overset{(k_1 \ldots k_m)}{\Theta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}}$ coefficienti delle forme $\overset{(k_1 \ldots k_{m-1})}{\tilde{\vartheta}_{m-1}}$, $\overset{(k_1 \ldots k_m)}{\tilde{\Theta}_{m-1}}$ sono date dalle tabelle (8.3), (8.4) che seguono.

Prima di scrivere le (8.3), (8.4) premettiamo alcuni simboli e convenzioni di scrittura:

$\sum_{j,\,[k_1 \ldots k_l]}$, $\prod_{j,\,[k_1 \ldots k_l]}$ rappresentano risp. somme e prodotti dove l'indice j percorre gli interi $1, \ldots[k_1 \ldots k_l] \ldots, n$ (con esclusione cioè di $k_1, \ldots, k_l$);

$\sum\limits_{\Sigma \varepsilon_r = m}$ rappresenta una somma estesa in corrispondenza a tutti i gruppi di interi $\varepsilon_r \geq 0$ soluzioni dell'equazione $\sum\limits_r \varepsilon_r = m$ (essendo $r = 1, \ldots[k_1 \ldots k_l] \ldots, n$, secondo risulta dall'espressione cui ci si riferisce);

$$\Omega_{k_1 \ldots k_m}^{\varepsilon_1 \ldots [k_1 \ldots k_l] \ldots \varepsilon_n} = \prod_{j,\,[k_1 \ldots k_l]} (\sigma_{k_1} + \ldots + \sigma_{k_m} + \sigma_j)^{-(1+\varepsilon_j)}. \tag{8.2}$$

Ciò posto si ha:

$$
(8.3)\left\{\begin{array}{l}
\overset{(k_1\dots k_{m-1})}{\vartheta}_{k_1\dots k_{m-1}} = (-1)^{\binom{m}{2}}(m-1)!\,\sigma_1 \dots [k_1\dots k_l] \dots \sigma_n \sum\limits_{\Sigma \varepsilon_r = m-1} \Omega^{\varepsilon_1 \dots [k_1 \dots k_l] \dots \varepsilon_n}_{k_1 \dots k_{m-1}}\,, \\[2ex]
\overset{(k_1\dots k_{m-1})}{\vartheta}_{k_1\dots k_{p-1}\alpha k_{p+1}\dots k_{m-1}} = (-1)^{\binom{m}{2}+1}(m-2)!\,\sigma_1 \dots [k_1 \dots {}_{p-1}\alpha k_{p+1}\dots k_l] \dots \sigma_n \sum\limits_{\Sigma \varepsilon_r = m-1} \varepsilon_\alpha \Omega^{\varepsilon_1 \dots [k_1 \dots k_l] \dots \varepsilon_n}_{k_1 \dots k_{m-1}} \\[1ex]
\hfill (\alpha \neq k_1, \dots, k_l;\ p = 1, \dots, m-1), \\[2ex]
(*) \text{ le } \overset{(k_1\dots k_{m-1})}{\vartheta}_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}} \text{ sono emisimmetriche rispetto agli indici bàssi;} \\[2ex]
(\substack{*\\*}) \text{ sono nulle tutte le } \overset{(k_1\dots k_{m-1})}{\vartheta}_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}} \text{ con più di un indice basso diverso dagli} \\
\text{indici alti;}
\end{array}\right.
$$

dove va notato che le espressioni scritte, stanti le condizioni $(*)$, $(\substack{*\\*})$, permettono effettivamente di ottenere tutti i coefficienti $\overset{(k_1\dots k_{m-1})}{\vartheta}_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}$ della forma $\overset{(k_1\dots k_{m-1})}{\tilde{\vartheta}}_{m-1}$ nelle $n-l+m-1$ variabili $\sigma_1, \dots [k_m, \dots, k_l] \dots, \sigma_n$, giacchè gli indici $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ possono assumere soltanto i valori $1, \dots [k_m, \dots, k_l] \dots, n$;

$$
(8.4)\left\{\begin{array}{l}
\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{k_1\dots k_{m-1}} = (-1)^{\binom{m}{2}}(m-1)!\,\sigma_1 \dots [k_1\dots k_l] \dots \sigma_n \sum\limits_{\Sigma \varepsilon_r = m-1} \Omega^{\varepsilon_1 \dots [k_1 \dots k_l] \dots \varepsilon_n}_{k_1 \dots k_m}\,, \\[2ex]
\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{k_1\dots k_{p-1}\alpha k_{p+1}\dots k_{m-1}} = (-1)^{\binom{m}{2}+1}(m-2)!\,\sigma_1 \dots [k_1 \dots k_{p-1}\alpha k_{p+1}\dots k_l] \dots \sigma_n \sum\limits_{\Sigma \varepsilon_r = m-1} \varepsilon_\alpha \Omega^{\varepsilon_1 \dots [k_1 \dots k_l] \dots \varepsilon_n}_{k_1 \dots k_m} \\[1ex]
\hfill (\alpha \neq k_1, \dots, k_l;\ p = 1, \dots, m-1), \\[2ex]
\overset{(k_1\dots k_{m-1})}{\Theta}_{k_m\alpha_1\dots\alpha_{m-2}} = 0, \text{ con } \alpha_1, \dots, \alpha_{m-2} \text{ indici qualunque estratti da } 1, \dots [k_{m+1}\dots k_l] \dots, n, \\[2ex]
(^\circ) \text{ le } \overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}} \text{ sono emisimmetriche rispetto agli indici bassi,} \\[2ex]
(\substack{\circ\\\circ}) \text{ sono nulle tutte le } \overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}} \text{ con più di un indice basso diverso da} \\
k_1, \dots, k_{m-1};
\end{array}\right.
$$

con analoga avvertenza a quella indicata per le (8.3) tenuto conto che la forma $\overset{(k_1\dots k_m)}{\tilde{\Theta}}_{m-1}$ dipende dalle variabili $\sigma_1, \dots [k_{m+1}, \dots, k_l] \dots, \sigma_n$, onde nei suoi coefficienti $\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}$ gli indici $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ possono assumere soltanto i valori $1, \dots [k_{m+1}, \dots, k_l] \dots, n$.

Dimostrazione delle (8.3), (8.4).

9. Per dimostrare le (8.3), (8.4) procederemo per induzione, cominciando con l'osservare che le (8.3) sono esatte per $m-1=1$. Invero esse forniscono allora le funzioni $\overset{(k_1)}{\vartheta}_{k_1}$, $\overset{(k_1)}{\vartheta}_{\alpha}$ $(\alpha \neq k_1)$ del tipo (7.3) già determinato, con l'avvertenza che nel caso attuale si parte, anzichè dalla $\tilde{\vartheta}_0$ in $n-1$ variabili espressa dalla (7.1), dalla $\tilde{\vartheta}_0$ in $n-l$ variabili scritta al principio del n. 8.

La dimostrazione sarà perciò compiuta quando si sia provato che: 1) si passa dalle (8.3) alle (8.4) mediante l'operazione « k » per $k=k_m$; 2) le funzioni $\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ coefficienti della $\overset{(k_1\dots k_m)}{\tilde{\vartheta}_m}$ quale si deduce mediante la (8.1) dalla $\overset{(k_1\dots k_m)}{\tilde{\Theta}_m}$ di coefficienti (8.4), hanno la stessa struttura delle (8.3) in cui si ponga m in luogo di $m-1$.

Per provare il punto 1) basta osservare che l'operazione « k » (n. 6) per $k=k_m$ fa passare da $\Omega_{k_1\dots k_{m-1}}^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}$ ad $\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}$, come segue ovviamente dalle (8.2).

Prima di passare al punto 2), conviene premettere alcune identità formali concernenti le funzioni $\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}$ e le loro derivate.

10. Ecco le identità:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_{k_p}}\sum_{\Sigma\varepsilon_r=\mu-1}\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}=-\mu\sum_{\Sigma\varepsilon'_r=\mu}\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon'_n}; \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_{\alpha}}\sum_{\Sigma\varepsilon_r=\mu-1}\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}=\sum_{\Sigma\varepsilon_r=\mu-1}\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}\frac{-(1+\varepsilon_\alpha)}{\sigma_{k_1}+\dots+\sigma_{k_m}+\sigma_\alpha}$$
$$=-\sum_{\Sigma\varepsilon'_r=\mu}\varepsilon'_\alpha\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon'_n}; \tag{10.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_{k_p}}\sum_{\Sigma\varepsilon_r=\mu-1}\varepsilon_\alpha\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}=-(\mu-1)\sum_{\Sigma\varepsilon'_r=\mu}\varepsilon'_\alpha\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon'_n}; \tag{10.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_{\beta}}\sum_{\Sigma\varepsilon_r=\mu-1}\varepsilon_\alpha\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}=-\sum_{\Sigma\varepsilon'_r=\mu}\varepsilon'_\alpha\varepsilon'_\beta\Omega_{k_1\dots k_m}^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon'_n}; \tag{10.4}$$

dove supponiamo μ intero ≥ 0; $p=1,\dots,m$; $\alpha,\ \beta\neq k_1,\dots,k_l$ e $\alpha\neq\beta$.

Nel seguito dei calcoli per provare le precedenti, indicheremo succintamente con Ω^ε la funzione definita dalla (8.2), considerando ε come rappresentante simbolico degli $n-l$ indici $\varepsilon_1,\dots[k_1\dots k_l]\dots,\varepsilon_n$, che servono in effetti a determinare la funzione.

Si ha intanto:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_{k_p}}\sum_{\Sigma\varepsilon=\mu-1}\Omega^\varepsilon=\sum_{\Sigma\varepsilon=\mu-1}\Omega^\varepsilon\sum_{[k_1\dots k_l]}^{j}\frac{-(1+\varepsilon_j)}{\sigma_{k_1}+\dots+\sigma_{k_m}+\sigma_j}. \tag{10.5}$$

Ora si osservi che tutte le soluzioni intere non negative $\varepsilon'_1,\dots[k_1\dots k_l]\dots,\varepsilon'_n$ dell'equazione $\sum_r\varepsilon'_r=\mu$ possono ottenersi dalle analoghe soluzioni $\varepsilon_1,\dots[k_1\dots k_l]\dots,\varepsilon_n$ dell'equazione $\sum_r\varepsilon_r=\mu-1$, assumendo

$$\varepsilon'_1=\varepsilon_1,\dots,\ \varepsilon'_{j-1}=\varepsilon_{j-1},\ \varepsilon'_j=\varepsilon_j+1,\ \varepsilon'_{j+1}=\varepsilon_{j+1},\dots,\ \varepsilon'_n=\varepsilon_n \tag{10.6}$$
$$(j=1,\dots[k_1\dots k_l]\dots,\ n).$$

Ne segue che il secondo membro della (10.5) non è che una combinazione lineare di prodotti del tipo

$$\prod_{[k_1 \dots k_l]}{}_i \left(\sigma_{k_1} + \dots + \sigma_{k_m} + \sigma_j\right)^{-(1+\varepsilon'_i)}, \tag{10.7}$$

essendo $\varepsilon'_1, \dots [k_1 \dots k_l] \dots, \varepsilon'_n$ tutte le possibili soluzioni intere non negative dell'equazione $\Sigma_r \varepsilon'_r = \mu$. È facile contare quante volte appare il termine generico (10.7) nella combinazione lineare. Infatti gli interi ε'_i in (10.7) provengono, nel modo detto, da $n - l$ gruppi di interi ε_i. Fissata l'attenzione su quel gruppo per cui $\varepsilon'_j = \varepsilon_j + 1$, il coefficiente che in corrispondenza compete al termine (10.7) è proprio, come risulta dalla (10.5), $-(1 + \varepsilon_j) = -\varepsilon'_j$. Se ne trae che il termine (10.7) compare complessivamente col coefficiente $-\Sigma_j \varepsilon'_j = -\mu$, uguale per tutti i termini. Il secondo membro della (10.5) equivale dunque a

$$-\mu \sum_{\Sigma \varepsilon' = \mu} \Omega^{\varepsilon'},$$

ed è così provata l'identità (10.1).

Passiamo alla (10.2). La prima uguaglianza ivi espressa è immediata. Per passare alla seconda uguaglianza basta porre $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$ per $i = 1, \dots [\alpha k_1 \dots k_l] \dots, n$ e $\varepsilon'_\alpha = \varepsilon_\alpha + 1$. Non si ottengono così tutte le soluzioni intere non negative dell'equazione $\Sigma_r \varepsilon'_r = \mu$, ma soltanto quelle per cui $\varepsilon'_\alpha \geq 1$. Tuttavia è lecito considerare anche le soluzioni per cui $\varepsilon'_\alpha = 0$, giacchè, stante il fattore moltiplicativo ε'_α nel terzo membro della (10.2), nulla si viene così ad aggiungere. La (10.2) è pertanto completamente provata.

Per dimostrare la (10.3), si ha intanto:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{k_p}} \sum_{\Sigma\varepsilon = \mu - 1}{}^{\varepsilon_\alpha} \Omega^\varepsilon = \sum_{\Sigma\varepsilon = \mu - 1} \Omega^\varepsilon \sum_{[k_1 \dots k_l]}{}_j \frac{-\varepsilon_\alpha(1 + \varepsilon_j)}{\sigma_{k_1} + \dots + \sigma_{k_m} + \sigma_j},$$

cioè, con la posizione (10.6) e ragionando come sopra,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma_{k_p}} \sum_{\Sigma\varepsilon = \mu - 1} \varepsilon_\alpha \Omega^\varepsilon &= \sum_{[k_1 \dots k_l]}{}_j \sum_{\Sigma\varepsilon' = \mu} \Omega^{\varepsilon'}(-\varepsilon_\alpha \varepsilon'_j) \\
&= \sum_{[\alpha k_1 \dots k_l]}{}_j \sum_{\Sigma\varepsilon' = \mu} \Omega^{\varepsilon'}(-\varepsilon'_\alpha \varepsilon'_j) + \sum_{\Sigma\varepsilon' = \mu} \Omega^{\varepsilon'}[-(\varepsilon'_\alpha - 1)\varepsilon'_\alpha] \\
&= \sum_{[k_1 \dots k_l]}{}_j \sum_{\Sigma\varepsilon' = \mu} \Omega^{\varepsilon'}(-\varepsilon'_\alpha \varepsilon'_j) + \sum_{\Sigma\varepsilon' = \mu} \varepsilon'_\alpha \Omega^{\varepsilon'} \\
&= -\mu \sum_{\Sigma\varepsilon' = \mu} \varepsilon'_\alpha \Omega^{\varepsilon'} + \sum_{\Sigma\varepsilon' = \mu} \varepsilon'_\alpha \Omega^{\varepsilon'}.
\end{aligned}$$

Segue quindi la (10.3).

Passiamo infine alla (10.4). Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_\beta}\sum_{\Sigma\varepsilon=\mu-1}\varepsilon_\alpha\Omega^\varepsilon=\sum_{\Sigma\varepsilon=\mu-1}\Omega^\varepsilon\frac{-\varepsilon_\alpha(1+\varepsilon_\beta)}{\sigma_{k_1}+\ldots+\sigma_{k_m}+\sigma_\beta}.$$

Si ponga $\varepsilon'_i=\varepsilon_i$ per $i=1,\ldots[\beta_1 k\ldots k_l]\ldots, n$ e $\varepsilon'_\beta=\varepsilon_\beta+1$. Siccome si è supposto $\alpha\neq\beta$ è $\varepsilon'_\alpha=\varepsilon_\alpha$, onde risulta:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_\beta}\sum_{\Sigma\varepsilon=\mu-1}\varepsilon_\alpha\Omega^\varepsilon=-\sum_{\Sigma\varepsilon'=\mu}\varepsilon'_\alpha\varepsilon'_\beta\Omega^{\varepsilon'},$$

tenuto conto di un' osservazione analoga a quella fatta per provare la (10.2). È così dimostrata anche l' identità (10.4).

11. Ritorniamo al punto 2) del n. 9. Si tratta di applicare la (8.1) per dedurre le $\overset{(k_1\ldots k_m)}{\vartheta}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ dalle $\overset{(k_1\ldots k_m)}{\Theta}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}$ fornite dalle (8.4). Sappiamo dal n. 4 che, quando valgono le (4.3), la (4.1) si esplicita nelle (4.4). Nel nostro caso siamo appunto in simili condizioni: k essendo sostituito da k_m, l da m, le n variabili $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ dalle $n-l+m$ $\sigma_1,\ldots[k_{m+1}\ldots k_l]\ldots,\sigma_n$, la (4.1) dalla (8.1), la (4.3) dalla terza delle (8.4), e infine la (4.4) dalle

$$(11.1)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\sigma_{k_m}}\overset{(k_1\ldots k_m)}{\Theta}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}=\overset{(k_1\ldots k_m)}{\vartheta}_{k_m\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}\\[2ex]\displaystyle\sum_1^m{}_r(-1)^{r-1}\frac{\partial}{\partial\sigma_{\alpha_r}}\overset{(k_1\ldots k_m)}{\Theta}_{\alpha_1\ldots[r]\ldots\alpha_m}=\overset{(k_1\ldots k_m)}{\vartheta}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\qquad(\alpha_1,\ldots,\alpha_m\neq k).\end{cases}$$

Avuto riguardo alle (8.4), e alla identità (10.1), si ha dunque:

$$(11.2)\qquad\overset{(k_1\ldots k_m)}{\vartheta}_{k_1\ldots k_m}=(-1)^{m-1}\overset{(k_1\ldots k_m)}{\vartheta}_{k_mk_1\ldots k_{m-1}}=(-1)^{m-1}\frac{\partial}{\partial\sigma_{k_m}}\overset{(k_1\ldots k_m)}{\theta}_{k_1\ldots k_{m-1}}$$

$$=(-1)^{\binom{m+1}{2}}m!\ \sigma_1\ldots[k_1\ldots k_l]\ldots\sigma_n\sum_{\Sigma\varepsilon_r=m}\Omega_{k_1\ldots k_m}^{\varepsilon_1\ldots[k_1\ldots k_l]\ldots\varepsilon_n}.$$

Si ha poi, per $p=1,\ldots,m-1$, in base all' identità (10.3):

$$(11.3)\quad\overset{(k_1\ldots k_m)}{\vartheta}_{k_1\ldots k_{p-1}\alpha k_{p+1}\ldots k_m}=(-1)^{m-1}\overset{(k_1\ldots k_m)}{\vartheta}_{k_mk_1\ldots k_{p-1}\alpha k_{p+1}\ldots k_{m-1}}=(-1)^{m-1}\frac{\partial}{\partial\sigma_{k_m}}\overset{(k_1\ldots k_m)}{\theta}_{k_1\ldots k_{p-1}\alpha k_{p+1}\ldots k_{m-1}}$$

$$=(-1)^{\binom{m+1}{2}+1}(m-1)!\ \sigma_1\ldots[k_1\ldots k_{p-1}\alpha k_{p+1}\ldots k_l]\ldots\sigma_n\sum_{\Sigma\varepsilon_r=m}\varepsilon_\alpha\Omega_{k_1\ldots k_m}^{\varepsilon_1\ldots[k_1\ldots k_l]\ldots\varepsilon_n};$$

mentre per $p = m$, tenuto conto delle identità (10.3), (10.2), viene:

$$
\begin{aligned}
\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{k_1\dots k_{m-1}\alpha} &= \sum_1^{m-1}{}_r (-1)^{r-1} \frac{\partial}{\partial\sigma_{k_r}} \overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{k_1\dots[r]\dots k_{m-1}\alpha} + (-1)^{m-1} \frac{\partial}{\partial\sigma_\alpha} \overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{k_1\dots k_{m-1}} \\
&= \sum_1^{m-1}{}_r (-1)^m \frac{\partial}{\partial\sigma_{k_r}} \overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{k_1\dots k_{r-1}\alpha k_{r+1}\dots k_{m-1}} + (-1)^{m-1} \frac{\partial}{\partial\sigma_\alpha} \overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{k_1\dots k_{m-1}} \\
&= (-1)^{\binom{m+1}{2}+1}(m-2)!\,\sigma_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\sigma_n \Bigg\{ \sum_1^{m-1}{}_r \Bigg[\frac{1}{\sigma_\alpha} \sum_{\Sigma\varepsilon_r = m-1} \varepsilon_\alpha \Omega^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}_{k_1\dots k_m} - {} \\
&\qquad (m-1)\frac{\sigma_{k_r}}{\sigma_\alpha} \sum_{\Sigma\varepsilon'_r = m} \varepsilon'_\alpha \Omega^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}_{k_1\dots k_m}\Bigg] + {} \\
&\qquad (m-1)\Bigg[\frac{1}{\sigma_\alpha} \sum_{\Sigma\varepsilon_r = m-1} \Omega^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}_{k_1\dots k_m} - \sum_{\Sigma\varepsilon'_r = m} \varepsilon'_\alpha \Omega^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon'_n}_{k_1\dots k_m}\Bigg]\Bigg\} \\
&= (-1)^{\binom{m+1}{2}+1}(m-1)!\,\sigma_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\sigma_n \Bigg\{ \frac{1}{\sigma_\alpha} \sum_{\Sigma\varepsilon_r = m-1} (1+\varepsilon_\alpha)\Omega^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}_{k_1\dots k_m} - {} \\
&\qquad \frac{\sigma_{k_1}+\dots+\sigma_{k_m}+\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha} \sum_{\Sigma\varepsilon'_r = m} \varepsilon'_\alpha \Omega^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon'_n}_{k_1\dots k_m} + \frac{\sigma_{k_m}}{\sigma_\alpha^2} \sum_{\Sigma\varepsilon'_r = m} \varepsilon'_\alpha \Omega^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon'_n}_{k_1\dots k_m}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Stante l'uguaglianza tra secondo e terzo membro dell'identità (10.2), i primi due addendi entro l'ultima parentesi graffa si elidono, onde risulta in definitiva:

$$
(11.4)\qquad \overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{k_1\dots k_{m-1}\alpha} = (-1)^{\binom{m+1}{2}+1}(m-1)!\,\sigma_1\dots[k_1\dots k_{m-1}\alpha k_{m+1}\dots k_l]\dots\sigma_n \sum_{\Sigma\varepsilon_r = m} \varepsilon_\alpha \Omega^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}_{k_1\dots k_m},
$$

cosicchè appare che il risultato conclusivo della (11.3) resta valido anche per $p = m$.

Ora il confronto delle espressioni delle $\overset{(k_1\dots k_{m-1})}{\vartheta}_{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}$ date dalla tabella (8.3) con le espressioni ottenute per le $\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ mediante le (11.2), (11.3) (per $p = 1, \dots, m$) mostra che queste due ultime hanno la stessa struttura di quelle fornite dalla tabella per m in luogo di $m-1$, quando però si sia verificato che le $\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ soddisfano a condizione analoga a quella contrassegnata con $\binom{*}{*}$ nella (8.3).

Si tratta cioè di verificare che ogni $\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ con due indici bassi, almeno, diversi da $k_1, \dots, k_m$, e siano α, β ($\alpha \neq \beta$), è nulla. Se tra i rimanenti indici v'è k_m, la $\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ considerata può scriversi nella forma $\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{k_m\alpha\beta\alpha_1\dots\alpha_{m-3}}$, e si ottiene con la prima delle (11.1), onde proviene per derivazione da una $\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{\alpha\beta\alpha_1\dots\alpha_{m-3}}$ con due indici α, β diversi da $k_1, \dots, k_m$, cosicchè è zero in base alla condizione (β) della tabella (8.4).

Se invece non appare l'indice basso k_m nella $\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ considerata, essa può scriversi $\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{\alpha\beta\alpha_1\dots\alpha_{m-2}}$ $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2} \neq k_m)$, e si ottiene dalla seconda delle (11.1), onde riesce combinazione lineare di derivate di m $\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}\dots$, delle quali $m-2$ sono senz'altro nulle in base alla citata condizione (δ). Le rimanenti danno:

$$\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{\alpha\beta\alpha_1\dots\alpha_{m-2}} = \frac{\partial}{\partial\sigma_\alpha}\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{\beta\alpha_1\dots\alpha_{m-2}} - \frac{\partial}{\partial\sigma_\beta}\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_{m-2}}. \tag{11.5}$$

Ora le due $\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}\dots$ a 2° membro nella (11.5) sono anch'esse nulle in virtù della (δ) ed è quindi nullo il 1° membro come vuolsi, a meno che gli indici $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2}$ (tra i quali non v'è per ipotesi k_m) costituiscano una combinazione estratta da $k_1, \dots, k_{m-1}$. Sia $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2}) \equiv (k_1, \dots[p]\dots, k_{m-1})$. Viene:

$$\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{\alpha\beta k_1\dots[p]\dots k_{m-1}} = \pm\left[\frac{\partial}{\partial\sigma_\alpha}\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{k_1\dots k_{p-1}\beta k_{p+1}\dots k_{m-1}} - \frac{\partial}{\partial\sigma_\beta}\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{k_1\dots k_{p-1}\alpha k_{p+1}\dots k_{m-1}}\right];$$

cosicchè la verifica dell'annullarsi di $\overset{(k_1\dots k_m)}{\vartheta}_{\alpha\beta k_1\dots[p]\dots k_{m-1}}$ si riduce alla verifica della *simmetria rispetto ad* α, β dell'espressione:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_\beta}\overset{(k_1\dots k_m)}{\Theta}_{k_1\dots k_{p-1}\alpha k_{p+1}\dots k_{m-1}}. \tag{11.6}$$

Valutiamo la (11.6) avuto riguardo alla (8.4) e all'identità (10.4). Si ottiene:

$$(-1)^{\binom{m}{2}+1}(m-2)!\,\sigma_1\dots[k_1\dots k_{p-1}\alpha\beta k_{p+1}\dots k_l]\dots\sigma_n\left\{\sum_{\Sigma\varepsilon_r=m-1}\varepsilon_\alpha\Omega^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}_{k_1\dots k_m} - \sigma_\beta\sum_{\Sigma\varepsilon'_r=m}\varepsilon'_\alpha\varepsilon'_\beta\Omega^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon'_n}_{k_1\dots k_m}\right\}$$

e, trascurando un fattore simmetrico in α, β,

$$\sum_{\Sigma\varepsilon_r=m-1}\varepsilon_\alpha\Omega^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}_{k_1\dots k_m} - \sigma_\beta\sum_{\Sigma\varepsilon'_r=m}\varepsilon'_\alpha\varepsilon'_\beta\Omega^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon'_n}_{k_1\dots k_m} =$$

$$\sum_{\Sigma\varepsilon=m-1}\varepsilon_\alpha\Omega^\varepsilon - (\sigma_{k_1}+\dots+\sigma_{k_m}+\sigma_\beta)\sum_{\Sigma\varepsilon'=m}\varepsilon'_\alpha\varepsilon'_\beta\Omega^{\varepsilon'} + (\sigma_{k_1}+\dots+\sigma_{k_m})\sum_{\Sigma\varepsilon'=m}\varepsilon'_\alpha\varepsilon'_\beta\Omega^{\varepsilon'}.$$

Posto $\varepsilon''_i = \varepsilon_i$ $(i = 1, \dots[\beta k_1\dots k_l]\dots, n)$, $\varepsilon''_\beta = \varepsilon'_\beta - 1$ e tenuto conto che nelle espressioni precedenti possono trascurarsi le soluzioni dell'equazione $\Sigma\varepsilon'_r = m$ con $\varepsilon'_\beta = 0$ (perchè in corrispondenza ad esse è nullo il contributo nella somma $\Sigma\varepsilon'_\alpha\varepsilon'_\beta\Omega^{\varepsilon'}$), viene:

$$\sum_{\Sigma\varepsilon=m-1}\varepsilon_\alpha\Omega^\varepsilon - \sum_{\Sigma\varepsilon''=m-1}\varepsilon''_\alpha(\varepsilon''_\beta+1)\Omega^{\varepsilon''} + (\sigma_{k_1}+\dots+\sigma_{k_m})\sum_{\Sigma\varepsilon'=m}\varepsilon'_\alpha\varepsilon'_\beta\Omega^{\varepsilon'} =$$

$$-\sum_{\Sigma\varepsilon''_r=m-1}\varepsilon''_\alpha\varepsilon''_\beta\Omega^{\varepsilon''_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon''_n}_{k_1\dots k_m} + (\sigma_{k_1}+\dots+\sigma_{k_m})\sum_{\Sigma\varepsilon'_r=m}\varepsilon'_\alpha\varepsilon'_\beta\Omega^{\varepsilon'_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon'_n}_{k_1\dots k_m},$$

espressione quest'ultima la cui simmetria rispetto ad α, β è manifesta.

È così compiuta la verifica suddetta e riesce pertanto completamente provato il punto 2) del n. 9. Dunque la tabella (8.3) è valida per $m-1=1, 2, \ldots, l$ e la tabella (8.4) per $m-1=1, 2, \ldots, l-1$. A noi interessano per i valori massimi di $m-1$.

Determinazione delle forme nucleo $\tilde{\varphi}_{n+l}$.

12. È opportuno che riscriviamo la tabella (8.3) per il valore massimo di $m-1$, cioè $m-1=l$. Si ottengono così le funzioni coefficienti della desiderata forma $\overset{(k_1 \ldots k_l)}{\tilde{\vartheta}_l}$ di grado l nelle n variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ (n. 8). Si ha:

$$(12.1) \quad \begin{cases} \overset{(k_1 \ldots k_l)}{\vartheta}_{k_1 \ldots k_l} = (-1)^{\binom{l+1}{2}} l!\, \sigma_1 \ldots [k_1 \ldots k_l] \ldots \sigma^n \displaystyle\sum_{\Sigma \varepsilon_r = l} \Omega^{\varepsilon_1 \ldots [k_1 \ldots k_l] \ldots \varepsilon_n}_{k_1 \ldots k_l} \\[2ex] \overset{(k_1 \ldots k_l)}{\vartheta}_{k_1 \ldots k_{p-1} \alpha k_{p+1} \ldots k_l} = (-1)^{\binom{l+1}{2}+1} (l-1)!\, \sigma_1 \ldots [k_1 \ldots k_{p-1} \alpha k_{p+1} \ldots k_l] \ldots \sigma_n \displaystyle\sum_{\Sigma \varepsilon_r = l} \varepsilon_\alpha \Omega^{\varepsilon_1 \ldots [k_1 \ldots k_l] \ldots \varepsilon_n}_{k_1 \ldots k_l} \\ \hfill (\alpha \neq k_1, \ldots, k_l;\ p = 1, \ldots, l) \\[2ex] \text{(*) le } \overset{(k_1 \ldots k_l)}{\vartheta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \text{ sono emisimmetriche rispetto agli indici bassi, i quali possono} \\ \text{assumere tutti i valori } 1, \ldots, n; \\[2ex] \binom{*}{*} \text{ sono nulle tutte le } \overset{(k_1 \ldots k_l)}{\vartheta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \text{ con più di un indice basso diverso dagli} \\ \text{indici alti.} \end{cases}$$

Le (12.1) mostrano che la forma $\overset{(k_1 \ldots k_l)}{\tilde{\vartheta}_l}$ non è simmetrica rispetto alle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, l'asimmetria dipendendo dalla scelta degli interi distinti $k_1, \ldots, k_l$ fra $1, \ldots, n$. Si hanno dunque $\binom{n}{l}$ forme $\overset{(k_1 \ldots k_l)}{\tilde{\vartheta}_l}$ diverse, da ciascuna delle quali può ottenersi una forma nucleo $\overset{(k_1 \ldots k_l)}{\tilde{\varphi}_{n+l}}$ diversa (n. 3), e in definitiva altrettante formule integrali $(n+l)$-dimensionali distinte. Procedendo poi similmente al n. 7, si possono compendiare tali formule in una sola contenente parametri arbitrari, ma di ciò ci occuperemo più in là.

In base alle (2.3) si ottengono per la $\overset{(k_1 \ldots k_l)}{\tilde{\varphi}_{n+l}}$ i coefficienti:

$$(12.2) \quad \begin{cases} \overset{(k_1 \ldots k_l)}{\varphi}_{k_1 \ldots k_l} = (-1)^{\binom{l+1}{2}} l!\, (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) \ldots [k_1 \ldots k_l] \ldots (\bar{z}_n - \bar{\zeta}_n) \displaystyle\sum_{\Sigma \varepsilon_r = l} \Omega^{\varepsilon_1 \ldots [k_1 \ldots k_l] \ldots \varepsilon_n}_{k_1 \ldots k_l} \\[2ex] \overset{(k_1 \ldots k_l)}{\varphi}_{k_1 \ldots k_{p-1} \alpha k_{p+1} \ldots k_l} = (-1)^{\binom{l+1}{2}+1} (l-1)!\, (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) \ldots [k_1 \ldots k_{p-1} \alpha k_{p+1} \ldots k_l] \ldots (z_n - \bar{\zeta}_n) \displaystyle\sum_{\Sigma \varepsilon_r = l} \varepsilon_\alpha \Omega^{\varepsilon_1 \ldots [k_1 \ldots k_l] \ldots \varepsilon_n}_{k_1 \ldots k_l} \\ \hfill (\alpha \neq k_1, \ldots, k_l;\ p = 1, \ldots, l) \\[2ex] \text{(*), } \binom{*}{*} \text{ condizioni analoghe alle corrispondenti del quadro (12.1).} \end{cases}$$

Determinazione del 1° membro delle formule integrali $(n+l)$-dimensionali.

13. Sappiamo ormai (n. 3) che l'integrale:

$$\int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \dots, z_n) \overset{(k_1 \dots k_l)}{\varphi_{n+l}} \tag{13.1}$$

è regolare sopra ogni ciclo $\Gamma_{n+l} \subset R_{2n} - T_{2n-2l-2}$, essendo R_{2n} la regione di regolarità di $f(z_1, \dots, z_n)$, e che il suo valore non muta sostituendo Γ_{n+l} con un qualunque ciclo omologo entro $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$. Abbiamo ancora un passo da compiere: esprimere questo valore mediante il valore della f nel centro $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ della varietà $T_{2n-2l-2}$. Si otterrà così il 1° membro della formula integrale corrispondente alla forma nucleo $\overset{(k_1 \dots k_l)}{\varphi_{n+l}}$.

All'uopo occorre supporre che sia:

$$\Gamma_{n+l} \approx 0 \quad \text{in} \quad (R_{2n} \quad T_{2n-2l-2}) + O, \tag{13.2}$$

perchè ciò permette di sostituire nella valutazione di (13.1) il ciclo Γ_{n+l} con un ciclo ad esso omologo entro $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$ e comunque prossimo ad O.

Invero la 13.2) significa l'esistenza di una varietà $(n+l+1)$-dimensionale (eventualmente singolare) $V_{n+l+1} \subset (R_{2n} - T_{2n-2l-2}) + O$, tale che

$$\mathcal{C} V_{n+l+1} = t\Gamma_{n+l}, \tag{13.3}$$

essendo t un conveniente intero non nullo.

Possiamo sempre assumere la varietà V_{n+l+1} passante per O, previa l'eventuale aggiunta di un ciclo $(n+l+1)$-dimensionale passante per O e contenuto in $(R_{2n} - T_{2n-2l-2}) + O$ [37]. Ora, sia U_{n+l+1} un intorno di O su V_{n+l+1}, così piccolo da appartenere per intero ad un n-cilindro C_{2n} (III, n. 2) a sua volta contenuto nella regione aperta R_{2n} (la quale si suppone contenente O). Se Γ'_{n+l} è l'$(n+l)$-ciclo contorno di U_{n+l+1}, si ha

$$\mathcal{C}(V_{n+l+1} - U_{n+l+1}) = t\Gamma_{n+l} - \Gamma'_{n+l},$$

cosicchè risulta

$$t\Gamma_{n+l} \sim \Gamma'_{n+l} \quad \text{in} \quad R_{2n} - T_{2n-2l-2}. \tag{13.4}$$

Abbiamo dunque che l'integrale (13.1) uguaglia il seguente:

$$\frac{1}{t}\int_{\Gamma'_{n+l}} f(z_1, \dots, z_n) \overset{(k_1 \dots k_l)}{\varphi_{n+l}}. \tag{13.5}$$

---

[37] D'altronde, qualora esista una V_{n+l+1} non contenente O e soddisfacente la (13.3), vuol dire che $\Gamma_{n+l} \approx 0$ in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$, e quindi l'integrale (13.1) risulta nullo. La formula conclusiva (16.5) è allora senz'altro valida, perchè in tal caso riescono anche nulli tutti gli indici $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ che definiscono lo stato d'allacciamento di Γ_{n+l} con $T_{2n-2l-2}$ (cfr. per $n=1$ il n. 1 del § III e per il caso generale il successivo n. 20).

Ora, siccome il ciclo Γ'_{n+l} appartiene all'n-cilindro C_{2n}, possiamo applicare a Γ'_{n+l} la relazione di omologia (III, 14.3), che, come sappiamo (III, n. 15), è valida anche in $C_{2n} - T_{2n-2l-2}$ e quindi in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$, essendo $A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ le varietà definite dalle equazioni (III, 4.1), con r coincidente col raggio di C_{2n}. Abbiamo cioè:

$$\Gamma'_{n+l} \approx (-1)^l \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} N'_{\alpha_1\ldots\alpha_l} A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l} \quad \text{in} \quad R_{2n} - T_{2n-2l-2}, \tag{13.6}$$

dove

$$N'_{\alpha_1\ldots\alpha_l} = \text{All}\,(\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_l},\ \Gamma'_{n+l})$$

sono i caratteri che definiscono lo stato di allacciamento di Γ'_{n+l} con la varietà $T_{2n-2l-2}$ (III, n. 13).

D'altronde, in base alla proprietà fondamentale degli indici d'allacciamento (I, n. 8), tenuto conto della (13.4), è immediato esprimere i caratteri $N'_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ in funzione dei caratteri

$$N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} = \text{All}\,(\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_l},\ \Gamma_{n+l}) \tag{13.7}$$

che definiscono lo stato di allacciamento del primitivo ciclo Γ_{n+l} con $T_{2n-2l-2}$. Si ha precisamente

$$N'_{\alpha_1\ldots\alpha_l} = tN_{\alpha_1\ldots\alpha_l},$$

cosicchè la (13.6) diviene:

$$\Gamma'_{n+l} \approx (-1)^l t \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l} \quad \text{in} \quad R_{2n} - T_{2n-2l-2}. \tag{13.8}$$

Sostituendo allora nella (13.5) il ciclo Γ'_{n+l} col 2° membro della (13.8), com'è lecito, l'integrale (13.1) si riduce a:

$$(-1)^l \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} \int_{A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}} f(z_1, \ldots, z_n) \overset{(k_1\ldots k_l)}{\varphi_{n+l}}. \tag{13.9}$$

Finalmente si osservi che l'espressione (13.9), in quanto uguaglia (13.1), riesce indipendente dal raggio r di C_{2n} e delle varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$. Facendo tendere r a zero, C_{2n} e le $A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ tendono al punto $O(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$; perciò, attesa la continuità di $f(z_1, \ldots, z_n)$, l'espressione (13.9) può sostituirsi col suo limite:

$$(-1)^l f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \lim_{r\to 0} \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} \int_{A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}} \overset{(k_1\ldots k_l)}{\varphi_{n+l}}.$$

il quale uguaglia altresì:

$$(13.10)\qquad (-1)^l f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_l} N_{\alpha_1\dots\alpha_l} \int_{A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}} \overset{(k_1\dots k_l)}{\tilde{\varphi}_{n+l}},$$

giacchè (13.9) riesce indipendente da r anche quando si assuma $f(z_1, \dots, z_n) \equiv 1$ [38].

La valutazione dell'integrale (13.1) è così ridotta a quella dell'espressione (13.10), e infine degli integrali:

$$(13.11)\qquad \int_{A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}} \overset{(k_1 k_{\dots} l)}{\tilde{\varphi}_{n+l}} = \int_{A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}} \sum_{\gamma_1<\dots<\gamma_l} \overset{(k_1\dots k_l)}{\varphi_{\gamma_1\dots\gamma_l}} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\gamma_1}, \dots, \bar{z}_{\gamma_l}).$$

14. Ricordando le equazioni parametriche (III, 6.1), della varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$, si ha su essa:

$$(14.1)\qquad \begin{cases} d(z_j, \bar{z}_j) = d(re^{i\theta_j}, re^{-i\theta_j}) = r^2 d\,\theta_j, \theta_j) = 0 & (j = 1, \dots [\alpha_1 \dots \alpha_l] \dots, n) \\ d(z_{\alpha_p}, \bar{z}_{\alpha_p}) = d(\rho_{\alpha_p} e^{i\theta_{\alpha_p}}, \rho_{\alpha_p} e^{-i\theta_{\alpha_p}}) = 2i\rho_{\alpha_p} d(\theta_{\alpha_p}, \rho_{\alpha_p}) & (p = 1, \dots, l), \end{cases}$$

quindi degli $(n+l)$-differenziali $d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\gamma_1}, \dots, \bar{z}_{\gamma_l})$ che appaiono in (13.11) è diverso da zero su $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ soltanto $d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l})$. La (13.11) può perciò scriversi semplicemente:

$$(14.2)\qquad \int_{A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}} \overset{(k_1\dots k_l)}{\tilde{\varphi}_{n+l}} = \int_{A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}} \overset{(k_1\dots k_l)}{\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_l}} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l}).$$

Per le (III, 6.1) e (14.1) su $A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}$ si ha poi:

$$d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l}) = 2^l i^n r^{n-l} \rho_{\alpha_1} \dots \rho_{\alpha_l} e^{i(\theta_1 + \dots [\alpha_1 \dots \alpha_l] \dots + \theta_n)} d(\theta_1, \dots, \theta_n, \rho_{\alpha_1}, \dots, \rho_{\alpha_l}),$$

e, avuto riguardo alle (12.1), (12.2),

$$\overset{(k_1\dots k_l)}{\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_l}} = r^{l-n} e^{i(\theta_1 + \dots [\alpha_1 \dots \alpha_l] \dots + \theta_n)} \overset{(k_1\dots k_l)}{\vartheta_{\alpha_1\dots\alpha_l}}(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

onde la (14.2) diviene:

$$\int_{A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}} \overset{(k_1\dots k_l)}{\tilde{\varphi}_{n+l}} = i^n \int_{A_{n+l}^{\alpha_1\dots\alpha_l}} 2^l \rho_{\alpha_1} \dots \rho_{\alpha_l} \overset{(k_1\dots k_l)}{\vartheta_{\alpha_1\dots\alpha_l}}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) d(\theta_1, \dots, \theta_n, \rho_{\alpha_1}, \dots, \rho_{\alpha_l}).$$

---

[38] Considerando il caso in cui tutti gli indici $N_{\alpha_1\dots\alpha_l}$ siano nulli tranne uno, si trae che ciascuno degli integrali (13.11) ha valore indipendente da r, ciò che si poteva assicurare a priori in quanto la forma $\tilde{\varphi}_{n+l}$ ha grado di omogeneità zero. Sulla base di questa osservazione era anzi lecito presumere che le funzioni $\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_l}$ coefficienti di $\tilde{\varphi}_{n+l}$, supposte razionali omogenee, dovessero di necessità avere grado $-(n+l)$. Cfr. nota [33] al n. 2.

Ricordiamo (III, n. 6) che l'orientazione della varietà $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ è quella determinata dall' $(n+l)$-edro $(d\theta_1, \dots, d\theta_n, d\rho_{\alpha_1}, \dots, d\rho_{\alpha_l})$ o, ciò che è lo stesso, $(d\theta_1, \dots, d\theta_n, d\sigma_{\alpha_1}, \dots, d\sigma_{\alpha_l})$. Consideriamo allora, nello spazio euclideo reale n-dimensionale E_n $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ rappresentativo delle variabili reali $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, le varietà parallelepipediche l-dimensionali, che indicheremo con $B_l^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$, di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \dots [\alpha_1 \dots \alpha_l] \dots = \sigma_n = s \\ 0 \leq \sigma_{\alpha_1} \leq s, \dots, \ 0 \leq \sigma_{\alpha_l} \leq s, \end{array} \right. \tag{14.4}$$

ove si è posto $s = r^2$, orientate in conformità dell' l-edro $(d\sigma_{\alpha_1}, \dots, d\sigma_{\alpha_l})$. Integrando rispetto a $\theta_1, \dots, \theta_n$ nella (14.3), questa si trasforma allora nella

$$\int_{A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}} \overset{(k_1 \dots k_l)}{\tilde{\varphi}_{n+l}} = (2\pi i)^n \int_{B_l^{\alpha_1 \dots \alpha_l}} \overset{(k_1 \dots k_l)}{\vartheta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}} d(\sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_l}). \tag{14.5}$$

Siamo dunque ridotti così al calcolo di integrali multipli delle funzioni razionali $\overset{(k_1 \dots k_l)}{\vartheta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}}$. Tale calcolo si presenta estremamente lungo se affrontato direttamente; riusciremo però ad evitarlo del tutto usufruendo (come si è detto al n. 1) delle relazioni tra le forme $\tilde{\vartheta}_l$, $\tilde{\Theta}_{l-1}$ considerate nelle pagine precedenti.

15. All'uopo si osservi in primo luogo che la (14.5) può sostituirsi con la

$$\int_{A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}} \overset{(k_1 \dots k_l)}{\tilde{\varphi}_{n+l}} = (2\pi i)^n \int_{B_l^{\alpha_1 \dots \alpha_l}} \overset{(k_1 \dots k_l)}{\tilde{\vartheta}_l}, \tag{15.1}$$

perchè i differenziali $d(\sigma_{\gamma_1}, \dots, \sigma_{\gamma_l})$ che appaiono in $\overset{(k_1 \dots k_l)}{\tilde{\vartheta}_l}$ sono diversi da zero su $B_l^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ soltanto in corrispondenza ad indici $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ che costituiscano una permutazione di $\alpha_1, \dots, \alpha_l$.

Ora, sia la forma $\overset{(k_1 \dots k_l)}{\tilde{\vartheta}_l}$, sia la forma $\overset{(k_1 \dots k_l)}{\tilde{\Theta}_{l-1}}$, da cui la prima è ottenuta per differenziazione di CARTAN (come indica la relazione generale (4.1)), sono regolari su ogni $B_l^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$, giacchè per entrambe le forme nelle funzioni razionali coefficienti (espresse rispett. dalle (12.1) e dalle (8.4) per $m = l$) compaiono a denominatore soltanto espressioni del tipo

$$\sigma_{k_1} + \dots + \sigma_{k_l} + \sigma_j$$

con $j \neq k_1, \dots, k_l$, le quali non sono mai nulle sulle varietà di equazioni (14.4). In base alla formula di GREEN-STOKES generale (II, n. 6), può perciò venire sostituito l'integrale a 2° membro nella (15.1) con l'integrale della forma $\overset{(k_1 \dots k_l)}{\tilde{\Theta}_{l-1}}$ sul contorno della varietà $B_l^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$.

Dalle (14.4) risulta immediatamente

$$\mathcal{C}B_l^{\alpha_1\ldots\alpha_l} = \sum_{p=1}^{l} (-1)^{p-1}\left[B_{l-1}^{\alpha_1\ldots[p]\ldots\alpha_l} - C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overset{\circ}{\alpha}_p\alpha_{p+1}\ldots\alpha_l}\right], \tag{15.2}$$

dove s'indica con $B_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}}$ una varietà del tipo già definito ma di dimensione $l-1$ anzichè l, e con $C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overset{\circ}{\alpha}_p\alpha_{p+1}\ldots\alpha_l}$ la varietà di equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_1 = \ldots[\alpha_1\ldots\alpha_l]\ldots = \sigma_n = s, \ \sigma_{\alpha_p} = 0, \\ 0 \leq \sigma_{\alpha_1} \leq s, \ldots[p]\ldots, \ 0 \leq \sigma_{\alpha_l} \leq s, \end{array}\right. \tag{15.3}$$

con l'orientazione definita dall'$(l-1)$-edro $(d\sigma_{\alpha_1}, \ldots[p]\ldots, d\sigma_{\alpha_l})$. Si noti che $C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overset{\circ}{\alpha}_p\alpha_{p+1}\ldots\alpha_l}$ coincide con la varietà $B_{l-1}^{\alpha_1\ldots[p]\ldots\alpha_l}$ dello spazio euclideo $(n-1)$-dimensionale E_{n-1} $(\sigma_1, \ldots[\alpha_p]\ldots, \sigma_n)$.

Risulta allora:

$$\int_{B_l^{\alpha_1\ldots\alpha_l}} \overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\vartheta}_l} = \sum_{p=1}^{l} (-1)^{p-1} \left\{ \int_{B_{l-1}^{\alpha_1\ldots[p]\ldots\alpha_l}} \overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\Theta}_{l-1}} - \int_{C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overset{\circ}{\alpha}_p\alpha_{p+1}\ldots\alpha_l}} \overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\Theta}_{l-1}} \right\}. \tag{15.4}$$

D'altronde, ai fini della valutazione dell'espressione (13.1) che a noi interessa in definitiva, non occorre il calcolo dei singoli integrali (15.1), ma soltanto della loro combinazione lineare

$$\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} \int_{A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}} \overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\varphi}_{n+l}} = (2\pi i)^n \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} \int_{B_l^{\alpha_1\ldots\alpha_l}} \overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\vartheta}_l}. \tag{15.5}$$

Mediante la (15.4), la combinazione lineare a 2° membro nella (15.5) si decompone in una somma di integrali sulle varietà B_{l-1} e di integrali sulle varietà C_{l-1}. Gli integrali della prima categoria danno complessivamente:

$$(2\pi i)^n \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} \sum_{p=1}^{l} (-1)^{p-1} N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} \int_{B_{l-1}^{\alpha_1\ldots[p]\ldots\alpha_l}} \overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\Theta}_{l-1}},$$

cioè, a meno del fattore $(2\pi i)^n$, l'integrale di $\overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\Theta}_{l-1}}$ sulla varietà:

$$\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l} \sum_{p=1}^{l} (-1)^{p-1} N_{\alpha_1\ldots\alpha_l} B_{l-1}^{\alpha_1\ldots[p]\ldots\alpha_l} = \frac{1}{l!} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l} \sum_{p=1}^{l} N_{\alpha_p\alpha_1\ldots[p]\ldots\alpha_l} A^{\alpha_1\ldots[p]\ldots\alpha_l} \text{ [39]}$$

$$= \frac{1}{(l-1)!} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{l-1}} \left\{ \sum_{h\,[\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}]} N_{h\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}} \right\} B^{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}},$$

---

[39] Si ricordi l'emisimmetria dei simboli $N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ (III, n. 13).

varietà che svanisce identicamente a cagione delle relazioni (III, 13.6) intercedenti tra gli indici $N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$. Gli integrali della 1^a categoria non danno quindi alcun contributo.

Quanto a quelli della 2^a categoria, estesi sulle varietà C_{l-1}, si osservi innanzi tutto che dalle (15.3) risulta che su $C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overset{\circ}{\alpha_p}\alpha_{p+1}\ldots\alpha_l}$ è diverso da zero il solo $(l-1)$-differenziale $d(\sigma_{\alpha_1},\ldots[p]\ldots,\sigma_{\alpha_l})$, onde $\overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\Theta}}_{l-1}$ si riduce ivi alla sola forma monomia componente

$$\overset{(k_1\ldots k_l)}{\Theta}_{\alpha_1\ldots[p]\ldots\alpha_l} d(\sigma_{\alpha_1},\ldots[p]\ldots,\sigma_{\alpha_l}). \tag{15.6}$$

Ma, come appare dalle (8.4) per $m=l$, la (15.6) contiene i fattori

$$\sigma_1,\ldots[\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\alpha_{p+1},\ldots,\alpha_l,k_l]\ldots,\sigma_n,$$

quindi in particolare σ_{α_p}, *a meno che sia* $\alpha_p=k_l$. Siccome $\sigma_{\alpha_p}=0$ su $C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overset{\circ}{\alpha_p}\alpha_{p+1}\ldots\alpha_l}$, ne segue che il contributo degli integrali della 2^a categoria si riduce all'integrale della forma $\overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\Theta}}_{l-1}$ considerata sulla varietà

$$\begin{aligned}-\sum_1^l{}_p \sum_{[k_l]}{}_{\alpha_1<\ldots[p]\ldots<\alpha_l}(-1)^{p-1}N_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}k_l\alpha_{p+1}\ldots\alpha_l}C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overset{\circ}{k_l}\alpha_{p+1}\ldots\alpha_l}&=\\ =(-1)^l\sum_{[k_l]}{}_{\alpha_1<\ldots<\alpha_{l-1}}N_{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}k_l}C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}\overset{\circ}{k_l}}&.\end{aligned} \tag{15.7}$$

Ricordando le (6.2) si ha d'altronde che su $C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}\overset{\circ}{k_l}}$, ove $\sigma_{k_l}=0$, risulta

$$\left[\overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\Theta}}_{l-1}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\right]_{\sigma_{k_l}=0}=\overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\vartheta}}_{l-1}(\sigma_1,\ldots[k_l]\ldots,\sigma_n),$$

dove si è messo in luce che la forma a 2^o membro dipende dalle sole variabili $\sigma_1,\ldots[k_l]\ldots,\sigma_n$.

Nello stesso tempo, conformemente ad un'osservazione precedente, la varietà $C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}\overset{\circ}{k_l}}$ coincide con la varietà $B_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}}$ considerata nello spazio $E_{n-1}\ (\sigma_1,\ldots[k_l]\ldots,\sigma_n)$. In definitiva risulta:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l}N_{\alpha_1\ldots\alpha_l}\int_{B_l^{\alpha_1\ldots\alpha_l}}\overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\vartheta}}_l&=(-1)^l\sum_{[k_l]}{}_{\alpha_1<\ldots<\alpha_l}N_{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}k_l}\int_{C_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}\overset{\circ}{k_l}}}\overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\Theta}}_{l-1}\\ &=(-1)^l\sum_{[k_l]}{}_{\alpha_1<\ldots<\alpha_{l-1}}N_{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}k_l}\int_{B_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}}}\overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\vartheta}}_l,\end{aligned} \tag{15.8}$$

con l'avvertenza che nel 3^o membro della (15.8) la varietà $B_{l-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ e la forma $\overset{(k_1\ldots k_l)}{\tilde{\vartheta}}_{l-1}$ vanno considerate nello spazio $E_{n-1}\ (\sigma_1,\ldots[k_l]\ldots,\sigma_n)$.

Con tale avvertenza, il passaggio dal 1° al 3° membro nella (15.8) può riguardarsi come una formula ricorrente, la quale, applicata iteratamente, dà per l'integrale in oggetto le espressioni successive:

$$(-1)^{l+(l-1)} \sum_{[k_{l-1}k_l]}^{\alpha_1<\dots<\alpha_{l-2}} N_{\alpha_1\dots\alpha_{l-2}k_{l-1}k_l} \int\limits_{B^{\alpha_1\dots\alpha_{l-2}}_{l-2}} \overset{(k_1\dots k_{l-2})}{\tilde{\vartheta}}_{-2}$$

da considerarsi nello spazio $E_{n-2}\,(\sigma_1, {}_{\dots[k_{l-1}k_l]\dots}, \sigma_n)$, ecc.. sino a:

$$(-1)^{\binom{l+1}{2}-1} \sum_{[k_1\dots k_l]}^{\alpha_1} N_{\alpha_1 k_2\dots k_l} \int\limits_{B^{\alpha_1}_1} \overset{(k_1)}{\tilde{\vartheta}}_1$$

da considerarsi nello $E_{n-l+1}\,(\sigma_1, {}_{\dots[k_2\dots k_l]\dots}, \sigma_n)$.

Finalmente, applicando la prima uguaglianza espressa dalla (15.8) per $l=1$, si ha

$$(15.9) \qquad (-1)^{\binom{l+1}{2}} N_{k_1\dots k_l} \int\limits_{\overset{\circ}{C}{}^{k_1}_0} \overset{(k_1)}{\tilde{\Theta}}_0 ,$$

dove la varietà $\overset{\circ}{C}{}^{k_1}_0$ dello E_{n-l+1} si riduce al solo punto $\sigma_1 = {}_{\dots[k_1\dots k_l]\dots} = \sigma_n = s$, $\sigma_{k_1} = 0$, nel quale deve valutarsi la forma di grado zero $\overset{(k_1)}{\tilde{\Theta}}_0$ nelle variabili $\sigma_1, {}_{\dots[k_2\dots k_l]\dots}, \sigma_n$, cioè, come esprime la (7.2), la funzione

$$(15.10) \qquad \overset{(k_1)}{\tilde{\Theta}}_0 = \overset{(k_1)}{\Theta} = \frac{\sigma_1 \,{}_{\dots[k_1\dots k_l]\dots}\, \sigma_n}{(\sigma_{k_1}+\sigma_1)\,{}_{\dots[k_1\dots k_l]\dots}\,(\sigma_{k_l}+\sigma_n)} .$$

Siccome la (15.10) si riduce ad 1 nel punto $\overset{\circ}{C}{}^{k_1}_0$, si ha in conclusione

$$(15.11) \qquad \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_l} N_{\alpha_1\dots\alpha_l} \int\limits_{B^{\alpha_1\dots\alpha_l}_l} \overset{(k_1\dots k_l)}{\tilde{\vartheta}}_l = (-1)^{\binom{l+1}{2}} N_{k_1\dots k_l} .$$

Abbiamo così valutato la somma di integrali (15.5), che ci occorreva per la determinazione del valore della (13.10). Essa riesce indipendente dal raggio r delle varietà $A^{\alpha_1\dots\alpha_l}_{n+l}$ (come si era previsto; n. 13), e dà per la (13.10) il valore:

$$(-1)^{\binom{l+1}{2}+l} (2\pi i)^n N_{k_1\dots k_l} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) .$$

Riandando al n. 13, si conclude che *abbiamo così stabilito la formula integrale* $(n+l)$*-dimensionale:*

$$(15.12) \qquad (-1)^{\binom{l}{2}} (2\pi i)^n N_{k_1\dots k_l} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \int\limits_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \dots, z_n) \overset{(k_1\dots k_l)}{\tilde{\varphi}}_{n+l} .$$

Espressione esplicita delle formule integrali generali

16. Per scrivere in forma esplicita la (15.12) conviene introdurre qualche simbolo.

Nello spazio euclideo S_{2n} rappresentativo delle variabili $z_1, \dots, z_n$, abbiamo già indicato con ρ la distanza del punto fisso $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ dal punto $P(z_1, \dots, z_n)$ che descrive il ciclo Γ_{n+l}, ponendo cioè

$$\rho^2 = \sum_1^n {}_j \, |z_j - \zeta_j|^2 = \sum_1^n {}_j \, (z_j - \zeta_j)(\bar{z}_j - \bar{\zeta}_j). \tag{16.1}$$

Sia $S_{2m}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ lo spazio $2m$-dimensionale caratteristico, subordinato ad S_{2n}, di equazioni

$$z_1 = \zeta_1, \dots [\alpha_1 \dots \alpha_m] \dots, z_n = \zeta_n.$$

Quando si pensi S_{2n} come prodotto topologico dei suoi piani caratteristici per O $\pi_1, \dots, \pi_n$ (III, n. 4), immagini risp. di rette parallele agli assi $z_1, \dots, z_n$ dello spazio complesso $(z_1, \dots, z_n)$, lo $S_{2m}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ appare come il prodotto topologico subordinato $\pi_{\alpha_1} \times \dots \times \pi_{\alpha_m}$. Ebbene, indicheremo con $\rho_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ la *proiezione ortogonale* di ρ su $S_{2m}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$, cioè porremo:

$$\rho^2_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \sum_1^m {}_p \, |z_{\alpha_p} - \zeta_{\alpha_p}|^2 = \sum_1^m {}_p \, (z_{\alpha_p} - \zeta_{\alpha_p})(\bar{z}_{\alpha_p} - \bar{\zeta}_{\alpha_p}) = \sum_1^m {}_p \, \rho^2_{\alpha_p}, \tag{16.2}$$

per guisa che, in particolare, si ha:

$$\rho^2 = \rho^2_{1 \dots n} = \sum_1^n {}_j \, \rho_j^2. \tag{16.3}$$

Ricordando la (8.2), coi nuovi simboli può scriversi:

$$\Omega^{\varepsilon_1 \dots [k_1 \dots k_l] \dots \varepsilon_n}_{k_1 \dots k_l} = \prod_{[k_1 \dots k_l]} {}_j \, \rho_{k_1 \dots k_l j}^{-2(1+\varepsilon_j)}. \tag{16.4}$$

Non v'è che da sostituire queste espressioni nelle (12.2), quindi giovarsene per rendere esplicita la (15.12). Dividendo per il fattore $(-1)^{\binom{l+1}{2}} l!$ perveniamo così al seguente risultato.

Per una $f(z_1, \dots, z_n)$ olomorfa in una regione aperta R_{2n} di S_{2n} contenente il punto $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, sussistono le $\binom{n}{l}$ formule integrali ($n + l$-dimensionali corrispondenti alle combinazioni $k_1, \dots, k_l$ degli interi $1, \dots, n$:

$$(-1)^l \frac{(2\pi i)^n}{l!} N_{k_1 \dots k_l} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \tag{16.5}$$

$$\int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \dots, z_n) \Big\{ (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) \dots [k_1 \dots k_l] \dots (\bar{z}_n - \bar{\zeta}_n) \sum_{\Sigma \varepsilon_j = l} \prod_{[k_1 \dots k_l]} {}_j \, \rho_{k_1 \dots k_l j}^{-2(1+\varepsilon_j)} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{k_1}, \dots, \bar{z}_{k_l}) -$$

$$\frac{1}{l} \sum_1^l {}_p \sum_{[k_1 \dots k_l]} {}_\alpha \, (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) \dots [k_1 \dots k_{p-1} \alpha k_{p+1} \dots k_l] \dots (\bar{z}_n - \bar{\zeta}_n) \sum_{\Sigma \varepsilon_j = l} \varepsilon_\alpha \prod_{[k_1 \dots k_l]} {}_j \, \rho_{k_1 \dots k_l j}^{-2(1+\varepsilon_j)} d(z_1, \dots z_n, \bar{z}_{k_1}, \dots, \bar{z}_{k_{p-1}}, \bar{z}_\alpha, \bar{z}_{k_{p+1}}, \dots, \bar{z}_{k_l}) \Big\},$$

dove il ciclo $(n+l)$*-dimensionale* Γ_{n+l} *soddisfa alle condizioni topologiche:*

$$(\mathrm{I}_{n,l}) \qquad \Gamma_{n+l} \subset R_{2n} - T_{2n-2l-2},$$

$$(\mathrm{II}_{n,l}) \qquad \Gamma_{n+l} \approx 0 \quad in \quad (R_{2n} - T_{2n-2l-2}) + O,$$

$$(\mathrm{III}_{n,l}) \qquad N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \mathrm{All}\,(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_l},\ \Gamma_{n+l}),$$

essendo $T_{2n-2l-2}$ *la varietà costituita dagli* $\binom{n}{l+1}$ *spazi caratteristici* $(2n-2l-2)$*-dimensionali uscenti da* O*, di equazioni*

$$z_{\alpha_1} = \zeta_{\alpha_1}, \dots, z_{\alpha_{l+1}} = \zeta_{\alpha_{l+1}},$$

che si ottengono in corrispondenza alle combinazioni $\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}$ *degli interi* $1, \dots, n$, *e infine essendo* $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ *gli* $\binom{n}{l}$ *cicli che forniscono una base (non minima) per il gruppo di* BETTI $(n-l-1)$*-dimensionale di* $T_{2n-2l-2}$, *secondo specificato nel § III, nn. 10, 11.*

Le relazioni $(\mathrm{III}_{n,l})$ *servono soltanto ad esprimere i caratteri interi* $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ *definenti lo stato di allacciamento del ciclo* Γ_{n+l} *con la varietà* $T_{2n-2l-2}$ *(III, n. 13), dei quali ne compare uno per ognuna delle formule integrali scritte. Tali caratteri possono anche esprimersi come indici di intersezione così:*

$$N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = (-1)^{\mathrm{cls}\,(\alpha_1 \dots \alpha_l \beta_1 \dots \beta_{n-l})} [K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}},\ \Gamma_{n+l}], \tag{16.6}$$

ove $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l}$ *è una permutazione di* $1, \dots, n$ (cls *indicandone la classe) e* $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ *è l'* $(n-l)$*-edro solido rettangolo, prodotto topologico di* $n-l$ *semirette* $t_{\beta_1}, \dots, t_{\beta_{n-l}}$ *uscenti da* O *sui piani caratteristici* $\pi_{\beta_1}, \dots, \pi_{\beta_{n-l}}$*:*

$$K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}} = t_{\beta_1} \times \dots \times t_{\beta_{n-l}},$$

orientato in corrispondenza all'ordine delle semirette medesime.

La (16.6) segue senz'altro dalle (10.2), (10.3), (13.1), del § III, tenuto conto della definizione di indice d'allacciamento (I, n. 8).

OSSERVAZIONE. - Le $\binom{n}{l}$ formule (16.5) non sono fra loro indipendenti. Infatti, siccome i caratteri $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ sono legati dalle relazioni (III, 13.6) mediante le quali si riducono ad $\binom{n-1}{l}$ indipendenti, del pari accade che le formule (16.5) risultano legate dalle corrispondenti relazioni lineari e si riducono pertanto a $\binom{n-1}{l}$ formule indipendenti. Tuttavia conviene avvertire che (come si può verificare facilmente già per $l=1$, $n=3$) tali relazioni lineari non sussistono in generale tra le forme differenziali integrande nelle formule di cui trattasi, ma soltanto tra gli integrali di tali forme. Val quanto dire che le corrispondenti combinazioni lineari delle forme integrande non sono identicamente nulle, ma sono soltanto forme *esatte* in $S_{2n} - T_{2n-2l-2}$ (II, n. 6). Nel caso $l = n-1$ le relazioni lineari di cui si discorre sussistono invece anche tra le forme integrande (cfr. il successivo n. 17).

Casi particolari.

17. Se si fa nella (16.5) $l = n - 1$ si deve ricadere nella formula $(2n-1)$-dimensionale scritta nella (9) dell'INTROD. Come ora indicheremo si ottengono in realtà $\binom{n}{n-1} = n$ formule fra loro equivalenti, cosicchè ci si riduce sostanzialmente ad una sola formula integrale (cfr. n. 16, Oss.).

Scelta una combinazione $k_1, \ldots, k_{n-1}$ di classe $n-1$ degli interi $1, \ldots, n$, indichiamo con k_n l'intero residuo. I fattori $\rho_{k_1 \ldots k_{n-1} j}$, con $j \neq k_1, \ldots, k_{n-1}$, che appaiono nella (16.5) per $l = n-1$, si riducono allora, per la (16.3), a $\rho_{k_1 \ldots k_{n-1} k_n} = \rho_{1 \ldots n} = \rho$, e la (16.5) diviene:

$$(-1)^{n-1}\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}N_{k_1\ldots k_{n-1}}f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) = \int_{\Gamma_{2n-1}} f(z_1,\ldots,z_n)\Big\{(\bar z_{k_n}-\bar\zeta_{k_n})\rho^{-2n}d(z_1,\ldots,z_n,\bar z_{k_1},\ldots,\bar z_{k_{n-1}}) +$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n-1}{}_p(-1)^{n-p}(\bar z_{k_p}-\bar\zeta_{k_p})(n-1)\rho^{-2n}d(z_1,\ldots,z_n,\bar z_{k_1},\ldots[p]\ldots,\bar z_{k_n})\Big\},$$

cioè:

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}N_{k_1\ldots k_{n-1}}f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) = \int_{\Gamma_{2n-1}} f(z_1,\ldots,z_n)\sum_{1}^{n}{}_p(-1)^{p-1}\frac{\bar z_{k_p}-\bar\zeta_{k_p}}{\rho^{2n}}d(z_1,\ldots,z_n,\bar z_{k_1},\ldots[p]\ldots,\bar z_{k_n}).$$

Il secondo membro non dipende, fuorchè nel segno, dalla permutazione $k_1, \ldots, k_n$ degli interi $1, \ldots, n$. Moltiplicando i due membri per $(-1)^{\mathrm{cls}(k_1,\ldots,k_n)}$ e ricordando che, in base alla (III, 13.3), può scriversi

$$(-1)^{\mathrm{cls}(k_1,\ldots,k_n)}N_{k_1\ldots k_{n-1}} = N^{k_n},$$

la precedente diviene:

$$(17.1)\quad \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}N^{k_n}f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) = \int_{\Gamma_{2n-1}} f(z_1,\ldots,z_n)\sum_{1}^{n}{}_\alpha(-1)^{\alpha-1}\frac{\bar z_\alpha-\bar\zeta_\alpha}{\rho^{2n}}d(z_1,\ldots,z_n,\bar z_1,\ldots[\alpha]\ldots,\bar z_n).$$

La (17.1) coincide con la citata formula $(2n-1)$-dimensionale. Infatti, applicando al caso attuale la relazione (III, 13.4) tra gli indici d'allacciamento, si ha intanto:

$$(17.2)\qquad N^1 = N^2 = \ldots = N^n;$$

d'altronde, per la (III, 13.3), risulta:

$$N^\beta = \mathrm{All}\,(\Delta_0^\beta,\ \Gamma_{2n-1}).$$

E siccome gli n cicli Δ_0^β si riducono al punto O considerato negativamente (III, n. 10), il comune valore degli indici (17.2) può anche esprimersi con

$$\mathrm{All}\,(-O,\ \Gamma_{2n-1}) = \mathrm{All}\,(\Gamma_{2n-1},\ O) = [K_1,\ \Gamma_{2n-1}],$$

essendo K_1 una qualunque semiretta per O. Si ritrova così la stessa relazione $(\mathrm{III}_{n,n-1})$ scritta nell'INTROD.

18. Passiamo ad esaminare il caso $l=0$. Se si fa $l=0$ nella (16.5) una parte delle espressioni che ivi compaiono perde significato. Mostreremo che, tuttavia, conservando soltanto la parte che ha significato, si ricade effettivamente nella formula integrale n-dimensionale indicata nella (8) dell'INTROD.

Così facendo si ha invero

$$(2\pi i)^n N f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=\int_{\Gamma_n} f(z_1,\dots,z_n)(\bar z_1-\bar\zeta_1)\dots(\bar z_n-\bar\zeta_n)\rho_1^{-2}\dots\rho_n^{-2}d(z_1,\dots,z_n),$$

cioè, ricordando le (16.2),

$$(18.1)\qquad (2\pi i)^n N f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=\int_{\Gamma_n}\frac{f(z_1,\dots,z_n)}{(z_1-\zeta_1)\dots(z_n-\zeta_n)}d(z_1,\dots,z_n),$$

che è ben la citata formula, dove all'intero N, privo di indici bassi, deve darsi il significato che risulta dall'applicazione della (III, 13.3), cioè

$$(\mathrm{III}_{n,\,0})\qquad N=N^{1\dots n}=\mathrm{All}\,(\Delta_{n-1}^{1\dots n},\ \Gamma_n)=[K_n^{1\dots n},\ \Gamma_n].$$

È questa la terza condizione, $(\mathrm{III}_{n,\,0})$, di validità della (18.1), che avevamo omesso di scrivere nella INTROD.

19. Nel caso $l=1$ la (16.5) dà, scrivendo $\rho_\alpha^2+\rho_\beta^2$ in luogo di $\rho_{\alpha\beta}^2$ come indica la (16.2),

$$(19.1)\qquad -(2\pi i)^n N_k f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=$$
$$\int_{\Gamma_{n+1}} f(z_1,\dots,z_n)\frac{(\bar z_1-\bar\zeta_1)\dots(\bar z_n-\bar\zeta_n)}{\prod_{[k]j}(\rho_k^2+\rho_j^2)}\sum_{[k]}{}_\alpha\frac{1}{\rho_k^2+\rho_\alpha^2}\left\{\frac{d(z_1,\dots,z_n,\bar z_k)}{\bar z_k-\bar\zeta_k}-\frac{d(z_1,\dots,z_n,\bar z_\alpha)}{\bar z_\alpha-\bar\zeta_\alpha}\right\},$$

e le condizioni di validità divengono:

$$(\mathrm{I}_{n,\,1})\qquad \Gamma_{n+1}\subset R_{2n}-T_{2n-4},$$

$$(\mathrm{II}_{n,\,1})\qquad \Gamma_{n+1}\approx 0\quad\text{in}\quad(R_{2n}-T_{2n-4})+O,$$

$$(\mathrm{III}_{n,\,1})\qquad N_\alpha=\mathrm{All}\,(\Delta_\alpha,\ \Gamma_{n+1})=(-1)^{\alpha-1}[K_{n-1}^{1\dots[\alpha]\dots n},\ \Gamma_{n-1}].$$

Le formule (19.1) sono già state date da me in [13] ([40]), scritte però nella forma simmetrica che le compendia tutte per i diversi valori di $k=1,\dots,n$ (cfr. n. 7).

Altre espressioni per le formule integrali generali.

20. Si possono porre le formule (16.5) sotto altri aspetti, mediante ovvie trasformazioni formali. P. es., se si osserva che

$$\sum_{[k_1,\dots,k_l]}{}_\alpha\ \sum_{\Sigma\varepsilon_j=l}\varepsilon_\alpha\Omega_{k_1\dots k_l}^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n}=l\sum_{\Sigma\varepsilon_j=l}\Omega_{k_1\dots k_l}^{\varepsilon_1\dots[k_1\dots k_l]\dots\varepsilon_n},$$

([40]) Per i confronti col lavoro cit., si tenga conto che ivi si assume una definizione dei coefficienti d'allacciamento diversa nel segno rispetto all'attuale.

la (16.5) può anche scriversi (moltiplicando per l, *supposto* $\neq 0$):

$$
(-1)^l \frac{(2\pi i)^n}{(l-1)!} N_{k_1 \ldots k_l} f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \tag{20.1}
$$

$$
\int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \ldots, z_n)(\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1)\ldots(\bar{z}_n - \bar{\zeta}_n) \sum\nolimits^{\alpha}_{[k_1 \ldots k_l]} \sum_{\Sigma \varepsilon_j = l} \varepsilon_\alpha \prod\nolimits^{j}_{[k_1 \ldots k_l]} \rho_{k_1 \ldots k_l j}^{-2(1+\varepsilon_j)} \left\{ \frac{d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{k_1}, \ldots, \bar{z}_{k_l})}{(\bar{z}_{k_1} - \bar{\zeta}_{k_1}) \ldots (\bar{z}_{k_l} - \bar{\zeta}_{k_l})} - \right.
$$

$$
\left. \sum_1^l {}^p \frac{d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{k_1}, \ldots, \bar{z}_{k_{p-1}}, \bar{z}_\alpha, \bar{z}_{k_{p+1}}, \ldots, \bar{z}_{k_l})}{(\bar{z}_{k_1} - \bar{\zeta}_{k_1}) \ldots (\bar{z}_{k_{p-1}} - \bar{\zeta}_{k_{p-1}})(\bar{z}_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha)(\bar{z}_{k_{p+1}} - \bar{\zeta}_{k_{p+1}}) \ldots (\bar{z}_{k_l} - \bar{\zeta}_{k_l})} \right\}.
$$

La (16.5), o la (20.1), non sono simmetriche rispetto alle variabili. Può esser perciò desiderabile compendiare le $\binom{n}{l}$ formule che esse esprimono in una solo formula simmetrica, analogamente a quel che si è fatto per il teorema integrale $(n+l)$-dimensionale mediante la (5) dell'INTROD.

Il caso $l = 1$ si è già trattato al n. 7. Per raggiungere lo scopo in generale basta eseguire una combinazione lineare delle $\binom{n}{l}$ formule (16.5) assumendo come coefficienti *parametri complessi arbitrari* $\lambda_{k_1 \ldots k_l}$. È comodo supporre i parametri $\lambda_{k_1 \ldots k_l}$ *emisimmetrici* rispetto agli indici. Si trova allora senza difficoltà:

$$
(-1)^l \frac{(2\pi i)^n}{l!} \left(\sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} N_{\alpha_1 \ldots \alpha} \right) = \int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \ldots, z_n) \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) \cdots [\alpha_1 \cdots \alpha_l] \cdots (\bar{z}_n - \bar{\zeta}_n) \cdot \tag{20.2}
$$

$$
\left\{ \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \sum_{\Sigma \varepsilon_j = l} \prod\nolimits^{j}_{[k_1 \ldots k_l]} \rho_{\alpha \ldots \alpha_l j}^{-2(1+\varepsilon_j)} - \frac{1}{l} \sum_1^l {}^p \sum\nolimits^{h}_{[\alpha_1 \ldots \alpha_l]} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} h \alpha_{p+1} \ldots \alpha_l} \cdot \right.
$$

$$
\left. \sum_{\Sigma \varepsilon_j = l} \varepsilon_{\alpha_p} \prod\nolimits^{j}_{[\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} h \alpha_{p+1} \ldots \alpha_l]} \rho_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} h \alpha_{p+1} \ldots \alpha_l j}^{-2(1+\varepsilon_j)} \right\} d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \ldots, \bar{z}_{\alpha_l}).
$$

Le condizioni di validità della (20.2) sono naturalmente le stesse $(\mathrm{I}_{n,\,l})$, $(\mathrm{II}_{n,\,l})$, $(\mathrm{III}_{n,\,l})$ indicate al n. 16.

Si osservi infine che, affinchè la (20.2) sia adatta ad esprimere il valore della f nel punto $O(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ occorre assumere i parametri $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ soddisfacenti alla

$$
\sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \neq 0,
$$

ciò che è sempre possibile, a meno che siano tutti nulli gli indici d'allacciamento $N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ di Γ_{n+l} con $T_{2n-2l-2}$. Ricordando la (III, 14.3) appare che questa circostanza si presenta allora e soltanto allora che sia

$$
\Gamma_{n+l} \approx 0 \quad \text{in} \quad R_{2n} - T_{2n-2l-2}\,; \tag{20.3}
$$

e, quando valga la (20.3), sappiamo a priori che il 2° membro della (20.2) è sempre nullo perchè la forma ivi integranda è chiusa e regolare in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. ALEXANDROFF-H. HOPF, *Topologie*, I (Berlin, 1935).
[2] S. BOCHNER, « Annals of Mathematics », 44, p. 652 (1943).
[3] E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, (Paris, 1922).
[4] E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, II (Paris, 1929).
[5] —— *Leçons sur le problème de Pfaff*, (Paris, 1922).
[6] W. V. D. HODGE, *The Theory and Applications of harmonic Integrals*, (Cambridge, 1941).
[7] S. LEFSCHETZ, *Topology*, (New York, 1930).
[8] —— *Introduction to Topology*, (Princeton, 1949).
[9] E. MARTINELLI, « Rend. R. Acc. Lincei », 25, p. 33 (1937).
[10] —— « Memorie R. Acc. d'Italia », 9, p. 269 (1938).
[11] —— « Atti II Congr. Unione Mat. Ital. », p. 162 (1940).
[12] —— « Memorie R. Acc. d'Italia », 12, p 143 (1941).
[13] —— « Comm. Math. Helvetici », 18, p. 30 (1945-46).
[14] —— « Acta Pontificia Acad. Scientiarum », 9, p. 235 (1946).
[15] D. C. MAY, *Thesis*, (Princeton, 1941).
[16] B. SEGRE, « Atti I Congr. Unione Mat. Ital. », p. 174 (1937).
[17] —— *Forme differenziali e loro integrali*, I (Roma, 1951).
[18] H. SEIFERT-W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, (Leipzig, Berlin, 1934).
[19] F. SEVERI, « Comptes Rendus », 192, p. 596 (1931).
[20] —— « Rend. Sem. Mat. Univ. Roma », 7, p. 1 (1930-31).
[21] F. SEVERI-G. SCORZA DRAGONI, *Lezioni di analisi*, III (Bologna, 1951).
[22] W. WIRTINGER, « Monatshefte für Math. und Phys. », 45, p. 418 (1937).