Sul comportamento effettivo delle curve polari nei punti multipli.

Memoria di EDOARDO VESENTINI (a Milano).

Sunto. - *Recentemente* B. SEGRE *ha mostrato che la questione del comportamento effettivo delle polari è di fatto assai meno semplice di come si era ritenuto prima d'ora. Nel presente lavoro affronto la questione da Lui posta precisando tale comportamento nel caso delle curve piane, sotto ipotesi abbastanza late e collegandolo all'ideale associato ad una data singolarità, in base a considerazioni aritmetiche poggianti sulla teoria delle frazioni continue.*

In due recenti lavori B. SEGRE ([11] - [12]) (¹) ha mostrato con esempi che la proprietà secondo la quale le prime polari di una curva algebrica piana passano per i punti m-pli di questa con molteplicità $m-1$ almeno, vale in generale soltanto per i punti multipli propri e per quelli situati nel loro intorno infinitesimale del primo ordine, ed ha segnalato l'interesse del problema di determinare la composizione delle singolarità *effettive* delle prime polari di una curva algebrica piana, nota che sia la singolarità di quest'ultima.

Tale problema fu posto già da F. ENRIQUES ([5], pag. 613) e da lui stesso risolto ([6], pag. 41) con l'enunciazione della *legge di alternanza* (²), ma gli esempi segnalati da B. SEGRE danno luogo a molteplicità diverse da quelle previste da tale legge, cosicchè, a priori, questa non sembra costituire una soluzione soddisfacente del problema proposto.

Alla ricerca di tale soluzione è dedicato il presente lavoro. In esso, data

---

(¹) I numeri entro parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

(²) I risultati dell'ENRIQUES sono compendiati dal seguente

TEOREMA. - *Si abbia una curva C dotata di un punto ν-plo O, costituita da un solo ramo; il comportamento effettivo di una polare generica φ rispetto alla singolarità O, viene determinato dalle condizioni:*

1) di possedere in ciascun punto ν_i-plo, infinitamente vicino a O, la molteplicità virtuale $\nu_i - 1$;

2) di avere col ramo di C un contatto $\nu - 1$ punto;

3) di avere in O la molteplicità effettiva $\nu - 1$, e non una molteplicità superiore.

Le molteplicità effettive di φ che si ottengono in forza di codeste condizioni nei punti successivi di C d'ordine ν_i, sono espresse dalla legge di alternanza: la φ possiede la molteplicità ν_{2i+1} in ciascuno dei punti ν_{2i+1}-pli e la molteplicità $\nu_{2i}-1$ nei punti ν_{2i}-pli, costituendo i numeri ν_i una successione di numeri essenzialmente positivi e generalmente decrescenti, con l'avvertenza che dove si trovi un ν_{i-1}, con i dispari, multiplo del successivo ν_i ($< \nu_{i-1}$) si ponga $\nu_{i-1} = h_i\nu_i + \nu_{i+1}$ con $\nu_{i+1} = \nu_i$ ([6], pag. 441).

una curva algebrica piana C che presenti in un suo punto O una singolarità prefissata, si determinano anzitutto (nn. 1, 6) le relazioni generali che permettono di dedurre la composizione della singolarità in O della prima polare, $C'(P)$, di un punto P (non appartenente a C) rispetto a C, quando P sia *qualsiasi* nel piano e C sia *qualsiasi* nel sistema Σ delle curve algebriche piane di ordine N (sufficientemente elevato) che presentano in O la singolarità prefissata. Da tali relazioni risulta che la composizione della singolarità di $C'(P)$ in O dipende in maniera essenziale dalla particolarità di C in Σ. Tuttavia, facendo appello ad alcune proprietà delle frazioni continue regolari finite (n. 2), possono stabilirsi alcune limitazioni per gli ordini di grandezza delle molteplicità di $C'(P)$ nei punti multipli di C infinitamente vicini a O. Dalle considerazioni del n. 1 si deduce (n. 3) inoltre la composizione della singolarità di $C'(P)$ in O allorchè P sia *generico* nel piano e C sia *generica* in Σ, dimostrando che *in tali ipotesi vale la legge di alternanza.* Tali condizioni di genericità di C e di P vengono precisate, caratterizzando le curve C di Σ ed i punti P del piano per i quali vale la legge di alternanza e (n. 6) esaminando il caso in cui, ferme restando le ipotesi di genericità di C in Σ, P sia qualsiasi nel piano. Determiniamo inoltre (n. 3) la composizione della singolarità di $C'(P)$ in O allorchè P sia generico nel piano e C sia generica nel sistema delle curve di Σ che *non* soddisfano alle condizioni caratteristiche sopra dette.

Tutti i risultati precedenti vengono stabiliti sulla base di considerazioni di carattere diofanteo, esaminando il diagramma di Newton di C. Abbiamo evitato di ricorrere ai procedimenti sintetici che fanno capo ai noti principi di scaricamento e di scorrimento, in quanto dal confronto della dimostrazione dell'ENRIQUES con i risultati da noi ottenuti a proposito della legge di alternanza emerge (n. 7) la seguente questione, il cui esame è indispensabile premettere ad una corretta applicazione dei principi sopra detti, e che è alla radice delle eccezioni rilevate da B. SEGRE relativamente al comportamento effettivo delle prime polari: dato un sistema Λ di curve algebriche piane, la generica delle quali passi per O con una prefissata singolarità, quali sono le condizioni affinchè fra le curve di Λ che presentano in O e nei punti multipli infinitamente vicini molteplicità virtuali assegnate, ne esista qualcuna le cui molteplicità effettive siano quelle previste dai principi di scaricamento e di scorrimento?

A tale questione contiamo di dedicare un altro lavoro. Qui (n. 7) ci limitiamo a rilevare come le condizioni caratteristiche per la validità della legge di alternanza giuochino nel problema proposto un ruolo essenziale, il quale può essere illustrato dal punto di vista algebrico, in quanto tali condizioni caratteristiche individuano nell'anello dei polinomi in due variabili a coefficienti complessi gli ideali irriducibili contenuti nell'ideale associato alla singolarità di C in O.

Da queste considerazioni risultano nuovi significati geometrici delle condizioni caratteristiche per la validità della legge di alternanza, condizioni che nel n. 3 avevamo ottenuto sotto forma aritmetica. Per illustrare tali condizioni da un punto di vista più prossimo all'argomento del presente lavoro, valutando il numero, M, delle intersezioni riunite in O della prima e della seconda polare di P rispetto a C, mostriamo (n. 9) che la validità della legge di alternanza ed il massimo spezzamento possibile dei rami di $C'(P)$ uscenti da O, sono caratterizzati dal fatto che M sia minimo, che sia cioè minimo il numero delle diramazioni di $C'(P)$ riunite in O. Per raggiungere tale conclusione premettiamo (n. 8) lo studio del caso in cui C passi per O con più rami, sebbene esso, come osserva l'ENRIQUES, quando P sia generico nel piano, non presenti nuove difficoltà essenziali rispetto a quello in cui il ramo di C uscente da O sia unico.

1. Sia data nel piano una curva algebrica C, di ordine N, avente equazione

$$f(x,\ y) = \sum_{ik} a_{ik} x^i y^k = 0, \tag{1.1}$$

passante per l'origine O delle coordinate x, y, con un unico ramo superlineare di ordine ν (≥ 2), classe μ e genere g (3), rappresentato dallo sviluppo di PUISEUX

$$y = a_1 x^{\frac{\nu+\mu}{\nu}} + a_2 x^{\frac{\nu+\mu+\mu'}{\nu}} + \ldots \qquad (a_1 \neq 0). \tag{1.2}$$

Sostituendo questa espressione di y nelle (1.1) si possono ordinare i termini $a_{ik}x^iy^k$, con $a_{ik} \neq 0$, in ordine di infinitesimo crescente rispetto all'infinitesimo x. Essi devono essere tali che

$$\nu i + (\nu + \mu)k \geq \nu(\nu + \mu),$$

ossia gli indici i e k devono essere coordinate di punti del diagramma di Newton relativo a C (4) appartenenti al semipiano α delimitato dalla retta di equazione

$$\nu i + (\nu + \mu)k = \nu(\nu + \mu), \tag{1.3}$$

al quale non appartiene l'origine (0, 0).

I gruppi di termini di (1.1), in ordine di infinitesimo crescente rispetto a x, si ottengono in corrispondenza agli $a_{ik} \neq 0$ i cui indici sono soluzioni non negative della equazione

$$\nu i + (\nu + \mu)k = \nu(\nu + \mu) + j\nu_\sigma \quad (\nu_\sigma = \text{m. c. d. } (\mu,\ \nu)\,;\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{1.4}$$

ossia in corrispondenza ai punti del diagramma di Newton di (1.1) appartenenti alla (1.3) ed alle parallele condotte a distanza via via crescente da essa.

(3) Salvo avviso in contrario, adottiamo la nomenclatura che trovasi in [6].

(4) Cfr. [6], pag. 523, e, per maggiori dettagli, ad es. [2], pag. 42-49.

Posto

$$\begin{aligned} \mu &= h\nu + \nu_1, & 0 &\leq \nu_1 < \nu, \\ \nu &= h_1\nu_1 + \nu_2, & 0 &\leq \nu_2 < \nu_1, \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ \nu_{\sigma-1} &= h_\sigma\nu_\sigma, & \nu_\sigma &\geq 1, \end{aligned}$$

le soluzioni della (1.4) sono espresse dalle relazioni

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} i &= \nu + \mu + (-1)^\sigma j[h+1, h_1, \dots, h_{\sigma-1}] + t[h+1, h_1, \dots, h_\sigma], \\ k &= (-1)^{\sigma-1} j[h_1, h_2, \dots, h_{\sigma-1}] - t[h_1, h_2, \dots, h_\sigma], \end{aligned}$$

ove t è un parametro intero arbitrario, ed i simboli entro parentesi quadre sono le *parentesi di Eulero* ([5]). Corrispondentemente ad un valore non negativo di j, le soluzioni non negative della (1.4) si ottengono dagli interi t che soddisfano alle disuguaglianze

$$\tau^*(j) \leq t \leq \tau(j)$$

ove $\tau(j)$ è la parte intera, $E\left(\frac{(-1)^{\sigma-1}j[h_1, \dots, h_{\sigma-1}]}{[h_1, \dots, h_\sigma]}\right)$, di $\frac{(-1)^{\sigma-1}j[h_1, \dots, h_{\sigma-1}]}{[h_1, \dots, h_\sigma]}$ e $\tau^*(j) = \frac{(-1)^{\sigma-1}j[h+1, h_1, \dots, h_{\sigma-1}]}{[h+1, h_1, \dots, h_\sigma]} - \nu_\sigma$, se $[h+1, h_1, \dots, h_\sigma]$ divide $j[h+1, h_1, \dots, h_{\sigma-1}]$, oppure $\tau^*(j) = E\left(\frac{(-1)^{\sigma-1}j[h+1, h_1, \dots, h_{\sigma-1}]}{[h+1, h_1, \dots, h_\sigma]}\right) \quad \nu_\sigma + 1$, nel caso opposto. In particolare risulta $\tau^*(0) = -\nu_\sigma$, $\tau(0) = 0$ e, per $t = -\nu_\sigma, -\nu_\sigma + 1, \dots, 0$, dalle (1.5) si hanno i punti (i, k) (a coordinate intere non negative) i quali, appartenendo alla (1.3), sono di ordine di infinitesimo minimo rispetto ad x. Corrispondentemente a quelli fra essi che danno luogo in (1.1) a coefficienti $a_{ik} \neq 0$, ossia, come diremo sempre nel seguito, che sono punti del diagramma di Newton di (1.1), si ha l'equazione

$$\sum_{ik} a_{ik}a^k = 0,$$

le cui radici distinte sono, per la supposta unicità e inscindibilità del ramo (1.2) di (1.1), tutti e soli i numeri che si ottengono moltiplicando a_1 per le ν_σ radici ν_σ-esime dell'unità. Pertanto risulta

$$(1.6) \qquad \sum_{ik} a_{ik}a^k = a_{0\nu}(a^{\nu_\sigma} - a_1^{\nu_\sigma})^{\frac{\nu}{\nu_\sigma}}.$$

La prima polare, $C'(P)$, rispetto a C, di un punto P, *che in tutto il seguito supporremo tacitamente non appartenente a* C, di coordinate omogenee x_0,

---

([5]) Definite in maniera ricorrente dalle relazioni

$[b_1] = b_1$, $[b_1, b_2] = b_1b_2 + 1$, $[b_1, \dots, b_{p-2}, b_{p-1}, b_p] = [b_1, \dots, b_{p-1}]b_p + [b_1, \dots, b_{p-2}]$ $(p \geq 3)$; cfr. ad es. [4], pag. 49.

y_0, z_0, ha equazione

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{1.7}$$

Nei nn. 1 - 5 studieremo la composizione della singolarità di $C'(P)$ in O nell'ipotesi che sia $y_0 \neq 0$, ossia che *P non appartenga alla tangente al ramo* (1.2) *in O.*

Posto $u = \frac{\nu}{\nu_\sigma}$, $v = \frac{\nu + \mu}{\nu_\sigma}$, a norma della (1.6), uno dei lati della poligonale delle separatrici del diagramma di Newton di (1.7) relative ai rami di $C'(P)$ uscenti da O, è il segmento di estremi $(0,\ \nu - 1)$, $(i_0 = \nu + \mu - v,\ k_0 = u - 1)$. A questo lato, per la (1.6), corrisponde nella (1.7) un sistema, Γ_1, di n_1 $(1 \leq n_1 \leq \nu_\sigma - 1)$ rami

$$y = a_1 x^{\frac{\nu+\mu}{\nu}} + \ldots \tag{1.8}$$

di ordini $\lambda_s u$ tali che $\sum_1^{n_1}{}_s \lambda_s = \nu_\sigma - 1$.

Se ν divide μ, se cioè $a_1 x^{\frac{\nu+\mu}{\nu}}$ non è un termine caratteristico di (1.2), risulta $\nu_\sigma = \nu$, e la poligonale cercata si riduce al solo lato di estremi $(0,\ \nu - 1)$, $(\nu + \mu - 1,\ 0)$; corrispondentemente i lati di (1.7) passanti per O sono tutti e soli i rami di Γ_1. Per semplicità supponiamo che ciò non accada, *supponiamo* cioè *che $a_1 x^{\frac{\nu+\mu}{\nu}}$ sia un termine caratteristico di* (1.2). Questa ipotesi non restringe la validità delle nostre considerazioni poichè, se non fosse verificata, si passerebbe ai termini successivi dello sviluppo (1.2) fino al primo termine caratteristico, nel modo che indicheremo nel n. 4.

Se in (1.7) figura non nullo il termine in $x^{\nu+\mu-1}$, se cioè, al diagramma di Newton di (1.7) appartiene il punto $(\nu + \mu - 1,\ 0)$, i coefficienti corrispondenti ai termini di ordinata positiva compaiono soltanto in $y_0 \frac{\partial f}{\partial y}$ e l'estremo della poligonale sull'asse $k = 0$ ha ascissa $i \leq \nu + \mu - 1$. Se $i < \nu + \mu - 1$, il coefficiente corrispondente in (1.7) compare anch'esso soltanto in $y_0 \frac{\partial f}{\partial y}$. Al punto $(\nu + \mu - 1,\ 0)$ corrisponde invece in (1.7) il coefficiente $x_0(\nu+\mu)a_{\nu+\mu 0} + y_0 a_{\nu+\mu-1 1}$, il quale risulta diverso da zero se, e soltanto se, P non appartiene alla retta

$$(\nu + \mu) a_{\nu+\mu 0} x + a_{\nu+\mu-1 1} y = 0. \tag{1.9}$$

Supponiamo di avere determinato i vertici $(i_0,\ k_0)$, $(i_1,\ k_1)$, ..., $(i_{r-1},\ k_{r-1})$, $(r \geq 1)$ con $k_0 > k_1 > \ldots > k_{r-1} > 0$, ai quali corrispondano in (1.7) termini figuranti solamente in $y_0 \frac{\partial f}{\partial y}$, e ricerchiamo, quando esista, il vertice successivo $(i_r,\ k_r)$.

Essendo I_r l'insieme dei punti (i, k) appartenenti al diagramma di Newton di (1.1) per i quali $k \leq k_{r-1}$, quando I_r non sia vuoto indichiamo con (i', k') il punto di ordinata minima fra gli (i, k) di I_r per i quali l'espressione $(i - i_{r-1})/(k_{r-1} - k + 1)$ prende il minimo fra i valori assunti in I_r. Si ha allora che:

1.*a*) *Se esiste in* I_r *qualche punto* (i, k) *per il quale sia*

$$\frac{i - i_{r-1}}{k_{r-1} - k + 1} < \frac{\nu + \mu - 1 - i_{r-1}}{k_{r-1}}, \tag{1.10}$$

si ha $k' > 0$, *e risulta*

$$i_r = i', \qquad k_r = k' - 1.$$

Se invece non esiste in I_r *nessun punto che soddisfi alla* (1.10) *e se* P *non appartiene alla* (1.9) *si ha:* $i_r = \nu + \mu - 1$, $k_r = 0$.

Resta da esaminare il caso in cui la (1.10) non sia soddisfatta da nessun punto di I_r e P appartenga alla (1. 9). Risulta allora necessariamente

$$a_{\nu+\mu-(h+1)1} = a_{\nu+\mu-h1} = \dots = a_{\nu+\mu-21} = 0. \tag{1.11}$$

In tali ipotesi dalla 1.*a*) segue che se si immagina di far variare P, supposto inizialmente non appartenente alla (1.9), la composizione della singolarità di $C'(P)$ in O rimane invariata fino a che P non giunge (nè sulla retta $y = 0$, nè) sulla (1.9). Ma allorchè P cade su questa retta, la singolarità si altera. Ciò prova che, se valgono le (1.11), la (1.9) è covariante proiettiva alla (1.1) (6). Quanto alla singolarità che nasce per $C'(P)$ allorchè P giace sulla (1.9), mostreremo con esempi che essa dipende in maniera essenziale non soltanto dagli indici i e k dei coefficienti $a_{ik} \neq 0$ di (1.1), ma anche dal fatto che siano o no soddisfatte certe relazioni fra tali coefficienti, le quali riflettono tanto le particolarità proiettive del ramo (1.2) quanto le posizioni particolari di P sulla (1.9).

Un esempio in proposito è quello analizzato da B. SEGRE in [12] (pag. 29) (7). Un altro esempio è offerto dalla curva C di ordine N $(> \nu + 1)$, di equazione

$$y^\nu + a_{\nu+1\,0} x^{\nu+1} + y\varphi_\nu(x, y) + \varphi_{\nu+2}(x, y) + \varphi_{\nu+3}(x, y) + \dots + \varphi_N(x, y) = 0 \qquad (a_{\nu+1\,0} \neq 0).$$

ove le $\varphi_j(x, y)$ sono forme di grado j in x, y, la quale passa per l'origine O delle coordinate con un ramo superlineare ordinario di ordine ν tangente

(6) Questo è già stato altrimenti provato da E. BOMPIANI [1] per le cuspidi ordinarie. e da C. F. MANARA [8] per i rami ordinari di ordine qualunque (cfr. anche [9]).

(7) La curva ivi considerata ha equazione $y^{12} + x^{113} = 0$. Per essa risultano verificate evidentemente le (1.11), la retta (1.9) coincidendo con l'asse delle y. Essa ha in O la caratteristica $(O^{12}O_1^{12} \dots O_8^{12}O_9^{5}[O_{10}^{5}O_{11}^{2}O_{12}^{2}O_{13}^{1}O_{14}^{1}])$ e la prima polare di un punto generico nel piano ha la caratteristica $(O^{11}O_1^{11} \dots O_8^{11}O_9^{11}Q_{10}^{2}[Q_{11}^{2}Q_{12}^{2}Q_{13}^{2}Q_{14}^{2}Q_{15}^{1}Q_{16}^{1}])$. La prima polare di un generico punto dell'asse y è spezzata: nella retta $1 + ay = 0$, nell'asse x contato 11 volte, e nella retta impropria contata 100 volte. Allorchè il punto coincide con il punto improprio dell'asse y la prima polare si spezza nell'asse y contato 11 volte e nella retta impropria contata 101 volte.

all'asse delle x. Essendo $(O^{\nu} O_1^1 [O_2^1 \ldots O_{\nu}^1])$ la caratteristica del ramo, la prima polare, $C'(P)$, di un punto P generico nel piano passa per O con un ramo superlineare ordinario di ordine $\nu - 1$ tangente all'asse delle x; ma se P appartiene alla (1.9), quando sia

$$\nu a_{\nu 1} x_0 + 2 a_{\nu-1 2} y_0 \neq 0 \tag{1.12}$$

la $C'(P)$ passa per O con un ramo superlineare ordinario di ordine $\nu - 2$ e, se

$$(\nu + 2) a_{\nu+2 0} x_0 + a_{\nu+1 1} y_0 + (N - \nu - 1) a_{\nu+1 0} z_0 \neq 0, \tag{1.13}$$

con un ramo lineare avente un contatto del primo ordine con l'asse delle x.

Esaminiamo il caso in cui la (1.12) non sia soddisfatta. Poichè per ipotesi P appartiene alla (1.9), ciò accade se, e soltanto se, risulta $2(\nu + 1) a_{\nu+1 0} a_{\nu-1 2} - \nu a_{\nu 1}^2 = 0$; se cioè coincidono le due rette

$$\frac{\nu(\nu + 1)}{2} a_{\nu+1 0} x^2 + \nu a_{\nu 1} x y + a_{\nu-1 2} y^2 = 0, \tag{1.14}$$

che costituiscono la coppia polare seconda della tangente a C in O rispetto al gruppo di rette che da O proiettano le intersezioni della retta impropria (ossia di una qualunque retta non passante per O) con la generica curva di ordine N che abbia in comune con C l'elemento cuspidale $E_{\nu(\nu+1)+2}$ di origine O, e cioè che passi per O con un ramo il quale abbia $\nu(\nu + 1) + 3$ intersezioni riunite in O con C.

In tal caso, se, essendo verificata la (1.13), risulta

$$(\nu - 1) a_{\nu-1 2} x_0 + 3 a_{\nu-2 3} y_0 \neq 0, \tag{1.15}$$

$C'(P)$ passa per O con un ramo superlineare ordinario di ordine $\nu - 3$ e con un ramo cuspidale ordinario, entrambi tangenti all'asse x.

Il fatto che non si verifichi la (1.12) costituisce una particolarità proiettiva dell'elemento cuspidale $E_{\nu(\nu+1)+2}$ ([8]), ed una ulteriore particolarità proiettiva costituisce il non verificarsi della (1.15). L'esame di questo caso si svolge in maniera analoga alla precedente, e pertanto, anzichè occuparci di esso, supponendo anzi per semplicità che sia verificata la (1.12), veniamo al caso in cui non sia soddisfatta la (1.13), al caso cioè in cui il punto P coincida con l'intersezione della (1.9) e della retta

$$(\nu + 2) a_{\nu+2 0} x + a_{\nu+1 1} y + (N - \nu - 1) a_{\nu+1 0} = 0.$$

In tali ipotesi $C'(P)$ passa per O con un ramo superlineare ordinario di ordine $\nu - 2$ e con un ramo lineare avente in O con la retta $y = 0$ un contatto almeno del secondo ordine. E questa costituisce una particolarità di P sulla (1.9).

([8]) Infatti in tal caso le due rette (1.14) coincidono con la (1.9) e per conseguenza l'elemento $E_{\nu(\nu+1)+2}$ non determina che l'asse y del riferimento proiettivo che in generale è intrinsecamente determinato dallo $E_{(\nu+1)(\nu+1)}$ di C ([9], pag. 283). Quando sia soddisfatta la (1.12), $E_{\nu(\nu+1)+2}$ determina l'asse y e, a meno di una irrazionalità quadratica, la retta unità.

Supponiamo di avere determinato i vertici $(0, \nu - 1)$, (i_r, k_r) $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, della poligonale delle separatrici di (1.7), i quali danno luogo a lati consecutivi di tale poligonale aventi i coefficienti angolari ordinati in una successione crescente.

Essendo φ_r e ψ_r rispettivamente i quozienti di $k_{r-1} - k_r$ e $i_r - i_{r-1}$ con il loro massimo comun divisore δ_r, al lato avente per estremi (i_{r-1}, k_{r-1}) e (i_r, k_r) corrisponde in (1.7) un sistema di m_r $(1 \leq m_r \leq \delta_r)$ rami uscenti da O ed aventi come prime coppie caratteristiche [9] ψ_r e φ_r, ordini $\lambda_s^{(r)}\varphi_r$, essendo i $\lambda_s^{(r)}$ $(s = 1, 2, \ldots, m_r)$ interi positivi tali che $\sum_{1}^{m_r}{}_s \lambda_s^{(r)} = \delta_r$.

2. Sia Σ il sistema lineare delle curve algebriche piane di ordine N passanti per O con la singolarità data dai primi termini di (1.2) fino al g-esimo termine caratteristico. Fissata in Σ una C che soddisfi alle ipotesi enunciate all'inizio del n. 1, che cioè passi per O con l'unico ramo (1.2), e fissato un punto P non appartenente alla tangente a (1.2) in O, le considerazioni del n. 1 permettono di determinare la composizione della singolarità in O della prima polare $C'(P)$ di P, e quindi, quando siano completate nel modo che illustreremo nel n. 4 per ciò che riguarda i gruppi successivi al primo gruppo satellite sul ramo (1.2), esse forniscono le molteplicità con cui figurano in $C'(P)$ i punti della caratteristica di (1.2) in O. Da tali considerazioni risulta come, limitatamente al primo gruppo di punti liberi ed al relativo gruppo satellite, queste molteplicità dipendano in maniera essenziale dagli indici i e k di alcuni fra i coefficienti a_{ik} non nulli che figurano in (1.1), e quindi, come la determinazione di esse debba essere fatta, volta per volta, dipendentemente dalla particolarità di C in Σ. Se P non appartiene alla (1.9), oppure se non sono soddisfatte le (1.11), gli indici i e k di tali coefficienti sono coordinate di punti appartenenti alla regione, A, costituita dal triangolo avente per lati le rette (1.3),

$$(\nu - \nu_\sigma)i + (\nu + \mu - \nu_\sigma)k = (\nu + \mu)(\nu - \nu_\sigma) + \mu, \tag{2.1}$$

e $k = 1$, inclusi i punti degli ultimi due lati. In tali ipotesi, la porzione della poligonale delle separatrici corrispondenti ai rami di $C'(P)$ uscenti da O e distinti da quelli di Γ_1, dà luogo, quando venga sottoposta ad una traslazione di una unità nel verso positivo dell'asse k, ad una poligonale appartenente a A, concava verso tale direzione ed avente per estremi i punti $(\nu + \mu - v, u)$ ed un punto della retta $k = 1$. Viceversa, considerato l'insieme, S, di siffatte poligonali e fissata ad arbitrio una di queste, esiste una C di Σ, passante per O con un unico ramo superlineare (1.2) e tale che la $C'(P)$ di un generico punto P del piano presenti una poligonale delle separatrici, corrispondenti

[9] Adottando una nomenclatura diversa da quella di ENRIQUES e CHISINI, diciamo s-esime *coppie caratteristiche* i due termini p_s e q_s (primi fra loro) dei *numeri caratteristici* p_s/q_s di HALPHEN [7].

ai rami di $C'(P)$ uscenti da O, costituita dal segmento di estremi $(0, \nu - 1)$, $(\nu + \mu - v, u - 1)$ e dalla poligonale ottenuta traslando quella prefissata di una unità parallelamente all'asse k e nella direzione negativa di questo.

Nell'insieme S esiste una poligonale, L, tale che all'interno di quella delle due regioni, nelle quali essa divide A, al cui contorno appartiene il lato (2.1) non esiste nessun punto a coordinate intere. Determiniamo i vertici di L. A tale scopo, premettiamo le seguenti proposizioni sulle frazioni continue finite regolari ([10])

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \dots + \frac{1\ |}{|b_{n-1}} + \frac{1}{b_n} = \frac{[b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n]}{[b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n]},$$

che chiameremo brevemente frazioni continue; in esse i numeri b_r $(0 \leq r \leq n)$, che diremo *termini* della frazione continua, sono interi, positivi per $r \geq 1$.

2.*a*) *Date le due frazioni continue*

$$B = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}, \qquad C = c_0 + \frac{1|}{|c_1} + \dots + \frac{1}{c_m},$$

risulta $B = C$ *se e soltanto se:* $m = n$ *e* $b_r = c_r$ *per* $r = 0, 1, 2, \dots, n$; *oppure* $m = n - 1$, $b_n = 1$, $b_r = c_r$ $(r = 0, 1, 2, \dots, n-2)$ *e* $c_{n-1} = b_{n-1} + 1$. *Supponiamo invece che sia* $b_r = c_r$ *per* $r = 0, 1, 2, \dots, s$ $(s < n;\ s < m)$ *e* $b_{s+1} \neq c_{s+1}$. *Risulta* $B < C$ *se e soltanto se: per* s *pari è* $b_{s+1} > c_{s+1}$ *e, per* s *dispari, è* $b_{s+1} < c_{s+1}$.

2.*b*) *Siano date le tre frazioni continue* B, C *e*

$$D = d_0 + \frac{1|}{|d_1} + \dots + \frac{1}{d_l}.$$

Se $B \leq C \leq D$ *e se* $b_r = c_r = d_r$ *per* $r = 0, 1, \dots, s$ *con* $s < n, m, l$, c_{s+1} *deve appartenere all'intervallo* (b_{s+1}, d_{s+1}) *estremi inclusi.*

Veniamo alla determinazione dei vertici di L. Il lato uscente da $(\nu + \mu - v, u)$, di una qualsiasi poligonale di S, ha per estremi questo punto ed un punto (i, k) di A il quale soddisfa alle relazioni

$$\frac{\nu + \mu}{\nu} < \frac{i - (\nu_\sigma - 1)v}{u - k} \leq \frac{v - 1}{u - 1}. \tag{2.2}$$

Nell'insieme di tali punti, quello, (i', k'), che, insieme a $(\nu + \mu - v, u)$, racchiude un lato di L, risulta univocamente determinato in quanto è il punto di ordinata minima fra quegli (i, k) di A per i quali $(i - (\nu_\sigma - 1)v)/(u - k)$ assume il minimo dei valori soddisfacenti alle (2.2).

([10]) Cfr. ad. es. [10], Cap. II.

Sia:

$$\frac{\nu+\mu}{\nu} = h + 1 + \frac{1|}{|h_1} + \dots + \frac{1|}{|h_{\sigma-1}} + \frac{1}{h_\sigma} \qquad (h_\sigma \geq 2), \tag{2.3}$$

$$\frac{i-(\nu_\sigma-1)v}{u-k} = a_0 + 1 + \frac{1|}{|a_1} + \dots + \frac{1}{|a_{r-1}} + \frac{1}{a_r}.$$

Dalla proposizione 2.*a*), tenendo conto che (i', k') deve appartenere a A, si deduce che risulta

$$\frac{i-(\nu_\sigma-1)v}{u-k} = \frac{i'-(\nu_\sigma-1)v}{u-k'},$$

se e soltanto se, quando σ è dispari, si ha:

$$r=\sigma, \qquad a_s = h_s \ (s<\sigma), \qquad a_\sigma = h_\sigma - 1,$$

oppure, quando σ è pari, si ha:

$$r = \sigma - 1, \qquad a_s = h_s \qquad (s<\sigma).$$

Se σ è dispari, la retta uscente da $(\nu+\mu-v, u)$ ed avente coefficiente angolare eguale all'inverso cambiato di segno del numero ora determinato, possiede uno ed un solo punto a coordinate intere appartenente a A e distinto da $(\nu+\mu-v, u)$; esso è il punto (i', k') cercato, ed ha coordinate

$$i' = \nu + \mu - [h+1, h_1, \dots, h_{\sigma-1}], \qquad k' = [h_1, \dots, h_{\sigma-1}]. \tag{2.4}$$

Quando σ è pari, i punti (a coordinate intere) di A appartenenti a tale retta e distinti da $(\nu+\mu-v, u)$ hanno coordinate

$$i = \nu + \mu - [h+1, h_1, \dots, h_\sigma - j], \qquad k = [h_1, \dots, h_\sigma - j],$$

ove $j = 1, 2, \dots, h_\sigma$. Ponendo $j = h_\sigma$ si ottiene il vertice di L

$$i' = \nu + \mu - [h+1, h_1, \dots, h_{\sigma-2}], \qquad k' = [h_1, \dots, h_{\sigma-2}]. \tag{2.5}$$

Indicando con ρ il massimo numero pari minore di σ, le coordinate (2.4) e (2.5) possono denotarsi con

$$i' = \nu + \mu - [h+1, h_1, \dots, h_\rho], \qquad k' = [h_1, \dots, h_\rho]. \tag{2.6}$$

Se $[h_1, \dots, h_\rho] > 1$, il lato di L successivo a quello ora determinato ha per estremi (i', k') ed un punto, (i'', k''), appartenente a A, per il quale $(i''-i')/(k'-k'')$ ha valore maggiore di $\dfrac{i'-(\nu+\mu)+v}{u-k'}$ e più prossimo a questo. Essendo

$$\frac{i''-i'}{k'-k''} = b_0 + 1 + \frac{1|}{|b_1} + \dots + \frac{1|}{|b_{r-1}} + \frac{1}{b_r},$$

dalla 2.*a*), tenendo conto che (i'', k'') deve appartenere a A, si deduce che: $r = \rho - 1$, $b_s = h_s$ per $s \leq \rho$ 1. I punti di A (a coordinate intere) appartenenti alla retta passante per (i', k') e di coefficiente angolare $(k''-k')/(i''-i')$ hanno coordinate

$$i=\nu+\mu-[h+1,\ h_1,\dots,\ h_\rho-j],\qquad k=[h_1,\dots,\ h_\rho-j],$$

con $j=1,\ 2,\dots,\ h_\rho$. Per $j=h_\rho$ si ottiene il vertice (i'', k'') di L:

$$i''=\nu+\mu-[h+1,\ h_1,\dots,\ h_{\rho-2}],\qquad k''=[h_1,\dots,\ h_{\rho-2}].$$

Iterando le considerazioni svolte, si conclude che:

2.c) *Le coordinate dei vertici di L successivi a* $(\nu+\mu-v,\ u)$ *ed ordinati per ascisse crescenti si ottengono dalle relazioni*

$$i=\nu+\mu-[h+1,\ h_1,\dots,\ h_\vartheta],\qquad k=[h_1,\dots,\ h_\vartheta], \tag{2.7}$$

ponendo $\vartheta=\rho,\ \rho-2,\dots,\ 2,\ 0$ (*per* $\vartheta=0$: $h_0=h+1$; $k=1$).

Al segmento avente per estremi i punti forniti dalle (2.7) per $\vartheta=\vartheta_0$, $\vartheta=\vartheta_0+2$, appartengono i punti di coordinate intere

$$i=\nu+\mu-[h+1,\ h_1,\dots,\ h_{\vartheta_0},\ h_{\vartheta_0+1},\ \eta],\qquad k=[h_1,\dots,\ h_{\vartheta_0},\ h_{\vartheta_0+1},\ \eta], \tag{2.8}$$

con $\eta=0,\ 1,\dots,\ h_{\vartheta_0+2}$.

Alla regione determinata in A da L e da (2.1) appartiene forse qualche poligonale di S distinta da L?

Poichè anche il lato (2.1) è una poligonale di S, la risposta a tale questione è affermativa allora, e allora soltanto, che L non giaccia su (2.1). Vale in proposito la seguente proposizione:

2.d) *L giace su* (2.1) *se, e soltanto se, risulta* $h=0$ *e* $\sigma\le 2$.

Si verifica immediatamente, infatti, che se $h=0$ e $\sigma\le 2$ vale l'asserto; inversamente, se L coincide con il lato (2.1), è anzitutto $h=0$ in quanto l'estremo di L sul lato $k=1$ di A coincide con il punto $(\nu+\mu-1,\ 1)$. Poichè, inoltre, L si riduce ad un solo lato, si ha $\rho=0$ e quindi $\sigma=1$ oppure $\sigma=2$. In tal caso, essendo

$$\frac{v-1}{u-1}=\bar h+1+\frac{1|}{|\bar h_1}+\dots+\frac{1}{\bar h_{\bar\sigma}}, \tag{2.9}$$

risulta: $\bar h=0$, $\bar\sigma=1$, ed inoltre: $\bar h_1=h_1-1$, se $\sigma=1$, oppure $\bar h_1=h_1$, se $\sigma=2$.

Supponiamo che la 2.d) non sia soddisfatta, cosicchè a S appartenga qualche poligonale distinta da L. Fra queste ne esiste una, L_ρ, non avente nessun vertice in $(\nu+\mu-[h+1,\ h_1,\dots,\ h_\rho],\ [h_1,\dots,\ h_\rho])$, che insieme a L ed al lato $k=1$ determina in A una regione all'interno della quale non esiste nessun punto a coordinate intere. A norma della 2.a), si riconosce che:

2.e) *La poligonale L_ρ si ottiene da L, quando σ sia pari, considerando i punti di coordinate* $i=\nu+\mu-[h+1,\ h_1,\dots,\ h_{\rho+1}+1]$, $k=[h_1,\dots,\ h_{\rho+1}+1]$,

$$i=\nu+\mu-[h+1,\ h_1,\dots,\ h_\rho-1],\qquad k=[h_1,\dots,\ h_\rho-1], \tag{2.10}$$

e sostituendo alla porzione di L *che li connette il segmento che li ha per estremi se* $h_{\rho+1} \leq 2$, *oppure, se* $h_{\rho+1} \geq 3$, *i due segmenti che hanno tali punti come estremi ed hanno come vertice in comune il punto di coordinate*

$$i = \nu + \mu - 2[h+1, h_1, \dots h_\rho], \qquad k = 2\,[h_1, \dots, h_\rho]. \tag{2.11}$$

Se σ *è dispari,* L_ρ *si ottiene da* L *considerando i punti* $(\nu + \mu - v, u)$ *e* (2.10), *e sostituendo alla porzione di* L *che li connette il segmento che li ha per estremi, se* $2 \leq h_{\rho+1} \leq 3$, *oppure, se* $h_{\rho+1} > 3$, *i due segmenti che hanno tali punti come estremi e come vertice comune il punto di coordinate* (2.11).

Le considerazioni precedenti si lasciano facilmente generalizzare, e permettono di determinare in S quella poligonale, L_{ϑ_0}, che non ha nessun vertice nel punto $(\nu + \mu - [h+1, h_1, \dots, h_{\vartheta_0}], [h_1, \dots, h_{\vartheta_0}])$ (ϑ_0 pari, $0 \leq \vartheta_0 < \rho$) e che determina, insieme a L, una regione di A internamente alla quale non esiste nessun punto a coordinate intere. Vale al riguardo la seguente proposizione:

2.*f*) *Quando* $\vartheta_0 > 0$, *tale poligonale si ottiene da* L *considerando i punti* $(\nu + \mu - [h+1, h_1, \dots, h_{\vartheta_0+1}], [h_1, \dots, h_{\vartheta_0+1}])$, $(\nu + \mu - [h+1, h_1, \dots, h_{\vartheta_0-1}], [h_1, \dots, h_{\vartheta_0-1}])$ *e sostituendo alla porzione di* L *che li connette: il segmento che li ha per estremi se* $h_{\vartheta_0+1} \leq 2$ *oppure, se* $h_{\vartheta_0+1} \geq 3$, *i due segmenti che hanno per estremi tali punti ed hanno come vertice comune il punto* $(\nu + \mu - 2[h+1, h_1, \dots, h_{\vartheta_0}], 2[h_1, \dots, h_{\vartheta_0}])$. *Se* $\vartheta_0 = 0$ *la poligonale* L_0 *esiste in* S *se, e soltanto se,* $h > 0$ *e, in tal caso, essa si ottiene da* L *sostituendo al segmento di estremi* $(\nu + \mu - [h+1, h_1+1], h_1+1)$, $(\nu + \mu - (h+1), 1)$ *quello di estremi* $(\nu + \mu - [h+1, h_1+1], h_1+1)$, $\nu + \mu - h, 1)$, *se* $h_1 \leq 2$, *oppure, se* $h_1 \geq 3$, *i due segmenti che hanno per estremi tali punti e come vertice comune il punto* $(\nu + \mu - 2(h+1), 2)$.

OSSERVAZIONE. - Se $h = 0$, la poligonale L_0 ottenuta da L nel modo indicato non è contenuta totalmente in A, ma gode ancora evidentemente della proprietà che, internamente alla regione determinata dalla retta $k = 1$ e dalle due porzioni di L e di L_0 aventi per estremi rispettivamente i punti $(\nu + \mu - [1, h_1+1], h_1+1)$, $(\nu + \mu - 1, 1)$ e $(\nu + \mu - [1, h_1+1], h_1+1)$ $(\nu + \mu, 1)$, non esiste alcun punto a coordinate intere.

3. In questo numero e nei successivi applicheremo i risultati del n. 2 alla determinazione delle molteplicità nei punti multipli infinitamente vicini a O, sul ramo (1.2), della prima polare $C'(P)$, rispetto a C, di un punto P non appartenente alla tangente a (1.2) in O.

Essendo

$$(O^{\nu} O_1^{\nu} \dots O_h^{\nu} O_{h+1}^{\nu_1} [O_{h+2}^{\nu_1} \dots O_{h+h_1}^{\nu_1} O_{h+h_1+1}^{\nu_2} \dots O_{h+h_1+h_2}^{\nu_2} O_{h+h_1+h_2+1}^{\nu_3} \dots O_{h+h_1+\dots+h_\sigma}^{\nu_\sigma}] \dots), \tag{3.1}$$

la caratteristica di O (limitata per il momento al primo gruppo di punti liberi ed al relativo gruppo satellite (n. 1)), dalla 2.*a*) si hanno anzitutto le seguenti proposizioni.

Nell'ipotesi che P non appartenga alla tangente al ramo (1.2) *in O:*

3.a) *se un ramo, γ, di $C'(P)$ uscente da O, passa per un punto O_j di* (3.1), *con* $h+h_1+...+h_{2l-1}<j\leq h+h_1+...h_{2l-1}+h_{2l}$ $(0\leq 2l<\sigma;\ h_{-1}=0,$ $h_0=h,\ O_0\equiv O)$, *γ passa necessariamente anche per i punti* $O_{j+1},\ O_{j+2},...,$ $O_{h+h_1+...+h_{2l}+1}$.

3.b) *se γ passa per il punto* $O_{h+h_1+...+h_{2l-1}}$ $(1\leq 2l-1<\sigma;\ h_{2l-1}>1)$, *e se le molteplicità di γ in* $O_{h+h_1+...+h_{2l-1}}$ *e nel punto, O', successivo di* $O_{h+h_1+...+h_{2l-1}}$ *su γ, sono eguali, O' è un punto libero.*

Dalla 3.a) segue in particolare che, non appartenendo P alla tangente a (1.2) in O, i punti O, O_1, O_2, ..., O_h, O_{h+1}, costituenti il primo gruppo di punti liberi di (3.1), figurano in $C'(P)$ con molteplicità positiva, eguale a $\nu-1$ per i punti O, O_1, O_2, ..., O_h, e compresa fra ν_1 e $\nu-1$ per O_{h+1} ([11]). La molteplicità di $C'(P)$ in O_{h+1} può raggiungere l'estremo superiore $\nu-1$ se $\bar{h}>h$ ([12]), oppure se sono soddisfatte le (1.11) e P appartiene alla (1.9). Se invece $\bar{h}=h$, quando P non appartenga alla (1.9), oppure quando non siano soddisfatte le (1.11), la molteplicità di O_{h+1} risulta compresa fra ν_1 e ν_1+h, estremi inclusi.

Indicando con Γ il sistema dei rami di $C'(P)$ uscenti da O, è chiaro che se, e soltanto se, $\bar{h}>h$, esiste in Σ qualche curva C, passante per O con il ramo (1.2), tale che nella $C'(P)$ di un punto P generico nel piano non esista nessun ramo di $\Gamma-\Gamma_1$ passante per O_{h+2}. In generale, fissato in (3.1) un punto appartenente al primo gruppo satellite, ci si può domandare quali siano le condizioni caratteristiche affinchè esista in Σ qualche curva, passante per O con un solo ramo (1.2), tale che nel sistema $\Gamma-\Gamma_1$ dei rami della $C'(P)$ di un punto P generico nel piano non ne esista alcuno il quale passi per il punto prefissato in (3.1) ([13]).

A tale questione risponde il seguente teorema, che completa le conclusioni di 3.a) e di 3.b), e che si dimostra in base alle 2.a) e 2.b):

3.c) *se* $\bar{h}_j=h_j$ *per* $j=0,1,...,2l-1$, *con* $0<2l-1<\bar{\sigma}$, *la prima*

([11]) Questa proposizione generalizza, limitatamente alle curve algebriche piane, quella stabilita da B. SEGRE a pag. 28 di [12].

([12]) Ciò accade ad es. per la curva $y^{12}+x^{113}=0$ considerata da B. SEGRE ([12], pag. 29) quando si costruisca la polare di un generico punto del piano (cfr. (7)).

([13]) Questo problema, nel caso dei rami (1.2) di genere uno, per i quali Γ_1 è vuoto, equivale a chiedersi se esista qualche C di Σ tale che la $C'(P)$ di un punto P generico non passi per il punto prefissato in (3.1). Esso presenta notevole interesse poichè, nella teoria delle singolarità secondo M. NÖTHER, il fatto che le prime polari passino per i punti n-pli di C, con molteplicità effettive eguali a $n-1$ almeno, interessa soltanto in quanto permette di concludere che i punti multipli di C, infinitamente vicini a O, sono in numero finito ([6] pag. 409; [13], pag. 312-316); ora, per giungere a questo risultato, basterebbe provare che le prime polari passano per i punti multipli di C con *molteplicità effettive non nulle.* Ma, come ha provato B. SEGRE con esempi ([12], pag. 29), e come preciseremo in seguito da un punto di vista generale, l'ultima proprietà non sussiste.

polare $C'(P)$ di un punto P generico nel piano rispetto a una C di Σ passante per O con un ramo (1.2), *è tale che il sistema $\Gamma - \Gamma_1$ contiene necessariamente qualche ramo passante per $O, O_1, O_2, \ldots, O_{h+h_1+\ldots+h_{2l}+1}$. Risulta $\bar{h}_{2l} \geq h_{2l}$, e la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista in Σ una C soddisfacente alle ipotesi sopra dette, e tale che $\Gamma - \Gamma_1$ non contenga nessun ramo passante per $O_{h+h_1+\ldots+h_{2l}+2}$, è che sia $h_{2l} < \bar{h}_{2l}$. Se $\bar{h}_{2l} = h_{2l}$, e quindi, necessariamente, $h_{2l+1} \geq \bar{h}_{2l+1}$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una C fra quelle sopra indicate tale che $\Gamma - \Gamma_1$ non contenga nessun ramo passante per $O_{h+h_1+\ldots+h_{2l}+m}$ $(2 < m \leq h_{2l+1})$ è che sia: $\bar{h}_{2l+1} < m - 1$ quando $2l + 1 < \sigma$; $\bar{h}_{2l+1} \leq m - 1$ quando $2l + 1 = \sigma$.*

Questa proposizione non vale però nella ipotesi che C soddisfi alle (1.11) e P appartenga alla (1.9).

Diremo che C soddisfa alle *condizioni T_2*, quando al suo diagramma di Newton appartengono i vertici della poligonale L (considerata nel n. 2), escluso al più l'estremo di L sul lato $k = 1$ di A, quando cioè in (1.1) figurano non nulli i coefficienti a_{ik} cogli indici espressi dalle (2.7) per $\vartheta = \rho, \rho - 2, \ldots, 2$. Si dirà che C soddisfa alle *condizioni T*, se, oltre ad essere soddisfatte le T_2, si ha $a_{\nu+\mu-(h+1)1} \neq 0$. Osserviamo che, se $\mu < \nu$, le condizioni T_2 hanno carattere proiettivo intrinseco, mentre la presenza o meno del coefficiente $a_{\nu+\mu-11}$ in (1.1) dipende dalla scelta dell'asse y nel sistema di riferimento.

Dalle argomentazioni svolte nel n. 2 riguardo alla poligonale L, conseguono i seguenti teoremi.

3.*d*) *Se C è generica in Σ, C soddisfa alle condizioni T.*

3.*e*) *Nell'ipotesi che P non appartenga alla tangente al ramo* (1.2) *in O e che: se $\mu > \nu$, C soddisfi alle condizioni T; se $\mu < \nu$, C soddisfi alle condizioni T_2 e P non appartenga alla* (1.9), *i vertici consecutivi, (i_r, k_r) della poligonale delle separatrici di $C'(P)$, successivi a $(0, \nu - 1)$, $(\nu + \mu - v, u - 1)$ (ossia corrispondenti ai rami di $\Gamma - \Gamma_1$), hanno coordinate*

$$(3.2) \qquad i_r = \nu + \mu - [h + 1, h_1, \ldots, h_\vartheta], \qquad k_r = [h_1, \ldots, h_\vartheta] - 1,$$

ove $r = 1 + \dfrac{\rho - \vartheta}{2}$ *e* $\vartheta = \rho, \rho - 2, \ldots, 2, 0$ (*per* $\vartheta = 0: [h_1, \ldots, h_\vartheta] = 1$).

Posto per maggior compattezza: $\nu = \nu_0$, $h_{-1} = -1$, $h_0 = h$, $O_0 \equiv O$, abbiamo visto nel n. 1 che al lato di estremi $(0, \nu - 1)$ $(\nu + \mu - v, u - 1)$ corrisponde in (1.7) il sistema Γ_1 degli n_1 rami (1.8) passanti con molteplicità complessivamente eguali a

$$(3.3) \quad \nu_p - \frac{\nu_p}{\nu_\sigma} \text{ per ciascuno dei punti } O_{h+h_1+\ldots+h_{p-1}+1}, \ldots, O_{h+h_1+\ldots+h_p} \quad (0 \leq p \leq \sigma).$$

Corrispondentemente al lato di estremi $(\nu + \mu - v, u - 1)$, $(\nu + \mu - [h + 1, h_1, \ldots, h_\rho], [h_1, \ldots, h_\rho] - 1)$, si ha in $C'(P)$: se σ è dispari, un ramo di genere uno, avente coppie caratteristiche $[h+1, h_1, \dots, h_\sigma - 1]$, $[h_1, \dots, h_\sigma - 1]$, e passante con molteplicità eguali a:

$$(3.4)\quad \begin{array}{lll} [h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_\sigma - 1], & \text{per ciascuno dei punti} & O_{h+h_1+\dots+h_{p-1}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_p} \quad (0 \leq p < \sigma), \\ 1, & \quad » \quad » \quad » \quad » & O_{h+h_1+\dots+h_{\sigma-1}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_\sigma - 1}, \\ 0, & \text{per il punto} & O_{h+h_1+\dots+h_\sigma}; \end{array}$$

se σ è pari, un sistema di m_σ $(1 \leq m_\sigma \leq h_\sigma)$ rami aventi prime coppie caratteristiche $[h+1, h_1, \dots, h_{\sigma-1}]$, $[h_1, \dots, h_{\sigma-1}]$, ordini $\lambda_s^{(\sigma)} [h_1, \dots, h_{\sigma-1}]$, ove i $\lambda_s^{(\sigma)}$ $(s = 1, 2, \dots, m_\sigma)$ sono interi positivi tali che $\sum_{1}^{m_\sigma}{}_s \lambda_s^{(\sigma)} = h_\sigma$, e passanti con molteplicità complessivamente eguali a:

$$(3.5)\quad \begin{array}{lll} h_\sigma[h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_{\sigma-1}], & \text{per ciascuno dei punti} & O_{h+h_1+\dots+h_{p-1}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_p} \quad (0 \leq p < \sigma - 1), \\ h_\sigma, & \quad » \quad » \quad » \quad » & O_{h+h_1+\dots+h_{\sigma-2}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_{\sigma-1}}, \\ 0, & \quad » \quad » \quad » \quad » & O_{h+h_1+\dots+h_{\sigma-1}+1}, \dots. \end{array}$$

Corrispondentemente al lato di estremi $(\nu + \mu - [h+1, h_1, \dots, h_\vartheta], [h_1, \dots, h_\vartheta] - 1)$, $(\nu + \mu - [h+1, h_1, \dots, h_{\vartheta-2}], [h_1, \dots, h_{\vartheta-2}] - 1)$ $(\vartheta \geq 2)$, si ha in (1.7) un sistema di m_ϑ $(1 \leq m_\vartheta \leq h_\vartheta)$ rami aventi prime coppie caratteristiche $[h+1, h_1, \dots, h_{\vartheta-1}]$, $[h_1, \dots, h_{\vartheta-1}]$, ordini $\lambda_s^{(\vartheta)} [h_1, \dots, h_{\vartheta-1}]$, essendo i $\lambda_s^{(\vartheta)}$ $(s = 1, 2, \dots, m_\vartheta)$ interi positivi tali che $\sum_{1}^{m_\vartheta}{}_s \lambda_s^{(\vartheta)} = h_\vartheta$, e passanti con molteplicità complessivamente eguali a:

$$(3.6)\quad \begin{array}{lll} h_\vartheta[h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_{\vartheta-1}], & \text{per ciascuno dei punti} & O_{h+h_1+\dots+h_{p-1}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_p} \quad (0 \leq p < \vartheta - 1), \\ h_\vartheta, & \quad » \quad » \quad » \quad » & O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta-2}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta-1}}, \\ 0, & \quad » \quad » \quad » \quad » & O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta-1}+1}, \dots. \end{array}$$

Sommando le molteplicità ora indicate, si ottengono le molteplicità complessive con le quali i punti di (3.1) (appartenenti al primo gruppo di punti liberi ed al relativo gruppo satellite) compaiono in (1.7). Esse sono eguali a

$$\begin{array}{lll} \nu_{2l} - 1, & \text{nei punti} & O_{h+h_1+\dots+h_{2l-1}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_{2l}}, \\ \nu_{2l+1}, & \quad » \quad » & O_{h+h_1+\dots+h_{2l}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_{2l+1}}, \end{array}$$

con $0 < 2l + 1 < \sigma$, e sono eguali a

$$\nu_\sigma - 1, \quad \text{nei punti} \quad O_{h+h_1+\dots+h_{\sigma-1}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_\sigma - 1}, O_{h+h_1+\dots+h_\sigma},$$

se σ è pari; oppure, se σ è dispari, a

$$\begin{array}{lll} \nu_\sigma, & \text{nei punti} & O_{h+h_1+\dots+h_{\sigma-1}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_\sigma - 1}, \\ \nu_\sigma - 1, & \text{nel punto} & O_{h+h_1+\dots+h_\sigma}. \end{array}$$

Risulta così dimostrato il seguente teorema:

3.*f*) *Se P e C soddisfano alle ipotesi enunciate in* 3.*e*), *vale la legge di alternanza, limitatamente al primo gruppo di punti liberi ed al relativo gruppo satellite di* (1.2).

Inoltre, se P e C soddisfano alle ipotesi di 3.*e*), $C'(P)$ passa per O con un numero, n, di rami tale che

$$n_1 + \frac{\sigma}{2} \leq n \leq n_1 + h_\sigma + h_{\sigma-2} + \dots + h_2, \tag{3.7}$$

se σ è pari, e

$$n_1 + \frac{\sigma + 1}{2} \leq n \leq n_1 + h_{\sigma-1} + h_{\sigma-3} + \dots + h_2 + 1 \tag{3.8}$$

se σ è dispari. Su queste diseguaglianze torneremo nei nn. 4, 5, stabilendo delle limitazioni per n_1. Ora mostriamo come esse possano interpretarsi, in maniera unitaria, sullo schema grafico di ENRIQUES del ramo (1.2). Supposto di avere disegnato tale schema, fra i segmenti rettilinei appartenenti al primo gruppo satellite distinguiamo i *segmenti pari* ed i *segmenti dispari*, chiamando *dispari* quelli che nello schema grafico, supposto percorso a partire da O, hanno come primi estremi O_{h+1}, $O_{h+h_1+h_2+1}, \dots$, e chiamando *pari* quelli che hanno come primi estremi O_{h+h_1+1}, $O_{h+h_1+h_2+h_3+1}, \dots$; inoltre considereremo il punto $O_{h+h_1+\dots+h_\sigma}$ come costituente, da solo, un segmento di parità opposta a quella di σ. Diremo che O_{h+1} appartiene al segmento dispari che lo ha come primo estremo, e, in generale diremo che un punto comune a due segmenti appartiene a quello che lo ha come primo estremo nel verso di percorrenza fissato. Le diseguaglianze precedenti possono allora interpretarsi nel modo seguente:

3.*g*) *Il numero dei rami di* $C'(P)$ *che passano per* O, *è compreso fra la somma di* n_1 *e del numero dei segmenti pari appartenenti al primo gruppo satellite, e la somma di* n_1 *e del numero dei punti di* (3.1) *appartenenti a tali segmenti.*

Se il ramo (1.2) soddisfa alle condizioni enunciate in 2.*d*) la $C'(P)$ di un punto *generico* nel piano rispetto ad una *qualsiasi* C di Σ passante per O con l'unico ramo (1.2), soddisfa alla legge di alternanza. Supponiamo che (1.2) non soddisfi alle condizioni 2.*d*).

Le proposizioni 2.*e*) e 2.*f*) permettono allora di determinare la composizione della singolarità in O della prima polare $C'(P)$ di un punto P (non appartenente all'asse delle x), rispetto alla *generica* curva del sistema Σ_{ϑ_0} $(\subset \Sigma)$ delle C di Σ per le quali risulta $a_{ik} = 0$ con $i = \nu + \mu - [h+1, h_1, \dots, h_{\vartheta_0}]$, $k = [h_1, \dots, h_{\vartheta_0}]$, essendo ϑ_0 un numero pari compreso fra 0 e ρ, estremi inclusi.

A tale scopo, diremo anzitutto che una curva C di Σ soddisfa alle condizioni U_{ϑ_0} quando nella sua equazione (1.1) siano non nulli i coefficienti a_{ik} corrispondenti ai vertici di L_{ϑ_0} (n. 2); inoltre indicheremo con L'_{ϑ_0} la poligonale che si ottiene operando su L_{ϑ_0} una traslazione di una unità, parallelamente all'asse k, nel verso negativo di questo. Dalle 2.*e*), 2.*f*) si ha allora che:

3.*h*) *La curva generica di* Σ_{ϑ_0} *soddisfa alle condizioni* U_{ϑ_0}.

3.*i*) *Se una* C *di* Σ_{ϑ_0} *soddisfa alle condizioni* U_{ϑ_0}, *e se* P *soddisfa alle ipotesi formulate in* 3.*e*), *la poligonale delle separatrici corrispondenti ai rami di* $C'(P)$ *uscenti da* O *è la* L'_{ϑ_0}, *escluso il caso in cui sia* $\vartheta_0 = 0$ *e* $\mu < \nu$.

Sommando alle molteplicità (3.3) le molteplicità con le quali i rami di $C'(P)$ passano per i punti di (3.1), si ha il seguente teorema:

3.*j*) *Sia* $0 \leq \vartheta_0 < \rho$. *Se* C *e* P *soddisfano alle ipotesi di* 3.*i*) (escluso il caso: $\vartheta_0 = 0$, $\mu < \nu$), *le molteplicità di* $C'(P)$ *nei punti di* (3.1) *appartenenti al primo gruppo di punti liberi ed al relativo gruppo satellite sono eguali a quelle previste dalla legge di alternanza: in ogni punto, se* $h_{\vartheta_0+1} = 1$; *nei punti distinti da* $O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta_0}+1}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta_0+1}}$, *se* $h_{\vartheta_0+1} \geq 2$. *Quando* $h_{\vartheta_0+1} = 2$, *le molteplicità in quei punti sono eguali a* $\nu_{\vartheta_0+1} + 1$ *in* $O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta_0}+1}$, *ed a* $\nu_{\vartheta_0+1} - 1$ *in* $O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta_0+1}}$. *Quando* $h_{\vartheta_0+1} > 2$, *esse sono:* $\nu_{\vartheta_0+1} + 1$, *in* $O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta_0}+1}$, ν_{ϑ_0+1}, *in* $O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta_0}+2}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta_0+1}} - 1$, $\nu_{\vartheta_0+1} - 1$, *in* $O_{h+h_1+\dots+h_{\vartheta_0+1}}$.

3.*k*) *La* 3.*j*) *vale anche se* $\vartheta_0 = \rho$, *purchè, nel caso in cui* σ *sia dispari, si ponga in essa* $h_\sigma - 1$ *al posto di* h_{ϑ_0+1}.

Supponiamo ora che sia $\mu < \nu$. Il comportamento di $C'(P)$ in O nel caso che P non appartenga alla (1.9), e che C soddisfi alla condizione U_0, è quello determinato dalla 3.*e*). Il teorema 2.*f*) e l'Osservazione con la quale termina il n. 2, permettono di stabilire il comportamento di $C'(P)$ quando P appartenga alla (1.9). In tali ipotesi, e supponendo inoltre che siano soddisfatte le condizioni T_2, che sia $a_{\nu+\mu-[1,h_1+1]\, h_1+1} \neq 0$ ed infine, se $h_1 \geq 3$, che sia anche

$$2(\nu+\mu)a_{\nu+\mu 0}a_{\nu+\mu-2\, 2} - (\nu+\mu-1)a^2_{\nu+\mu-1\, 1} \neq 0$$

(n. 1), vale il teorema:

3.*l*) *Le molteplicità di* $C'(P)$ *nei punti di* (3.1) *sono eguali a quelle previste dalla legge di alternanza: in ogni punto, se* $h_1 = 1$; *nei punti distinti da* $O_1, O_2, \dots, O_{h_1}$, *se* $h_1 \geq 2$. *Se* $h_1 = 2$, *le molteplicità in quei punti sono eguali a* $\mu + 1$ *in* O_1, *ed a* $\mu - 1$ *in* O_2; *mentre, se* $h_1 \geq 3$, *tali molteplicità sono:* $\mu + 1$, *in* O_1, μ, *in* $O_2, \dots, O_{h_1-1}$, $\mu - 1$, *in* O_{h_1}.

Le proposizioni 3.*h*; *i*; *j*; *k*; *l*) mostrano che esistono dei rami (1.2) per i quali la validità della legge di alternanza non è condizione sufficiente perchè C e P soddisfino alle ipotesi di 3.*e*). Il seguente teorema permette di caratterizzare tali rami.

3.*m*) *Se la molteplicità di* $C'(P)$ *in* O *è eguale a* $\nu - 1$, P *non appartiene alla tangente a* C *in* O. *Se per* $C'(P)$ *vale la legge di alternanza (sia pure) limita-*

tamente al primo gruppo di punti liberi ed al relativo gruppo satellite di (1.2), *se*

(3.9) $$h_{\vartheta+1} > 1 \qquad (\vartheta = \rho,\ \rho-2, \ldots, 0),$$

e se inoltre, quando σ *sia dispari, è*

(3.10) $$h_\sigma > 2,$$

allora C *soddisfa alle condizioni* T_2 *e, se la classe* μ *di* (1.2) *è maggiore dell'ordine* ν, *anche alle* T; *se, invece, la classe è minore dell'ordine,* P *non appartiene alla* (1.9).

Infatti, se il punto P appartenesse alla $y = 0$, poichè $\nu + \mu > \nu$, uno dei vertici della poligonale delle separatrici di (1.7) sarebbe il punto $(0, \nu)$, e pertanto O avrebbe per (1.7) molteplicità ν anzichè $\nu - 1$. Dunque P non appartiene alla tangente a (1.2) in O e, per conseguenza, dalla (1.6) si trae che uno dei lati della poligonale di (1.7) è il segmento avente per estremi i punti $(0, \nu - 1)$, $(\nu + \mu - v,\ u - 1)$, il quale dà luogo agli n_1 rami di Γ_1. Dalle (3.3) si ha che questi rami passano con molteplicità complessivamente eguale a $\nu_\sigma - 1$ per ciascuno dei punti $O_{h+h_1+\ldots+h_{\sigma-1}+1}, \ldots,\ O_{h+h_1+\ldots+h_\sigma-1}$, $O_{h+h_1+\ldots+h_\sigma}$. Poichè per ipotesi vale la legge di alternanza, se σ è pari non esiste in (1.7) alcun altro ramo passante per quei punti; mentre, se σ è dispari, esiste un ramo di genere uno passante per tali punti, con molteplicità $1, \ldots, 1, 0$. Per l'ipotesi (3.10), il punto successivo a $O_{h+h_1+\ldots+h_\sigma-1}$ su tale ramo è libero, e pertanto questo ha coppie caratteristiche eguali a $[h+1, h_1, \ldots, h_\sigma - 1]$, $[h_1, \ldots, h_\sigma - 1]$ Ad esso corrisponde, nella poligonale delle separatrici relative a (1.7), il lato di estremi $(\nu + \mu - v,\ u - 1)$ $(\nu + \mu - [h+1, h_1, \ldots, h_{\sigma-1}],\ [h_1, \ldots, h_{\sigma-1}] - 1)$, e quindi nella (1.1) figura non nullo il coefficiente a_{ik} di indici $i = \nu + \mu - [h+1, h_1, \ldots, h_{\sigma-1}]$, $k = [h_1 \ldots, h_{\sigma-1}]$. Ciascuno dei punti $O_{h+h_1+\ldots+h_{\sigma-2}+1}, \ldots,\ O_{h+h_1+\ldots+h_{\sigma-1}}$, ha per l'insieme dei rami precedenti molteplicità complessivamente eguali a: $\nu_{\sigma-1} - h_\sigma$ se σ è pari, $\nu_{\sigma-1} - 1$ se σ è dispari. Dunque, se σ è dispari, per tali punti non passa alcun altro ramo di (1.7), mentre, se σ è pari, si ha un sistema di m_σ $(1 \leq m_\sigma \leq h_\sigma)$ rami passanti per ciascuno di tali punti con molteplicità complessivamente eguali a h_σ. Dalla (3.9) segue che il successivo di $O_{h+h_1+\ldots+h_{\sigma-1}}$ su tali rami è libero. Per conseguenza, essi hanno prime coppie caratteristiche eguali a $[h+1, h_1, \ldots, h_{\sigma-1}]$, $[h_1, \ldots, h_{\sigma-1}]$, e ordini $\lambda_s^{(\sigma)}\ [h_1, \ldots, h_{\sigma-1}]$, essendo i $\lambda_s^{(\sigma)}$ $(s = 1, 2, \ldots, m_\sigma)$ interi positivi tali che $\sum_{s=1}^{m_\sigma} \lambda_s^{(\sigma)} = h_\sigma$. Essi danno luogo al lato della poligonale relativa a (1.7) avente per estremi i punti $(\nu + \mu - v,\ u - 1)$ $(\nu + \mu - [h+1, h_1, \ldots, h_{\sigma-2}],\ [h_1, \ldots, h_{\sigma-2}] - 1)$. Pertanto nella (1.1) è $a_{ik} \neq 0$, con $i = \nu + \mu - [h+1, h_1, \ldots, h_{\sigma-2}]$, $k = [h_1, \ldots, h_{\sigma-2}]$. Il ragionamento prosegue per induzione. Giunti al vertice $(\nu + \mu - [h+1, h_1, h_2],\ [h_1, h_2] - 1)$, e determinato il vertice successivo $(\nu + \mu - (h+1),\ 1)$, il teorema risulta completamente dimostrato non appena si tenga conto della 1.*a*) e delle considerazioni svolte nel n. 1 a proposito della (1.9).

4. Supponiamo che il genere g del ramo (1.2) sia > 1 (oppure che il termine $a_1 x^{\frac{\nu+\mu}{\nu}}$ non sia un termine caratteristico di (1.2)), e determiniamo le molteplicità di $C'(P)$ nei successivi gruppi di punti liberi e nei relativi gruppi satelliti di (3.1). Consideriamo una qualsiasi C di Σ passante per O con l'unico ramo (1.2), e ricordiamo che, qualunque sia la particolarità di una tale C in Σ, e quindi qualunque sia la poligonale delle separatrici relative ai rami di $C'(P)$ uscenti da O, uno dei lati di tale poligonale ha per estremi i punti $(0, \nu - 1)$ $(\nu + \mu - v, u - 1)$ e dà luogo al sistema Γ_1. È chiaro che *quelli di* Γ_1 *sono gli unici rami di* $C'(P)$ *che possono avere punti in comune con i punti di* (3.1) *successivi al primo gruppo satellite.* Allo scopo di determinare questi ultimi, cerchiamo i coefficienti di (1.1) che intervengono nella determinazione di a_2. Posto ([2], pag. 47):

$$x = \xi^u, \qquad y = (a_1 + \eta)\xi^v, \tag{4.1}$$

la (1.1) si trasforma in una curva spezzata nella retta $\xi = 0$ contata $u(\nu + \mu)$ volte, e nella

$$\bar{f}(\xi, \eta) = \sum_{jh} A_{jh}\xi^j\eta^h = 0, \tag{4.2}$$

ove

$$A_{jh} = \sum_{ik} \binom{k}{h} a_{ik} a_1^{k-h}, \tag{4.3}$$

la somma essendo estesa alle coppie di interi $i \geq 0$, $k \geq h$, che soddisfano alla (1.4) e sono coordinate di punti del diagramma di Newton di (1.1). La (4.2) passa per l'origine $\xi = 0$, $\eta = 0$, con un unico ramo, di ordine ν_σ, rappresentato dallo sviluppo

$$\eta = a_2 \xi^{\frac{\mu'}{\nu_\sigma}} + \dots .$$

Pertanto considerazioni perfettamente analoghe a quelle del n. 1 portano a concludere che i punti (j, h) del diagramma di Newton di (4.2) appartengono al semipiano. α', delimitato dalla retta

$$\nu_\sigma j + \mu' h = \nu_\sigma \mu', \tag{4.4}$$

al quale non appartiene l'origine, e che tutti i punti (a coordinate intere non negative) giacenti su questa retta appartengono al diagramma di Newton di (4.2) dando luogo a coefficienti A_{jh} $(\neq 0)$ tali che

$$\sum_{j,\,h} A_{jh} a^h = A_{0\nu_\sigma}(a^{\nu'_{\sigma'}} - a_1^{\nu'_{\sigma'}})^{\frac{\nu_\sigma}{\nu'_{\sigma'}}}, \tag{4.5}$$

ove $\nu'_{\sigma'}$ denota il massimo comun divisore di μ' e ν_σ; i rimanenti punti del diagramma di Newton di (4.2) hanno coordinate j, h che sono soluzioni non negative delle equazioni

$$\nu_\sigma j + \mu' h = \nu_\sigma \mu' + l \nu'_{\sigma'} \qquad (l = 1, 2, ...).$$

Per la osservazione fatta all'inizio di questo numero, e tenendo conto della (1.8), si ha che la determinazione delle molteplicità di $C'(P)$ nei punti di (3.1) successivi al primo gruppo satellite può farsi mediante la trasformazione (4.1). Per mezzo di questa, la (1.7) si trasforma nella retta $\xi = 0$ contata $(\nu - 1)v$ volte e nella

$$x_0 Q \xi^{v-u} + y_0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} + z_0 R \xi^v = 0, \tag{4.6}$$

ove, essendo ζ la terza coordinata omogenea, Q e R hanno le seguenti espressioni (in coordinate non omogenee):

$$(4.7) \qquad \begin{aligned} Q &= \frac{1}{u} \left\{ (\nu + \mu) u \bar{f}(\xi, \eta) + \xi \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi} - v(a_1 + \eta) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} \right\}, \\ R &= \frac{1}{u + v + 1} \left\{ (v + 1) \left[(\nu + \mu) \bar{f}(\xi, \eta) + \frac{\xi}{u} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi} \right] + [(u - 1)\eta + u a_1] \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta} \right\}. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi che sia $y_0 \neq 0$, dalle (4.6), poichè

$$v - u \geq 1, \tag{4.8}$$

si ha che uno dei lati della poligonale delle separatrici relative alla (4.6) ha per estremi i punti $(0, \nu_\sigma - 1)$, $(\mu' - v', u' - 1)$, essendo $v' = \frac{\mu'}{\nu'_{\sigma'}}$, $u' = \frac{\nu_\sigma}{\nu'_{\sigma'}}$. Corrispondentemente a tale lato, si ha in (4.6) un sistema, Γ_2, di n_2, rami $(1 \leq n_2 \leq \nu'_{\sigma'} - 1)$

$$\eta = a_2 \xi^{\frac{\mu'}{\nu_\sigma}} + ...,$$

aventi prime coppie caratteristiche v', u', e ordini $\lambda_s u'$, ove i λ_s sono interi positivi tali che $\sum_{1}^{n_2} {}_s \lambda_s = \nu'_{\sigma'} - 1$; la poligonale si riduce a questo lato, se il termine $a_2 x^{\frac{\nu + \mu + \mu'}{\nu}}$ non è caratteristico. Supponiamo che ciò non accada, e consideriamo i lati successivi. Poichè $y_0 \neq 0$, dalle (4.6), (4.7) e (4.8) segue che, se (j', h') è un loro vertice e se $h' \geq 1$, a questo punto corrisponde in (4.6) un coefficiente (non nullo), il quale appartiene a $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta}$ e non a $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta}$. E da qui l'analisi può svolgersi in maniera analoga a quella seguita nei nn. precedenti, a proposito del primo gruppo satellite. Applicando infatti alla retta (4.4) ed al semipiano α' le considerazioni svolte precedentemente a proposito della (1.3) e del semipiano α, ponendo un apice accanto ai simboli là introdotti quando questi si riferiscano alla (4.4) ed a α', si dimostra che:

4.*a*) *Valgono le proposizioni che si ottengono dalle* 3.*a*; *b*; *e*; *f*; *h*; *i*; *j*; *k*), *supponendo che P sia generico nel piano e sostituendo ai punti O, O_1, ...,*

$O_{h+h_1+\ldots h_\sigma}$, *i punti di* (3.1) *appartenenti al secondo gruppo di punti liberi e* (essendo per ipotesi $a_2 x^{\frac{\nu+\mu+\mu'}{\nu}}$ secondo termine caratteristico) *al secondo gruppo satellite; a* $\nu+\mu$, ν, *rispettivamente* μ', ν_σ; *alle* a_{ik}, *le* A_{jh} *espresse dalle* (4.3); *ai rimanenti simboli gli omonimi dotati di apice.*

Ad esempio, dalla 3.*f*) si ha che:

4.*b*) *Se P è un punto generico nel piano, e se C soddisfa alle condizioni T', vale la legge di alternanza limitatamente al gruppo di punti liberi ed al gruppo satellite dipendenti da* $a_2 x^{\frac{\nu+\mu+\mu'}{\nu}}$

Ripetendo per n_1 le considerazioni svolte a proposito della 3.*g*) si ha inoltre che

4.*c*) *Se P è generico nel piano e se C soddisfa alle ipotesi formulate in* 3.*e*), 4.*b*), *il numero dei rami di C'(P) uscenti da O è compreso fra la somma di* n_2 *e del numero dei segmenti pari dei gruppi satelliti di* (3.1) *corrispondenti ai termini* $a_1 x^{\frac{\nu+\mu}{\nu}}$, $a_2 x^{\frac{\nu+\mu+\mu'}{\nu}}$, *e la somma di* n_2 *e del numero dei punti appartenenti a tali segmenti.*

5. Il passaggio da $a_2 x^{\frac{\nu+\mu+\mu'}{\nu}}$ ai successivi termini di (1.2) fino al g-esimo termine caratteristico, e corrispondentemente la estensione dei risultati stabiliti nei nn. 3, 4, ai successivi gruppi di punti di (3.1), avviene in modo ricorrente e non presenta alcuna nuova difficoltà, rispetto a quelle già incontrate nel n. 4, dando luogo a relazioni analoghe, anche formalmente, alle precedenti.

Ad esempio, indicando con T'', $T^{(3)}, \ldots, T^{(m)}$, le condizioni analoghe alle T, T', scritte per i successivi coefficienti di (1.2) fino al g-esimo caratteristico, si ha che:

5.*a*) *Se P è generico nel piano e se C soddisfa alle condizioni* T, T', $T'', \ldots, T^{(m)}$, *C'(P) soddisfa alla legge di alternanza.*

5.*b*) *Se C è generica in* Σ, *C soddisfa alle condizioni* $T, T', T'', \ldots, T^{(m)}$.

Iterando le considerazioni che ci hanno condotto alla 3.*g*) ed alla 4.*c*), si perviene a dimostrare che:

5.*c*) *Se P e C soddisfano alle ipotesi enunciate in* 5.*a*), *il numero dei rami di C'(P) passanti per O è compreso fra il numero dei segmenti pari che figurano nei gruppi satelliti di* (3.1) *ed il numero dei punti appartenenti complessivamente a tali segmenti.*

6. A norma delle considerazioni del n. 5, non sarà essenzialmente restrittivo se *nella parte rimanente del presente lavoro ci limiteremo a considerare il primo gruppo di punti liberi ed il relativo gruppo satellite di* (3.1); supporremo anche, come si è fatto fino ad ora, che tale gruppo dipenda da $a_1 x^{\frac{\nu+\mu}{\nu}}$. Faremo inoltre l'ipotesi che sia $g = 1$. L'estensione di molti dei risultati che otterremo, nel caso in cui sia $g > 1$, ai successivi gruppi di punti liberi ed ai relativi gruppi satelliti di (1.2), potrà farsi sulla traccia del metodo seguito nel n. 4.

Nelle ipotesi precedenti esaminiamo brevemente il caso, fino ad ora escluso, in cui il punto P appartenga alla tangente a (1.2) in O.

Uno dei vertici della poligonale delle separatrici relative ai rami uscenti da O di $C'(P)$ è il punto di coordinate $i_0 = \nu + \mu - 1$, $k_0 = 0$. Supponiamo di avere determinato i vertici (i_0, k_0), $(i_1, k_1) \dots, (i_{r-1}, k_{r-1})$, con $r \geq 1$ e $i_0 > i_1 > \dots > i_{r-1} > 0$, e ricerchiamo il vertice successivo (i_r, k_r). Nell'insieme dei punti (i, k) appartenenti al diagramma di Newton di (1.1), consideriamo: il sottoinsieme, J_r, dei punti per cui $1 < i \leq i_{r-1}$; il sottoinsieme, J, dei punti $(0, k)$ cui corrispondono in (1.1) coefficienti per i quali $a_{1k}x_0 + (N-k)a_{0k}z_0 \neq 0$. Nel caso che J_r non sia vuoto, sia (i', k') il punto di ascissa minima fra i punti di J_r per i quali $(k - k_{r-1})/(i_{r-1} - i + 1)$ assume il minimo valore; analogamente, nel caso che J non sia vuoto, sia $(0, k'')$ il punto di J di ordinata minima. Vale allora la seguente proposizione:

6.*a*) *Se J_r non è vuoto e se J è vuoto, oppure se*

$$\frac{k' - k_{r-1}}{i_{r-1} - i' + 1} < \frac{k'' - k_{r-1}}{i_{r-1}},$$

si ha: $i_r = i' - 1$, $k_r = k'$. Nei rimanenti casi: se J non è vuoto, si ha $i_r = 0$, $k_r = k''$, mentre, se J è vuoto, (i_r, k_r) non esiste.

Poichè dalla (2.3) si ha

$$\frac{\mu}{\nu + \mu} = \frac{1|}{|h+1} + \frac{1|}{|h_1} + \dots + \frac{1}{h_\sigma}, \tag{6.1}$$

in base alla 2.*a*) si prova che:

6.*b*) *Nell'ipotesi che P appartenga alla tangente a (1.2) in O: se un ramo, γ, di $C'(P)$ uscente da O passa per un punto O_j di (3.1), con $h + h_1 + \dots + h_{2l} < j \leq$ $\leq h + h_1 + \dots + h_{2l+1}$ $(0 \leq 2l + 1 < \sigma;\ h_0 = h)$, esso passa anche per i punti O_{j+1}, $O_{j+2}, \dots, O_{h+h_1+\dots+h_{2l+1}+1}$: se γ passa per il punto $O_{h+h_1+\dots+h_{2l}}$ $(0 \leq 2l < \sigma;$ $h_{2l} > 1)$ e se le molteplicità di γ in $O_{h+h_1+\dots+h_{2l}}$ e nel punto, O', successivo di $O_{h+h_1+\dots+h_{2l}}$ su γ, sono eguali, O' è un punto libero.*

In base alla (6.1) ed all'identità

$$[0,\ h+1,\ h_1, \dots, h_p] = [h_1, \dots, h_p] \qquad (0 \leq p \leq \sigma),$$

la 2.*c*) permette di determinare, nella regione del primo quadrante delimitata dalla (1.3), alla quale non appartiene l'origine $(0, 0)$, quella poligonale, L^*, che gode delle seguenti proprietà: ha per vertici dei punti a coordinate intere (non negative); ha un estremo nel punto $(\nu + \mu, 0)$ e l'altro sulla retta $i = 1$; insieme alla (1.3) ed alla retta $i = 1$, determina una regione *internamente* alla quale non cade nessun punto a coordinate intere. Si ha infatti che, essendo ρ^* il massimo numero dispari minore di σ:

6.*c*) *I vertici di* L^* *successivi a* $(\nu+\mu, 0)$ *ed ordinati per ascisse decrescenti sono i punti che si ottengono dalle formule*

$$i = [h+1, h_1, \ldots, h_{\vartheta^*}], \qquad k = \nu - [h_1, \ldots, h_{\vartheta^*}], \tag{6.2}$$

per $\vartheta^* = \rho^*, \rho^* - 2, \ldots, 3, 1$, *ed il punto* $(1, \nu)$.

Dicendo che *C soddisfa alle condizioni* T^* allorchè al diagramma di Newton di (1.1) appartengono i vertici di L^*, e indicando con $L^{*\prime}$ la poligonale che si ottiene traslando L^* di una unità nella direzione negativa dell'asse i, si ha che:

6.*d*) *Se C è generica in* Σ, *C soddisfa alle condizioni* T^*.

6.*e*) *Se (P appartiene alla tangente a* (1.2) *in O e) se C soddisfa alle condizioni* T^*, $L^{*\prime}$ *è la spezzata delle separatrici corrispondenti ai rami di* $C'(P)$ *uscenti da O.*

Determinando le coppie caratteristiche e gli ordini di quei rami, si prova poi il teorema:

6.*f*) *Se C e P soddisfano alle ipotesi di* 6.*e*), $C'(P)$ *possiede la molteplicità effettiva* ν_{2l} *nei punti* ν_{2l}*-pli di* (3.1), *e la molteplicità effettiva* $\nu_{2l+1} - 1$ *nei punti* ν_{2l+1}*-pli di* (3.1), *essendosi posto* $\nu_0 = \nu$, *e con l'avvertenza che, ove si trovi un* ν_{i-1} *con i pari multiplo del successivo* ν_i $(< \nu_{i-1})$, *si ponga* $\nu_{i-1} = h_i \nu_i + \nu_{i+1}$, *con* $\nu_{i+1} = \nu_i$.

Si dimostra inoltre che:

6.*g*) *Se C e P soddisfano alle ipotesi di* 6.*e*), $C'(P)$ *passa per O con un numero di rami compreso (estremi inclusi) fra il numero dei segmenti dispari del gruppo satellite di* (1.2) *ed il numero dei punti appartenenti a tali segmenti.*

6.*h*) *Se la molteplicità di* $C'(P)$ *in O è uguale a* ν, *P appartiene alla tangente a* (1.2) *in O. Se le molteplicità di* $C'(P)$ *nei punti di* (3.1), *sono quelle previste da* 6.*f*), *se inoltre*

$$h_{\vartheta^*} > 1 \qquad (\vartheta^* = \rho^*, \rho^* - 2, \ldots, 3, 1), \tag{6.3}$$

e se, quando σ *è pari, è anche* $h_\sigma > 2$, *allora esistono in* (1.1) *non nulli i coefficienti* a_{ik} *i cui indici i e k sono le coordinate dei vertici di* L^*.

7. Con la proposizione 3.*f*) abbiamo determinato delle condizioni sufficienti affinchè, per la prima polare $C'(P)$ di un punto P generico, valga la legge di alternanza, condizioni che, con la 3.*m*) abbiamo mostrato essere in generale anche necessarie per la validità di tale legge ([14]), dando così ragione delle eccezioni rilevate da B. SEGRE. Vogliamo chiarire ulteriormente questo punto, in guisa da illustrare il modo in cui tali condizioni intervengono nella dimostrazione originale della legge di alternanza. Questa dimostrazione ([6],

([14]) Tali condizioni sono necessarie soltanto per i rami che soddisfino alle (3.9), (3.10), come si è avvertito nel n. 3. Ma d'altra parte è chiaro che per i rami i quali non soddisfino alle (3.9), (3.10) la condizione necessaria affinchè valga la legge di alternanza, pur essendo più ampia di quella enunciata in 3.*m*), involge sempre un numero finito di coppie (i, k).

pag. 438 - 441) si ottiene imponendo a $C'(P)$ certe molteplicità virtuali nei punti di (3.1), e determinandone le molteplicità effettive mediante i *principi di scaricamento e di scorrimento* ([6], pag. 428 - 431). Ma è noto che tali principi sono applicabili soltanto alla curva *più generale* fra quelle aventi assegnate molteplicità virtuali. Sorge dunque la questione se, fissata una C di Σ, al sistema lineare delle prime polari $C'(P)$ dei punti del piano rispetto a C, appartenga qualche curva che, nei punti multipli infinitamente vicini a O, si comporti come la più generale curva fra quelle alle quali siano imposte le molteplicità virtuali sopra dette. Le proposizioni 3.d; e; m) mostrano come si possa dare una risposta affermativa a tale domanda *soltanto per la curva C generica di Σ*, e la 3.e) determina i coefficienti di (1.1) il cui non annullarsi caratterizza le curve C di Σ che, rispetto alla questione proposta, si comportano come la curva generica.

Quando si ricordi il significato aritmetico degli indici di tali coefficienti, da quanto si è detto appare presumibile come analoghi fenomeni aritmetici abbiano a presentarsi in un problema estensione di quello da noi accennato. Tale problema consiste nella ricerca delle condizioni caratteristiche affinchè un sistema lineare (o, più in generale, un sistema continuo) sufficientemente ampio, Λ, la generica curva C del quale passi per i punti multipli infinitamente vicini a O sul ramo (1.2) con molteplicità effettive eguali a quelle indicate in (3.1), contenga una curva C che presenti nei punti di (3.1) certe prefissate molteplicità virtuali e le cui *molteplicità effettive siano quelle previste dai principi di scaricamento e di scorrimento*

Di tale questione contiamo occuparci in altro lavoro. Qui ci limiteremo a considerare particolari valori delle molteplicità virtuali, in modo da trarne un altro significato geometrico per i coefficienti a_{ik} sopra detti.

Ferme restando le ipotesi formulate nel n. 6 per il ramo (1.2), consideriamo $n+1$ curve linearmente indipendenti $C_0, C_1, \ldots, C_n$, di ordine N, passanti per i punti di (3.1) con molteplicità effettive eguali a quelle ivi indicate. Sia Λ il sistema lineare descritto dalla curva $C = \sum_0^n{}_j \lambda_j C_j$, e supponiamo che Λ sia sufficientemente ampio, in guisa che ad esso appartenga qualche curva che, nei punti $O, O_1, \ldots, O_h, O_{h+1}, \ldots, O_{h+h_1+\ldots+h_\sigma-1}$, presenti molteplicità virtuali eguali a quelle indicate in (3.1) e che, nel punto $O_{h+h_1+\ldots+h_\sigma}$, abbia molteplicità virtuale eguale a quella indicata in (3.1) aumentata di uno. Sia $\Lambda_1 \subset \Lambda$ il sistema lineare minimo contenente tali curve.

Applicando i principi di scaricamento e di scorrimento, si riconosce che le molteplicità effettive della più generale curva avente le molteplicità virtuali assegnate sono eguali a: $\nu+1$ in O, ν in $O_1, O_2, \ldots, O_h$, ν_1 in O_{h+1}, ed a $\nu_i - 1$ nei rimanenti punti ν_i-pli di (3.1) ($\nu_\sigma = 1$). Determinando i sistemi di rami che danno luogo a tali molteplicità, si riconosce facilmente che, se sono soddisfatte le (3.9) e (6.3), ad essi corrisponde nel diagramma di Newton di C una poligonale, $\bar{L}$, i cui vertici, ordinati per ascissa crescente, sono: un qualsiasi punto $(0, k)$ con $k \geq \nu + 1$; il punto $(1, \nu)$; i punti che si hanno dalle (6.2) per $\vartheta^* = 1, 3, \ldots, \rho^* - 2, \rho^*$; i punti dati dalle (2.7) per $\vartheta = \rho, \rho - 2, \ldots, 2, 0$; un qualsiasi punto $(i, 0)$ con $i \geq \nu + \mu + 1$.

Essendo a^j_{ik} il coefficiente del termine in $x^i y^k$ nell'equazione di C_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$, consideriamo le forme

$$b_{ik} = \overset{n}{\underset{0}{\Sigma_j}} \lambda_j a^j_{ik},$$

i cui indici i e k sono eguali alle coordinate di quei vertici di $\bar{L}$ che hanno le coordinate positive. Dalle argomentazioni precedenti risulta allora che:

7.*a*) *La condizione necessaria e sufficiente affinchè esista in* Λ_1 *qualche curva le cui molteplicità effettive in* (3.1) *siano eguali a quelle previste dai principi di scaricamento e di scorrimento, è che le suddette forme* b_{ik} *siano indipendenti dalle due forme* $b_{0\nu}$ *e* $b_{\nu+\mu 0}$.

Delle coppie di indici espressi dalle (6.2) e (2.7) può darsi una interpretazione algebrica, completante il già ottenuto loro significato aritmetico (nn. 2, 6). A tale scopo, nell'anello $I[x, y]$ dei polinomi in due indeterminate a coefficienti complessi, consideriamo l'ideale $J[x, y]$ associato ([14], pag. 47) alla varietà costituita dai punti di (3.1) (contati con la rispettiva molteplicità) e gli ideali $A[x, y]$. $B[x, y]$, $C[x, y]$, associati rispettivamente alle varietà

$$(O^{\nu} \quad O^{\nu}_1 O^{\nu}_2 \ldots O^{\nu}_h O^{\nu_1+1}_{h+1} [O^{\nu_1}_{h+2} O^{\nu_1}_{h+3} \ldots O^{\nu_1}_{h+h_1} O^{\nu_2-1}_{h+h_1+1} \ldots O^{\nu_2-1}_{h+h_1+h_2} O^{\nu_3}_{h+h_1+h_2+1} \ldots]),$$

$$(O^{\nu+1} O^{\nu}_1 O^{\nu}_2 \ldots O^{\nu}_h O^{\nu_1-1}_{h+1} [O^{\nu_1-1}_{h+2} O^{\nu_1-1}_{h+3} \ldots O^{\nu_1-1}_{h+h_1} O^{\nu_2}_{h+h_1+1} \ldots O^{\nu_2}_{h+h_1+h_2} O^{\nu_3-1}_{h+h_1+h_2+1} \ldots]), \; (\nu_\sigma = 1)$$

$$(O^{\nu+1} O^{\nu}_1 O^{\nu}_2 \ldots O^{\nu}_h O^{\nu_1}_{h+1} [O^{\nu_1-1}_{h+2} O^{\nu_1-1}_{h+3} \ldots O^{\nu_1-1}_{h+h_1} O^{\nu_2-1}_{h+h_1+1} \ldots O^{\nu_2-1}_{h+h_1+h_2} O^{\nu_3-1}_{h+h_1+h_2+1} \ldots]).$$

In ogni polinomio di $A[x, y]$, $B[x, y]$ e $C[x, y]$ mancano i termini, rispettivamente, in $x^{\nu+\mu}$, in y^{ν}, e in $x^{\nu+\mu} \cdot y^{\nu}$; nei generici polinomi di quegli ideali compaiono invece i termini in $x^i y^k$, i cui esponenti i e k sono le coordinate dei vertici delle poligonali, rispettivamente: L, L^* e $\bar{L}$.

Dalle argomentazioni dei nn. 2, 6, segue che

7.*b*) $A[x, y]$ *e* $B[x, y]$ *sono gli ideali irriducibili dell'ideale* $J[x, y]$. *Il loro minimo comune multiplo è l'ideale* $C[x, y]$.

8. Dei coefficienti a_{ik} introdotti nei nn. precedenti può anche darsi un'interpretazione geometrica, più strettamente legata alle curve $C'(P)$.

Ad essa è necessario premettere lo studio del caso in cui C passi per O con un numero di rami maggiore di uno. Come ha osservato l'ENRIQUES ([6], pag. 442), si può passare ad esso, quando P è generico nel piano, considerando, anzichè C, una curva spezzata i cui rami osculino i rami di C uscenti da O, ed applicando il principio di formazione della polare rispetto ad una curva spezzata. Si può verificare la validità di tale affermazione, considerando il diagramma di Newton di C. Si riconosce allora che, se P è generico nel piano, le molteplicità di $C'(P)$ nei punti multipli di C infinitamente vicini a O su uno dei rami di C uscenti da O si ottengono applicando a tale ramo le proposizioni stabilite nei nn. 1 - 6. Ad esempio, indicando con: (1.1) l'equazione di C; (1.2) uno qualsiasi dei rami di C uscenti da O; $T, T', \dots, T^{(m)}$, le condizioni definite nei nn. 3, 4, 5 relative al ramo (1.2), vale la seguente proposizione:

8.*a*) *Se P è un punto generico nel piano, e se C soddisfa alle condizioni $T, T', \dots, T^{(m)}$, le molteplicità di $C'(P)$ nei punti infinitamente vicini a O sul ramo* (1.2) *sono quelle previste dalla legge di alternanza.*

9. Tornando al caso in cui C passa per O con il solo ramo (1.2) (di genere $g=1$ e del quale $a_1 x^{\frac{\nu+\mu}{\nu}}$ è termine caratteristico), calcoliamo il numero, M, delle intersezioni riunite in O di $C'(P)$ e della seconda polare, $C''(P)$, supponendo *P generico nel piano.*

Siano

$$(9.1)\qquad (0, \nu-1), \quad (\alpha_r, \beta_r-1) \quad (r=1, 2, \dots, p;\ \nu > \beta_p > \beta_{p-1} > \dots > \beta_1 = 1),$$

i vertici della poligonale delle separatrici relative ai rami di $C'(P)$ uscenti da O. Siccome P è generico nel piano, e poichè i rami di $C'(P)$ sono tutti tangenti alla $y=0$, da quanto si è detto nel n. 8 risulta che i punti (α_r, β_r-2) $(r=2, \dots, p)$ sono vertici della poligonale delle separatrici corrispondenti ai rami di $C''(P)$ uscenti da O. Essa ha per estremi il punto $(0, \nu-2)$ sull'asse $i=0$, ed il punto $(\nu+\mu-q, 0)$ sull'asse $k=0$, essendo q un intero compreso fra 2 e $2(h+1)$ se $h_1>1$, e fra 2 e $2h+3$ se $h_1=1$. Osserviamo che quelli ora indicati non sono necessariamente *tutti* i vertici della poligonale, in quanto è possibile che la porzione di estremi (α_2, β_2-2), $(\nu+\mu-q, 0)$ sia costituita da più di un lato.

A norma del teorema fondamentale di HALPHEN ([6], pag. 360), M è non inferiore al numero

$$(9.2)\qquad M_1 = \nu\alpha_p - 2\alpha_1 + \sum_{2}^{p}{}_r (\alpha_{r-1}\beta_r - \alpha_r\beta_{r-1}),$$

sicchè:

9.*a*) *Fermi restando i vertici* (9.1), *risulta $M > M_1$ se, e soltanto se, esiste qualche valore di r per il quale il lato di estremi* (α_r, β_r-1), $(\alpha_{r-1}, \beta_{r-1}-1)$ *dà luogo ad un numero di rami di $C'(P)$ minore del massimo possibile.*

Supponiamo che C soddisfi alle ipotesi T. Dalla 3.*e*) e dalla (9.2) si ha che M è non minore del numero

$$\overline{M}_1 = (\nu+\mu)(\nu-2) + 2(h+1) - \nu[h+1, h_1, \dots, h_\rho] + \sum_{2}^{\rho}{}_\vartheta h_\vartheta \{(\nu+\mu)[h_1, \dots, h_{\vartheta-1}] + 1\},$$

ove la sommatoria è estesa ai soli valori pari di ϑ.

Con facili calcoli, ricordando il modo con cui è stata definita la poligonale L, si prova che *se i vertici* $(\alpha_r, \beta_{r-1} - 1)$ *non coincidono con i punti che si ottengono dalle* (3.2) *per* $\vartheta = \rho, \rho - 2, \dots, 2, 0$, *risulta* $M_1 > \overline{M}_1$.

A norma della 9 *a*), concludiamo le nostre considerazioni [15] con il teorema:

9.*b*) *Sia P un punto generico del piano. Condizione necessaria e sufficiente affinchè C soddisfi alle condizioni T, ed affinchè sia massimo il numero dei rami di* $C'(P)$ *uscenti da O, è che sia minimo il numero delle diramazioni di* $C'(P)$ *riunite in O.*

A norma delle 3.*d*; *e*; *f*; *j*; *m*) e del *principio della massima separazione dei rami* ([6], pag. 398, 432), la proposizione precedente caratterizza geometricamente il caso in cui $C'(P)$ si comporta nei punti multipli infinitamente vicini a O come la polare di un punto generico del piano rispetto alla *generica C di* Σ.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BOMPIANI, *Elementi differenziali regolari e non regolari nel piano proiettivo e loro applicazioni alle curve algebriche piane*, « Rend. di Mat. e delle sue applicazioni », (5), V, (1946), pag. 1-46.

[2] BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, II ed., Parigi, 1875.

[3] O. CHISINI, *Sulla singolarità di una superficie in un punto generico di una curva multipla*, « Atti Acc. di Bologna », (1920).

[4] L. E. DICKSON, *History of the theory of numbers*, Vol. II, Stechert, New York, 1934.

[5] F. ENRIQUES, *Sulla teoria delle singolarità delle curve algebriche*, « Rend. Lincei », (5), XXV_1, (1916), pag. 607-613.

[6] F. ENRIQUES - O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Vol. II, (1918), Zanichelli, Bologna.

[7] G. H. HALPHEN, *Sur une série de courbes analogues aux developpées*, « Journal de Math. », (3), II, (1876), pag. 87-144.

[8] C. F. MANARA, *Normale proiettiva e normale puntuale dei rami superlineari delle curve piane*, « Rend. Ist. Lombardo », LXXVII, (1944), pag. 1-8.

[9] A. MAXIA, *Studio proiettivo differenziale di un elemento cuspidale di specie superiore*, « Rend. di Mat. e delle sue applicazioni », (5), VI, (1947), pag. 254-344.

[10] O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner, Leipzig, (1913).

[11] B. SEGRE, *Geometria algebrica ed aritmetica*, « Atti IV Congresso U. M. I. », (Taormina, 1951).

[12] B. SEGRE, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche*, « Ann. di Mat. », (4), XXXIII, (1952), pag. 5-48.

[13] F. SEVERI, *Trattato di Geometria Algebrica*, Vol. I, parte I, Zanichelli, Bologna, 1926.

[14] B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, II Teil, Springer, Berlino, (1940).

---

[15] Considerazioni consimili trovansi già in [3].