

Proprietà di minimo delle curve di Ribaucour.

Memoria di FERNANDO BERTOLINI (a Roma) (*).

Sunto. - Sono studiate le proprietà delle curve di RIBAUCCOUR, in quanto estremali ed eventualmente minimanti del funzionale $\int_{\Omega} y^{1/n} ds$; si discute completamente il problema del minimo del funzionale citato, nella classe delle curve piane congiungenti due punti assegnati.

Nel corso di Analisi Superiore tenuto a Roma nell'anno accademico 1950-51 e dedicato al Calcolo delle Variazioni, il prof. M. PICONE ha considerato, a titolo di esercizio, il classico funzionale $\int_{\Omega} y^{1/n} ds$ [che si presenta ad es. nel problema della superficie rotonda d'area minima, nel problema della brachistocrona, ecc.], giungendo anche a risultati nuovi. Devo al prof. M. PICONE il suggerimento di estendere e completare questi risultati, esponendo in modo sistematico quanto è stato ormai conseguito nello studio delle proprietà e degli estremi del classico funzionale menzionato. Tali l'origine e lo scopo del presente lavoro.

Poiché le curve estremali del funzionale $\int_{\Omega} y^{1/n} ds$ sono (oltre le semirette $x = \text{cost.}$, $y > 0$) le cosiddette curve di RIBAUCCOUR di indice n , la prima parte di questo lavoro sarà dedicata allo studio di tali curve, la seconda allo studio delle loro eventuali proprietà d'estremo. Nel caso in cui una di queste non dia il minimo assoluto, ma soltanto un minimo relativo, viene perfezionata ed estesa la trattazione esposta dal prof. M. PICONE nel corso predetto, intesa ad ottenere una precisa determinazione (a quanto mi consta, nuova) di una classe di curve nella quale la curva studiata fornisca il minimo assoluto, proprio od improprio.

Mi lusingo che il lettore, anche esperto della materia, trovi nelle pagine che seguono una trattazione analitica delle questioni accennate (che hanno occupato da molti anni un posto notevole nei trattati di Calcolo delle Variazioni) nuova per il perseguito rigore e l'esauriente sistemazione.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

I.

1. **Generalità.** - Le equazioni parametriche di una curva di RIBAUCCOUR di indice n sono

$$(1) \quad x = c_1 + c_2 n \int_0^\theta \frac{d\tau}{\cos^n \tau}, \quad y = \frac{c_2}{\cos^n \theta}, \quad \text{per } \left\{ \begin{array}{l} -\pi/2 < \theta < +\pi/2 \text{ se } n > 0 \\ -\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2 \text{ se } n < 0 \end{array} \right\},$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie; c_2 può supporre sempre positiva, limitandoci così alle curve tracciate nel semipiano $y \geq 0$. Dalla (1) segue che ogni curva di RIBAUCCOUR è simmetrica rispetto all'asse $x = c_1$;

se $n > 0$, non ha punti di ordinata nulla, ed, essendo $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$, è concava verso l'alto: y decresce da $+\infty$ a c_2 per $-\pi/2 < \theta \leq 0$, cresce da c_2 a $+\infty$ per $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, x invece cresce da $-\infty$ a $+\infty$ se $n \geq 1$, cresce da $c_1 + c_2 n \int_0^{-\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}$ a $c_1 + c_2 n \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}$ se $0 < n < 1$; il punto (c_1, c_2) si chiama il *vertice* della curva (punto di minima ordinata);

se $n < 0$, i soli punti di ordinata nulla della curva (1) sono i punti terminali, e la curva è concava verso il basso: y cresce da zero a c_2 per $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$, decresce da c_2 a zero per $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, x invece decresce da $c_1 + n c_2 \int_0^{-\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$ a $c_1 + n c_2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$ per $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; il punto (c_1, c_2) si chiama *vertice* della curva (punto di massima ordinata).

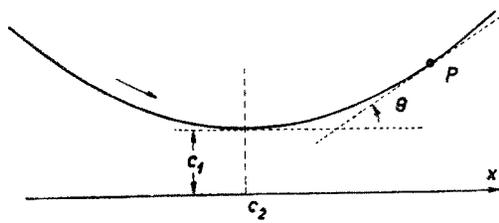


Fig. 1a.

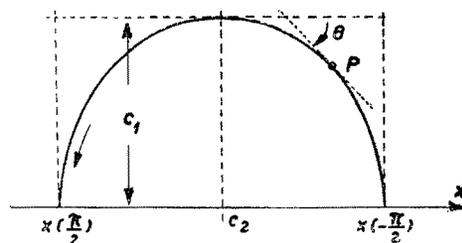


Fig. 1c.

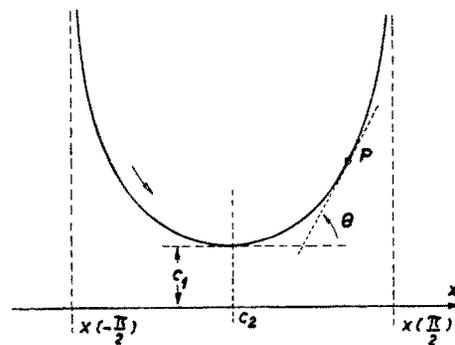


Fig. 1b.

Il parametro θ cui la curva è riferita si dirà *angolo di direzione della curva*: esso rappresenta l'angolo formato tra l'asse x e l'asse tangente generico alla curva (orientato nel verso delle x crescenti).

È anche chiaro che tutte le curve di RIBAUCCOUR possono ottenersi l'una dall'altra mediante arbitrarie omotetie di centro sull'asse x , ovvero traslazioni parallele a questo.

2. Curve di Ribaucour d'indice n negativo. - Dimostriamo che

I. *Dati due punti di differente ascissa nel semipiano $y \geq 0$, v è al più una curva di Ribaucour di indice n negativo che li congiunga.*

A questo fine si osservi che, rappresentando la curva come grafico di una funzione $y(x)$ della x , questa funzione (come si verifica subito) verifica l'equazione differenziale

$$(1) \quad ny(x)y''(x) = 1 + [y'(x)]^2.$$

Supponiamo ora per assurdo che i punti $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) siano congiunti mediante due distinte curve di RIBAUCCOUR d'indice n negativo, di cui $y = f(x)$ ed $y = g(x)$ siano le rispettive equazioni cartesiane: dalla (1) si ha $f''(x) < 0$, $g''(x) < 0$. Per ipotesi è $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$, e possiamo supporre che sia $f(x) < g(x)$ nell'intervallo aperto (x_1, x_2) . Ma in quell'intervallo la differenza $g(x) - f(x)$ ha un massimo positivo, assunto in un punto x_3 per il quale

$$(2) \quad g(x_3) > f(x_3) > 0, \quad g''(x_3) < f''(x_3) < 0,$$

$$(3) \quad g'(x_3) = f'(x_3);$$

moltiplicando membro a membro le (2) si ottiene $g(x_3)|g''(x_3)| > f(x_3)|f''(x_3)|$, mentre per le (1), (3) dev' essere $g(x_3)g''(x_3) = f(x_3)f''(x_3)$.

2.1. Dimostriamo ora che,

II. *Dati due punti di differente ascissa nel semipiano $y \geq 0$, v è sempre una curva di Ribaucour di indice n negativo che li congiunge.*

Prendiamo gli stessi punti P_1 e P_2 già considerati al n. 2.

Se, in primo luogo, è $y_1 = y_2 = 0$, l'esistenza di una tal curva equivale alla compatibilità (evidente) del sistema

$$x_1 = c_1 + nc_2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}, \quad x_2 = c_1 + nc_2 \int_0^{-\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \quad (c_2 > 0)$$

nelle incognite c_1 e c_2 .

In secondo luogo, supponiamo $y_1 = 0 < y_2$. Ogni curva di RIBAUCCOUR avente P_1 come primo estremo, ha equazioni parametriche

$$x = x_1 + nc_2 \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}, \quad y = \frac{c_2}{\cos^n \theta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (c_2 > 0);$$

perché essa passi per P_2 occorre e basta che, per un certo θ sia

$$x_2 = x_1 + ny_2 \cos^n \theta \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\tau}{\cos^n \tau},$$

ed il secondo membro di questa equazione è funzione continua di θ , tendente ad x_1 per $\theta \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$, tendente a $+\infty$ per $\theta \rightarrow -\frac{\pi^+}{2}$; tanto basta a provare il nostro assunto.

Il caso $y_1 > 0 = y_2$ è simmetrico di quello ora trattato.

Infine, consideriamo il caso $y_1 > 0, y_2 > 0$; affinché la curva 1.(1) passi per il punto P_1 , occorre e basta che, attribuendo al parametro θ un certo valore λ (minore in modulo di $\frac{\pi}{2}$), si abbia $y_1 = \frac{c_2}{\cos^n \lambda}$, $x_1 = c_1 + nc_2 \int_0^{\lambda} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}$: ciò basta ad individuare c_1 e c_2 , e di conseguenza le 1.(1) si scrivono

$$(4) \quad x = x_1 + ny_1 \cos^n \lambda \cdot \int_0^{\theta} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}, \quad y = y_1 \frac{\cos^n \lambda}{\cos^n \theta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2};$$

chiameremo la curva $L(P_1, \lambda)$, e dovendola rappresentare mediante un'equazione cartesiana, scriveremo

$$(5) \quad y = g(x, \lambda), \quad T_1(\lambda) \leq x \leq T_2(\lambda),$$

avendo chiamato $T_1(\lambda)$ e $T_2(\lambda)$ rispettivamente la minima e la massima ascissa di $L(P_1, \lambda)$. Ora, per ogni $x' > x_1$, v'è una ed una sola curva di RIBAUCCOUR di indice n congiungente P_1 con il punto $(x', 0)$, quindi $T_2(\lambda)$ è funzione monotona in senso stretto, assumente tutti i valori maggiori di x_1 ; di più abbiamo

$$\lim_{\lambda \rightarrow \frac{\pi}{2}} T_2(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \frac{\pi}{2}} ny_1 \cos^n \lambda \cdot \int_{\lambda}^{-\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = +\infty,$$

quindi $T_2(\lambda)$ è *crescente*.

Detto λ' quel valor di λ per cui $T_2(\lambda') = x_2$, tutte le curve $L(P_1, \lambda)$ per cui $\lambda \geq \lambda'$ incontrano la retta $x = x_2$, e quindi la funzione $g(x_2, \lambda)$ è definita per $\lambda \geq \lambda'$, nulla per $\lambda = \lambda'$; voglio dimostrare ch'essa è infinitamente grande per $\lambda \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$, e quindi (essendo continua) assume tutti i valori positivi — in particolare il valore y_2 , con che il teorema II è dimostrato completamente. Il minimo valore della derivata $g_x(x, \lambda)$ al variar di x nell'intervallo (x_1, x_2) si ottiene per $x = x_2$, e quindi

$$g(x_2, \lambda) > g(x_1, \lambda) + g_x(x_2, \lambda)(x_2 - x_1) = y_1 + \text{tang } \sigma(\lambda) \cdot (x_2 - x_1),$$

avendo chiamato $\sigma(\lambda)$ l'angolo di direzione della curva $L(P_1, \lambda)$ nel punto d'intersezione con la retta $x = x_2$. Basta ora provare che $\lim_{\lambda \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma(\lambda) = +\infty$, ciò che risulta evidente dalla identità

$$x_2 \equiv x_1 + y_1 n \cos^n \lambda \cdot \int_{\lambda}^{\sigma(\lambda)} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \quad (\text{si tenga presente che } n \text{ è negativo!}).$$

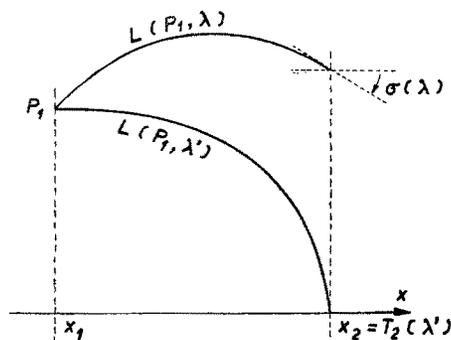


Fig. 2.

2.2. Esaminiamo ancora come varia il vertice della curva $L(P_1, \lambda)$ al variar di λ . Le sue coordinate (x_0, y_0) valgono

$$x_0 = x_1 + n y_1 \cos^n \lambda \cdot \int_{\lambda}^0 \frac{d\tau}{\cos^n \tau}, \quad y_0 = y_1 \cos^n \lambda, \quad -\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2};$$

y_0 risulta per $-\frac{\pi}{2} < \lambda < 0$ decrescente da $+\infty$ a y_1 , per $0 < \lambda < +\frac{\pi}{2}$ crescente da y_1 a $+\infty$; x_0 invece risulta crescente da $-\infty$ a $+\infty$, ed eguale a x_1 per $\lambda = 0$.

Ne segue che, dati i due punti P_1 e P_2 con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 > 0, y_2 > 0$, non v'è alcuna curva di classe C' che li congiunga, di ordinata massima h , i cui archi d'ordinata minore di h siano di RIBAUCCOUR, pur di prendere h maggiore di un certo valore positivo h' dipendente da P_1 e da P_2 .

3. **Curve di Ribaucour di indice n positivo.** - Cominceremo con lo studio delle curve di RIBAUCCOUR di indice n positivo passanti per un punto assegnato $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ del semipiano $y > 0$; esse costituiscono un fascio che chiameremo $\Phi(P_0)$. Come già s'è visto nel caso negativo quando s'è dedotta la 3.(4), anche nel caso attuale, per ogni valore λ compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$ v'è una ed una sola curva di RIBAUCCOUR $L(P_0, \lambda)$ passante per P_0 con

angolo di direzione λ , e le sue equazioni parametriche sono

$$(1) \quad x = x_0 + y_0 n \cos^n \lambda \cdot \int_{\lambda}^{\theta} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \equiv u(\theta, \lambda), \quad y = y_0 \frac{\cos^n \lambda}{\cos^n \theta} \equiv v(\theta, \lambda)$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2} \right);$$

dovendo rappresentare questa curva mediante un'equazione cartesiana, scriveremo

$$(2) \quad y = g(x, \lambda), \quad T_1(\lambda) < x < T_2(\lambda),$$

avendo posto

$$T_1(\lambda) = -\infty, \quad T_2(\lambda) = +\infty, \quad \text{per } n \geq 1,$$

$$\left. \begin{aligned} T_1(\lambda) &= x_0 + y_0 n \cos^n \lambda \cdot \int_{\lambda}^{-\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \\ T_2(\lambda) &= x_0 + y_0 n \cos^n \lambda \cdot \int_{\lambda}^{+\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \end{aligned} \right\} \text{per } n < 1.$$

Confrontando con quanto detto al n. 1, possiamo dire che

I. Se è $n < 1$, la curva $L(P_0, \lambda)$ è dotata dei due asintoti $x = T_1(\lambda)$ e $x = T_2(\lambda)$, ed è tracciata nella striscia da essi determinata.

Se invece è $n \geq 1$, la curva $L(P_0, \lambda)$ è sprovvista di asintoti, ed il suo intervallo base (riferendoci alla equazione n. (2)) è l'intero asse x .

Supponiamo ora $n < 1$. Derivando $T_1(\lambda)$ e $T_2(\lambda)$ abbiamo

$$T_1'(\lambda) = -y_0 n \left(1 + n \cos^{n-1} \lambda \operatorname{sen} \lambda \cdot \int_{\lambda}^{-\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \right), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \frac{\pi}{2}} T_1'(\lambda) = +\infty, \quad T_1'(0) = -ny_0,$$

$$T_2'(\lambda) = -y_0 n \left(1 + n \cos^{n-1} \lambda \operatorname{sen} \lambda \cdot \int_{\lambda}^{+\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \right), \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\frac{\pi}{2}} T_2'(\lambda) = +\infty, \quad T_2'(0) = -ny_0,$$

$$T_1''(\lambda) = -n^2 y_0 \left[\cos^n \lambda \cdot \int_{\lambda}^{-\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + (1-n) \operatorname{sen}^2 \lambda \cdot \cos^{n-2} \lambda \cdot \int_{\lambda}^{-\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} - \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\cos \lambda} \right].$$

Vediamo che per $0 \leq \lambda < \frac{\pi}{2}$ la derivata $T_1''(\lambda)$ è positiva, quindi $T_1'(\lambda)$ è crescente dal valore negativo $-ny_0$ a $+\infty$; poi per $-\frac{\pi}{2} < \lambda \leq 0$, $T_1'(\lambda)$ si mantiene negativo. La funzione $T_2'(\lambda)$, essendo identica a $T_1'(-\lambda)$, per $-\frac{\pi}{2} < \lambda \leq 0$ decresce dal valore $+\infty$ al valore negativo $-ny_0$, e si mantiene

negativa per $0 \leq \lambda < \frac{\pi}{2}$. In conclusione, nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ v'è un ben determinato valore *positivo* γ_n , per cui $T_1'(\gamma_n) = T_2'(-\gamma_n) = 0$. Dunque, posto

$$T_1 = x_0 + ny_0 \cos^n \gamma_n \int_{\gamma_n}^{-\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = x_0 - ny_0 \cos^n \gamma_n \int_{-\gamma_n}^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau},$$

$$T_2 = x_0 + ny_0 \cos^n \gamma_n \int_{-\gamma_n}^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau},$$

II. L'ascissa $T_2(\lambda)$ dell'asintoto destro della curva $L(P_0, \lambda)$ cresce da x_0 a T_2 per $-\frac{\pi}{2} < \lambda \leq -\gamma_n$, decresce quindi nuovamente a x_0 per $-\gamma_n < \lambda < \frac{\pi}{2}$; l'ascissa $T_1(\lambda)$ dell'asintoto sinistro decresce da x_0 a T_1 per $-\frac{\pi}{2} < \lambda \leq \gamma_n$, cresce quindi nuovamente ad x_0 per $\gamma_n \leq \lambda < \frac{\pi}{2}$.

Tutte le curve del fascio $\Phi(P_0)$ son tracciate nella striscia $T_1 < x < T_2$, di cui la retta $x = x_0$ rappresenta la mediana.

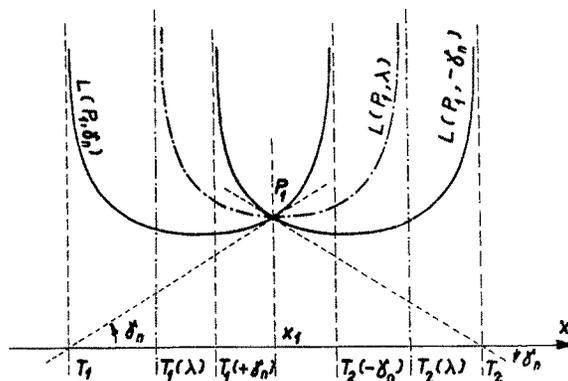


Fig. 3.

L'angolo γ_n è determinato dalla condizione

$$(3) \quad \int_{-\gamma_n}^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \cdot n \operatorname{sen} \gamma_n \cos^{n-1} \gamma_n = 1, \quad \gamma_n > 0,$$

e dipende solo dall'indice n , non dal punto P_0 ; in conseguenza della (3) abbiamo

$$(4) \quad T_1 = T_1(\gamma_n) = x_0 - y_0 \frac{\cos \gamma_n}{\operatorname{sen} \gamma_n}, \quad T_2 = T_2(-\gamma_n) = x_0 + y_0 \frac{\cos \gamma_n}{\operatorname{sen} \gamma_n},$$

ossia

III. La retta tangente in P_0 alla curva $L(P_0, \gamma_n)$ ne interseca l'asintoto sinistro $x = T_1$ sull'asse x ; d'analogia proprietà gode la curva $L(P_0, -\gamma_n)$ rispetto al suo asintoto destro.

D'ora innanzi, per trattare insieme sin dove è possibile i due casi $n \geq 1$ ed $n < 1$, porremo

$$\gamma_n = 0, \quad T_1 = -\infty, \quad T_2 = +\infty, \quad \text{per } n \geq 1.$$

3.1. La funzione $f(t)$. - Vogliamo ora studiare l'involuppo $\Lambda(P_0)$ del fascio $\Phi(P_0)$; il punto P_0 però, che certo appartiene a tale involuppo, verrà sempre escluso dalle considerazioni che seguono.

Le equazioni parametriche dell'involuppo $\Lambda(P_0)$ si possono scrivere

$$(5) \quad x = x_0 + ny_0 \cos^n t \int_t^{f(t)} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \equiv u(t), \quad y = y_0 \frac{\cos^n t}{\cos^n f(t)} \equiv v(t),$$

ove l'equazione

$$\begin{vmatrix} u_\lambda[f(t), t] & v_\lambda[f(t), t] \\ u_0[f(t), t] & v_0[f(t), t] \end{vmatrix} = 0, \quad t \neq f(t), \quad 0 < |t| < \frac{\pi}{2}$$

(ossia, nel nostro caso,

$$(6) \quad n \int_t^{f(t)} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = \frac{1}{\cos^{n-1} f(t) \sin f(t)} - \frac{1}{\cos^{n-1} t \sin t}, \quad t \neq f(t), \quad 0 < |t| < \frac{\pi}{2}$$

sia atta a definire implicitamente la funzione $f(t)$.

Discutiamo dunque, prima di procedere oltre, la relazione

$$(7) \quad n \int_\alpha^\beta \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = \frac{1}{\cos^{n-1} \beta \sin \beta} - \frac{1}{\cos^{n-1} \alpha \sin \alpha} \left(0 < \frac{|\alpha|}{|\beta|} < \frac{\pi}{2}, \alpha \neq \beta \right),$$

che lega le due variabili α e β .

Ponendo

$$(8) \quad h(t) = n \int_0^t \frac{d\tau}{\cos^n \tau} - \frac{1}{\cos^{n-1} t \sin t} \left(0 < |t| < \frac{\pi}{2} \right),$$

la (7) può anche scriversi

$$(9) \quad h(\beta) = h(\alpha) \quad \left(0 < \frac{|\alpha|}{|\beta|} < \frac{\pi}{2}, \alpha \neq \beta \right).$$

La funzione $h(t)$ è sempre crescente (la sua derivata vale $\cos^{-n}t \cdot \sin^{-2}t > 0$), è dispari, il suo limite per $t \rightarrow 0^\pm$ vale $\mp \infty$ ($h'(t)$ non è sommabile in alcun intorno sinistro né destro dello zero), per $n \geq 1$ il suo limite per $t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ vale $\pm \infty$ (in questo caso $h'(t)$ non è sommabile in alcun intorno di $\frac{\pi}{2}$ né di $-\frac{\pi}{2}$), per $n < 1$ tale limite vale invece $\pm n \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}$. La relazione (9) è evidentemente simmetrica.

Questo basta a dimostrare che per $n \geq 1$ ad ogni valore di α (non nullo, in modulo minore di $\frac{\pi}{2}$) ne corrisponde uno ed uno solo di β (pure non nullo ed in modulo minore di $\frac{\pi}{2}$) verificante la (9); chiameremo $f(\alpha)$ tale valore di β : esso risulta di segno contrario ad α . Per la simmetria della (9) e la disparità di $h(t)$, la relazione $\beta = f(\alpha)$ equivale alla $\alpha = f(\beta)$, e la funzione $f(t)$ è dispari. Infine

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} f(t) = 0^\mp, \quad \lim_{t \rightarrow 0^\pm} f(t) = \mp \frac{\pi}{2}.$$

Il grafico approssimativo della funzione $h(t)$ risulta dalla figura 4a.

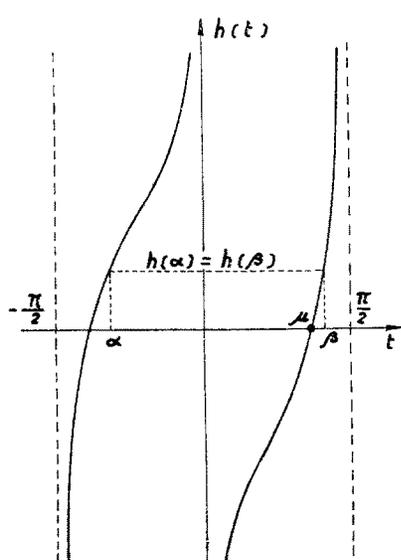


Fig. 4a.

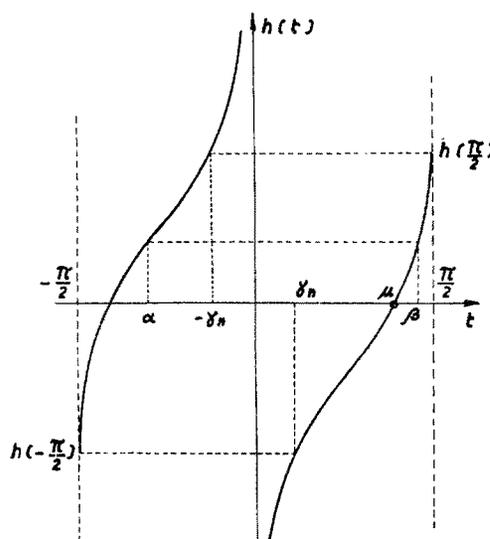


Fig. 4b.

Nel caso $n < 1$, invece, il grafico della funzione $h(t)$ risulta alla figura 4b. È evidente che non ad ogni valore di α corrisponde un valore di β soddisfacente

la (9): a questo fine occorre e basta che α sia minore di quel valore negativo $-t_n$ per cui $h(-t_n) = n \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}$ (ed allora β risulta maggiore di $+t_n$), ovvero sia maggiore di $+t_n$ (ed allora β risulta minore di $-t_n$). Ma t_n è individuato dalla condizione

$$n \int_0^{-t_n} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + \frac{1}{\cos^{n-1} t_n \operatorname{sen} t_n} = n \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau},$$

e quindi è uguale a γ_n (cfr. la (3)).

In conclusione, qualunque sia n purchè positivo.

IV. L'equazione (6) definisce implicitamente nei due intervalli aperti $(-\frac{\pi}{2}, -\gamma_n)$ e $(\gamma_n, +\frac{\pi}{2})$ una funzione $f(t)$ crescente nel primo dal valore γ_n al valore $\frac{\pi}{2}$, crescente nel secondo dal valore $-\frac{\pi}{2}$ al valore $-\gamma_n$. Tale funzione $f(t)$ è dispari e reciproca di sé medesima.

Si può osservare che, essendo $\lim_{n \rightarrow 0^+} n \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = 0$, $\lim_{n \rightarrow 1^-} n \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = +\infty$,

si ha $\lim_{n \rightarrow 0^+} \gamma_n = +\frac{\pi}{2}$, $\lim_{n \rightarrow 1^-} \gamma_n = 0$. La relazione (10) può evidentemente estendersi con la

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} f(t) = \mp \gamma_n, \quad \lim_{t \rightarrow \pm \gamma_n} f(t) = \mp \frac{\pi}{2}.$$

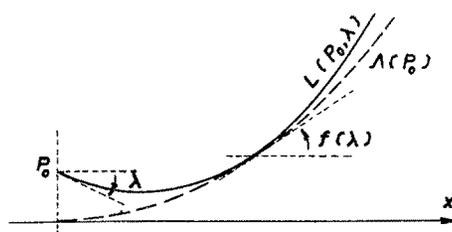


Fig. 5a.

3.2. **L'involuppo del fascio $\Phi(P_0)$.** - In conseguenza del teorema IV, le equazioni (5) definiscono (per $\gamma_n < |t| < \frac{\pi}{2}$) una curva $\Lambda(P_0)$ simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$; la curva $L(P_0, \lambda)$ non ha punti comuni con la curva $\Lambda(P_0)$ se è $|\lambda| \leq \gamma_n$; se invece è $|\lambda| > \gamma_n$, la curva $L(P_0, \lambda)$ tocca la curva $\Lambda(P_0)$ in uno ed un sol punto (che sulla curva $L(P_0, \lambda)$ corrisponde al valore $f(\lambda)$ del parametro θ , sulla curva $\Lambda(P)$ al valore λ del parametro t), il quale si

troverà per $\lambda < -\gamma_n$ a destra di P_0 , per $\lambda > \gamma_n$ a sinistra. La curva $\Lambda(P_0)$ è concava verso l'alto, il suo ramo a sinistra di P_0 è discendente, quello a destra è ascendente; infatti, derivando la prima delle (5) e successivamente confrontando con la (6), si ha

$$u'(t) = -ny_0 \frac{\cos^{n-1} t \cdot \text{sen } t}{\cos^{n-1} f(t) \cdot \text{sen } f(t)} + ny_0 \frac{\cos^n t}{\cos^n f(t)} f'(t) > 0$$

[si ricordi che t e $f(t)$ hanno segno contrario, e che $f'(t) \geq 0$], e quindi $u(t)$ è crescente dal valore T_1 (1) ad x_0 , per $\gamma_n < t < \frac{\pi}{2}$, è crescente dal valore x_0 a T_2 per $-\frac{\pi}{2} < t < -\gamma_n$; inoltre, poiché la curva $\Lambda(P_0)$ nel proprio punto corrispondente al valore λ del parametro t tocca la curva $L(P_0, \lambda)$ — la quale ha ivi angolo di direzione $f(\lambda)$ — avremo $v'(t) \equiv u'(t) \cdot \text{tang } f(t) > 0$ ovvero < 0 a seconda che sia $t < -\gamma_n$ ovvero $t > +\gamma_n$; e quindi $v(t)$ è decrescente dal valore $+\infty$ (2) al valore 0 per $+\gamma_n < t < \frac{\pi}{2}$, è crescente dal valore 0 al valore $+\infty$ per $-\frac{\pi}{2} < t < -\gamma_n$; infine, la convessità della curva $\Lambda(P_0)$ segue dalla crescenza della funzione $f(t)$, e quindi dell'angolo d'inclinazione della curva nel suo punto generico.

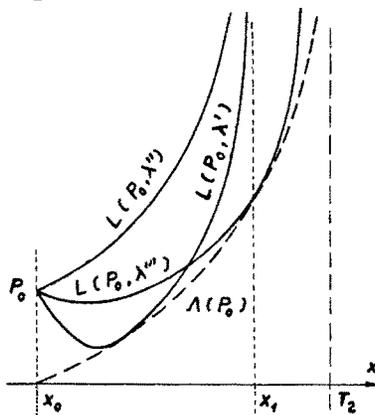


Fig. 5b.

(1) Le relazioni di limite $\lim_{t \rightarrow \gamma_n^+} u(t) = T_1$ e $\lim_{t \rightarrow -\gamma_n^-} u(t) = T_2$ sono banali conseguenze della (11), se $n < 1$, e così pure la $\lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} u(t) = x_0$. Se invece è $n \geq 1$, per il teorema di

l'Hospital abbiamo $\lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \cos^n t \int_t^{f(t)} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = \lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \int_t^{f(t)} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} / \cos^{-n} t = \lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \cos t \frac{\text{sen}^n f(t)}{\text{sen } t} = 0$.

(2) Le relazioni di limite $\lim_{t \rightarrow \pm \gamma_n} v(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} v(t) = 0$ sono banali conseguenze delle (11).

La curva $\Lambda(P_0)$ non ammette asintoti se $n \geq 1$ e (cartesianamente rappresentata) ha per intervallo base l'intero asse x , mentre se $n < 1$ ammette gli asintoti $x = T_1$ e $x = T_2$ (cioè gli asintoti di minima e massima ascissa delle curve $L(P_0, \lambda)$) ed è tracciata nella striscia da essi determinata. Si può dire che le curve $L(P_0, \gamma_n)$ e $L(P_0, -\gamma_n)$ (le quali separano le curve del fascio tangenti a $\Lambda(P_0)$ da quelle non tangenti) toccano la $\Lambda(P_0)$ all'infinito, avendo un asintoto comune con essa.

Aggregando il punto $(x_0, 0)$ alla curva $\Lambda(P_0)$ si ottiene un continuo; essa per $n \geq 1$ è in quel punto tangente all'asse x , per $n < 1$ vi ha invece un punto angoloso: l'angolo formato da ciascun ramo della $\Lambda(P_0)$ col corrispondente semiasse delle x in valore assoluto è proprio γ_n .

3.3. I punti coniugati su una curva di Ribaucour. - Prima di proseguire lo studio della curva $\Lambda(P_0)$, conviene tornare alla curva di RIBAUCCOUR 1.(1), d'indice $n > 0$, generica, che in questo numero verrà indicata con \mathcal{L} , per definirne i punti coniugati. Diremo che i due punti P_1 e P_2 della curva \mathcal{L} sono coniugati, quando uno di essi è il punto di contatto tra la curva \mathcal{L} e l'involuppo delle curve di RIBAUCCOUR (di indice n) passanti per l'altro: perché ciò si verifichi occorre e basta (in virtù dei risultati precedenti) che sia verificata la (9), α e β essendo i valori del parametro θ cui corrispondono rispettivamente i punti P_1 e P_2 ; la relazione di coniugio è evidentemente reciproca.

Una coppia di punti coniugati gode della proprietà caratteristica seguente

V. *Le due rette tangenti ad \mathcal{L} nei punti P_1 e P_2 si intersecano sull'asse x .*

Infatti le rette tangenti in parola hanno le equazioni

$$y - y_1 = (x - x_1) \cdot \operatorname{tang} \alpha \quad \text{e} \quad y - y_2 = (x - x_2) \cdot \operatorname{tang} \beta,$$

rispettivamente, e l'ordinata della loro intersezione vale

$$(x_2 - x_1) \cdot \operatorname{tang} \alpha \cdot \operatorname{tang} \beta - (y_2 \operatorname{tang} \alpha - y_1 \operatorname{tang} \beta):$$

l'annullarsi di questa equivale esattamente alla (9), in quanto per l'appartenenza dei due punti P_1 e P_2 alla curva \mathcal{L} abbiamo $\frac{y_2}{y_1} = \frac{\cos^n \alpha}{\cos^n \beta}$ e $x_2 - x_1 =$
 $= ny_0 \cos^n \alpha \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}.$

Ricordando le proprietà della funzione $f(t)$, in virtù della espressione ora trovata dell'ordinata del punto d'intersezione delle tangenti alla \mathcal{L} nei punti P_1 e P_2 :

VI. *Se le due tangenti alla curva \mathcal{L} nei punti P_1 e P_2 si intersecano al di sopra dell'asse x , allora nell'arco \mathcal{L} (P_1, P_2) non si trova alcuna coppia di*

punti coniugati; se si intersecano al disotto dell'asse x , allora nell'arco $\mathcal{L}(P_1, P_2)$ si trovano coppie di punti coniugati interni all'arco; se i punti P_1 e P_2 sono tra loro coniugati, allora l'arco $\mathcal{L}(P_1, P_2)$ non contiene altre coppie di punti coniugati.

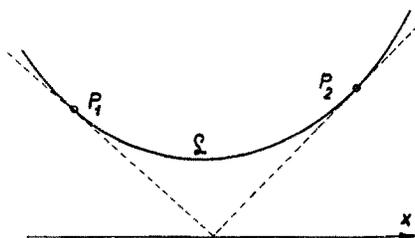


Fig. 6a.

Osserviamo che il teorema IV ha come conseguenza anche che:

VII. Se $n < 1$, la curva \mathcal{L} si divide in tre archi \mathcal{L}' , \mathcal{L}'' , \mathcal{L}''' , ad opera dei due punti P' e P'' (rispettivamente corrispondenti ai valori $-\gamma_n$ e γ_n del parametro θ) tali che

— ogni punto precedente P' ammette uno ed un solo coniugato, il quale è seguente a P'' , e viceversa;

— ogni punto dell'arco $\mathcal{L}(P', P'')$ è sprovvisto di coniugato.

Se $n \geq 1$, invece, il solo vertice della \mathcal{L} è sprovvisto di coniugato, ogni punto precedente il vertice ammette uno ed un solo coniugato, il quale è seguente il vertice, e viceversa.

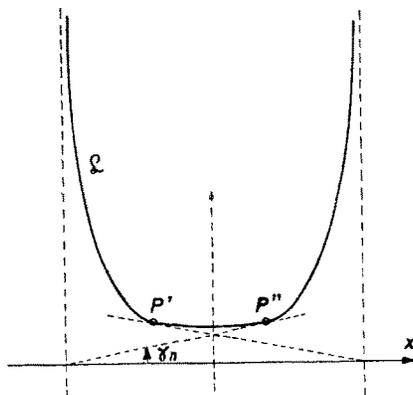


Fig. 6b.

VIII. Se $n \geq 1$, per ogni punto dell'asse x passano due rette tangenti alla curva $L(P_0, \lambda)$, aventi i punti di contatto rispettivamente precedente e seguente il vertice.

Se $n < 1$, per ogni punto dell'asse x di ascissa maggiore di $T_1(\lambda)$ e minore di $T_2(\lambda)$ passano due rette tangenti alla curva $L(P_0, \lambda)$, aventi il punto di

contatto rispettivamente precedente il punto P' e seguente il punto P'' ; per ogni punto di ascissa maggiore di $T_2(\lambda)$ [minore di $T_1(\lambda)$] passa una ed una sola retta tangente a $L(P_0, \lambda)$, avente il punto di contatto precedente [seguente] il vertice e seguente P' [precedente P'']; per il punto $(T_2(\lambda), 0)$ [per il punto $(T_1(\lambda), 0)$] passa l'asintoto destro [sinistro] della curva $L(P_0, \lambda)$, ed inoltre una ed una sola tangente, avente il punto di contatto P' [il punto di contatto P''].

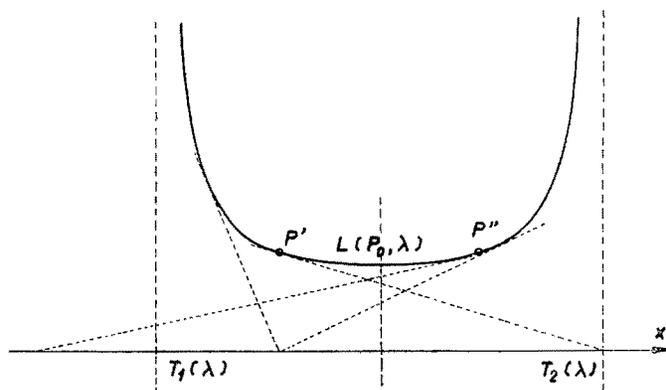


Fig. 6c.

Il teorema VII è di immediata dimostrazione, ed in un certo senso contiene risultati *duali* di quelli del n. 3.2. Il teorema VIII si riferisce alla curva $L(P_0, \lambda)$ di equazioni (1), avendo chiamato P' e P'' rispettivamente i punti corrispondenti ai valori $-\gamma_n$ e γ_n del parametro θ , coerentemente alle notazioni già adottate; per la dimostrazione di questo teorema basta osservare che la retta tangente ad $L(P_0, \lambda)$ nel punto generico di questa interseca l'asse x nel punto di ascissa $x_0 + y_0 \cos^2 \lambda [h(\theta) - h(\lambda)] - y_0 \cot \lambda$, e far variare quindi θ da $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$.

3.4. Il dominio convesso $D(P_0)$. - Dimostreremo in questo numero che

IX. Tutte le curve di Ribaucour $L(P_0, \lambda)$ del fascio $\Phi(P_0)$ son tracciate nel dominio convesso $D(P_0)$ delimitato dal loro involuppo $\Lambda(P_0)$.

Rappresenteremo, com'è ben lecito, la curva $\Lambda(P_0)$ mediante l'equazione cartesiana

$$y = q(x), \quad T_1 < x < T_2,$$

oltre che con le equazioni parametriche (5), e ci limiteremo al semipiano $x > x_0$ ⁽³⁾ data la simmetria della configurazione.

⁽³⁾ Perciò la (5) verrà considerata solo per $-\frac{\pi}{2} < t < -\gamma_n$, e la (1) per $\theta > \lambda$.

È ben noto dalla teoria degli involuipi che la derivata parziale $g_\lambda(x, \lambda)$ si annulla in corrispondenza di quei valori di x per i quali la curva (2) tocca l'involuppo $\Lambda(P_0)$, e cioè (escludendo il valore $x = x_0$) soltanto per $\lambda < -\gamma_n$, $x = u(\lambda)$; per tale valore di x avremo dunque $g(x, \lambda) = q(x) = v(\lambda)$.

Sappiamo che $g_\lambda(x, \lambda)$ è, come funzione della sola x , l'integrale di una equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine [precisamente l'equazione alle variazioni della 2.(1) relativa all'integrale $g(x, \lambda)$] verificante [in conseguenza delle identità $y_0 \equiv g(x_0, \lambda)$, $\text{tang } \lambda \equiv g_x(x_0, \lambda)$] le condizioni iniziali

$$(12) \quad g_\lambda(x_0, \lambda) \equiv 0, \quad g_{\lambda x}(x_0, \lambda) \equiv \frac{1}{\cos^2 \lambda}.$$

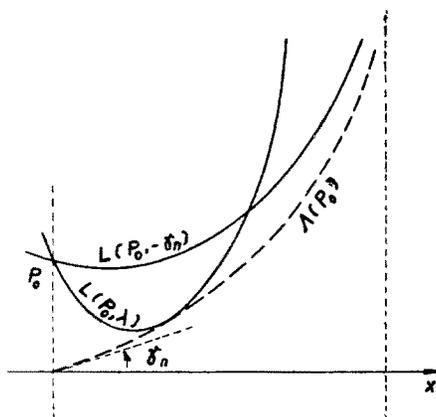


Fig. 7a.

La funzione $g_\lambda(x, \lambda)$, sicché, non è identicamente nulla, per $x = x_0$ è nulla e crescente (come funzione della sola x) e necessariamente verifica le relazioni

$$(13_1) \quad g_\lambda(x, \lambda) > 0 \quad \text{per } x_0 < x < u(\lambda), \quad -\frac{\pi}{2} < \lambda < -\gamma_n,$$

$$(13_2) \quad g_\lambda(x, \lambda) > 0 \quad \text{per } x_0 < x < T_2(\lambda), \quad -\gamma_n \leq \lambda < \frac{\pi}{2},$$

$$(13_3) \quad g_\lambda(x, \lambda) = 0 \quad \text{per } x = u(\lambda), \quad -\frac{\pi}{2} < \lambda < -\gamma_n,$$

$$(13_4) \quad g_\lambda(x, \lambda) < 0 \quad \text{per } u(\lambda) < x < T_2(\lambda), \quad -\frac{\pi}{2} < \lambda < -\gamma_n \quad (4).$$

(4) Da quanto precede è chiaro che due punti della curva (2) sono coniugati tra loro, se e solo se le rispettive ascisse sono coniugate rispetto alla equazione alle variazioni sopra menzionata (equazione di JACOBI).

Interpretiamole geometricamente. Fissata la retta $x = x_1$ con $x_0 < x_1 < T_2$, essa è certo intersecata dalla curva $L(P_0, \lambda)$ se $n \geq 1$; se $n < 1$, invece, essa è l'asintoto destro di due curve del fascio $\Phi(P_0)$, $L(P_0, \lambda')$ e $L(P_0, \lambda'')$ ($\lambda' < -\gamma_n < \lambda''$), e la generica curva $L(P_0, \lambda)$ la interseca se e solo se $\lambda' < \lambda < \lambda''$; infine, v'è un solo valore λ''' per cui sia $u(\lambda''') = x_1$: la curva $L(P_0, \lambda''')$ tocca l'inviluppo $\Lambda(P_0)$ nel punto di ascissa x_1 (e quindi è $\lambda' < \lambda''' < -\gamma_n$). Nel caso $n \geq 1$ porremo $\lambda' = -\frac{\pi}{2}$, $\lambda'' = +\frac{\pi}{2}$.

Ebbene, al crescer di λ da λ' a λ''' si ha $u(\lambda) < x_1 < T_2(\lambda)$, ed in virtù della (13₄) la funzione $g(x_1, \lambda)$ decresce da un certo valore m a $q(x_1)$;

al crescer di λ da λ''' a $-\gamma_n$, $u(\lambda)$ cresce da x_1 a T_2 , ed in virtù della (13₁) la funzione $g(x_1, \lambda)$ cresce da $q(x_1)$ a $g(x_1, -\gamma_n)$;

infine, al crescer di λ da $-\gamma_n$ a λ'' , in virtù della (13₂) la funzione $g(x_1, \lambda)$ cresce da $g(x_1, -\gamma_n)$ ad un certo valore M .

Si ha quindi sempre $g(x_1, \lambda) \geq q(x_1)$, e questo prova completamente il teorema IX. Determiniamo i due valori m ed M . Si ha

$$(14) \quad g(x_1, \lambda) \equiv y_0 \frac{\cos^n \lambda}{\cos^n \theta_1},$$

dove θ_1 è il valore individuato dalla equazione

$$(15) \quad x_1 = x_0 + ny_0 \cos^n \lambda \int_{\lambda}^{\theta_1} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}, \quad \lambda' < \lambda < \lambda''.$$

Facendo tendere λ a λ'' , θ_1 converge a $\frac{\pi}{2}$: se $n \geq 1$, perché deve essere $\theta_1 > \lambda$ ed è $\lambda'' = \frac{\pi}{2}$; se $n < 1$, perché per $\lambda = \lambda''$ si ha $x_1 = T_2(\lambda'') = x_0 + ny_0 \cos^n \lambda'' \int_{\lambda''}^{\pi/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}$.

Di conseguenza, se $n < 1$ si ha subito $M = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda''} g(x_1, \lambda) = +\infty$.

Se è $n \geq 1$, e supponendo regolare la variabile $d\lambda/d\theta_1$ si ha

$$(16) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(y_0 \frac{\cos^n \lambda}{\cos^n \theta_1} \right) = y_0 \left(\lim_{\lambda \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \lambda}{\cos \theta_1} \right)^n = y_0 \left(\lim_{\lambda \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{d\theta_1} \right)^n.$$

Dalla (15) si ha, derivando rispetto a θ_1 ,

$$\begin{aligned} 0 &= ny_0 \left[\frac{\cos^n \lambda}{\cos^n \theta_1} - \frac{d\lambda}{d\theta_1} \left(1 + n \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \cos^n \lambda \int_{\lambda}^{\theta_1} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \right) \right] = \\ &= ny_0 \left[\frac{\cos^n \lambda}{\cos^n \theta_1} - \frac{d\lambda}{d\theta_1} \left(1 + \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \frac{x_1 - x_0}{y_0} \right) \right], \end{aligned}$$

e dalla conseguente relazione

$$\frac{\cos^n \lambda}{\cos^n \theta_1} = \frac{d\lambda}{d\theta_1} \left[1 + \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\cos \lambda} \frac{x_1 - x_0}{y_0} \right]$$

seguono le seguenti possibilità:

$y_0 \frac{\cos^n \lambda}{\cos^n \theta_1}$ converge ad un limite finito [positivo perché maggior di $q(x)$], ed allora $d\lambda/d\theta_1$ è infinitesimo: ciò è assurdo per via della (16);

$y_0 \frac{\cos^n \lambda}{\cos^n \theta_1}$ diverge a più infinito, ossia è $M = +\infty$ anche per $n \geq 1$,

c. d. d.

In modo analogo si vede che anche è $m = +\infty$.

Si conchiude che, fissato un numero $y_1 > q(x_1)$, vi sono due e due sole curve $L(P_0, t_1)$ e $L(P_0, t_2)$ ($\lambda' < t_1 < \lambda'' < t_2 < \lambda'''$) congiungenti i punti P_0 e $P_1 \equiv (x_1, y_1)$; essendo $u(t_1) < x_1 < u(t_2)$, l'arco della curva $L(P_0, t_1)$ limitato

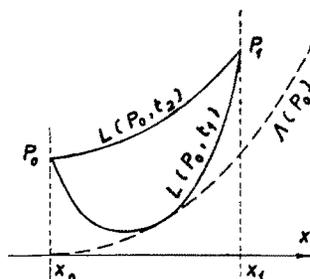


Fig. 7b

dai punti P_0 e P_1 tocca l'inviluppo $\Lambda(P_0)$ in un punto intermedio (non soddisfa la condizione di Jacobi), mentre l'analogo arco della curva $L(P_0, t_2)$ non tocca l'inviluppo (soddisfa la condizione di Jacobi); valendosi delle (13) si dimostra subito che l'arco della curva $L(P_0, t_1)$ limitato dai punti P_0 e P_1 si trova tutto al disotto dell'altro, salvo gli estremi. Enunciamo dunque il teorema

X. *Tutti i punti interni al dominio convesso $D(P_0)$ aventi ascissa diversa da x_0 , possono congiungersi con P_0 mediante due archi del fascio $\Phi(P_0)$, uno dei quali verifica la condizione di Jacobi in senso stretto, l'altro non la verifica: quest'ultimo è tracciato interamente al disotto del primo, salvo i punti terminali.*

Tutti i punti P della curva $\Lambda(P_0)$ aventi ascissa diversa da x_0 , possono congiungersi con il punto P_0 mediante un solo arco del fascio $\Phi(P_0)$, il quale riesce tangente a $\Lambda(P_0)$ in P (verifica la condizione di Jacobi in senso lato).

Nessun punto esterno al dominio $D(P_0)$ od avente ascissa x_0 , può esser congiunto a P_0 mediante un arco del fascio $\Phi(P)$ (5).

(5) I risultati esposti sino a questo punto sono noti; cfr. ad es. [1], nn. 77-79.

3.5. È utile aver presenti condizioni necessarie e sufficienti, ed anche condizioni soltanto sufficienti affinché i due punti P_0 e P_1 del semipiano $y > 0$ possano esser congiunti mediante curve di RIBAUCCOUR di indice $n > 0$. L'equazione $x = u(t)$, tenendo conto della (6), può esser scritta

$$(17) \quad x = x_0 + y_0 \frac{\cos^n t}{\cos^n f(t)} \cot f(t) - y_0 \cot t.$$

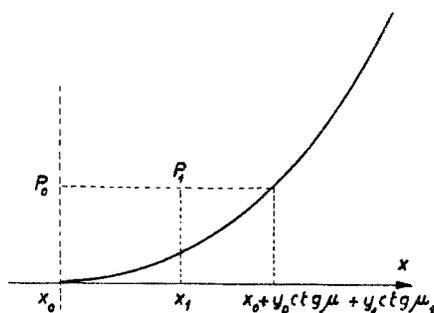


Fig. 8.

Fissato il punto $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, esiste unico e determinato il valore μ_0 positivo per cui $v(\mu_0) = y_0$ ($\gamma_n < \mu_0 < \frac{\pi}{2}$); posto $\mu_1 = |f(\mu_0)|$, affinché il punto P_1 non sia esterno all'involuppo $\Lambda(P_0)$ occorre e basta che sia $|x_1 - x_0| \leq y_0 \cot \mu_0 + y_1 \cot \mu_1$, in forza della (17). Si noti che scambiando l'ufficio dei due punti P_0 e P_1 si ottiene ancora la stessa condizione, in quanto (teor. IV) la relazione $\mu_1 = |f(\mu_0)|$ equivale alla $\mu_0 = |f(\mu_1)|$, ed è $v(t) = y_0 \cos^n t / \cos^n f(t)$; quindi, com'era evidente anche a priori, P_1 è esterno a $\Lambda(P_0)$ quando e solo quando P_0 è esterno a $\Lambda(P_1)$.

In definitiva,

XI. *Dati i punti $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ del semipiano $y > 0$, sono determinati in corrispondenza due numeri positivi μ_0 e μ_1 (dipendenti solo da n, y_0, y_1) tali che:*

i punti P_0 e P_1 possono congiungersi mediante due archi di Ribaucour di indice n — uno dei quali verificante la condizione di Jacobi in senso stretto — se e solo se

$$(18) \quad 0 < |x_0 - x_1| < y_0 \cot \mu_0 + y_1 \cot \mu_1;$$

possono congiungersi mediante un solo arco di Ribaucour di indice n — verificante la condizione di Jacobi solo in senso lato — se e solo se

$$(18') \quad 0 < |x_0 - x_1| = y_0 \cot \mu_0 + y_1 \cot \mu_1.$$

Le costanti μ_0 e μ_1 sono determinate dalle condizioni

$$(19) \quad y_0 \cos^n \mu_0 = y_1 \cos^n \mu_1, \quad \mu_0 > 0, \quad \mu_1 > 0,$$

$$(19') \quad h(\mu_0) + h(\mu_1) = 0.$$

La (19') si scrive, per esteso,

$$n \int_{-\mu_0}^{\mu_1} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = \frac{1}{\cos^{n-1} \mu_0 \operatorname{sen} \mu_0} + \frac{1}{\cos^{n-1} \mu_1 \operatorname{sen} \mu_1}.$$

Ricaviamone ora una condizione soltanto sufficiente. V' è uno ed un sol valore μ per cui

$$(20) \quad h(\mu) = 0 \quad \text{ossia} \quad n \int_0^\mu \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = \frac{1}{\cos^{n-1} \mu \operatorname{sen} \mu}, \quad \text{e} \quad \mu > 0;$$

la (19) è soddisfatta ponendo $\mu_0 = \mu_1 = \mu$. Dalla relazione

$$(21) \quad \frac{y_0}{y_1} > |x_0 - x_1| \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tang} \mu > 0$$

segue, supposto che sia $y_0 \leq y_1$, $0 < |x_0 - x_1| < 2y_0 \cot \mu$, e quindi la (18), postovi $\mu_0 = \mu_1 = \mu$; ma anche la (19) è soddisfatta se vi si pone $\mu_0 = \mu_1 = \mu$ e si legge y_0 in luogo di y_1 : dunque dalla (21) segue che il punto (x_1, y_0) è interno al dominio $D(P_0)$, a maggior ragione il punto $P_1 \equiv (x_1, y_1)$. In conclusione:

XII. *La (21) è condizione sufficiente perché i punti P_0 e P_1 possano congiungersi mediante due archi di Ribaucour di indice n , uno dei quali verificante in senso stretto la condizione di Jacobi.*

Il valore μ , dipendente solo da n , è determinato dalla (20).

A titolo d'esempio, per $n = 2$, la (19') dice $\mu_0 + \mu_1 = \frac{\pi}{2}$, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$, e la (19) di conseguenza $y_0/y_1 = \operatorname{tang}^2 \mu$. Le (18) e (18') si scrivono

$$(22) \quad 0 < |x_0 - x_1| < 2\sqrt{y_0 y_1}, \quad \text{ovverosia} \quad 0 < (x_0 - x_1)^2 < 4y_0 y_1,$$

$$(22') \quad (x_0 - x_1)^2 = 4y_0 y_1 \quad (6)$$

rispettivamente. La (20) poi dice: $\mu = \frac{\pi}{4}$, e la (21) di conseguenza si scrive

$$(21') \quad \frac{y_0}{y_1} > \frac{1}{2} |x_0 - x_1|.$$

3.6. Notiamo ancora due cose.

XIII. *Per un punto P_1 interno al dominio $D(P_0)$ — ed avente ascissa diversa, ad es. maggiore di x_0 — passa una ed una sola curva del fascio $\Phi(P_0)$ tangente all'inviluppo $\Lambda(P_0)$ in un punto di ascissa compresa tra x_0 e x_1 .*

(6) Le (22) e (22') sono ben note: per $n = 2$ le curve $L(P_0, \lambda)$ sono parabole, il loro inviluppo la parabola di sicurezza, di cui la (22') è l'equazione nelle variabili x_1 e y_1 . Sempre per $n = 2$, la (21') è stata provata in [1], n. 82.

Sia \mathcal{L} una curva del fascio soddisfacente l'enunciato del teorema, e P_2 sia il punto di contatto tra \mathcal{L} e $\Lambda(P_0)$; sia \mathcal{L}' la curva del fascio $\Phi(P_0)$ tangente a $\Lambda(P_0)$ in P_2 : avendo in P_2 la stessa direzione, le due curve \mathcal{L} e \mathcal{L}' devono coincidere (come integrali della equazione 2.(1)) ed il teorema è dimostrato.

Vediamo infine come varia il vertice della curva $L(P_0, \lambda)$ al variar di λ . Esso ha le coordinate

$$x_* = x_0 + ny_0 \cos^n \lambda \int_{\lambda}^0 \frac{d\tau}{\cos^n \tau}, \quad y_* = y_0 \cos^n \lambda \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \lambda < +\frac{\pi}{2} \right);$$

poiché $x_* - x_0$ risulta funzione dispari, ed y_* funzione pari di λ possiamo studiarle solo per $\lambda < 0$.

La y_* risulta crescente da 0 a y_0 ; per la x_* abbiamo $x_* > x_0$, $\lim_{\lambda \rightarrow -\frac{\pi}{2}} x_* = x_0$:

ciò è immediato se $n < 1$, mentre per $n \geq 1$ si dimostra con il teorema di L'Hospital. Risulta da ciò in particolare che, per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, v'è una sola curva $L(P_0, \lambda)$ con $\lambda > 0$, ed una sola con $\lambda < 0$ aventi il vertice d'ordinata ε : l'ascissa di questo vertice tende a x_0 per ε tendente a zero.

In altre parole

XIV. *Per ogni numero positivo h abbastanza piccolo v'è una ed una sola curva del fascio $\Phi(P_0)$ che sia tangente alla retta $y = h$ in un punto a destra di P_0 , v'è una ed una sola curva del fascio $\Phi(P_0)$ che sia tangente alla retta $y = h$ in un punto a sinistra di P_0 . Al tender di h a zero, le ascisse dei punti di contatto tendono a x_0 .*

II.

4. **Il problema variazionale « ribaucouriano ».** - Consideriamo il funzionale di linea $J(L) = \int_L y^{1/n} ds$ - con n reale non nullo - nella classe Γ di tutte le curve L continue e rettificabili per le quali l'integrale indicato abbia senso, aventi fissati punti terminali $A \equiv (a, c)$ e $B \equiv (b, d)$. Ci proponiamo di discutere, nei numeri seguenti, il problema del minimo per il funzionale $J(L)$ nella classe di curve Γ .

Evidentemente, per $n > 0$ la classe Γ è costituita di tutte le curve (continue e rettificabili: questa proprietà d'ora innanzi verrà sottintesa) tracciate nel semipiano chiuso $y \geq 0$ del piano (x, y) , e congiungenti i due punti A e B ; per $n < -1$, invece, Γ è costituita di tutte le curve tracciate nel semipiano aperto $y > 0$, e di alcune tracciate nel semipiano chiuso $y \geq 0$, congiungenti A con B ; per n negativo e non minore di -1 , infine, Γ è costituita solo di curve tracciate nel semipiano aperto $y > 0$. Ad es., nel secondo caso, l'integrale $J(L)$ ha senso se L è un segmento avente un estremo sull'asse x , ma

non giacente su tale asse; nell'ultimo caso, se L è una curva avente un punto sull'asse x , e massima ordinata $y' > 0$, detta L' la proiezione di L sull'asse y avremo $J(L) \geq J(L') = +\infty$.

Nei primi due casi supporremo $c \geq 0$, $d \geq 0$, nel terzo caso $c > 0$, $d > 0$. Per fissare le idee, supporremo anche (senza essenziale restrizione) $a \leq b$, $c \leq d$, e penseremo ogni curva di Γ orientata nel verso che da A va a B ; con $x = x(s)$, $y = y(s)$ ne indicheremo le equazioni parametriche riferite all'ascissa curvilinea s di origine A ; l sarà la lunghezza della generica curva di Γ .

Prima di enunciare il teorema di esistenza, dimostriamo alcune proprietà elementari del funzionale $J(L)$.

4.1 Proprietà elementari del funzionale $J(L)$. - Se una curva L ammette più punti aventi la medesima ascissa x_0 , detto P_1 il primo e P_2 l'ultimo di essi, abbiamo

$$(L) \int_{P_1}^{P_2} y^{1/n} ds = \int_{s_1}^{s_2} y^{1/n}(s) ds \geq \int_{s_1}^{s_2} y^{1/n}(s) |y'(s)| ds \geq \left| \int_{s_1}^{s_2} y^{1/n}(s) dy(s) \right| = \int_{(y_1, y_2)} y^{1/n} dy \quad (7);$$

se la curva L ammette due punti P_1 e P_2 aventi la medesima ordinata y_0 , tali che tutti i punti intermedi hanno ordinata maggiore di y_0 , allora

$$(L) \int_{P_1}^{P_2} y^{1/n} ds = \int_{s_1}^{s_2} y^{1/n}(s) ds \geq \int_{s_1}^{s_2} y^{1/n}(s) |x'(s)| ds \geq \left| \int_{s_1}^{s_2} y^{1/n}(s) dx(s) \right| > \int_{(x_1, x_2)} y_0^{1/n} dx \text{ per } n > 0;$$

se la curva L ammette due punti P_1 e P_2 aventi la medesima ordinata y_0 , tali che tutti i punti intermedi hanno ordinata minore di y_0 , allora

$$(L) \int_{P_1}^{P_2} y^{1/n} ds = \int_{s_1}^{s_2} y^{1/n}(s) ds \geq \int_{s_1}^{s_2} y^{1/n}(s) |x'(s)| ds \geq \left| \int_{s_1}^{s_2} y^{1/n}(s) dx(s) \right| > \int_{(x_1, x_2)} y_0^{1/n} dx, \text{ per } n < 0;$$

conseguentemente possiamo enunciare il teorema:

I. *Se una curva L della classe Γ ammette un arco di corda verticale ⁽⁸⁾, sostituendo a quest'arco la sua corda si ottiene una curva L' , anch'essa appartenente alla classe Γ , tale che $J(L) \geq J(L')$; il segno = sussistendo solo quando è $L \equiv L'$.*

(7) È ovvia l'intesa: se si indica con P un punto generico, di coordinate x, y, s , un punto particolare indicato con P affetto da apici, indici, ecc., avrà le coordinate x, y, s contrassegnate allo stesso modo.

(8) Cioè parallela all'asse y ; così diremo orizzontale un segmento parallelo all'asse x . diremo che un punto è al di sopra o a destra di un altro, se ha ordinata o rispettivamente ascissa maggiore, ecc.

Se una curva L della classe Γ ammette un arco di corda orizzontale, situato tutto al disopra della propria corda per $n > 0$, situato tutto al disotto per $n < 0$ (salvo i punti terminali), allora sostituendo a quest'arco la sua corda si ottiene una curva L' , anch'essa appartenente alla classe L' tale che $J(L) > J(L')$.

La seconda parte di questo teorema può perfezionarsi con le considerazioni seguenti. Prendiamo nel semipiano $y > 0$ due punti P_1 e P_2 , la cui congiungente intersechi entrambi gli assi coordinati; ad es., supponiamo $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. Limitiamoci per il momento al caso $n > 0$. Sia P_3 un punto al di sopra della retta P_1P_2 , tale che $x_1 < x_3 < x_2$, $y_1 < y_3 < y_2$; il segmento P_1P_2

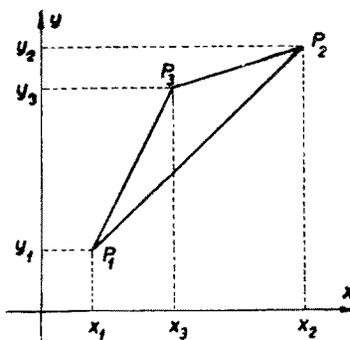


Fig. 9c.

e la poligonale $P_1P_3P_2$ sono i grafici di due funzioni di y assolutamente continue, rispettivamente $x = F(y)$ ed $x = f(y)$ ($y_1 \leq y \leq y_2$). Posto

$$S(y) = \int_{y_1}^y \sqrt{1 + F'(t)^2} dt, \quad s(y) = \int_{y_1}^y \sqrt{1 + f'(t)^2} dt, \quad y_1 \leq y \leq y_2.$$

avremo

$$\begin{aligned} \int_{P_1P_2} y^{1/n} ds &= \int_{y_1}^{y_2} y^{1/n} S'(y) dy = [y^{1/n} S(y)]_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} S(y) d(y^{1/n}), \\ \int_{P_1P_3P_2} y^{1/n} ds &= \int_{y_1}^{y_2} y^{1/n} s'(y) dy = [y^{1/n} s(y)]_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} s(y) d(y^{1/n}), \\ (1) \quad \int_{P_1P_3P_2} y^{1/n} ds - \int_{P_1P_2} y^{1/n} ds &= y_2^{1/n} [\overline{P_1P_3} + \overline{P_3P_2} - \overline{P_1P_2}] - \int_{y_1}^{y_2} [s(y) - S(y)] d(y^{1/n}); \end{aligned}$$

è subito visto che la funzione $s(y) - S(y)$ assume il suo massimo valore per

$y = y_2$ ⁽⁹⁾, e quindi, per il teorema della media,

$$\int_{y_1}^{y_2} [s(y) - S(y)] d(y^{1/n}) \leq (y_2^{1/n} - y_1^{1/n}) \cdot [\overline{P_1 P_3} + \overline{P_3 P_2} - \overline{P_1 P_2}],$$

$$\int_{P_1 P_3 P_2} y^{1/n} ds - \int_{P_1 P_2} y^{1/n} ds \geq y_1^{1/n} [\overline{P_1 P_3} + \overline{P_3 P_2} - \overline{P_1 P_2}] > 0,$$

$$(2) \quad \int_{P_1 P_3 P_2} y^{1/n} ds > \int_{P_1 P_2} y^{1/n} ds.$$

Poiché si può far tendere P_3 a qualunque dei punti dei due segmenti $y = y_2$, $x_1 \leq x < x_2$, ovvero $x = x_1$, $y_1 < y \leq y_2$, in modo tale che la variabile $\int_{P_1 P_3 P_2} y^{1/n} ds$ risulti non decrescente, la (2) si può ritenere valida anche supponendo $x_1 \leq x_3 \leq x_2$, $y_1 \leq y_3 \leq y_2$; infine, in virtù della prima parte del teorema I, la validità della (2) sussiste per tutti i punti P_3 del semipiano $y \geq 0$ che sono situati *al disopra* ⁽¹⁰⁾ della retta $P_1 P_2$.

Analogamente, nel caso $n < 0$ si dimostra che la (2) sussiste per tutti i punti P_3 del semipiano $y > 0$ che sono situati *al disotto* della retta $P_1 P_2$: basterà solo osservare che (nella ipotesi provvisoria $x_1 < x_3 < x_2$, $y_1 < y_3 < y_2$) si ha $s(y) - S(y) > 0$ ed $y^{1/n}$ decresce nell'intervallo (y_1, y_2) , per cui dalla (1) segue direttamente la (2).

Posso allora enunciare il teorema:

II. *Se una curva L della classe Γ ammette un arco di corda non verticale, situato tutto al disopra della propria corda (salvo i punti terminali) per $n > 0$, situato tutto al disotto per $n < 0$, allora sostituendo a quest'arco la sua corda si ottiene una curva L'. anch' essa appartenente a Γ , tale che $J(L) > J(L')$.*

Per dimostrare ciò, basta inscrivere nell'arco in questione una poligonale, ed applicare a questa la (2) un numero opportuno di volte: se γ è l'arco, P_1 e P_2 sono i suoi estremi, π è la poligonale, δ è la massima lunghezza dei lati di quest'ultima, allora $\int y^{1/n} ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\pi} y^{1/n} ds \geq \int_{P_1 P_2} y^{1/n} ds$; si esclude poi facilmente il segno di eguale.

L'eventuale curva minimante, quindi, è tale che tutti i suoi archi di corda verticale si identificano con questa, e degli altri archi nessuno ha punti al di $\left\{ \begin{array}{l} \text{sopra} \\ \text{sotto} \end{array} \right\}$ della propria corda, a seconda che sia $\left\{ \begin{array}{l} n > 0 \\ n < 0 \end{array} \right\}$; tanto vale dire

⁽⁹⁾ Infatti, $s'(y) - S'(y) < 0$ per $y_1 \leq y < y_3$, $s'(y) - S'(y) > 0$ per $y_3 < y \leq y_2$, $s(y_1) - S(y_1) = 0$, $s(y_2) - S(y_2) = \overline{P_1 P_3} + \overline{P_3 P_2} - \overline{P_1 P_2} > 0$.

⁽¹⁰⁾ Ossia nel semipiano

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

che l'eventuale curva minimante è una curva *convessa*, tracciata nella striscia $x_1 \leq x \leq x_2$, e volgente la convessità nel verso negativo delle y se $n > 0$, nel verso positivo se $n < 0$:

III. Se la curva L è minimante per il funzionale $J(L)$ nella totalità Γ , allora $x(s)$ è non decrescente nell'intervallo $(0, l)$, e detti P_1 l'ultimo punto di ascissa a , P_2 il primo di ascissa b , $x(s)$ è crescente nell'intervallo (s_1, s_2) ; inoltre,

nel caso $n > 0$, detti P_3 e P_4 il primo e l'ultimo punto di minima ordinata, $y(s)$ riesce decrescente per $0 \leq s \leq s_3$, costante per $s_3 \leq s \leq s_4$, crescente per $s_4 \leq s \leq l$;

nel caso $n < 0$, detti P_3 e P_4 il primo e l'ultimo punto di massima ordinata, $y(s)$ riesce crescente per $0 \leq s \leq s_3$, costante per $s_3 \leq s \leq s_4$, decrescente per $s_4 \leq s \leq l$.

Cominciamo col provare la non decrescenza di $x(s)$. Supponiamo per assurdo che sia $l \geq s'' > s' \geq 0$, $x'' < x'$; non potendo esser ad un tempo $x' \leq a$ ed $x'' \geq b$, ammetteremo che sia $x' > a$ [cfr. fig. 9a; l'altro caso è perfettamente analogo]: per la continuità di $x(s)$ si sono due valori \bar{s} ed \bar{s} tali che $0 < \bar{s} < s' < \bar{s} < s''$, $a < \bar{x} = \bar{x} < x'$; ma allora, sostituendo nella curva L (supposta minimante) all'arco di estremi \bar{P} e \bar{P} la sua corda, per il teorema I il valore del funzionale $J(L)$ dovrebbe diminuire; in modo analogo, sfruttando il teorema II si dimostra che nell'intervallo (s_1, s_2) $x(s)$ è proprio crescente.

Supponiamo ora $n > 0$. Detto s^* un valore nell'intervallo $(0, l)$ in cui $y(s)$ assume il suo minimo valore, supponiamo per assurdo che sia $s^* > s'' > s' > 0$, $y'' > y'$ [cfr. fig. 9b; la non decrescenza di $y(s)$ nell'intervallo (s^*, l) si prova in modo affatto analogo]; per la continuità di $y(s)$ vi sono due valori \bar{s} ed \bar{s} tali che $s' < \bar{s} < s'' < \bar{s} < s^*$, $y = \bar{y} < y(s)$ per $\bar{s} < s < \bar{s}$: ma allora sostituendo nella curva L (supposta minimante) all'arco di estremi \bar{P} e \bar{P} la sua corda, per il teorema I il valore del funzionale $J(L)$ dovrebbe diminuire; in modo analogo poi, sfruttando il teorema II si prova che $y(s)$ è proprio decrescente per $0 \leq s \leq s_3$, e crescente per $s_4 \leq s \leq l$.

Il caso $n < 0$ è del tutto simile a quello ora trattato.

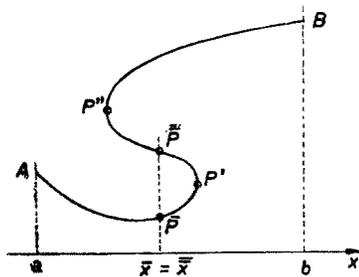


Fig. 9a.

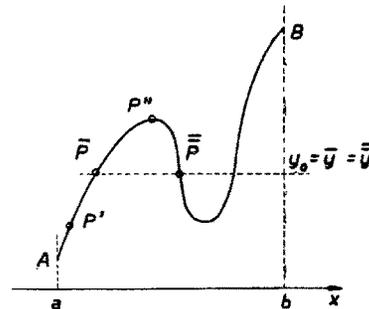


Fig. 9b.

Non è difficile persuadersi che l'arco di minimante L di estremi P_1 e P_2 , di cui al teorema III, è il grafico di una funzione assolutamente continua di x , la cui derivata (nell'insieme in cui è definita) è non decrescente se $n > 0$, non crescente se $n < 0$. Supponiamo ad es. $n > 0$; si prenda sull'arco predetto un punto P_0 , distinto dagli estremi, si diano alla sua ascissa x , gl'incrementi $\Delta x_2 > \Delta x_1 > 0$ [$\Delta x_2 < \Delta x_1 < 0$], e si considerino i corrispondenti incrementi Δy_2 ed Δy_1 , della sua ordinata: per la dimostrata convessità di L avremo $\Delta y_2/\Delta x_2 \geq \Delta y_1/\Delta x_1$ [$\Delta y_2/\Delta x_2 \leq \Delta y_1/\Delta x_1$], e questo prova che $y(x)$ è dotata di derivata sinistra e destra in ogni punto interno all'intervallo (a, b) ; analogamente si vede che la derivata sinistra non supera la destra, ed entrambe sono non decrescenti, ciò che prova la lipschitzianità di $y(x)$ in ogni intervallo interno ad (a, b) , ed indirettamente l'assoluta continuità di $y(x)$ in tutto (a, b) .

4.2. È ben noto che il funzionale $J(L)$ è positivamente regolare nel semipiano $y > 0$, e quindi gli eventuali archi di minimante tracciati in tale semipiano sono archi di estremale di classe C'' ⁽⁴⁾. Le equazioni di EULERO, considerando il problema in forma parametrica, si scrivono

$$y^{1/n}(s) \cdot \frac{dx}{ds} = \text{cost.}, \quad \frac{1}{n} y^{1/n-1}(s) - \frac{d}{ds} \left[y^{1/n} \frac{dy}{ds} \right] = 0,$$

considerando invece in problema in forma ordinaria ed assumendo x come variabile indipendente

$$(3) \quad n \cdot y(x) \cdot y''(x) = 1 + [y'(x)]^2;$$

è subito visto che le rette $x = \text{cost.}$ sono estremali (com'era ben naturale), non lo sono invece le rette $y = \text{cost.}$; d'altra parte ogni arco d'estremante che non contenga segmenti $x = \text{cost.}$ è rappresentabile con equazione del tipo $y = y(x)$, e se ha sempre ordinata positiva, dev'essere un'integrale della (3): dunque le uniche estremali sono, oltre le rette verticali, le curve di RIBAUCCOUR di indice n . Ricordando le proprietà di queste curve, e tenendo presente che le minimanti non possono avere punti angolosi di ordinata positiva, possiamo dire:

IV. *Nel caso $n < 0$; se $a = b$, l'unica curva minimante per il funzionale $J(L)$ è il segmento AB ; se $a < b$, l'unica minimante ammissibile è la curva di Ribaucour di indice n congiungente A con B .*

Nel caso $n > 0$; detti A' e B' rispettivamente i punti $(a, 0)$ e $(b, 0)$, se $a = b$, l'unica minimante ammissibile è il segmento AB ; se $a < b$, $0 = c \leq d$, l'unica minimante ammissibile è la poligonale $AB'B$; se $a < b$, $0 < c \leq d$, vi sono al più tre minimanti ammissibili, la poligonale $AA'B'B$, e le due eventuali curve di Ribaucour d'indice n congiungenti A con B .

⁽⁴⁾ Cfr. [1], n. 57.

Coi metodi dell'Analisi Funzionale si dimostra che

V. Il funzionale $J(L)$ ha sempre minimo nella classe Γ , dato da una delle curve indicate dal teorema IV ⁽¹²⁾.

Resta ormai solo da vedere quale delle tre curve ammissibili come minimanti nel caso $n > 0$, $a < b$, $0 < c \leq d$ dia effettivamente il minimo; a ciò sono dedicati i due numeri seguenti. Per brevità chiameremo L_1 l'eventuale arco di RIBAUCCOUR d'indice n congiungente A con B e verificante la condizione di JACOBI, L_2 l'eventuale arco di RIBAUCCOUR d'indice n congiungente A con B e non verificante la condizione di JACOBI in senso stretto, L_3 la poligonale $AA'B'B$. Evidentemente il nostro compito si riduce al confronto tra i valori $J(L_1)$ e $J(L_3)$, L_2 non soddisfacendo una condizione necessaria per il minimo ⁽¹³⁾.

5. La funzione $f^*(t)$. - Torniamo a considerare il fascio $\Phi(P_0)$ già studiato al numero 3. Sulla generica curva $L(P_0, \lambda)$ prendiamo un punto $P \equiv (x, y)$, corrispondente al generico valore θ del parametro cui la curva è riferita; data la simmetria della configurazione, possiamo ben supporre $x_0 < x$ e quindi $\lambda < \theta$.

Detti P'_0 e P' rispettivamente i punti $(x_0, 0)$ e $(x, 0)$, abbiamo

$$(4) \quad \int_{P_0 P'_0 P' P} y^{1/n} ds = \frac{n}{n+1} (y_0^{1+\frac{1}{n}} + y^{1+\frac{1}{n}}) = \frac{n}{n+1} y_0^{1+\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{\cos^{1+n} \lambda}{\cos^{1+n} \theta} \right),$$

$$(5) \quad (L(P_0, \lambda)) \int_{P_0}^P y^{1/n} ds = n y_0^{1+\frac{1}{n}} \int_{\lambda}^{\theta} \frac{\cos^{1+n} \lambda}{\cos^{2+n} \tau} d\tau.$$

Evidentemente, affinché gl'integrali (4) e (5) siano eguali occorre e basta che sia

$$(6) \quad (n+1) \int_{\lambda}^{\theta} \frac{d\tau}{\cos^{2+n} \tau} - \frac{1}{\cos^{1+n} \lambda} - \frac{1}{\cos^{1+n} \theta} = 0.$$

Prima di procedere oltre, discutiamo l'equazione (6) nella incognita θ . Posto

$$(7) \quad h^*(t) = (n+1) \int_0^t \frac{d\tau}{\cos^{n+2} \tau} - \frac{1}{\cos^{n+1} t} \equiv (n+1) \int_0^t \frac{1 - \operatorname{sen} \tau}{\cos^{n+2} \tau} d\tau - 1, \quad |t| < \frac{\pi}{2},$$

⁽¹²⁾ Cfr. ad es. [3], dove si utilizzano le proprietà delle curve di Ribaucour provate nei numeri precedenti.

⁽¹³⁾ E precisamente la condizione di JACOBI; cfr. ad es. [1], n. 81.

la (6) può esser scritta

$$(6') \quad h^*(\theta) + h^*(-\lambda) = 0.$$

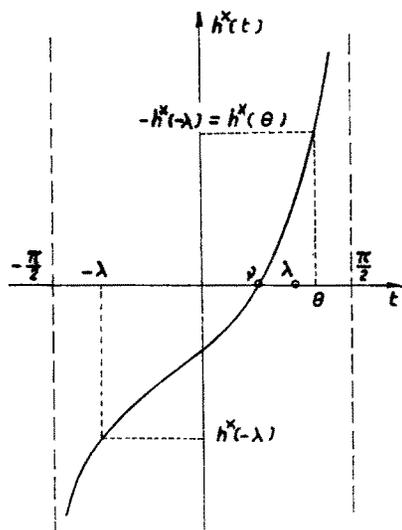


Fig. 10a.

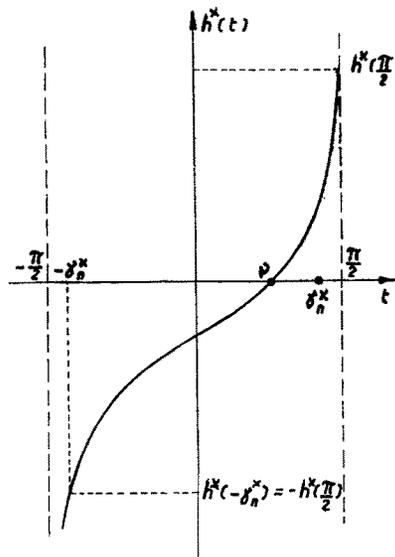


Fig. 10b.

Se $n \geq 1$, $h^*(t)$ cresce da $-\infty$ a $+\infty$, risultando eguale a -1 per $t=0$; se $n < 1$, $h^*(t)$ cresce da $-\infty$ ad un valore finito $h^*(\pi/2) = (n+1) \cdot$

$\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin \tau}{\cos^{n+2} \tau} d\tau - 1$, il quale risulta positivo essendo funzione di n crescente e nulla per $n=0$ ⁽¹⁴⁾.

In conseguenza di ciò, se $n \geq 1$, la (6') ad ogni λ compreso tra $-\pi/2$ e $\gamma_n^* = +\pi/2$ fa corrispondere un ben determinato valore di θ [che chiameremo $f^*(\lambda)$] il quale risulta crescente da $-\pi/2$ a $+\pi/2$.

Per $n < 1$, chiamiamo γ_n^* quel ben determinato valore di t per cui

$$(8) \quad -h^*(-\gamma_n^*) = h^*(\pi/2) = (n+1) \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin \tau}{\cos^{n+2} \tau} d\tau - 1;$$

ad ogni valore di λ compreso tra $-\pi/2$ e γ_n^* [e soltanto a questi valori di λ] la (6') fa corrispondere uno ed un sol valore di θ [che chiameremo $f^*(\lambda)$], il quale risulta crescente da $-\gamma_n^*$ a $+\pi/2$.

Si noti che la relazione $\theta = f^*(\lambda)$ equivale all'altra $\lambda = -f^*(-\theta)$, e che γ_n^* come funzione di n varia da $-\pi/2$ a $+\pi/2$ per $0 < n < 1$.

⁽¹⁴⁾ Sarà utile osservare che per n negativo e maggior di -1 la funzione $h^*(t)$ è sempre negativa, tale risultando il suo estremo superiore $h^*(\frac{\pi}{2})$.

Abbiamo pertanto il teorema:

I. Se $n \geq 1$, su ogni curva $L(P_0, \lambda)$ v'è un punto P_λ seguente P_0 [corrispondente al valore $f^*(\lambda)$ del parametro θ], tale che:

$$(9) \quad (L(P_0, \lambda)) \int_{P_0}^{P_\lambda} y^{1/n} ds = \int_{P_0 P_0' P_\lambda' P_\lambda} y^{1/n} ds,$$

avendo chiamato P_λ' la proiezione di P_λ sull'asse x .

Se $n < 1$, invece, la curva $L(P_0, \lambda)$ contiene un siffatto punto P_λ [seguito P_0] se e solo se è $-\pi/2 < \lambda < \gamma_n^*$, il numero γ_n^* essendo individuato dalla (8).

Tenendo conto che il primo membro della (6') in quanto funzione di θ è crescente, si può dire che

II. Se $\lambda < \gamma_n^*$, l'integrale (4) è maggiore dell'integrale (5) per tutti i punti P interni all'arco di estremi P_0 e P_λ sulla curva $L(P_0, \lambda)$; per tutti i punti P seguenti P_λ sulla curva $L(P_0, \lambda)$, l'integrale (4) è minore dell'integrale (5): di conseguenza il punto P_λ deve precedere sulla curva $L(P_0, \lambda)$ l'eventuale punto coniugato destro di P_0 , ed è $\gamma_n^* > -\gamma_n$.

Se $\lambda \geq \gamma_n^*$, l'integrale (4) è sempre maggiore dell'integrale (5).

5.1. La curva $\Lambda^*(P_0)$. - Si vede facilmente che γ_n^* è nullo se $h^*(\pi/2)$ vale 1, è negativo se $h^*(\pi/2)$ è minore di 1, positivo in caso contrario: essendo $h^*(\pi/2)$ crescente da zero a $+\infty$ per $0 < n < 1$, v'è un ben determinato valore di n , n^* , che annulla γ_n^* . Il punto P_λ al variar di λ (da $-\pi/2$ a $+\pi/2$ se $n \geq 1$, da $-\pi/2$ a γ_n^* se $n < 1$) descrive il ramo destro di una curva simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$, curva che designeremo con $\Lambda^*(P_0)$, e che è parametricamente rappresentata dalle equazioni

$$(10) \quad x = x_0 + y_0 n \cos^n t \int_t^{f^*(t)} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}, \quad y = y_0 \frac{\cos^n t}{\cos^n f^*(t)}, \quad -\pi/2 < t < \gamma_n^*.$$

Si può dire, in conseguenza del teorema II e tenendo conto della simmetria della configurazione, che

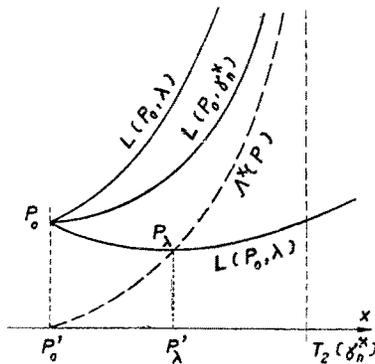


Fig. 11.

III. Se $n \geq 1$, ogni curva $L(P_0, \lambda)$ interseca la curva $\Lambda^*(P_0)$ in due punti, uno precedente P_0 , l'altro seguente.

Se $n^* < n < 1$, allora γ_n^* è positivo, ed $L(P_0, \lambda)$ interseca $\Lambda^*(P_0)$ in un sol punto (seguito P_0) per $-\pi/2 < \lambda \leq -\gamma_n^*$, in due punti (uno precedente P_0 , l'altro seguente) per $-\gamma_n^* < \lambda < \gamma_n^*$, in un sol punto (precedente P_0) per $\gamma_n^* \leq \lambda < \frac{\pi}{2}$.

Se $n = n^*$, allora γ_n^* è nullo, e $L(P_0, \lambda)$ interseca $\Lambda^*(P_0)$ in un sol punto per $\lambda \neq 0$ (precedente o seguente P_0 a seconda che sia λ positivo o negativo), non la interseca affatto per $\lambda = 0$.

Se $n < n^*$, allora γ_n^* è negativo, e $L(P_0, \lambda)$ interseca $\Lambda^*(P_0)$ in un sol punto per $|\gamma_n^*| < |\lambda| < \frac{\pi}{2}$ (precedente o seguente P_0 a seconda che sia λ positivo o negativo), non la interseca affatto per $|\lambda| \leq \gamma_n^*$.

Per esprimere in modo semplice il risultato ottenuto ⁽¹⁵⁾, studiamo la curva $\Lambda^*(P_0)$, o meglio il suo ramo destro soltanto, ponendo $\gamma_n^* = \frac{\pi}{2}$ per $n \geq 1$.

Le equazioni parametriche di tale ramo sono

$$(10) \quad x = u^*(t) \equiv x_0 + y_0 n \cos^n t \int_t^{f^*(t)} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}, \quad y = v^*(t) \equiv y_0 \frac{\cos^n t}{\cos^n f^*(t)}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \gamma_n^*,$$

e necessariamente è $u^*(t) < u(t)$.

Dimostro che $u^*(t)$ è crescente. Supponiamo (per assurdo) che vi siano due valori $\lambda_1 < \lambda_2$ tali che sia $u^*(\lambda_1) \geq u^*(\lambda_2)$; l'arco di $L(P_0, \lambda_1)$ di punti estremi P_0 e P_{λ_1} (chiamiamolo L') resta al disotto dell'arco di $L(P_0, \lambda_2)$ di punti estremi P_0 e P_{λ_2} (chiamiamolo L''), come si dimostra con le (3.13). Ma si ha

$$J(L'') = J(P_0 P_0' P_{\lambda_2}' P_{\lambda_2}), \quad J(L') = J(P_0 P_0' P_{\lambda_1}' P_{\lambda_1}),$$

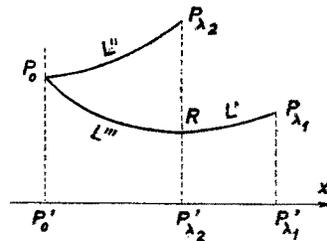


Fig. 12.

⁽¹⁵⁾ Dovuto al TONELLI, per il caso $n = 1$, cfr. [2], vol. II, n. 135.

e quindi, detto R il punto sulla curva $L(P_0, \lambda_1)$ di ascissa $u^*(\lambda_2)$ ed L''' l'arco di questa curva di punti estremi P_0 e R ,

$$J(L'') > J(L''') + J(RP),$$

ciò che contraddice al teorema I.

In maniera analoga si dimostra che anche $v^*(t)$ è crescente.

Dalla relazione $\lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}} u(t) = 0$ segue $\lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}} u^*(t) = 0$. Volendo dimostrare

che anche $v^*(t)$ è infinitesima per $t \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, supponiamo per assurdo che il limite $m = \lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}} v^*(t)$ sia positivo; chiamando Q il punto (x_0, m) ed L^* l'arco di $L(P_0, \lambda)$ di punti estremi P_0 e P_λ , dalla relazione $J(P_0 P'_0 P'_\lambda P_\lambda) \equiv J(L^*)$ si otterrebbe, passando al limite per $\lambda \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, l'assurda eguaglianza $J(P_0 Q) = J(P_0 P'_0) + J(P'_0 Q)$.

Veniamo ora ai due limiti $x_1 = \lim_{t \rightarrow \gamma_n^*} u^*(t)$, $y_1 = \lim_{t \rightarrow \gamma_n^*} v^*(t)$.

Se y_1 fosse finito, anche x_1 lo sarebbe, altrimenti la curva $\Lambda^*(P_0)$ dovrebbe intersecare l'inviluppo $\Lambda(P_0)$, ciò ch'è assurdo. Ma allora, passando al limite per $\lambda \rightarrow \gamma_n^*$, dalla relazione già sfruttata sopra $J(L^*) \equiv J(P_0 P'_0 P'_\lambda P_\lambda)$ si dedurrebbe che il punto $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ appartiene alla $L(P_0, \gamma_n^*)$, ossia che le due curve $L(P_0, \gamma_n^*)$ e $\Lambda^*(P_0)$ si intersecano, ciò che è escluso dal teorema III. Dunque è $y_1 = +\infty$.

Poiché la curva $L(P_0, \gamma_n^*)$ non contiene alcun punto P_λ , dev'essere $x_1 \leq T_2(\gamma_n^*)$: per $n < 1$, il valore $T_2(\gamma_n^*)$ è finito, e se fosse $x_1 < T_2(\gamma_n^*)$ la curva $L(P_0, \gamma_n^*)$ necessariamente dovrebbe intersecare $\Lambda^*(P_0)$, ciò ch'è escluso [$T_2(\gamma_n^*)$ è l'ascissa dell'asintoto destro della curva $L(P_0, \gamma_n^*)$]; per $n \geq 1$ si ha $T_2(\gamma_n^*) = +\infty$: se x_1 fosse finito, allora per ogni punto P preso sulla curva $L(P_0, \lambda)$ con ascissa maggiore di x_1 l'integrale (5) risulterebbe maggiore dell'integrale (4); il ragionamento che segue esclude questa possibilità.

Preso una retta $x = x_2$ arbitraria ($x_0 < x_2$) considero su di essa il punto $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ con $y_2 > y_0$. Si ha

$$J(P_0 P_2) \equiv \frac{n}{n+1} \sqrt{1 + \left(\frac{x_2 - x_0}{y_2 - y_0}\right)^2} [y_2^{1+\frac{1}{n}} - y_0^{1+\frac{1}{n}}] \quad (16)$$

$$J(P_0 P'_0 P'_2 P_2) \equiv \frac{n}{n+1} [y_0^{1+\frac{1}{n}} + y_2^{1+\frac{1}{n}}],$$

$$\lim_{y_2 \rightarrow +\infty} [J(P_0 P_2) - J(P_0 P'_0 P'_2 P_2)] = -\frac{2n}{n+1} y_0^{1+\frac{1}{n}}.$$

(16) $J(P_0 P_1)$ rappresenta il funzionale $J(L)$, avendo preso come curva L il segmento $P_0 P_1$; analogamente $J(P_0 P'_0 P'_1 P_1)$, dove L è la poligonale $P_0 P'_0 P'_1 P_1$. Nel seguito, se un punto del semipiano $y \geq 0$ è indicato con una certa lettera, la stessa lettera munita di un apice indicherà la proiezione di quel punto sull'asse x .

Di conseguenza, preso y_2 abbastanza grande, la curva di minimo per il funzionale $J(L)$ tra le curve congiungenti P_0 e P_2 non può essere la spezzata $P_0P_0'P_2'P_2$, e quindi v' è un arco di RIBAUCCOUR $L(P_0, \lambda)$ (congiungente P_0 con P_2) per il quale l'integrale (4) risulta maggiore dell'integrale (5), come si voleva dimostrare. In conclusione,

IV. La curva $\Lambda^*(P_0)$ è simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$, interamente tracciata al disopra dell'involuppo $\Lambda(P_0)$, salvo il punto $(x_0, 0) \equiv P_0'$. Essa può essere rappresentata con un'equazione cartesiana.

$$(11) \quad y = q^*(x), \quad -T_2(\gamma_n^*) < x < +T_2(\gamma_n^*),$$

con $q^*(x)$ funzione (pari) crescente nell'intervallo $[T_2(\gamma_n^*)]$, infinitesima per $x \rightarrow x_0$, infinitamente grande per x tendente a $T_2(\gamma_n^*)$.

Per $n < 1$, la curva $\Lambda^*(P_0)$ ha due asintoti — quello destro in comune con la $L(P_0, \gamma_n^*)$, quello sinistro in comune con la $L(P_0, -\gamma_n^*)$ — ed è tracciata nella striscia da essi delimitata.

5.2. Soluzione del problema di minimo — Ciò premesso il teorema 4.V può esser completato dal seguente

V. Se c è maggiore di zero, al punto A è associata una curva $\Lambda^*(A)$ [rappresentata parametricamente con le equazioni (10), postovi A in luogo di P_0] tale che:

— se B è al disopra della curva $\Lambda^*(A)$ ed ha ascissa diversa da A , allora il funzionale $J(L)$ consegue il suo minimo valore nella totalità Γ solamente in corrispondenza dell' (unico) arco di Ribaucour di parametro n congiungente A con B e verificante la condizione di Jacobi, L_1 ;

— se B appartiene alla curva $\Lambda^*(A)$ ed ha ascissa diversa da A , allora il funzionale $J(L)$ ammette in Γ due e due sole curve minimanti, la spezzata $L_3 \equiv AA'B'B$ e l'arco di Ribaucour L_1 sopra citato;

— se A e B hanno la medesima ascissa, allora il funzionale $J(L)$ ammette in Γ una sola curva minimante, il segmento AB .

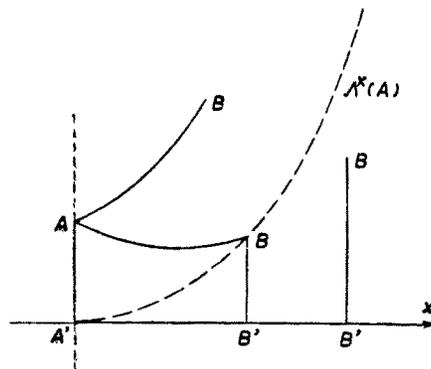


Fig. 13.

In ogni altro caso, il funzionale $J(L)$ ammette una sola curva minimante nella totalità Γ , la spezzata $L_3 = AA'B'B$.

Evidentemente, se B si trova al disopra della curva $\Lambda^*(A)$, A si troverà al disopra della analoga $\Lambda^*(B)$. Si possono dare condizioni necessarie e sufficienti — in tutto analoghe a quelle espresse dal teorema 3.XI — perché i due punti A e B possono congiungersi mediante un arco di RIBAUCCOUR il quale dia al funzionale $J(L)$ il minimo valore nella totalità di curve Γ . E precisamente,

VI. Se i due punti A e B si trovano nel semipiano $y > 0$, ed hanno ascissa diversa, sono determinati in conseguenza due valori ν_A e ν_B compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, dipendenti solo da n , y , c e d , nonché dal segno di $a - b$, tali che:

il funzionale $J(L)$ assume il suo minimo valore nella totalità Γ in corrispondenza dell'arco di Ribaucour L_1 , e soltanto in corrispondenza di tale arco, quando e solo quando

$$(11) \quad 0 < |a - b| < nc \cos^n \nu_A \int_{(\nu_A, \nu_B)} \frac{d\tau}{\cos^n \tau};$$

il funzionale $J(L)$ ammette come curve minimanti nella totalità Γ l'arco di Ribaucour L_1 , e la spezzata L_3 , e soltanto queste due curve, quando e solo quando

$$(12) \quad 0 < |a - b| = nc \cos^n \nu_A \int_{(\nu_A, \nu_B)} \frac{d\tau}{\cos^n \tau};$$

in ogni altro caso il funzionale $J(L)$ ammette una sola curva minimante, la spezzata L_3 .

Le costanti ν_A e ν_B sono individuate dalle relazioni

$$(13) \quad c \cos^n \nu_A = d \cos^n \nu_B, \quad (b - a)(\nu_B - \nu_A) > 0,$$

$$(14) \quad (n + 1) \int_{(\nu_A, \nu_B)} \frac{d\tau}{\cos^{n+2} \tau} = \frac{1}{\cos^{n+1} \nu_A} + \frac{1}{\cos^{n+1} \nu_B}.$$

La dimostrazione è analoga a quella del citato teorema 3.XI.

Una condizione sufficiente, deducibile dal teorema ora enunciato, è la seguente

VII. Detto ν quel valore, compreso tra zero e $\frac{\pi}{2}$, individuato dalla

$$(15) \quad (n + 1) \int_0^\nu \frac{d\tau}{\cos^{n+2} \tau} = \frac{1}{\cos^{n+1} \nu}, \quad \text{ossia} \quad h^*(\nu) = 0,$$

se è

$$(16) \quad \frac{d}{c} > |b - a| : \left(2n \cos^n v \int_0^v \frac{d\tau}{\cos^n \tau} \right) > 0,$$

allora l'arco di Ribaucour L_1 ed esso solo dà al funzionale $J(L)$ il suo minimo valore nella totalità di curve Γ .

6: Gli archi di Ribaucour come minimanti relative. - Ci proponiamo in questo numero di costruire una famiglia di curve inclusa in Γ , e contenente l'arco di RIBAUCCOUR L_1 , relativamente alla quale quest'ultimo renda minimo il funzionale $J(L)$ ^(2°).

I. Se i punti A e B possono essere congiunti mediante un arco di Ribaucour L_1 , verificante la condizione di Jacobi, allora questa curva dà il minimo al funzionale $J(L)$ nell'insieme $\Gamma(A)$ delle curve di Γ tracciate nel dominio $D(A)$ così definito

$$\begin{aligned} y &\geq 0 \quad \text{per} \quad (x - a)(x - b) \geq 0, \\ y &\geq q(x) \quad \text{per} \quad a < x < b. \end{aligned}$$

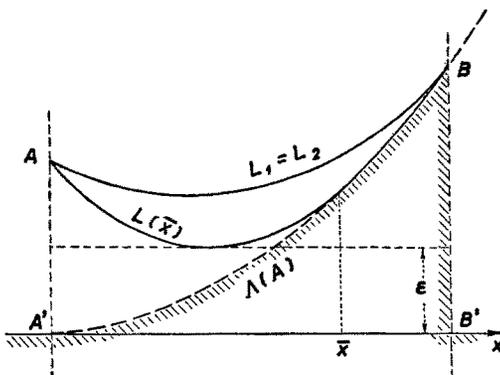


Fig. 14.

Se l'arco L_1 verifica le condizioni di Jacobi in senso stretto, allora esso è in $\Gamma(A)$ l'unica curva minimante; se la condizione di Jacobi è verificata solo in senso lato, allora v è in $\Gamma(A)$ una semplice infinità di curve minimanti.

Per i teoremi del n. 4.1, possiamo limitarci a considerare le curve di $\Gamma(A)$ tracciate nella striscia $a \leq x \leq b$. Fissato un valore \bar{x} nell'intervallo (a, b) , v è una ed una sola estrema uscente da A , la quale incontra l'involuppo $\Lambda(A)$ nel punto di ascissa \bar{x} ; sia $L(\bar{x})$ la curva composta del suddetto arco di estrema [di base (a, \bar{x})] e dell'arco di $\Lambda(A)$ di base (\bar{x}, b) : se $\bar{x} > a$, la curva $L(\bar{x})$ è di

^(2°) Nel caso particolare $n = 2$, tale studio è stato compiuto in [1], n. 80; ivi sono studiati anche i casi $n \neq 2$, ma con risultati più ristretti.

classe C' , in caso contrario ha un punto angoloso in A' . È ben noto ⁽¹⁷⁾ che $J[L(\bar{x})]$ non dipende da \bar{x} .

Prendiamo ora un numero positivo ϵ , minore della minima ordinata della curva L_2 , e consideriamo la totalità delle curve di $\Gamma(A)$ tracciate nel semipiano $y \geq \epsilon$; diciamola $\Gamma(A, \epsilon)$: è ben noto che in $\Gamma(A, \epsilon)$ il funzionale $J(L)$ ammette minimo ⁽¹⁸⁾. Se la curva minimante è *interna* a $\Gamma(A, \epsilon)$, essa necessariamente coincide con l'estremale L_1 , se è di *frontiera* necessariamente deve coincidere

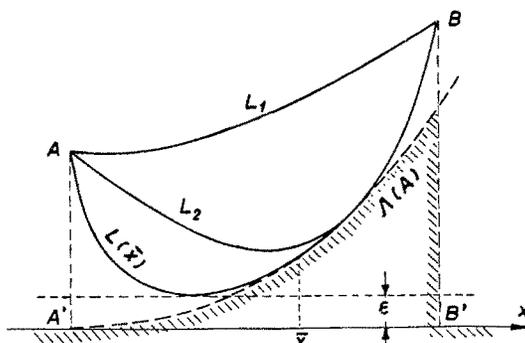


Fig. 15.

con una delle curve $L(\bar{x})$, in virtù delle condizioni necessarie di WEIERSTRASS ⁽¹⁸⁾; ne segue che il minimo di $J(L)$ in $\Gamma(A, \epsilon)$ non dipende da ϵ . Possiamo dunque dire che proprio $J(L_1)$ oppure $J(L_2) \equiv J[L(\bar{x})]$ è il minimo di $J(L)$ in $\Gamma(A)$, poiché l'unica curva di $\Gamma(A)$ tracciata nella striscia $a \leq x \leq b$ che non appartenga ad alcuno degli insiemi di curve $\Gamma(A, \epsilon)$ è la curva $L(a)$.

Se il punto B si trova sull'inviluppo $\Lambda(A)$, ossia se L_1 verifica la condizione di JACOBI solo in senso lato, avremo $L_2 \equiv L(b)$, e quindi tutte e sole le curve $L(\bar{x})$ ($a \leq \bar{x} \leq b$) son le curve minimanti cercate. Se invece B si trova al di sopra dell'inviluppo $\Lambda(A)$, ossia L_1 verifica in senso stretto le condizioni di JACOBI, abbiamo notoriamente $J(L_1) < J(L_2) \equiv J[L(\bar{x})]$, e quindi L_1 è l'unica minimante della classe $\Gamma(A)$. c.d.d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. PICONE, *Introduzione al Calcolo delle Variazioni*, Roma, 1950.
- [2] L. TONELLI, *Fondamenti del Calcolo delle Variazioni*, I (Bologna, 1921), II (Bologna, 1923).
- [3] F. BERTOLINI, *A new proof of the existence of the minimum for a classical integral*, in corso di stampa presso la « Compositio mathematica » (Groningen).
- [4] O. BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, (Leipzig, 1909).

⁽¹⁷⁾ Cfr. ad es. [1], n. 81, [4], § 43, c)

⁽¹⁸⁾ Cfr. ad es. [4], n. 52, [2], vol. II, n. 42, b), oss. II. Per la citata condizione di Weierstrass, la minimante di *frontiera* dev'esser priva di punti angolosi, e ciononostante aver punti di ordinata ϵ , ovvero punti sull'inviluppo $\Lambda(A)$; ogni suo arco privo di punti di ordinata ϵ e privo di punti comuni con $\Lambda(A)$ dev'esser estremale; per i risultati del numero 3. solo le curve $L(\bar{x})$ godono di tali proprietà.

⁽¹⁹⁾ Cfr. [3].