Projektive Klassifikation der Grassmannrelationen und Kennzeichnung der Minimalmodelle für die Gesamtheiten der verallgemeinerten Raumelemente des S_n.

Memoria di WERNER BURAU (a Hamburg) (1).

Sunto. - *Una grassmanniana $G_{n;k}$ può essere definita per l'intersezione di un sistema d'iperquadriche, rappresentate sui punti di uno spazio R. Al gruppo projettivo che trasforma in sè la $G_{n;k}$ corrisponde un gruppo di trasformazioni di R, che lascia invariante un numero di spazi indipendenti, ognuno di questi essendo individuato da una varietà speciale. L'Autore dà una descrizione completa di questo « spezzamento » mediante una caratterizzazione di quelle varietà speciali. Si tratta di modelli-minimi per la totalità di elementi-spaziali generalizzati ($S_k \subset S_h$) di S_n.*

Bekanntlich ist das Minimalmodell für die Gesamtheit aller $\infty^{(n-k)(k+1)}$ S_k des projektiven S_n die durch das System aller S_k-Koordinaten im S_n definierte Grassmannsche Mannigfaltigkeit, die wir im folgenden stets mit $G_{n;k}$ bezeichnen wollen. $G_{n;k}$ wird durch ein schon mehrfach hergeleitetes System von quadratischen Relationen vollständig beschrieben (2). Ist $r(n, k)$ die Anzahl der linear unabhängigen quadratischen Relationen der $G_{n;k}$, so kann man sagen: Es gibt $\infty^{r(n,k)-1}$ quadratische Hyperflächen des $S_{\binom{n+1}{k+1}-1}$, die ein lineares System bilden und durch deren Schnitt die $G_{n;k}$ vollständig definiert ist. Diese quadratischen Hyperflächen — wir sagen auch kurz Quadriken dafür — kann man in bekannter Weise auf die Punkte eines projektiven Raumes $R_{r(n,k)-1}$ von $r(n, k) - 1$ Dimensionen, des sog. Relationenraumes, abbilden. Durch die Gruppe $\mathbf{G}$ aller Projektivitäten des Grundraumes S_n werden zunächst die Punkte des Raumes der $G_{n;k}$ projektiv so transformiert, dass die $G_{n;k}$ dabei in sich übergeht. Gleichzeitig induziert $\mathbf{G}$ aber auch im Relationenraum $R_{r(n,k)-1}$ eine Gruppe von projektiven Transformationen. Während der Raum der $G_{n;k}$ aber durch $\mathbf{G}$ irreduzibel in sich transformiert wird, d. h. so dass kein linearer Unterraum dabei fest bleibt, ist dies für den Raum $R_{r(n,k)-1}$ bei $n \geq 7$, $\dfrac{n-1}{2} \geq k \geq 3$ nicht mehr der Fall. Der $R_{r(n,k)-1}$ « zerfällt » vielmehr in eine Reihe von endlich vielen Teilräumen, die je irreduzibel in sich transformiert werden, unabhängig zueinander liegen und insgesamt ganz $R_{r(n,k)-1}$ aufspannen. Wir wollen im folgenden die Aufgabe lösen, diese Aufspaltung anzugeben, d. h. in der Sprache der Algebra, die Darstellung der Gruppe $\mathbf{G}$ in Raum $R_{r(n,k)-1}$ auszureduzieren. Dabei

(1) Erweiterte Wiedergabe eines in Taormina im Oktober 1951 gehaltenen Vortrags.

(2) Siehe z. B. B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I, Bologna 1948. pag. 136.

werden wir genau beschreiben, in welcher Weise G in den einzelnen in sich transformierten Teilräumen wirkt; es wird sich wieder darum handeln, dass gewisse Teilmannigfaltigkeiten, die diese Teilräume aufspannen, je in sich transformiert werden. Wir werden somit durch das Studium der G-Relationen darauf geführt, diese Mannigfaltigkeiten zu kennzeichnen. Es handelt sich um eine Klasse von Mannigfaltigkeiten, die sich als einfachste Punktmodelle der Gesamtheit aller Raumpaare (S_k, S_h') des S_n $(n > k > h)$ mit Vollinzidenz, wofür wir auch Elemente sagen werden, beschreiben lassen.

Ein erheblicher Teil der folgenden Entwicklungen, insbesondere der umfangreiche § 3 wird der Untersuchung dieser soeben erwähnten, auch mit dem Namen Inzidenzmannigfaltigkeiten $J_{n;\,k,\,h}$ bezeichneten Punktmodelle gewidmet sein. Wir werden darin die $J_{n;\,k,\,h}$ durch innere Eigenschaften kennzeichnen. Dies wird im § 4 die Aufgabe der Ausreduzierung der G-Relationen wesentlich erleichtern, hat jedoch auch unabhängig davon Interesse. Im § 1 werden zuvor einige im folgenden dauernd benötigte Begriffsbildungen und Bezeichnungsweisen eingeführt, insbesondere im Zusammenhang mit den Mannigfaltigkeiten von SEGRE und VERONESE. Im § 2 wird dann das mehr oder weniger Bekannte, was wir weiterhin über die Grassmannschen Mannigfaltigkeiten $G_{n;\,k}$ brauchen, zusammengestellt und z. T. bewiesen werden.

§ 1. - Vorbemerkungen; Veronesesche und Segresche Mannigfaltigkeiten.

Alle folgenden Untersuchungen betreffen die komplexe, projektive Geometrie der Räume verschiedener Dimension. Einzeln stehende untere Indizes bei linearen Räumen und allgemeineren Mannigfaltigkeiten sollen stets Dimensionen bezeichnen. Wenn die Punkte einer Mannigfaltigkeit M_d einen projektiven Raum von n Dimensionen aufspannen, so soll dieser Raum, den man auch als « lineare Hülle von M_d » bezeichnen könnte $\langle M_d \rangle_n$ oder auch kurz $\langle M_d \rangle$ genannt werden.

Folgende bekannte und fast selbstverständliche Kennzeichnung der projektiven Räume werden wir späterhin benötigen und weitgehend verallgemeinern:

SATZ 1. - *Eine n-dimensionale Mannigfattigkeit M_n, deren Punkte in ausnahmslos eineindeutiger Beziehung zu den Punkten eines projektiven Raumes S_n stehen und zwar so, dass jeder Geraden auf S_n wieder eine Gerade auf M_n entspricht, ist selber ein projektiver Raum.*

Beweis: Man schliesst aus der Voraussetzung sofort, dass auch jeder Ebene auf S_n eine solche auf M_n entsprechen muss, usw. bis man die Identität von M_n mit einem linearen Raum eingesehen hat.

Vermittels des Linearsystems aller $\infty^{\binom{n+h}{h}-1}$ Hyperflächen h-ten Grades wird der S_n auf eine den $S_{\binom{n+h}{h}-1}$ aufspannende Punktmannigfaltigkeit abgebildet, die V_n^h oder allgemeine Veronesesche Mannigfaltigkeit genannt werde, sodass also V_2^2 die klassische Veronesesche Fläche des S_5 bedeutet. Einer beliebigen Teilmannigfaltigkeit M_d des S_n entspreche vermöge der Abbildung des ganzen S_n auf die V_n^h eine mit $V^h(M_d)$ bezeichnete Teilmannigfaltigkeit der V_n^h, wofür wir auch die Bezeichnung « V^h-Bild von M_d » gebrauchen werden. Im folgenden wird stets $h = 2$ sein. Ist M_d als vollständiger Schnitt von ∞^{r-1} Quadriken, d. h. quadratischen Hyperflächen, wie es bei den Grassmannschen Mannigfaltigkeiten der Fall ist, definiert, so wird $V^2(M_d)$ durch einen linearen Raum von $\binom{n+h}{h} - r - 1$ Dimensionen aus der V_n^2 ausgeschnitten. Den durch $\langle V^2(M_d) \rangle$ gehenden Hyperebenen des $\langle V_n^2 \rangle$ sind dann die Quadriken, die M_d enthalten, eineindeutig zugeordnet Weiterhin ist es bekannt, dass die Punkte des $\langle V_n^2 \rangle$ den Klassenquadriken des S_n eineindeutig zugeordnet werden können. Geht man daher von der M_d, die als Punktmenge definiert ist, durch eine Korrelation des S_n zu einer entsprechenden Menge von ∞^d S_{n-1} über, die bei uns stets mit $\widehat{M}_d$ bezeichnet werde, so kann man $\widehat{M}_d$ einen gewissen linearen Teilraum R_{r-1} des $\langle V_n^2 \rangle$, den sog. Relationenraum, zuordnen.

Eine weitere wichtige Klasse rationaler Mannigfaltigkeiten sind die Segreschen, d. h. die Produkte von k linearen Räumen, die im folgenden bei $k = 2$ eine Rolle spielen werden. Mit $S_{m;n}$ werde die den $S_{(m+1)(n+1)-1}$ aufspannende Segresche Produktmannigfaltigkeit der linearen Räume X_m und Y_n bezeichnet. Gelegentlich schreiben wir dafür auch $X_m \times Y_n$. Sind F_a und G_b je Teilgebilde aus X_m und Y_n, so ist damit auch das Produkt $F_a \times G_b$ als Teilmenge aus $S_{m;n}$ eindeutig bestimmt. Wir bemerken noch folgende bekannten Tatsachen über die $S_{m;n}$: Die $S_{m;n}$ wird durch ∞^n Räume S_m^I und ∞^m Räume S_n^{II} erzeugt. Die Räume gleicher Art liegen windschief zueinander, aber jeder S_m^I schneidet jeden S_n^{II} in genau einem Punkt, und durch diese Schnittpunkte werden alle S_m^I, aber auch alle S_n^{II} je aufeinander projektiv bezogen. Die Gesamtheiten der ∞^m S_n^I und die der ∞^n S_m^{II} der $S_{m;n}$ sind demnach ausnahmslos eineindeutig auf die Punkte linearer Räume von je m und n Dimensionen bezogen. Aufgrund des folgenden Satzes kann man die $S_{m;n}$ durch diese Eigenschaft kennzeichnen [3].

SATZ 2. - *Jede Mannigfaltigkeit M_{m+n} ist eine $S_{m;n}$ $(m \geq 2)$, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt: a) sie spannt einen Raum von $(m+1)(n+1)-1$ Dimensionen auf, b) sie wird durch ∞^m Räume S_n^I erzeugt, c) diese S_n^I sind eineindeutig den Punkten eines projektiven X_m derart zugeordnet, dass den Punkten einer jeden Geraden des X_m die S_n^I einer $S_{n;1}$ auf der M_{m+n} entsprechen.*

---

[3] s. BURAU, *Untersuchungen zur mehrdimensionalen, projektiven Geometrie*, « Hamburger Abh. », 15, s. 1-26 (1943), wo in § 11 einige Sonderfälle hiervon behandelt sind.

Beweis: Zunächst sei $m = 2$ angenommen. Dann müssen die den beiden Geraden X_1' und X_1'' der Ebene X_2 zugeordneten Segremannigfaltigkeiten $S'_{n;\,1}$ und $S''_{n;\,1}$ bereits den ganzen $\langle M_{n+2}\rangle_{3n+2}$ aufspannen, können sich also nur in dem dem Schnittpunkt $\overline{X}_0$ von X_1' und X_1' entsprechenden Raum $\overline{S}_n^I$ schneiden. Weiterhin bestimmen die sich auf S_n^I treffenden, erzeugenden Geraden S_1^{II}, je aus $S'_{n;\,1}$ und $S'_{n;\,1}$, insgesamt ∞^n Ebenen S_2^{II}. Die S_n^I von $S'_{n;\,1}$ und $S''_{n;\,1}$ vermitteln projektive Beziehungen zwischen den Punkten dieser Geradenpaare der Ebenen S_2^{II}, die sich eindeutig zu solchen zwischen den ganzen Ebenen S_2^{II} fortsetzen lassen. Hierdurch ist eine $S_{n;\,2}$ bestimmt, die $S'_{n;\,1}$ und $S''_{n;\,1}$ enthält und nach folgender Überlegung mit M_{n+2} zusammenfällt. Durch die Vorgabe von $S'_{n;\,1}$ und $S''_{n;\,1}$ sind die Räume $\langle S_{n;\,1}\rangle$ der fast allen übrigen Geraden aus X_2 zugeordneten $S_{n;\,1}$ bekannt: sie werden nämlich durch zwei S_n^I, je aus $S'_{n;\,1}$ und $S''_{n;\,1}$, aufgespannt. Damit kennt man aber auch die Räume S_n^I, die den Punkten von X_2 zugeordnet sind. Sie sind nämlich als Schnitte der $\langle S_{n;\,1}\rangle$ festgelegt und treffen auch alle vorhin erwähnten Ebenen S_2^{II}, sie können also nichts anderes sein als die S_n^I der oben erwähnten $S_{n;\,2}$. Von hier aus schliesse man bei $m > 2$ der Reihe nach auf die Kennzeichnung der $S_{n;\,3}$ usw., bis man am Ziele ist, im Prinzip analog wie bei Satz 1.

Für später benötigen wir noch folgenden Satz über die $S_{n;\,1}$.

SATZ 3. – *Der allgemeine hyperebene Schnitt einer $S_{n;\,1}$ ist eine Mannigfaltigkeit F_{2n-1}, die in folgender Weise durch ∞^1 S_{n-1} erzeugt wird: Man nehme die ∞^1 S_{n-2}^I einer $S_{n-2;\,1}$, beziehe sie eineindeutig auf die Punkte eines zu $S_{n-2;\,1}$ windschief liegenden Kegelschnitts k_1 und verbinde Entsprechendes durch Räume S_{n-1} miteinander. Umgekehrt entsteht eine $S_{n;\,1}$ auf folgende beiden Arten: a) Eine soeben beschriebene F_{2n-1} werde im allgemeinen Punkt $\overline{S}_0$, durch den der erzeugende Raum $\overline{S}_{n-1}$, aber nicht die $S_{n-2;\,1}$ gehe, von der sonst allgemein liegenden Geraden g getroffen; dann beziehe man die Punkte von g auf die S_{n-1} von F_{2n-1}, $\overline{S}_0$ jedoch dabei auf $\overline{S}_{n-1}$, und verbinde Entsprechendes. b) Man schneide eine $S_{n-1;\,1}$ mit einem sonst allgemein liegenden Kegelschnitt k_1 im Punkt $\overline{S}_0$, durch den der $\overline{S}_{n-1}^I$ von $S_{n-1;\,1}$ geht, beziehe die Punkte von k_1 auf die S_{n-1} von $S_{n-1;\,1}$, dabei $\overline{S}_0$ auf $\overline{S}_{n-1}$, und verbinde Entsprechendes.*

Beweis: Der erste Teil dieses Satzes ist für $n = 2$ und 3 bereits gezeigt worden (s. (4) § 7). Der allgemeine Beweis verläuft genau so. Die im zweiten Teil erwähnten Erzeugungen der $S_{n;\,1}$ sind bei $n = 1$, d. h. für den regulus bekannt; bei $n > 1$ erzeuge man auch erst eine $S_{1;\,1}$ und setze dann die gewünschte $S_{n;\,1}$ aus dieser $S_{1;\,1}$ und einer schon vorliegenden $S_{n-2;\,1}$ zusammen (s. (4) § 7, Satz 6).

---

(4) W. BURAU, *Grundmannigfaltigkeiten der projektiven Geometrie*, « Collect. Math. », Vol. III, Fasc. 2 (Barcelona, 1950), pagg. 53-163, Teil II.

§ 2. - Die Grassmannschen $G_{n;\,k}$.

Als einfachstes ausnahmslos eineindeutiges Punktmodell für die $\infty^{(n-k)(k+1)}$ X_k eines Grundraumes X_n ergibt sich bekanntlich die Grassmannsche Mannigfaltigkeit, die wir mit $G_{n;\,k}$ bezeichnen wollen. Die $G_{n;\,k}$ sind seit der ersten grundlegenden Arbeit von SEVERI [5] mehrfach untersucht worden. In einer noch im Druck befindlichen Fortsetzung meiner oben zitierten Schrift (s. [4]) sind verschiedene Eigenschaften der $G_{n;\,k}$ ausführlich beschrieben worden. Das, was wir hiervon für unseren Zweck benötigen, sei im folgenden nebst 2 Sätzen, die sich an jenem Ort nicht befinden, kurz zusammengestellt. Sofern eine Tatsache im folgenden nicht bewiesen ist, kann dies der Leder auch ohne Kenntnis obiger Arbeit leicht ergänzen.

a) $G_{n;\,k}$ und $G_{n;\,n-k-1}$ stimmen projektiv überein und spannen einen Raum von $\binom{n+1}{k+1}-1$ Dimensionen auf.

b) Die Gesamtheit aller X_k durch einen festen X_h $(h<k)$ wird auf eine $G_{n-h-1;\,k-h-1}$ innerhalb der $G_{n;\,k}$ abgebildet.

c) Die Gesamtheit aller X_k des X_n, die einen festen Raum A_{n-k-1} schneiden, wird auf die Punkte eines bestimmten hyperebenen Schnittes H der $G_{n;\,k}$ abgebildet. Bei Veränderung von A_{n-k-1} ergeben die so erhaltenen $\infty^{(n-k)(k+1)}$ Hyperebenen H des $G_{n;\,k}$ eine $\widehat{G}_{n;\,n-k-1}$, das ausgezeichnet mit der $G_{n;\,k}$ verknüpfte duale Gebilde.

d) Unter den $G_{n;\,k}$ zeichnen sich die $G_{2k+1;\,k}$ durch einen höheren Grad von Symmetrie aus, was damit zusammenhängt, dass die X_k des X_{2k+1} sich selber dual gegenüberstehen. Es gilt der späterhin wichtige

SATZ 4. - *Die Gesamtheit derjenigen X_k des X_{2k+1}, die einen festen A_k schneiden, wird auf die der Punkte eines hyperebenen Schnittes $H'_{\binom{2k+2}{k+1}-2}$ der $G_{2k+1;\,k}$ abgebildet. Dieser H' ist dem Bildpunkt H_0 von A_k in besonderer Weise zugeordnet. Diese Zuordnung zwischen H_0 und $H'_{\binom{2k+2}{k+1}-2}$ definiert, wenn man H_0 über alle Punkte von $G_{2k+1;\,k}$ laufen lässt, bei geradem k eine Nullkorrelation und bei ungeradem k eine Polarität des Raumes $\langle G_{2k+1;\,k}\rangle$.*

Beweis: Wenn mit p und p' und den entsprechenden Indizes die Grassmannkoordinaten der Räume X_k und X_k' des X_{2k+1} bezeichnet werden, so ist die Bedingung dafür, dass X_k und X_k' sich schneiden:

$$\Sigma\,(-1)^{sg(i_0\cdots i_{2k+1})}p'_{i_0\ldots i_k}p_{i_{k+1}\ldots i_{2k+1}}=0, \tag{1}$$

wobei über alle Permutationen $\begin{pmatrix}0 & 1 \ldots & 2k+1\\ i_0 & i_1 & i_{2k+1}\end{pmatrix}$ summiert wird. (1) ist eine Bilinearform von nicht verschwindender Determinante, die bei ungeradem k

[5] F. SEVERI, *Sulle varietà che rappresentano gli spazi subordinati*, « Annali di matem. », II, 34 1916), pp. 89-120.

symmetrisch und bei geradem k schiefsymmetrisch ist, also gerade, wie behauptet, im Raum $\langle G_{2k+1;\,k}\rangle$ bei ungeradem k eine Nullkorrelation und bei geradem k eine Polarität definiert.

e) Wir kehren nunmehr zum allgemeinen Fall zurück und skizzieren kurz hier eine in der zitierten Monographie (s. [4]) ausführlicher behandelte Erzeugung der $G_{n;\,k}$ aus solchen von niederen Indizes. Dazu nehme man im Grundraum X_n einen festen Punkt A_0 und eine mit A_0 nicht inzidente Hyperebene B_{n-1} an. Dann möge in der Abbildung zwischen den X_k des X_n und den Punkten der $G_{n;\,k}$ folgendes einander zugeordnet sein:

1) Gesamtheit der X_k durch A_0 Punkte der $G^A_{n-1;\,k-1}$

2) Gesamtheit der X_k in B_{n-1} Punkte der $G^B_{n-1;\,k}$.

Ein Raum C_k des X_n, der nicht zu den Gesamtheiten 1) oder 2) gehört, bestimmt dann mit A_0 einen C_{k+1} und schneidet B_{n-1} in einem in C_{k+1} gelegenen Raum C_{k-1}. Das Büschel aller ∞^1 C_k in C_{k+1} durch C_{k-1} wird auf eine Gerade g_1 innerhalb von $G_{n;\,k}$ abgebildet. g_1 enthält je einen Punkt von $G^A_{n-1;\,k-1}$ und $G^B_{n-1;\,k}$, wie sofort daraus folgt, dass ein X_k unseres Büschels durch A_0 geht und ein anderer in B_{n-1} liegt. Durch Veränderung von C_k erhält man so eine bestimmte Menge von Geraden g, die gewisse korrespondierende Punkte aus $G^A_{n-1;\,k-1}$ und $G^B_{n-1;\,k}$ verbinden und die ganze $G_{n;\,k}$ erzeugen. Da somit $G^A_{n-1;\,k-1}$ und $G^B_{n-1;\,k}$ den Raum $\langle G_{n;\,k}\rangle$ aufspannen, folgt aus einer einfachen Dimensionsbeziehung hinterher, dass sie windschief liegen müssen. Wir werden für die soeben definierte Erzeugung der $G_{n;\,k}$ kurz symbolisch schreiben:

$$G_{n;\,k} = G^A_{n-1;\,k-1} - G^B_{n-1;\,k}. \tag{2}$$

Von der erwähnten Korrespondenz zwischen $G^A_{n-1;\,k-1}$ und $G^B_{n-1;\,k}$ merken wir uns nur noch an, dass in ihr einem Punkt auf $G^A_{n-1;\,k-1}$ die Punkte eines Raumes S_k auf $G^B_{n-1;\,k}$ und einem Punkt auf $G^B_{n-1;\,k}$ die eines S_{n-k-1} auf $G^A_{n-1;\,k-1}$ entsprechen.

f) Wir verweilen noch bei dem Sonderfall der $G_{2k+2;\,k}$. Die Erzeugung derselben lautet: $G_{2k+2;\,k} = G^A_{2k+1;\,k-1} - G^B_{2k+1;\,k}$. Hieraus erschliessen wir, dass die $G_{2k+2;\,k}$ aus dem Zugehörigkeitsraum $\langle G^A_{2k+1;\,k-1}\rangle$ der Bildmenge $G_{2k+1;\,k-1}$ aller durch einen festen Punkt A_0 des X_{2k+2} gehenden X_k in eine $G_{2k+1;\,k}$ projiziert wird. Bei ungeradem k besitzt die $G_{2k+1;\,k}$ ihrerseits wieder eine ausgezeichnete Polarität nach Satz 4, wozu eine Fundamentalquadrik gehört; die Punkte dieser Fundamentalquadrik ergeben, verbunden mit $\langle G^A_{2k+1;\,k-1}\rangle$ einen ausgezeichneten quadratischen Kegel mit der Spitze $\langle G^A_{2k+1;\,k-1}\rangle$, den wir kurz einen « Fundamentalkegel durch die $G_{2k+2;\,k}$ » nennen wollen.

Es gibt ∞^{2k+2} derartige Fundamentalkegel durch $G_{k+2;\,k}$, in Abhängigkeit von den Punkten A_0 des Grundraumes X_{2k+2}. Über sie gilt folgender Satz, der uns später bei der Untersuchung der Grassmannrelationen wichtig sein wird:

Satz 5. – *Die Gesamtheit der ∞^{2k+2} durch die $G_{2k+2;\,k}$ gehenden Fundamentalkegel mit der Spitze in einem der Räume $G^A_{2k+1;\,k-1}$ bildet ein lineares System von ∞^{2k+2} quadratischen Kegeln.*

Beweis: Es genügt hierfür zu zeigen, dass die von den Punkten einer Geraden g des Grundraumes X_{2k+2} abhängigen Fundamentalkegel ein Büschel bilden. g möge durch die Punkte

(3) $$A_0 = (0,\ 0, \dots,\ 0,\ 1) \quad \text{und} \quad A_0' = (0,\ 0, \dots,\ 1,\ 0)$$

aufgespannt werden. Die Grassmannkoordinaten der durch A_0 gehenden X_k verschwinden dann bis auf höchstens diejenigen, bei denen der Index $2k+2$ auftritt. Der A_0 zugeordnete Fundamentalkegel schreibt sich in den übrigen p-Koordinaten, d. h. in denjenigen $p_{i_0 \dots i_k}$, bei denen der Index $2k+2$ nicht auftritt. Hierin hat er gemäss (1) die Gleichung:

(4) $$p_{01\dots k}\, p_{k+1\dots 2k+1} + \dots = 0.$$

Die Polarform von (4) hat die Gestalt (1), ihr Verschwinden bedeutet für die X_k-Geometrie des X_{2k+2} aber folgendes: Die Koordinaten (p) eines Raumes X_k und (p') eines Raumes X_k' des X_{2k+2} erfüllen (1) genau dann, wenn entweder einer derselben durch A_0 geht oder wenn er den Verbindungsraum des anderen mit A_0 schneidet. Der A_0' zugeordnete Fundamentalkegel hat die Gleichung

(5) $$p_{01\dots k}\, p_{k+1\dots 2k\, 2k+2} + \dots = 0,$$

wobei alle p ohne den Index $2k+1$ und nur diese auftreten. Eine beliebige Linearkombination aus (4) und (5) lässt sich in der Gestalt

(6) $$p_{01\dots k}(a p_{k+1\dots 2k+1} + b p_{k+1\dots 2k\, 2k+1}) + \dots = 0$$

schreiben, stellt also einen quadratischen Kegel vom selben Rang dar. Nun erfüllen einerseits die Koordinaten der durch $S_0 = (0, \dots,\ 0, -b,\ a)$ auf g gehenden X_k genau die Bedingungen

(7) $$p_{i_0 \dots i_k} = 0 \quad (\text{alle Indizes } 2k), \qquad a p_{i_0 \dots i_{k-1} 2k+1} + b p_{i_0 \dots i_{k-1} 2k+2} = 0.$$

Anderseits lässt die gleich Null gesetzte Polarform von (6) wieder folgende Deutung zu: Sie wird von den Koordinaten zweier Räume X_k und X_k' erfüllt, wenn mindestens einer davon S_0 enthält oder den Verbindungsraum zwischen S_0 und dem anderen schneidet. Daraus folgt aber, dass (6) die Gleichung des S_0 zugeordneten Fundamentalkegels ist, womit bewiesen ist, dass alle Fundamentalkegel ein Linearsystem bilden.

g) In folgender Kennzeichnung der $G_{n;\,k}$ hat man eine erste Verallgemeinerung von Satz 1:

Satz 6. – *Hat man eine ausnahmslos eineindeutige Abbildung der X_k des X_n auf die Punkte einer $g_{n;\,k}$ mit der Eigenschaft, dass den ∞^1 X_k jedes Büschels die Punkte einer Geraden auf $g_{n;\,k}$ zugeordnet sind, so ist $g_{n;\,k}$ entweder eine $G_{n;\,k}$ oder Projektion einer solchen.*

Beweis: Für die Fälle $k=0$ oder $n-1$, wo $G_{n;0}=G_{n;n-1}=S_n$ ist, fällt die Aussage unseres Satzes mit der von Satz 1 zusammen. Es liege nunmehr eine $g_{3;1}$, d. h. Bildmenge der Geraden des X_3 mit den verlangten Eigenschaften vor. Im X_3 seien, wie oben, wieder der Punkt A_0 und die damit nicht inzidierende Ebene B_2 ausgezeichnet. Von den Geraden durch A_0 und von denen in B_2 wissen wir, dass sie je auf die Ebenen $G^A_{2;0}$ und $G^B_{2;1}$ innerhalb von $g_{3;1}$ abgebildet werden. $G^A_{2;0}$ und $G^B_{2;1}$ müssen windschief zueinander liegen, da sonst unsere Abbildung nicht eineindeutig wäre. Aus der Voraussetzung folgt weiterhin, dass $g_{3;1}$ durch ∞^3 Geraden erzeugt wird, die ebenso wie bei der $G_{3;1}$ korrespondierende, d. h. hier korrelativ entsprechende Punkte der Ebenen $G^A_{2;0}$ und $G^B_{2;1}$ miteinander verbinden. Das bedeutet aber, $g_{3;1}$ ist von einer $G_{3;1}$ projektiv nicht verschieden. Jetzt sei eine die Voraussetzungen des Satzes erfüllende $g_{4;1}$ gegeben. Zeichnet man im Grundraum X_4 den Punkt A_0 und die Hyperebene B_3 aus, so ergibt es sich nach dem soeben Festgestellten und Satz 1, dass die Geraden durch A_0 und diejenigen in B_3 je auf eine $G^A_{3;0}$ und $G^B_{3;1}$ abgebildet werden. Nach Voraussetzung werden alle übrigen Geraden des X_4 dann auf Punkte von Geraden abgebildet, die korrespondierende Punkte von $G^A_{3;0}$ und $G^B_{3;1}$ genau so wie bei der $G_{4;1}$ verbinden. Das bedeutet jedoch, die $g_{4;1}$ ist entweder die $G_{4;1}$ oder eine Projektion davon, da es nicht ohne weiteres sicher ist, dass $G^A_{3;0}$ und $G^B_{3;1}$ windschief zueinander liegen. Wir nehmen jetzt nach Induktion an, dass bis $n-1$ alles gezeigt sei. Gegeben sei dann eine $g_{n;k}$ als Bildmenge der X_k des X_n. A_0 und B_{n-1} sollen die übliche Bedeutung haben. Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir jetzt, dass die auf $g_{n;k}$ gelegenen Bildmengen $g^A_{n-1;k-1}$ und $g^B_{n-1;k}$ aller X_k durch A_0, bzw. in B_{n-1} Projektionen Grassmannscher $G^A_{n-1;k-1}$ und $G^B_{n-1;k}$ sind. Bei diesen Projektionen sind ferner die Eigenschaften der $G^A_{n-1;k-1}$ und $G^B_{n-1;k}$, ausnahmslos eineindeutig die betreffenden X_k-Mengen abzubilden, nicht zerstört worden; insbesondere bleibt auch jetzt die Tatsache bestehen, dass man von erzeugenden Räumen S_k auf $g^B_{n-1;k}$ sprechen kann, deren Punkte sämtlich mit einem korrespondierenden Punkt auf $g^B_{n-1;k-1}$ nach unserer Grundvoraussetzung durch erzeugende Geraden zu verbinden sind. Hieraus ergibt sich aber sofort, wenn man alle Projektionen in eine einzige zusammenfasst, dass sich auch $g_{n;k}$ als Projektion der $G_{n;k}$ auffassen lässt.

§ 3. - Inzidenzmannigfaltigkeiten $J_{n;k,h}$.

Bei der Untersuchung der quadratischen Relationen der $G_{n;k}$ hat man ausser den $G_{n;k}$ selber noch die transformierten Mannigfaltigkeiten $V^2(G_{n;k})$ heranzuziehen, wie sich aus § 1 ergibt. Es wird sich jedoch herausstellen, dass weiterhin noch eine gemeinsame Verallgemeinerung beider Mannigfaltigkeitstypen von Wichtigkeit ist. Diese wollen wir jetzt erst definieren:

Gegeben seien die 3 natürlichen Zahlen n, k, h mit $0 \leq h \leq k < n$. Dann betrachte man zunächst die Produktmannigfaltigkeit $\Pi = G_{n;\,k} \times G'_{n;\,h}$ und lasse die Punkte von Π eineindeutig den geordneten Raumpaaren (X_k, X'_h) aus X_n entsprechen. Der Gesamtheit aller Paare (X_k, X'_h) mit Vollinzidenz, d. h. $X'_h \subset X_k$, wofür wir im folgenden stets (k, h) — Element sagen wollen, ist dann eine wohlbestimmte, $J_{n;\,k,\,h}$ zu nennende Teilmenge aus Π zugeordnet. Aus formalen Gründen ist es zweckmässig, diese Definition auch auf den Fall $h = -1$ auszudehnen; es ist dann $J_{n;\,k,\,-1} = G_{n;\,k}$ zu setzen; bei $k = n$ hat man ferner $J_{n;\,n,\,h} = G_{n;\,h}$, sodass die $G_{n;\,k}$ Sonderfälle der $J_{n;\,k,\,h}$ sind. Es folgt ferner aus Dualitätsgründen allgemein: $J_{n;\,k,\,h} = J_{n;\,n-h-1,\,n-k-1}$. Im Falle $h = 0$ sind die $J_{n;\,k,\,h}$ bereits durch MARTINELLI behandelt worden [6].

Um $J_{n;\,h,\,k}$ algebraisch zu beschreiben, beachte man, dass die Koordinaten, in denen sich Π ausdrückt, sinngemäss mit $\pi_{i_0 \dots i_k;\, j_0 \dots j_h}$ zu bezeichnen sind, sodass die Segresche Produktmannigfaltigkeit der beiden linearen Räume $G_{n;\,k}$ und $G'_{n;\,h}$ die Parameterdarstellung:

$$\pi_{i_0 \dots i_k;\, j_0 \dots j_h} = p_{i_0 \dots i_k} \cdot p'_{j_0 \dots j_h} \tag{1}$$

hat, wobei rechts unabhängig voneinander alle Produkte der Koordinaten p und p' stehen. Weiterhin ergibt es sich, dass die Bedingungen für das Enthaltensein eines X_h' in einem X_k sich in Gestalt von bilinearen Relationen in den p und p' ausdrücken lassen. Um dies einzusehen, kann man etwa folgendermassen vorgehen: Man stelle zunächst die Bedingungen dafür auf, dass ein beliebiger Punkt $(x_0', \dots, x_n')$ des X_h' in dem X_k mit den Koordinaten $(p_{i_0 \dots i_k})$ enthalten ist. Diese lauten:

$$x'_{j_0} p_{j_1 \dots j_k} + x'_{j_1} p_{j_0 j_2 \dots j_k} + \dots + x'_{j_k} p_{j_0 \dots j_{k-1}} = 0, \tag{2}$$

und dies für alle Kombinationen $(j_0 j_1 \dots j_k)$ aus $(0\ 1 \dots n)$ gebildet. Denkt man sich diese Beziehungen (2) für $h+1$ linear unabhängige Punkte aus X_h' gebildet, so ergibt das $h+1$ Beziehungen (2) zur gleichen Kombination $(j_0 j_1 \dots j_k)$. Diese führen dann, mit geeigneten Minoren aus der Matrix der $h+1$ Punkte multipliziert und addiert, zu den gewünschten « Inzidenzrelationen » in Gestalt bilinearer Beziehungen zwischen den p und p. Man zählt leicht nach, dass man auf diese Weise gerade $\binom{n+1}{k+2}\binom{n+1}{h}$ derartige Beziehungen zwischen den p und p' erhält. Diese $\binom{n+1}{k+2}\binom{n+1}{h}$ Relationen, von denen man nachweisen kann, dass sie auch die Inzidenz festlegen, bedeuten zufolge (1) hyperebene Schnitte im Produktraume, sodass wir sagen können: $J_{n;\,k,\,h}$ ist ein gewisser linearer Schnitt der Produktmannigfaltigkeit Π. Insbesondere ist $J_{n;\,n-1,\,0}$ ein allgemeiner hyperebener Schnitt der Segreschen $S_{n;\,n}$. Wir

[6] E. MARTINELLI, *Sulla varietà delle faccette p-dimensionali di S_r*, « Atti R. Accad. d'Italia », vol. XII, pagg. 917-943 (1941).

betrachten noch den Sonderfall $k = h$. Dann hat ein Teil der bilinearen Relationen die Proportionalität zwischen den p und p' zur Folge; setzt man in den übrigen Relationen die p und p' einander gleich, so ergibt das lediglich die quadratischen Grassmannrelationen der $G_{n;\,k}$, die man auf diese Weise herleiten könnte. Daraus folgt aber nach unserer in § 1 eingeführten Sprechweise: $J_{n;\,k,\,k} = V^2(G_{n;\,k})$.

Eine Verallgemeinerung der $J_{n;\,k,\,h}$ erhält man, wenn man nicht nur von dem Produkt zweier, sondern beliebig vieler $G_{n,\,k}$ ausgeht. An anderer Stelle will ich mich ausführlicher mit diesem Mannigfaltigkeitstypus beschäftigen. Für uns ist am wichtigsten die Eigenschaft der projektiven Transformierbarkeit in sich, die die $J_{n;\,k,\,h}$ mit ihren Verallgemeinerungen gemein haben. Hierzu kommt man durch folgende Überlegung: Übt man im Grundraum X_n sämtliche Transformationen der vollen projektive Gruppe $\mathfrak{G}$ aus, so überträgt sich das zunächst auf lineare Transformationen je in den p und p', aber dann vermittels (1) auch auf solche in den π. Dadurch wird in Produktraum $\langle G_{n;\,k} \times G'_{n;\,h} \rangle$ eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe von Projektivitäten induziert, die die $J_{n;\,k,\,h}$ und natürlich auch den von ihr aufgespannten Raum in sich transformieren. Fernerhin wird dabei $J_{n;\,k,\,h}$ auch transitiv verändert, da alle $(k,\,h)$-Elemente des X_n bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$ äquivalent sind. Wir benutzen ohne Beweis hier folgende Tatsache:

SATZ 7. - *Für beliebige k, h, n mit $-1 \leq h \leq k \leq n$ erfährt die projektive Gruppe $\mathfrak{G}$ des X_n in Raume $\langle J_{n;\,k,\,h} \rangle$ eine irreduzible Darstellung.*

Wir wollen uns jetzt etwas eingehender mit dem inneren Aufbau der $J_{n;\,k,\,h}$ beschäftigen. Genau so wie wir es im vorigen § mit den $G_{n;\,k}$ getan hatten, gelingt es uns auch, die $J_{n;\,k,\,h}$ allgemein aus solchen niederer Indizes zusammenzusetzen, wenn es auch im allgemeinen etwas umständlicher ist. Zunächst gilt folgender Aufspaltungssatz:

SATZ 8. - *Die Untergruppe $\mathfrak{g}$ aller derjenigen projektiven Transformationen des X_n, die eine Hyperebene B_{n-1} und einen damit nicht inzidenten Punkt A_0 festlassen, erfährt im Raum $\langle J_{n;\,k,\,h} \rangle$ eine Darstellung, bei der im allgemeinen 4 unabhängig zueinander liegende Räume je in sich transformiert werden. Diese « Zerlegung » von $\langle J_{n;\,k,\,h} \rangle$ hat folgende Gestalt:*

$$(3) \qquad \langle J_{n;\,k,\,h} \rangle = \langle J_{n-1;\,k-1,\,h-1} \rangle - \langle J_{n-1;\,k,\,h} \rangle - \langle J_{n-1;\,k-1,\,h} \rangle - \langle J_{n-1;\,k,\,h-1} \rangle$$

(Bei $b > a$ ist unter $J_{n-1;\,a,\,b}$ der leere Raum zu verstehen; man erfasst hierunter auch die Aufspaltung der G-Räume des § 3, wenn man auch bei $a = n$ oder $b = -2$ unter $J_{n-1;\,a,\,b}$ die leere Menge versteht).

Beweis: *a*) Wir behandeln zunächst den Fall $k = n - 1$, $h = 0$. Dann wissen wir, dass $J_{n;\,n-1,\,0}$ allgemeiner, hyperebener Schnitt einer Segreschen $S_{n;\,n}$ ist. Für $n = 1$ ist $J_{1;\,0,\,0}$ als Schnitt der Quadrik $S_{1,\,1}$ ein Kegelschnitt k_1. $\mathfrak{G}$ ist die projektive Gruppe der Geraden X_1, die in der Ebene von k_1 durch die bekannten automorphen Kollineationen von k_1 in sich dargestellt wird. $\mathfrak{g}$ ist diejenige

Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die in der Ebene $\langle k_1 \rangle$ die beiden Punkte A_0 und B_0 auf k_1 und damit von selber auch noch den Pol C_0 der Geraden A_0B_0 bezüglich k invariant lässt. Damit ist aber die gewünschte Aufspaltung von $k_1 = J_{1;0,0}$ geklärt. Man hat $A_0 = J_{0;-1,-1}$, $B_0 = J_{0;0,0}$, $C_0 = J_{0;0,-1}$ zu setzen, während $J_{0;-1,0}$ gleich der leeren Menge ist. Wir können jetzt $n > 1$ annehmen. Unter der Gesamtheit der $(n-1, 0)$-Elemente des X_n gibt es dann bezüglich der Untergruppe $\mathfrak{g}$ folgende Sonderklassen:

1) Gesamtheit der Elemente (X_{n-1}, X_0') mit $X_{n-1} \supset A_0$, $X_0' = A_0$

2) » » » (X_{n-1}, X_0') mit $X_{n-1} = B_{n-1}$, $X_0' \subset B_{n-1}$

3) » » » (X_{n-1}, X_0') mit $X_{n-1} \supset A_0$, $X_0' \subset B_{n-1}$.

Die Bildmengen dieser 3 Gesamtheiten seien $J_{n-1;n-2,-1} = S^A_{n-1}$, $J_{n-1;n-1,0} = S^B_{n-1}$ und $J^{AB}_{n-1;n-2,0}$. Dies sind die 3 ersten Teile der Aufspaltung (3); es fehlt nur noch ein bei $\mathfrak{g}$ invarianter Punkt $D_0 = J_{n-1;n-1,-1}$, um den gesamten Raum $\langle J_{n;n-1,0} \rangle$ aufzuspannen. Diesen Punkt erhalten wir durch folgende Überlegung: Wir betrachten die Bildmenge $S_{n;n}$ aller Paare (X_{n-1}, X_0') des X_n, wovon $J_{n;n-1,0}$ hyperebener Schnitt ist. Dann kann man den Hyperebenen des zu $S_{n;n}$ dualen Gebildes $\widehat{S}_{n;n}$ die Paare (X_0, X'_{n-1}) zuordnen (s. ([4]) § 10 betreffs der Erklärung der $\widehat{S}_{n;n}$). Dies gibt eine weitere, zur ersten duale Deutung für die Gesamtheit der $(n-1, 0)$-Elemente des X_n in der Menge aller Hyperebenen des Gebildes $\widehat{S}_{n;n}$, die durch einen gewissen Punkt Z_0 gehen. Bei der Darstellung der Gesamtgruppe $\mathfrak{G}$ in Raum $\langle S_{n;n} \rangle$ bleiben dann die Hyperebene $\langle J_{n;n-1;0} \rangle$ und der Punkt Z_0 fest. Zufolge des Irreduzibilitätssatzes 7 darf jedoch Z_0 nicht im Raum $\langle J_{n;n-1-0} \rangle$ liegen, spannt also zusammen mit $\langle J_{n;n-1-0} \rangle$ den Raum $\langle S_{n;n} \rangle$ auf. Innerhalb von $S_{n;n}$ ist weiterhin eine $S^{AB}_{n-1;n-1}$ ausgezeichnet, deren Punkte folgende Paarmenge abbilden:

Gesamtheit der Paare (X_{n-1}, X_0') mit $X_{n-1} \supset A_0$. $X_0' \subset B_{n-1}$.

Diese $S^{AB}_{n-1;n-1}$ enthält ihrerseits $J^{AB}_{n-1;n-2,0}$, und nach der soeben angestellten Überlegung, nur für $n-1$ statt für n, bleibt bezüglich der Untergruppe $\mathfrak{g}$ im Raum $\langle S^{AB}_{n-1;n-1} \rangle$ ausser $\langle J^{AB}_{n-1;n-2,0} \rangle$ noch ein Punkt U_0 fest. V_0 aus $S_{n;n}$ möge ausserdem das Bild des Paares (B_{n-1}, A_0) sein; dann besteht folgende Aufspaltung des $\langle S_{n;n} \rangle$ bezüglich $\mathfrak{g}$:

$$\langle S_{n;n} \rangle = S^A_{n-1} - S^B_{n-1} - \langle J^{AB}_{n-1;n-2,0} \rangle - U_0 - V_0 .$$

Wir interessieren uns jedoch nur für die Aufspaltung des Raumes $\langle J_{n;n-1,0} \rangle$. Diesem hyperebenen Schnitt von $S_{n;n}$ gehört V_0 nicht an, da V_0 Bildpunkt eines Nichtelements ist; er enthält aber auch nicht U_0, da sonst ganz $\langle J^{AB}_{n-1;n-2,0} \rangle \cup U_0 = \langle S^{AB}_{n-1;n-1} \rangle$, d. h. ebenfalls Bildpunkte von Nichtelementen darin liegen würden. Somit schneide die Gerade U_0V_0 den Raum $\langle J_{n;n-1,0} \rangle$ in einem von U_0 und V_0 verschiedenen Punkt W_0, in dem wir den gesuchten vierten Bestandteil der Aufspaltung von $\langle J_{n;n-1,0} \rangle$ vor uns naben. Gleichzeitig erhalten wir das Ergebnis, dass die Gerade $U_0 V_0 W_0$ aus lauter Fixpunkten bezüglich der Untergruppe g besteht.

b) Es werde jetzt der allgemeine Fall betrachet. Dann ergeben sich die ersten 3 Bestandteile der behaupteten Aufspaltung des Raumes $\langle J_{n;\,k,\,h}\rangle$ wie im Spezialfall folgendermassen:

1) Elemente $(X_k,\ X_h')$ mit $X_k \supset A_0,\ X_h' \supset A_0$, Bildmenge: $J^A_{n-1;\,k-1,\,h-1}$

2) Elemente $(X_k,\ X_h')$ mit $X_k \subset B_{n-1},\ X_h' \subset B_{n-1}$, Bildmenge: $J^B_{n-1;\,k,\,h}$

3) Elemente $(X_k,\ X_h')$ mit $X_k \supset A_0,\ X_h' \subset B_{n-1}$, Bildmenge: $J^{AB}_{n-1;\,k-1,\,h}$

(bei $k = h$ tritt der Bestandteil 3) nicht auf).

Um den noch fehlenden vierten Bestandteil zu finden, betrachten wir ein festes $(k,\ h-1)$-Element des B_{n-1}, d. h. ein in B_{n-1} gelegenes Paar $(E_k,\ E'_{h-1})$ mit $E'_{h-1} \subset E_k$. Es sei ferner $E_k \cup A_0 = E_{k+1}$. Die Gesamtheit aller Elemente $X_k,\ X'_h)$ aus E_{k+1}, bei denen X'_h und damit auch X_k durch E'_{h-1} gehen, verhält sich offenbar wie die Gesamtheit der $(k-h,\ 0)$-Elemente eines X_{k-h+1}, die wir in *a*) schon behandelt haben. Man kann diese Teilmenge also auf eine $J_{k-h+1;\,k-h,\,0}$ innerhalb der $J_{n;\,k,\,h}$ abbilden und in $\langle J_{k-h+1;\,k-h,\,0}\rangle$ gibt es einen Aufspaltungpunkt W_0 bezüglich der Untergruppe, der somit dem Element $(E_k,\ E'_{h-1})$ aus B_{n-1} zuzuordnen ist. Weiterhin lasse man innerhalb der Produktmannigfaltigkeit $G_{n;\,k} \times G'_{n;\,h}$, wovon $J_{n;\,k,\,h}$ ein linearer Schnitt ist, im Einklang mit den Bezeichnungen von *a*) entsprechen:

Paar $(E_k,\ A_0 \cap E'_{h-1})$ Punkt V_0.

Lässt man jetzt $(E_k,\ E'_{h-1})$ sämtliche $(k,\ h-1)$-Elemente des B_{n-1} durchlaufen, so beschreibt W_0 eine Menge, die $j_{n-1;\,k,\,h-1}$ heisse, während X_0 ersichtlich eine $J_{n-1;\,k,\,h-1}$ durchläuft. Nun erfasst man sämtliche Elemente $(X_k,\ X_h')$ des X_n gewiss in der Gesamtheit aller Elemente, bei denen beide Räume durch irgendeinen E'_{h-1} des B_{n-1} gehen; daher spannt $j_{n-1;\,k,\,h-1}$ zusammen mit den bekannten Bestandteilen 1) bis 3) ganz $\langle J_{n;\,k,\,h}\rangle$ auf. Weiterhin ergibt sich daraus durch eine leichte Dimensionsbetrachtung, die auf der Formel

$$\binom{n+1}{k+2}\binom{n+1}{h} = \binom{n}{k+1}\binom{n}{h-1} + \binom{n}{k+2}\binom{n}{h} + \binom{n}{k+1}\binom{n}{h} + \binom{n}{k+2}\binom{n}{h-1}$$

$$\left(\binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0\right)$$

beruht, dass $\langle J_{n-1;\,k,\,h-1}\rangle$ unabhängig zu den 3 anderen Räumen liegt und dieselbe Dimension wie $\langle J_{n-1;\,k,\,h-1}\rangle$ besitzt. Der oben eingeführte geometrische Ort $J_{n-1;\,k,\,h-1}$ des Punktes V_0 liegt ferner zu $\langle J_{n;\,k,\,h}\rangle$ windschief, da er von den Bildpunkten von Paaren aufgespannt wird, die sämtlich Nichtelemente sind. Unter *a*) hatten wir weiterhin am Schluss festgestellt, dass die

Gerade $g = U_0 V_0 W_0$ aus lauter Fixpunkten bezüglich der dortigen Untergruppe bestand. Jetzt gibt es statt einer im allgemeinen $\infty^{(n-k-1)(k+1)+(k-h+1)h}$ Geraden $V_0 W_0$. Jeder Punkt einer dieser Geraden kann bei den Transformationen der Gruppe g immer nur in den gleichen Punkt irgendeiner anderen Geraden übergehen. $\bar{j}_{n-1;\,k,\,h-1}$ sei die auf diese Weise vom Punkt U_0 beschriebene Mannigfaltigkeit, während V_0, wie wir schon wissen, innerhalb von $J_{n-1;\,k,\,h-1}$ transformiert wird. Weil aber nach Satz 7 der $J_{n-1;\,k,\,h-1}$ durch g irreduzibel transformiert wird, folgt weiterhin, dass der $\langle \bar{j}_{n-1;\,k,\,h-1} \rangle$ windschief zu $\langle J_{n-1;\,k,\,h-1} \rangle$, aus Dimensionsgründen aber auch windschief zu $\langle j_{n-1;\,k,\,h-1} \rangle$ liegt. Die 3 Räume $\langle J \rangle$, $\langle j \rangle$ und $\langle \bar{j} \rangle$ liegen also so, dass sie eine Segresche $S_{m;\,1}$ definieren (m ihre gemeinsame Dimension) und die Geraden, die sie gleichzeitig treffen, wozu die $g = U_0 V_0 W_0$ gehören, vermitteln zwischen ihnen eine projektive Beziehung. Das bedeutet, $j_{n-1;\,k,\,h-1}$ ist auch eine $J_{n-1;\,k,\,h-1}$.

Est ist nunmehr wichtig, auch die $J_{n;\,h,\,k}$, ähnlich wie früher im Satz 6 die $G_{n;\,k}$, durch innere Eigenschaften zu kennzeichnen. Dies soll in folgendem Satz geschehen:

SATZ 9. - *Eine Mannigfaltigkeit $j_{n;\,k,\,h}$, deren Punkte ausnahmslos eineindeutige Bilder der $(k,\,h)$-Elemente des X_n sind $(-1 \leq h < k \leq n)$, fällt mit der soeben definierten $J_{n;\,k,\,h}$ zusammen, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt: 1) Alle ∞^1 Elemente $(X_k,\, X_h')$, bei denen X_k fest ist und X_h' ein Büschel durchläuft oder X_h' fest ist und X_k ein Büschel durchläuft, werden auf die Punkte von Geraden innerhalb von $j_{n;\,k,\,h}$ abgebildet. 2) Die Transformationen der projektiven Gruppe G des X_n induzieren im Raum $\langle j_{n;\,k,\,h} \rangle$ in derselben Weise eine Darstellung durch Projektivitäten wie es im Raum $\langle J_{n;\,k,\,h} \rangle$ der Fall ist.*

Weiterhin wird die Gesamtheit aller Elemente $(X_k,\, X_h')$ des X_n, wobei X_n durch einen festen Raum A_{k-h-1} geht und X_h' in einem zu A_{k-h-1} windschiefen Raum B_{n-k-h} liegt, auf die Punkte einer $V^2(G_{n-k+h;\,h})$ innerhalb der $j_{n;\,k,\,h}$ abgebildet.

Beweis: Wir führen den Beweis wieder in Etappen. Es wird sich dabei eine gewisse Länge der Überlegungen nicht vermeiden lassen, obwohl wir später nicht alle Schlüsse durchführen, wenn sie nach dem Muster eines schon vorher gemachten gehen.

a) Zunächst sei $n = 2,\ k = 1,\ h = 0$. Gemäss der Grundannahme wird dann die $j_{2;\,1,\,0}$ genau so wie die $J_{2;\,1,\,0}$ durch ∞^2 Geraden S_1^I und S_1^{II} erzeugt. Die Punkte einer S_1^I mögen den Elementen $(X_1,\, X_0')$ mit festem X_1 und die Punkte eines S_1^{II} den Elementen mit festem X_0' entsprechen. Weiterhin folgt sofort, dass je zwei Geraden der gleichen Schar windschief zueinander liegen. Dann betrachten wir folgende Gesamtheit von Elementen und ihre Bildmenge auf $j_{2;\,1,\,0}$:

∞ Elemente $(X_1,\, X_0')$ mit $X_1 \supset A_0$ (A_0 fest) Bildmenge: F_2^A

F_2^A wird ersichtlich durch ∞^1 S_1^I erzeugt, ist also eine Regelfläche; diese besitzt ferner eine Leitgerade U_1^{II} vermöge der Abbildung:

∞^1 Elemente (X_1, X_0') mit $X_1 \supset A_0$, $X_0' = A_0$ Punkte von U_1^{II}.

Ist B_1 eine nicht durch A_0 laufende Gerade in X, so erklären wir folgendermassen die Kurve k_1^B auf F_2^A:

∞^1 Elemente (X_1, X_0') mit $X_1 \supset A_0$, $X_0' \subset B_1$ Bildkurve k_1^B.

k_1^B ist eine Leitkurve auf F_2^A, und es gibt ∞^2 derartige Leitkurven in Abhängigkeit von den Geraden B in X_2, und ausserdem schneiden diese k_1^B sich untereinander nur in je einem Punkt. Daraus folgt aber, dass F_2^A eine Regelfläche 3. Grades und die k_1^B darauf Kegelschnitte sind (7). Aus der Grundforderung 2) ergibt sich ferner, dass alle Leitkegelschnitte projektiv äquivalent sind, d. h. F_2^A ist eine Normregelfläche. Weiterhin erfordert die Bedingung 2), dass die Untergruppe $\mathfrak{G}'$ derjenigen Projektivitäten des X_2, die A_0 festlassen, im Raum $\langle F_2^A \rangle_4$ die Gruppe der automorphen Kollineationen von F_2^A in sich induziert. Diese Kollineationen transformieren jedoch alle Punkte des $\langle F_2^A \rangle_4$, die nicht dem ausgezeichneten quadratischen Kegel K_3^A mit der Spitze A_1^{II}, auf dem F_2^A liegt, transitiv ineinander. Weiterhin transformiert dieselbe Untergruppe in der Grundebene X_2 sämtliche Elemente (X_1, X_0'), bei denen X_1 nicht durch A_0 geht, transitiv ineinander. Daraus folgt aber: Liegt der Bildpunkt eines solchen Elements im $\langle F_2^A \rangle$, so befindet sich die ganze $J_{2;1,0}$ darin und fällt mit dem Kegel K_3^A zusammen. Dies ist aber wiederum nicht zulässig, da dann die Punkte von A_1^{II}, der Spitze von K_3^A, nicht durch $\mathfrak{G}$ in jeden andern Punkt von K_3^A transformiert werden könnten. F_2^B sei die dem Punkt B_0 aus X_2 in derselben Weise zugeordnete Regelfläche. F_2^A und F_2^B haben dann eine Erzeugende g gemein, nämlich die Bildmenge aller Elemente mit der Geraden $X_1 = A_0 B_0$. Wir haben gesehen, dass kein, nicht auf g gelegener Punkt von F_2^B in $\langle F_2^A \rangle$ liegen kann. $\langle F_2^A \rangle$ und $\langle F_2^B \rangle$ könnten dann höchstens noch eine Tangentialebene in Punkten von g, die nicht auf den Leitgeraden liegen, gemein haben. Doch auch dies darf nicht sein, da bei derjenigen Untergruppe, die F_2^A und F_2^B gleichzeitig festlässt, immer noch diese Tangentialebenen beliebig ineinander übergehen könnten, und somit $\langle F_2^A \rangle$ und $\langle F_2^B \rangle$ trotzdem mehr als eine Ebenen gemein haben müssten. Es bleibt somit nur übrig, dass F_2^A und F_2^B zusammen einen S_7 aufspannen, der auch mindestens von $j_{2;1,0}$ aufgespannt wird. Da dieselbe Überlegung sich auch für die aus Geraden S_1^{II} gebildeten Regelflächen anstellen lässt, können wir folgendes sagen: $j_{2;1,0}$ wird durch je ∞^2 Geraden S_1^I und S_1^{II} erzeugt, die zu je zweien Normregelflächen 3. Grades innerhalb ihrer Gesamtheit bestimmen, während das ganze mindestens im S_7 stattfindet. Dann ist aber nach einem früheren Ergebnis

(7) S. BERTINI, *Geometria projettiva degli iperspazi*, Pisa 1923, cap. 14.

(s. ([3]), p. 13) die $j_{2;1,0}$, wie behauptet, hyperebener Schnitt einer Segreschen $S_{2;2}$.

b) Es sei jetzt $n > 2$ und $k = n - 1$, $h = 0$ angenommen. Dann folgt zunächst, aufgrund von Satz 1, dass die $j_{n;\,n-1,0}$ durch je ∞^n S^I_{n-1} und S^{II}_{n-1} erzeugt wird, die je den Elementen (X_{n-1}, X_0') mit festem X_{n-1} oder festem X entsprechen. Ferner folgt wie unter *a*), dass bei gegebenen zueinander windschiefen A_1 und B_{n-2} folgende Menge:

(1) Alle ∞^1 Elemente (X_{n-1}, X_0') mit $X_{n-1} \supset B_{n-2}$, $X_0' \subset A_1$

auf die Punkte eines Kegelschnitts k_1^{AB} abgebildet werden. Folgende Gesamtheit:

(2) Alle Elemente (X_{n-1}, X_0') mit $X_{n-1} \supset B_{n-2}$, $X_0' \subset B_{n-2}$

wird nach Voraussetzung 1) auf die Punkte einer F^B_{n-1} abgebildet, die durch ∞^1 S^I_{n-2} (Teilen von S^I_{n-1}-Räumen) und ∞^{n-1} Geraden S^{II}_1 (Teilen von S^{II}_{n-1}-Räumen) erzeugt wird. Die S^I_{n-2} und S^{II}_1 schneiden sich stets, aber je zwei S^I_{n-2} und zwei S^{II}_1 müssen windschief sein. Daraus folgt sofort, dass F^B_{n-1} eine Segresche $S^B_{n-2;\,1}$ ist. Geht man zu der noch umfassenderen Menge:

(3) Alle Elemente (X_{n-1}, X_0') mit $X_{n-1} \supset B_{n-2}$

über. so erweist sich (3) auf eine F^B_n abgebildet, die durch ∞^1 S^I_{n-1} erzeugt wird. Die erzeugenden S^I_{n-1} dieser F^B_n kann man durch die S^I_{n-2} der Bild-$S^B_{n-2;\,1}$ von (2) und der Punkte des Bildkegelschnitts k_1^{AB} von (1) aufspannen. Aus denselben gruppentheoretischen Erwägungen wie in *a*) folgt dann, dass k_1^{AB} und die $S^B_{n-2;\,1}$ windschief liegen und F^B_n somit nach Satz 3 allgemeiner hyperebener Schnitt einer $S^B_{n;\,1}$ ist. Die S^I_{n-1} der $j_{n;\,n-1,\,0}$ bestimmen also innerhalb ihrer Menge zu je zweien derartige F^B_n; entsprechendes gilt natürlich von den dazu vollkommen gleichberechtigten S^{II}_{n-1}.

Wir suchen jetzt die invarianten Teilräume des $\langle j_{n;\,n-1,0}\rangle$ bezüglich derjenigen Untergruppe g des X_n, bei der der Punkt A_0 und die damit nicht inzidente Hyperebene B_{n-1} des X_n festbleiben. Zunächst haben wir wie bei Satz 8 folgende Elementmengen und zugehörige Bilder:

1) Elemente (X_{n-1}, X_0') mit $X_{n-1} \supset A_0$, $X_0' = A_0$, Bildmenge: S^{IIA}_{n-1}
2) Elemente (X_{n-1}, X_0') mit $X_{n-1} = B_{n-1}$, $X_0' \subset B_{n-1}$, Bildmenge: S^{IB}_{n-1}
3) Elemente (X_{n-1}, X_0') mit $X_{n-1} \supset A_0$, $X_0' \subset B_{n-1}$ Bildmenge: $j^{AB}_{n-1;\,n-2,\,0}$

Nach Induktion können wir annehmen, dass die an dritter Stelle stehende $j_{n-1;\,n-2,\,0}$ bereits eine $J_{n-1;\,n-2,\,0}$ ist; nach Satz 7 transformiert die Untergruppe ihren Teilraum $\langle J^{AB}_{n-1;\,n-2,\,0}\rangle$ irreduzibel in sich, das Gleiche tut g natürlich auch mit den Räumen S^{IIA}_{n-1} und S^{IB}_{n-1}. Hieraus folgt aber, dass alle 3 Räume unabhängig zueinander liegen müssen, da man sonst durch Bilden von Verbindungen und Schnitten zu unzulässigerweise in sich transformierten Teilräumen in mindestens einem der 3 Räume kommen würde. Durch 1) bis 3) wird aber erst ein Raum T von n^2+2n-2 Dimensionen aufgespannt, während $\langle J_{n;\,n-1,\,0}\rangle$ ein S_{n^2+2n-1} sein soll. $(C_{n-1},\, C_0')$ sei jetzt ein Element allgemeiner Lage bezüglich A_0 und B_{n-1}, d. h. C_{n-1} und C_0' mögen nicht mit A_0 und B_{n-1} inzidieren. Würde dies Element auf einen dem Raum T angehörigen Punkt S_0^C abgebildet, so läge ganz $\langle j_{n;\,n-1,\,0}\rangle$ in T, da alle allgemeinen Elemente bezüglich $\mathfrak{g}$ äquivalent sind. Angenommen dies wäre der Fall, so kann S_0^C, da $(C_{n-1},\, C_0')$ ein Element allgemeiner Lage ist, auch nicht den durch die Teile 1) bis 3) zu je zweien aufgespannten Räumen angehören, da dies zur Folge hätte, dass alles in diesen Räumen liegen würde. Es gibt mithin eine Treffebene E_2 durch S_0^C zu 1), 2) und 3). E_2 schneide S_{n-1}^{IIA} in U_0 und S_{n-1}^{IB} in V_0. Dies hätte weiterhin zur Folge, dass bei den Transformationen der Untergruppe $\mathfrak{g}$ je ein Punkt U_0 auf S_{n-1}^{IIA} und ein Punkt V_0 von S_{n-1}^{IB} kovariant miteinander transformiert würden, d. h. stets die gleichen Bildpunkte hätten. Dies ist jedoch nicht möglich, denn für den Grundraum hätte dies, wie man sieht, folgende Konsequenz: Eine gewisse Korrelation des B_{n-1} in sich ist mit allen Kollineationen des B_{n-1} in sich vertauschbar. Wir wissen somit, dass $j_{n;\,n-1,0}$ einen $S_{(n+1)^2-2}$ aufspannt. Jetzt legen wir durch S_{n-1}^{IIA} einen S_n^A derart, dass S_n^A und $j_{n;\,n-1,0}$ einen $S_{(n+1)^2-1}$ aufspannen, und erweitern die unter 1) oben definierte Abbildung folgendermassen:

1') Paare $(X_{n-1},\, X_0')$ mit X_{n-1} beliebig, $X_0'=A_0$ Bildmenge: S_n^A

Jeder Punkt dieses S_n^A wird dann mit demjenigen S_{n-1}^I von $j_{n;\,n-1,\,0}$ verbunden, der demselben X_{n-1} aus X_n zugeordnet ist. Wir haben alles gezeigt, wenn nachgewiesen wird, dass dadurch eine $S_{n;\,n}$ erzeugt wird. Dazu betrachten wir eine allgemeine Gerade S_1 aus S_n^A; die Punkte aus S_1 sind dann mit den ∞^1 S_{n-1}^I einer Schar, deren Aufbau oben beschrieben wurde zu verbinden. Gemäss Satz 3 entsteht aber dabei eine $S_{n;\,1}$. Nach Satz 2 erzeugt also die Menge der ∞^n so erhaltenen S_n eine $S_{n;\,n}$, was zu zeigen war.

c) Wir behandeln jetzt den Fall $h=0$ zu beliebigem k. Dann sieht man zunächst auf dieselbe Weise wie oben ein, dass $j_{n;\,k,\,0}$ einen Raum von derselben Dimension wie $J_{n;\,k,\,0}$ aufspannt und dass insbesondere die Teilmengen von Satz 8 darin folgendermassen abgebildet werden:

1) Elemente $(X_k,\, X_0')$ mit $X_k \supset A_0$, $X_0'=A_0$ Bildmenge: $G_{n-1;\,k-1}^A$
2) Elemente $(X_k,\, X_0')$ mit $X_k \subset B_{n-1}$, $X_0' \supset B_{n-1}$ Bildmenge: $J_{n-1;\,k,0}^B$
3) Elemente $(X_k,\, X_0')$ mit $X_k \supset A_0$, $X_0' \supset B_{n-1}$ Bildmenge: $J_{n-1;\,k-1,\,0}^{AB}$

Dann erklären wir J^B und J^{AB} als Schnitte von Produktmannigfaltigkeiten, die wir in Erweiterung der Abbildungen 2), 3) in folgender Weise zuordnen:

2') Paare $(X_k,\, X_0')$ mit $X_k \subset B_{n-1}$, $X_0' \subset B_{n-1}$ Bildmenge: $G_{n-1;\,k} \times S_{n-1}$
3') Paare $(X_k,\, X_0')$ mit $X_k \supset A_0$, $X_0' \subset B_{n-1}$ Bildmenge: $G_{n-1;\,k-1} \times S_{n-1}$

Hierbei sind diese Produkte in grösstmöglicher Unabhängigkeit zum Raum $\{j_{n;\,k,0}\}$ anzunehmen, d. h. wie man abzählt, derart, dass die Bildmengen von 2'), 3') und $j_{n;\,k,\,0}$ zusammen $\binom{n+1}{k+2}$ Dimensionen mehr aufspannen als $j_{n;\,k,0}$ allein. Hält man in den Abbildungsschemen 2') und 3') links den Punkt $X_0' = C_0$ in B_{n-1} fest, so ergeben sich rechts je eine $G^C_{n-1;\,k-1}$ und $G^C_{n-1;\,k}$; diese können dann, wie in § 2, Nr. *e*) erläutert, zu einer $G^C_{n;\,k}$ zusammengefügt werden, deren Punkte man den Paaren (X_k beliebig, C_0) zuzuordnen hat. Dies für alle C_0 aus B_{n-1} durchgeführt, ergibt folgende Abbildung:

23') Paare $(X_k,\ X_0')$ mit X_0' aus B_{n-1} Bildmenge: $G_{n;\,k} \times S_{n-1}$.

Es kommt jetzt noch darauf an, diese $G_{n;\,k} \times S_{n-1}$ zu einer die $j_{n;\,k,\,0}$ enthaltenden $G_{n;\,k} \times S_n$ zu erweitern. Dazu betrachten wir das allgemeine Element $(D_k,\ D_0')$, und es sei $D_k \cap B_{n-1} = D_{k-1}$ und D_0' ausserhalb von B_{n-1} und A_0 gelegen. Folgende Abbildungen liegen dann schon fest:

Elemente $(D_k,\ X_0')$, wozu $(D_k,\ D_0')$ gehört Bildmenge: S^D_k auf $j_{n;\,k,\,0}$
Paare $(D_k,\ X_0')$ mit X_0' beliebig aus B_{n-1} Bildmenge: S^D_{n-1} auf $G_{n;\,k} \times S_{n-1}$

Die Räume S^D_{n-1} und S^D_k rechts schneiden sich in einem S^D_{k-1}, ergeben also einen Verbindungs-S^D_n mit folgender, nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie schon feststehenden Abbildungseigenschaft:

Paare $(D_k,\ X_0')$ mit beliebigem $X_0' \subset X_n$ Bildmenge: $S^D_n = S^D_{n-1} \cup S^D_k$

Verändert man in dieser Überlegung den D_k über die Gesamtheit « fast » aller X_k des X_n, d. h. derjenigen, die nicht in B_{n-1} liegen, so hat man in Fortsetzung der Abbildung 23') die gesuchte Abbildung fast aller Paare $(X_k,\ X_0')$ auf die Punkte einer Bildmenge. Durch stetigen Abschluss wird diese Abbildung fast aller Paare zu einer aller Paare auf die Punkte einer Mannigfaltigkeit $M_{(n-k)(k+1)+n}$. Diese spannt einen Raum von derselben Dimension auf wie ein Produkt $G_{n;\,k} \times S_n$, und man hat sich noch davon zu überzeugen, dass sie mit einem solchen zusammenfällt. Dazu genügt es offenbar festzustellen, dass die Gesamtheit der Paare $(X_k,\ X_0')$ wobei X_0' ganz beliebig in X_n variiert, während die X_k ein Büschel durchlaufen, auf die Punkte einer $S_{n;\,1}$ innerhalb von M abgebildet werden. Gegeben sei nun das Büschel der ∞^1 X_k durch einen C_{k-1} in C_{k+1}, ausserdem die Gerade g_1 des C_{k+1}, windschief zu C_{k-1}, alles in allgemeiner Lage zu A_0, B_{n-1}. Dann werden die ∞^{n+1} Paare (X_k des Büschels, X_0' beliebig) auf ∞^1 S_n abgebildet, wobei diese S_n folgendermassen aufgespannt werden können:

∞^n Paare $(X_k,\ X_0')$ mit X_k aus dem Büschel, $X_0' \subset B_{n-1}$; Bildmenge: $S_{n-1;\,1}$
∞^1 Elemente $(X_k,\ X_0')$ mit X_k aus dem Büschel und X_0' aus g_1; Bildmenge: Kegelschnitt k_1.

Die S_n von M entstehen durch Verbinden der S^I_{n-1} der $S_{n-1;1}$ rechts mit den ihnen in offensichtlicher Weise zugeordneten Punkten von k_1, wobei noch k einen dieser S^I_{n-1} trifft. Dabei entsteht jedoch nach Satz 3 eine $S_{n;1}$.

d) Bei der Behandlung des allgemeinsten Falles können wir $k < n-1$ und $h > 0$ voraussetzen, sodass also der einfachste, hierher gehörige Fall bei $k=2$, $h=1$, $n=4$ vorliegt. Wir fassen uns kurz und nehmen an, es sei bereits durch dieselben Schlüsse wie in *a*) und *b*) gezeigt, dass sich bezüglich unserer Untergruppe $\mathfrak{g}$ der Raum $\langle j_{n;k,h}\rangle$ in die 4 im Satz 8 aufgezählten Teilräume aufspaltet und somit bewiesen sei, dass $\langle j_{n;k,h}\rangle$ bereits einen Raum von der richtigen Dimensionenzahl aufspannt. Dann ergänzen wir die Abbildungen der Elementmengen 1) 2) 3) auf S. 12 zu Abbildungen von Paaren, was nach Induktionsannahme alles möglich ist:

1′) Paare $(X_k,\ X_h')$ mit $X_k \supset A_0,\ X_h' \supset A_0$ Bildmenge: $G_{n-1;k-1} \times G_{n-1;h-1}$

2′) Paare $(X_k,\ X_h')$ mit $X_k \subset B_{n-1},\ X_h' \subset B_{n-1}$ Bildmenge: $G_{n-1;k} \times G_{n-1;h}$

3′) Paare $(X_k,\ X_0')$ mit $X_k \supset A_0,\ X_h' \subset B_{n-1}$ Bildmenge: $G_{n-1;k-1} \times G_{n-1;h}$.

Alle diese Fortsetzungen sollen dabei so weit, wie möglich, unabhängig voneinander und vom Raum $\langle j_{n;k,h}\rangle$ vollzogen werden. Wenn wir jetzt noch eine vierte, von den vorherigen unabhängig liegende Bildmenge aller Paare $(X_k \subset B_{n-1},\ X_h' \supset A_0)$ angeben, könnte man durch «Zusammenkleben» der Bestandteile leicht die gewünschte $G_{n;k} \times G'_{n;h}$ erhalten. Eine gewisse Schwierigkeit besteht nur darin, diesen 4. Teil so vorzugeben, dass die schliesslich erhaltene $G_{n;k} \times G'_{n;h}$ auch die gegebene Bildmenge $j_{n;k,h}$ der $(k,\ h)$-Elemente enthält. Dazu müssen wir schrittweise folgendermassen vorgehen: Aus 1′) und 3′) sowie aus 2) und 3′) verschaffen wir uns zunächst in üblicher Weise durch «Zusammenkleben» folgende Abbildungen:

13′) Paare $(X_k,\ X_h')$ mit $X_k \supset A_0$, X_h' beliebig Bildmenge: $G_{n-1;k-1} \times G_{n;h}$

23′) Paare $(X_k,\ X_h')$ mit X_k beliebig, $X_h' \subset B_{n-1}$ Bildmenge: $G_{n;k} \times G_{n-1;h}$.

Diese Abbildungen 13′) und 23′) sind dabei so einzurichten, dass die auf $j_{n;k,h}$ liegenden Bildmengen aller Elemente, bei denen entweder der X_k durch A_0 geht oder der X_h' in B_{n-1} liegt, von selber in den Produkten rechts enthalten sind, was ohne weiteres möglich ist zufolge der Grundannahme. $(D_k',\ D_h)$ sei dann ein Element allgemeinster Art mit dem Bildpunkt S_0; es möge $D_k \cap B_{n-1} = D_{k-1}$, $D_h' \cap B_{n-1} = D_{h-1}$ sein. Dann gehört dies Element der Gesamtheit folgender Paare an:

(*) Alle Paare $(X_k,\ X_h')$ mit $X_k \supset D_{h-1}$, $X_h' \supset D_{h-1}$.

Diese Gesamtheit verhält sich wie diejenige aller Paare $(X_{k-h},\ X_0')$ eines X_{n-h}. Die Elemente hiervon sind auf eine $J_{n-h;k-h,0}$ der $j_{n;k,h}$ abgebildet. Untersucht man, welche Paare der Menge (*) in 1′), 2′), 3′) vorkommen, so sind es gerade solche, wie wir sie im vorigen Abschnitt *c*) zu Beginn aufgezählt hatten (wobei nur das dortige n, k durch $n-h$, $k-h$ jetzt zu ersetzen ist). Dort ergab es sich, dass die 3 Produktmengen zusammen mit der $J_{n;\,k,\,0}$ eine $G_{n;\,k} \times S_n$ als Fortsetzung mit der entsprechenden Abbildung ihrer Punkte auf die Paare (X_k, X_0') eindeutig festlegten. In unserem Falle heisst das, dass mit den bisherigen Gegebenheiten die Abbildung aller Paare (*) auf die Punkte einer $G_{n-h;\,k-h} \times S_{n-h}$ eindeutig festliegt. Verändert man in dieser Überlegung D_h' über alle X_h' aus B_{n-1}, so liegt in Fortsetzung der gegebenen Elementabbildung folgende Übertragung fest:

(**) Paare (X_k, X_h'), wobei X_k und X_h' sich auf B_{n-1} mindestens $h-1$ — dimensional treffen	Bildmenge: M'.

Hieraus merken wir uns noch folgende Teilgesamtheit besonders an:

4*) Paare (X_k, X_h') mit $X_k \subset B_{n-1}$, $X_h' \supset A_0$ und die sich auf B_{n-1} in einem X_{h-1} schneiden.

Die Gesamtheit 4*) verhält sich wie die der $(k, h-1)$-Elemente des B_{n-1}, ihre Bildmenge erfüllt ersichtlich die Bedingungen des Satzes selber, ist daher nach Induktion eine $J_{n-1;\,k,\,h-1}$, die sich als Schnitt einer $G_{n-1;\,k} \times G_{n-1;\,h-1}$ auffassen lässt. Ein solches Produkt werde dann unabhängig zu den in 1') 2') 3') schon vorliegenden Produkten durch die $J_{n-1;\,k,\,h-1}$ gelegt und mit der folgenden Abbildungsvorschrift versehen:

4') Paare (X_k, X_h') mit $X_k \subset B_{n-1}$, $X_h' \supset A_0$ Bildmenge: $G_{n-1;\,k} \times G_{n-1;\,h-1}$.

Nunmehr ist die Zusammenfügung von 1') bis 4') zu einer $G_{n;\,k} \times G_{n;\,h}$ klar, deren Punkte dann sämtliche Paare (X_k, X_h') des X_n abbilden. Der vorliegende Gang der Konstruktion zeigt, dass die Elemente dabei sämtlich auf die $j_{n;\,k,\,h}$ abgebildet bleiben, womit alles klar ist.

e) Es bleibt jetzt noch übrig, den 2. Teil des Satzes zu beweisen. Nach dem, was wir schon wissen, bedeutet seine Behauptung in Fortsetzung von Satz 6 folgendes: Eine Mannigfaltigkeit, deren Punkte den X_k eines X_n eineindeutig zugeordnet sind, ist eine $V^2(G_{n;\,k})$, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt: 1) Die X_k eines jeden Büschels entsprechen den Punkten eines Kegelschnitts, 2) Die Transformationen der projektiven Gruppe des X_n induzieren in Aussenraum von $g_{n;\,k}$ eine Gruppe von projektiven Transformationen, wodurch die Punkte der $g_{n;\,k}$ ebenso wie die entsprechenden X_k ineinander transformiert werden. Bei $k=0$ und $n=2$ steckt darin die bekannte Kennzeichnung der Veroneseschen V_2^2, die man ohne weiteres auf $n>2$ übertragen kann. Um das allgemeine Problem zu lösen, stelle man zunächst fest, dass nach Satz 8 der Raum $\langle V^2(G_{n;\,k})\rangle$ folgende Aufspaltung besitzt:

$$\langle V^2(G_{n;\,k})\rangle = \langle V^2(G^A_{n-1;\,k-1})\rangle - \langle V^2(G^B_{n-1;\,k})\rangle - \langle J_{n-1;\,k,\,k-1}\rangle.$$

Die beiden ersten Teile haben die bekannte Bedeutung; wie bei der $G_{n;\,k}$ kann man von korrespondierenden Punkten auf ihnen sprechen, die jedoch nicht wie bei der $G_{n;\,k}$ durch Gerade, sondern durch Kegelschnitte verbunden sind; $J_{n;\,k,\,k-1}$ ist dann der geometrische Ort der Tangentenschnittpunkte an diese Kegelschnitte in korrespondierenden Punkten. Um nun die gegebene $g_{n;\,k}$ mit den obigen Eigenschaften als $V^2(G_{n;\,k})$ zu kennzeichnen, hat man dann folgendermassen vorzugehen: Man nehme induktiv an, dass bis $n-1$ alles bewiesen sei. Dann liegen zunächst die Mengen $V^2(G_{n-1;\,k-1})$ und $V^2(G_{n-1;\,k})$ fest; aus gruppentheoretischen Gründen sind ihre Räume ausserdem windschief. Weiterhin hat man in der beschriebenen Menge von Tangentenschnittpunkten an Kegelschnitte zunächst eine Bildgesamtheit $j_{n-1;\,k,\,k-1}$ der $(k,\,k-1)$-Elemente des B_{n-1}. Diese $j_{n-1;\,k,\,k-1}$ wird zunächst wegen unserer Grundvoraussetzung durch die Untergruppe $\mathfrak{g}$ in der gewünschten Weise in sich transformiert, ferner werden ∞^1-Gesamtheiten von Elementen, wobei der X_k oder der X_{k-1} ein Büschel durchläuft, auf Geraden innerhalb von $j_{n-1;\,k,\,k-1}$ abgebildet. Dies läuft nämlich auf die Tatsache hinaus, dass die Tangentialebenen längs eines beliebigen Kegelschnitts der Veroneseschen Fläche V_2^2 eine feste weitere Tangentialebene der V_2^2 in Punkten einer Geraden schneiden. Nach dem schon Bewiesenen ist somit unsere $j_{n-1;\,k,\,k-1}$ eine $J_{n-1;\,k,\,k-1}$ (zum Beweis dieser Tatsache braucht man seinerseits nur solche Annahmen, die nach Induktion zulässig sind und sich auf niedere Indizes beziehen). Ferner ergibt sich, dass die 3 Teilräume aus gruppentheoretischen Gründen unabhängig zueinander liegen müssen. Schliesslich ist dann die $g_{n;\,k}$ projektiv festgelegt, wenn man nur an einer Stelle einen der erzeugenden Kegelschnitte, von denen ja überall schon 2 Punkte mit den Tangenten darin bekannt sind, unter ∞^1 Möglichkeiten vorschreibt.

§ 4. - **Ausreduktion der Grassmannrelationen.**

Wir wenden uns nunmehr der Betrachtung der Grassmannrelationen zu. Wichtig wird für uns dabei vor allem der Satz 4 des § 2 sein, wonach es durch die $G_{2k+1;\,k}$ bei ungeradem k eine ausgezeichnete nicht entartete, sog. Fundamentalquadrik gibt. Bei allgemeineren G-Mannigfaltigkeiten interessieren wir uns danach insbesondere für die Möglichkeiten, diese in eine $G_{2k+1;\,k}$ (k ungerade) zu projizieren. Die Fundamentalquadrik dieser $G_{2k+1;\,k}$ ergibt dann, verbunden mit dem Projektionszentrum einen ausgezeichneten Kegel durch die G-Mannigfaltigkeit, der auch Fundamentalkegel genannt werde. Die Suche nach derartigen Projektionszentren bedeutet ersichtlich dual dasselbe wie die Suche nach Teilmengen $G_{2k+1;\,k}$ (k ungerade) auf der gegebenen $G_{n;\,q}$. Um gleich die höchsten, auf der $G_{n;\,q}$ liegenden $G_{2k+1;\,k}$ zu erfassen, hat man zu unterscheiden, ob q ungerade oder gerade ist; in beiden Fällen schreiben wir wieder k anstatt q. Beachtet man die Bedeutung der Teil-

Grassmannmannigfaltigkeiten einer $G_{n;\,k}$, für die Geometrie des Grundraumes X_n, so hat man folgendes: Bei ungeradem k werden die in einem Teil-X_{2k+1} des X_n $(n > 2k+1)$ liegenden X_k gerade auf die Punkte einer $G_{2k+1;\,k}$ und bei geradem k die in einem X_{2k} liegenden und durch einen Punkt X_0 gehenden X_k auf die Punkte einer $G_{2k-1;\,k-1}$ abgebildet. Im ersten Fall sind somit die $G_{2k+1;\,k}$ der $G_{n;\,k}$ den X_{2k+1} des Grundraumes und im zweiten Fall die $G_{2k-1;\,k-1}$ der $G_{n;\,k}$ den $(2k,\,0)$-Elementen des Grundraumes eineindeutig zugeordnet. Über die von diesen $G_{2k+1;\,k}$ bzw. $G_{2k-1;\,k-1}$ aufgespannten Räume gilt folgender wichtige:

SATZ 10. - *Gegeben sei eine $G_{n;\,k}$ mit $2k+1 \leq n$. Dann liegen bei ungeradem k die $\infty^{(n-2k-1)(2k+2)}$ Räume $\langle G_{2k+1;\,k}\rangle$ der den X_{2k+1} des Grundraumes in der vorhin erklärten Weise auf der $G_{n;\,k}$ zugeordneten $G_{2k+1;\,k}$ nicht gleichzeitig auf einer Quadrik. Bei geradem k gilt dasselbe für die Gesamtheit der Räume $\langle G_{2k-1;\,k-1}\rangle$ der in der soeben beschriebenen Weise den $(2k,\,0)$-Elementen des X_n zugeordneten $G_{2k-1;\,k-1}$.*

Beweis: Es werde zuerst der Fall eines ungeraden k behandelt. Im X_n sei ein fester A_k angenommen; jeder X_k des X_n liegt dann in mindestens einem der X_{2k+1} durch A_k. Das bedeutet, auf die $G_{n;\,k}$ übertragen: Jeder Punkt der $G_{n;\,k}$ gehört mindestens einer der $G_{2k+1;\,k}$ an, die in der beschriebenen Weise den X_{2k+1} durch A_k zugeordnet sind. Das bedeutet aber wiederum, diese $G_{2k+1;\,k}$ und erst recht ihre Räume $\langle G_{2k+1;\,k}\rangle$ spannen ganz $\langle G_{n;\,k}\rangle$ auf. Anderseits enthalten die betrachteten $\langle G_{2k+1;\,k}\rangle$ alle den Bildpunkt S_0 von A_k; eine Quadrik des $\langle G_{n;\,k}\rangle$, die sie alle enthält, müsste demnach in S_0 einen singulären Punkt besitzen, d. h. ein Kegel sein, dessen Spitzenraum durch S_0 geht. A_k konnte nun in dieser Überlegung ein beliebiger X_k des X_n sein: hieraus folgt, dass eine Quadrik, die alle $\langle G_{2k+1;\,k}\rangle$ enthält, ein Kegel ist, dessen Spitzenraum alle Punkte von $G_{n;\,k}$ enthält. Dies ist jedoch unmöglich, da $G_{n;\,k}$ den ganzen Raum aufspannt, in dem dieser Kegel liegen sollte. Jetzt sei k gerade angenommen. Dann betrachten wir zunächst im X_n die Gesamtheit aller X_k, die durch einen festen Punkt A_0 gehen und deren Bildpunkte eine $G^A_{n-1;\,k-1}$ innerhalb der $G_{n;\,k}$ erfüllen. Im $\langle G^A_{n-1;\,k-1}\rangle$ dieser $G^A_{n-1;\,k-1}$ liegen nun alle Räume $\langle G_{2k-1;\,k-1}\rangle$, die in der beschriebenen Weise denjenigen $(2k,\,0)$-Elementen zugeordnet sind, bei denen der Punkt mit A_0 zusammenfällt. Eine Quadrik Q, die alle $\langle G_{2k-1;\,k-1}\rangle$ des $\langle G_{n;\,k}\rangle$ enthält, muss insbesondere den $\langle G^A_{n-1;\,k-1}\rangle$ entweder ganz enthalten oder auch in einer Quadrik schneiden. Die letzte Möglichkeit würde besagen, dass es eine Quadrik Q des $\langle G^A_{n-1;\,k-1}\rangle$ geben würde, die sämtliche Räume $\langle G_{2k-1;\,k-1}\rangle$ der innerhalb von $G^A_{n-1;\,k-1}$ gelegenen $G_{2k-1;\,k-1}$ enthält. Nach der zuvor für ungerade k angestellten Überlegung existiert eine solche Quadrik jedoch nicht. Mithin enthält die Quadrik Q des $\langle G_{n;\,k}\rangle$, deren Existenz angenommen wurde, auch alle Räume der Art $\langle G^A_{n-1;\,k-1}\rangle$, die in der beschriebenen Weise den ∞^n Punkten A_0 des Grundraumes X_n zugeordnet sind. Weiterhin sei zunächst

$n = 2k + 1$ angenommen, und es werde ausserdem der feste A_k aus X_{2k+1} betrachtet. Dann liegt der Bildpunkt jedes X_k, der A_k schneidet, in mindestens einem der $\infty^k \langle G^A_{2k;k-1} \rangle$, der einem der Punkte A_0 aus A_k zugeordnet ist. Alle diese ∞^k $G^A_{2k;k-1}$ und daher auch ihre Räume $\langle G^A_{2k;k-1} \rangle$ enthalten den Bildpunkt S_0 von A_k und spannen die nach Satz 4 in der Fundamentalkorrelation S_0 zugeordnete Hyperebene $H(S_0)$ auf. Ist S_0 ein regulärer Punkt der angenommenen Quadrik Q, so muss demnach Q durch $H(S_0)$ in S_0 berührt werden. Hieraus folgt aber, wenn man diese Überlegung für hinreichend viele Punkte S_0 von $G_{2k+1;k}$, die ja « fast alle » für Q regulär sein müssen, anstellt, dass die obige Fundamentalkorrelation eine Polarität bezüglich Q ist, im Widerspruch zu Satz 4, wonach es bei geradem k eine Nullkorrelation ist. Um den Satz schliesslich für alle $n > 2k + 1$ und gerades k zu zeigen, nehmen wir an, von $2k + 1$ bis $n - 1$ sei schon alles gezeigt, wobei wir beachten, dass der Anfangsfall $n = 2k + 1$ soeben bewiesen wurde. Die X_k des X_n, die in einer den festen A_k enthaltenden Hyperebene X_{n-1} liegen, werden dann auf eine $G_{n-1;k}$ abgebildet. Alle diese den X_{n-1} durch A_k zugeordneten $G_{n-1;k}$ enthalten den Bildpunkt S_0 von A_k, und eine Quadrik Q der gesuchten Art müsste alle diese Räume $\langle G_{n-1;k} \rangle$ ganz enthalten, da ja sonst Q einen Raum $\langle G_{n-1;k} \rangle$ in einer Quadrik schneiden müsste, die es nach Induktionsannahme nicht gibt. Die durch S_0 gehenden $\langle G_{n-1;k} \rangle$ spannen jedoch ganz $\langle G_{n;k} \rangle$ auf, eine die $\langle G_{n-1;k} \rangle$ enthaltende Quadrik müsste somit in S_0 einen singulären Punkt besitzen. Dieselbe Überlegung könnte man für jeden anderen Punkt von $G_{n;k}$ anstellen. Q kann jedoch nicht in allen Punkten einer ihren Zugehörigkeitsraum aufspannenden Menge singulär sein.

Wir wenden uns nun nochmals dem Fall der $G_{2k+1;k}$ bei ungeradem $k > 1$ zu und sprechen folgenden, später ebenfalls benötigten Satz über die Bestimmung der Fundamentalquadrik aus:

SATZ 11. – *Gegeben sei eine $G_{2k+1;k}$ bei ungeradem $k > 1$ mit der Fundamentalquadrik Q. Dann ist Q dadurch bestimmt, sämtliche Räume $\langle G_{2k-3;k-2} \rangle$ zu enthalten, wobei unter $G_{2k-3;k-2}$ irgendeine Bildmenge aller X_k des X_{2k+1} zu verstehen ist, die durch eine feste Gerade gehen und in einem festen X_{2k-1} liegen (d. h. die $G_{2k-3;k-2}$ sind den $(2k-1, 1)$-Elementen des X_{2k+1} zugeordnet).*

Beweis: Die Gesamtheit der X_k des X_{2k+1}, die einen festen Punkt A_0 enthalten, wird auf die Punkte einer $G^A_{2k;k-1}$, und die Gesamtheit der X_k, die in einem festen B_{2k} enthalten sind, auf die Punkte einer $G^B_{2k;k}$ abgebildet. Diese beiden Typen von Teilmannigfaltigkeiten der $G_{2k+1;k}$ sind natürlich projektiv äquivalent, aber wohl zu unterscheiden. In einer $G^A_{2k;k-1}$, die dem Punkt A_0 des X_{2k+1} zugeordnet ist, liegen weitere $G_{2k-3;k-2}$, deren Punkte je den X_k zugeordnet sind, die durch eine A_0 enthaltende Gerade gehen und in einem B_{2k-1} liegen. Nun gibt es nach dem soeben bewiesenen Satz 10 keine Quadrik des $\langle G^A_{2k;k-1} \rangle$, die alle Räume $\langle G_{2k-3;k-2} \rangle$ der in $G_{2k;k-1}$

befindlichen $G_{2k-3;\,k-2}$ enthält. Eine Quadrik Q', welche die im Satz formulierten Eigenschaften besitzt, muss daher den Raum $\langle G^A_{2k;\,k-1}\rangle$ ganz enthalten, d. h. damit auch alle den übrigen Punkten des X_{2k+1} zugeordneten G-Räume. Auf dieselbe Weise könnte man schliessen, dass Q' die den Hyperebenen des X_{2k+1} zugeordneten $\langle G^B_{2k;\,k}\rangle$ sämtlich enthält. Nehmen wir an, Q' sei im Punkt S_0 der $G_{2k+1;\,k}$ regulär (solche Punkte gibt es gewiss, da Q' nicht in allen den $\langle Q'\rangle$ aufspannenden Punkten der $G_{2k+1;\,k}$ singulär sein kann). S_0 entspreche der Raum A_k des X_{2k+1}. Wir haben soeben festgestellt, dass Q' die allen Punkten A_0 des A_k zugeordneten $\langle G^A_{2k;\,k-1}\rangle$ sämtlich enthält. Die Punkte aller dieser $G^A_{2k;\,k-1}$ sind in ihrer Gesamtheit genau die Bildpunkte sämtlicher X_k, die A_k treffen, und jeder derartige Bildpunkt liegt auch in einem $\langle G^A_{2k;\,k-1}\rangle$. Daraus schliesst man, dass Q' in S_0 durch dieselbe Hyperebene berührt wird wie die Fundamentalquadrik Q. Da dies aber in «fast allen» Punkten von $G_{2k+1,\,k}$ der Fall ist, bleibt nichts anderes übrig, als dass Q und Q' zusammenfallen.

Wir wenden uns jetzt der Reduzierung der G-Relationen zu und behandeln, bevor wir einen allgemeinen Satz angeben, der alle Fälle umfasst, die $G_{n;\,k}$ mit $k = 1, 2, 3$ gesondert. Aufgrund der Sätze der vorherigen § wird es uns gelingen, den Relationen durch ausgezeichnete Inzidenzmannigfaltigkeiten aufzuspannen, deren Punkte dann jeweils ausgezeichneten Klassenquadriken durch das duale Gebilde $\widetilde{G}_{n;\,k}$ zuzuordnen sind. Durch Dualisierung würden sich dann daraus jeweils ausgezeichnete Fundamentalkegel durch die $G_{n;\,k}$ ergeben. Wir beschreiben diese Kegel, zu denen sich die Spitzenräume in jedem Falle leicht angeben lassen, nicht in jedem Falle besonders.

a) Relationen der $G_{n;\,1}$.

Wir erinnern zuvor an folgende bekannten Tatsachen über diesen einfachsten Sonderfall einer $G_{n;\,k}$: Man kann die $G_{n;\,1}$ auch so definieren: Man fasse die Elemente x_{ij} einer $n+1$-reihigen, schiefsymmetrischen Matrix (x_{ij}) als homogene Koordinaten eines $S_{\binom{n+1}{2}-1}$ auf und schreibe sämtliche Bedingungen dafür auf, dass diese Matrix den Rang 2 besitzt. Diese Bedingungen können in der Form von $\binom{n+1}{4}$ linear unabhängigen, quadratischen Gleichungen angegeben werden, die alle die Gestalt der bekannten Plückerrelation des Falles $n = 3$ besitzen. Der zu Beginn dieses § eingeführte Relationenraum der $G_{n;\,1}$ hat somit $\binom{n+1}{4} - 1$ Dimensionen und werde $R_{\binom{n+1}{4}-1}$ genannt. Wir betrachten, bevor wir über ihn einen allgemeinen Satz formulieren, erst die Sonderfälle $n = 3, 4, 5$.

$n = 3$. Die Plückerquadrik $G_{3;\,1}$ des S_5 hat eine V^2-Transformierte $V^2(G_{3;\,1})$, die zusammen mit einem Relationenpunkt R_0 den Raum $\langle V_5\rangle_{20}$ aufspannt, wobei $V_5^2 = V^2(\langle G_{3;\,1}\rangle_5)$ ist.

$n = 4$. Die $G_{4;\,1}$ ist eine M_6 des S_9, die durch 5 linear unabhängige Quadriken definiert wird. Es ist seit längerem bekannt, dass diese Quadriken alle projektiv gleichberechtig sind und Kegel darstellen, deren Spitze einer der ∞^4 erzeugenden Räume S_3^I der $G_{4;1}$ ist. Nach unserer Abzählung können wir zunächst sagen, dass der Relationenraum der $G_{4;1}$ ein R_4 ist, sodass der $\langle V_9^2 \rangle_{54}$ durch R_4 und den Raum $V^2(G_{4;1})$ aufgespannt wird. Nun liegen ∞^4 $G_{3;1}$ in der $G_{4;1}$, sie werden in der V^2-Transformation zu ∞^4 $V^2(G_{3;1})$, einer der von ihnen aufgespannten Räume $\langle G_{3;1} \rangle_5$ wird zu einer V_5^2, $\langle V_5^2 \rangle_{20}$ wird nach dem zuvor bei $n = 3$ Bemerkten durch die $V^2(G_{3;1})$ und einen Relationspunkt R_0 aufgespannt wird. Insgesamt entstehen somit ∞^4 Punkte R_0. Da nach Satz 10 durch die Gesamtheit der ∞^4 $\langle G_{3;1} \rangle_5$ keine Quadrik des S_9 geht, spannen die ∞^4 den $G_{3;1}$ in der V-Abbildung zugeordneten V_5^2 insgesamt ganz $\langle V_9^2 \rangle_{54}$ auf; daraus folgt aber weiterhin, dass dieser $\langle V_9^2 \rangle_{54}$ auch durch $V^2(G_{4;1})$ und die ∞^4 Punkte R_0 aufgespannt wird. Weil durch die in $\langle V_9^2 \rangle$ induzierte Darstellung der projektiven Gruppe des Grundraumes X_4 ersichtlich der $\langle V^2(G_{4;1}) \rangle$ und die Gesamtheit der Relationenpunkte R_0 je irreduzibel in sich transformiert werden, ergibt es sich, dass die Gesamtheit der ∞^4 Punkte R_0 mit dem Relationenraum R_4 zusammenfallen muss. Daher erfährt die projektive Gruppe des X_4 eine äquivalente Darstellung im R_4.

$n = 5$. Die $G_{5;1}$ ist eine M_8 des S_{14}, die durch 15 linear unabhängige Quadriken definiert werden kann, d. h. der Relationenraum ist ein R_{14}. Die Gesamtheit derjenigen Geraden, die einem X_3 im Grundraum X_5 angehören, wird auf die Punkte einer $G_{3;1}$ innerhalb von $G_{5;1}$ abgebildet. Nach Satz 10 gibt es keine Quadrik des $\langle G_{5;1} \rangle_{14}$, die gleichzeitig alle Räume $\langle G_{3;1} \rangle_5$ aller ∞^8 auf diese Weise definierten $G_{3;1}$ enthält. Dies bedeutet, auf die V^2-Abbildung übertragen: Die ∞^8 Mannigfaltigkeiten V_5^2, die als V^2-Bilder der ∞^8 $\langle G_{3;1} \rangle_5$ erscheinen, spannen den ganzen $\langle V_{14}^2 \rangle$ auf. Ein Raum $\langle V^2(\langle G_{3;1} \rangle_5) \rangle$ wird wieder durch $V^2(G_{3;1})$ und einen Relationenpunkt R_0 aufgespannt, der somit der $G_{3;1}$, d. h. einem X_3 des Grundraumes X_5 zugeordnet ist. Variiert man X_3 über alle X_3 des X_5, so beschreibt der Punkt R_0 eine Mannigfaltigkeit $g_{5;3}$, die zusammen mit $V^2(G_{5;1})$ ganz $\langle V_{14}^2 \rangle$ aufspannt. $g_{5;1}$ ist eine Bildmannigfaltigkeit für alle X_3 des X_5, und es ist zu zeigen, dass es sich um eine Grassmannsche $G_{5;3}$ handelt. Das folgt aber aus Satz 6 von § 2. Denn betrachtet man alle ∞^4 $G_{3;1}$ in einer $G_{4;1}$, so folgt aus dem bei $n = 4$ Festgestellten, dass die zugehörigen ∞^4 Punkte R_0 einen R_4 erfüllen. Das bedeutet jedoch, die Abbildung der X_3 des X_5 auf die Punkte von $g_{5;1}$ ist derart, dass Büschel von X_3 auf Geraden abgebildet werden. Da ausserdem die Punkte der $g_{5;1}$ durch Projektivitäten ihres Aussenraumes, die durch die projektive Gruppe des X_5 induziert werden, transitiv ineinander übergehen, ist $g_{5;3} = G_{5;3}$, was auch der Dimensionenzahl nach stimmt.

SATZ 12. - *Die Gruppe der Projektivitäten des X_n induziert im Relationenraum $R_{\binom{n+1}{4}-1}$ der $G_{n;1}$ eine irreduzible Darstellung durch projektive Transformationen, die eine den $R_{\binom{n+1}{4}-1}$ aufspannende ausgezeichnete $G_{n;3}$ in sich überführen.*

Beweis: Zufolge Satz 10 gibt es keine Quadrik des $\langle G_{n;1}\rangle$, die sämtliche $\langle G_{3;1}\rangle_5$ enthält, wobei $G_{3;1}$ die Bildmenge aller X_1 eines festen X_3 des X_n ist. Nach derselben Überlegung wie in den Sonderfällen ist dann jedem dieser $G_{3;1}$ ein Relationenpunkt R_0 zugeordnet, derart dass die Gesamtheit dieser Punkte einerseits zusammen mit $V^2(G_{n;1})$ den ganzen Raum $\langle V^2(\langle G_{n;1}\rangle)\rangle$ aufspannt, anderseits aber auch eine der Gesamtheit der X_3 des X_n zugeordnete Bildmenge $g_{n;3}$ bildet. Lässt man die $G_{3;1}$ die ∞^4 $G_{3;1}$ einer $G_{4;1}$ durchlaufen, so erfüllen die entsprechenden R_0-Punkte einen R_4, dessen Punkte somit die ∞^4 X_3 eines X_4 im X_n abbildet. Da die gruppentheoretische Forderung ohne weiteres erfüllt ist, handelt es sich bei der $g_{n;3}$ um eine $G_{n;3}$.

b) Relationen der $G_{n;2}$.

Der niedrigste Fall einer $G_{n;2}$, die nicht mit einer $G_{n;1}$ zusammenfällt, liegt bei der $G_{5;2}$ vor. In einer klassischen Arbeit von C. SEGRE sind viele Eigenschaften dieser $G_{5;2}$ beschrieben worden ([8]). Es ist dort auch angegeben worden, dass die $G_{5;2}$, die eine M_9 des S_{19} ist, durch 35 linear unabhängige quadratische Relationen beschrieben werden kann, ohne dass jedoch dies System näher untersucht worden ist. Wir beachten zunächst, dass die Gesamtheit der X_2 des Grundraumes X_5, die durch einen Punkt X_0 gehen und in einem X_4 liegen, auf die Punkte einer $G_{3;1}$ innerhalb der $G_{5;2}$ abgebildet werden. Es gibt somit ebensoviele derartige $G_{3;1}$ auf der $G_{5;2}$ wie es (4, 0)-Elemente im X_5 gibt, d. h. ∞^9. Aus Satz 10 folgt zunächst, dass keine Quadrik des $\langle G_{5;2}\rangle_{19}$ existiert, die alle Räume $\langle G_{3;1}\rangle_5$ dieser ∞^9 $G_{3;1}$ enthält. In der V^2-Abbildung spaltet der Raum $\langle V_5^2\rangle$, wobei $V_5^2 = V^2(\langle G_{3;1}\rangle_5)$ ist, sich wie üblich in den Raum $\langle V^2(G_{3;1})\rangle$ und einen Punkt R_0. Es kommt nur darauf an, einzusehen, dass der geometrische Ort $j_{5;4,0}$ der Punkte R_0 eine $J_{5;4,0}$ ist. Dazu beachten wir, dass die $G_{5;2}$ weiterhin noch eine Schar von ∞^5 $G_{4;1}$ besitzt und eine dazu projektiv äquivalente Schar von ∞^5 $G_{4;2}$. Die Punkte einer $G_{4;1}$ entsprechen dabei den Ebenen durch einen Punkt und die einer $G_{4;2}$ den Ebenen in einem X_4 des X_5. Sowohl eine $G_{4;1}$ als auch eine $G_{4;2}$ enthalten ∞^4 der zuvor betrachteten $G_{3;1}$. Die Punkte R_0, die den ∞^4 in einer festen $G_{4;1}$ gelegenen $G_{3;1}$ zugeordnet sind, erfüllen nach dem, was wir von *a*) her schon wissen, einen X_4, und das Gleiche gilt für die $G_{4;2}$ Zusammen mit der ohne weiteres erfüllten gruppentheoretischen Forderung ergibt sich hieraus, dass die $j_{5;4,0}$ eine $J_{5;4,0}$ ist nach Satz 9. Weiterhin folgt hieraus wegen der Irreduzibilität der Darstellungen in den Räumen $\langle V^2(G_{5;2})\rangle$ und $\langle J_{5;4,0}\rangle$, dass diese windschief liegen, und mithin $J_{5;4,0}$ den ganzen Relationenraum aufspannt, der daher 34 Dimensionen hat. Allgemein gilt:

SATZ 13. – *Die Gruppe der Projektivitäten des X_n induziert im Relationenraum R der $G_{n;2}$ $(n \geq 5)$ eine Darstellung durch Transformationen, die eine den R aufspannende $J_{n;4,0}$ in sich überführen.*

([8]) C. SEGRE, *Sui complessi lineari di piani nello spazio a 5 dimensioni*, « Annali di mat. », III, 27 (1918) pp. 75-123.

Beweis: Zufolge Satz 10 gibt es keine Quadrik des $G_{n;2}$, die alle $\langle G_{3;1}\rangle_5$ enthält. Hierbei sind die Punkte einer der in Frage kommenden $G_{3;1}$ die Bilder aller X_2, die durch einen Punkt gehen und in einem X_4 des X_n liegen. Wie bei $n=5$ ergibt sich dann eine Menge von Punkten in Zuordnung zu den (4, 0)-Elementen des X_n. Betrachtet man die $G_{4;1}$ und $G_{4;2}$, in denen die $G_{3;1}$ gelegen sind, so ergibt es sich, dass die Gesamtheit derjenigen Elemente, bei denen entweder der Punkt oder der X_4 fest bleiben, auf die Punkte von linearen Räumen innerhalb unserer Bildmenge abgebildet werden. Da ausserdem die gruppentheoretische Forderung von selber erfüllt ist, ergibt sich, dass im Relationenraum eine $J_{n;4,0}$ ausgezeichnet ist.

c) Relationen der $G_{n;3}$.

Bevor wir ein ganz allgemeines Ergebnis formulieren, ist es noch nötig, den Fall der $G_{n;3}$ zu diskutieren, da hier zum ersten Male eine Aufspaltung des Relationenraumes zu beobachten sein wird. Der einfachste hierher gehörige Typ ist die $G_{7;3}$. Die $G_{7;3}$ ist eine M_{16} des S_{69}. Zufolge Satz 4 besitzt sie eine fundamentale Polarität, wodurch die $G_{7;3}$ in ausgezeichneter Weise in das duale Gebilde $\widehat{G}_{7;3}$ übergeführt wird. Zu dieser Polarität gehört eine bestimmte, nicht entartete Quadrik Q_{68}. In der V^2-Abbildung bedeutet das: Durch die $V^2(G_{7;3})$ geht eine ausgezeichnete, Q_{68} zugeordnete Hyperebene des Raumes $\langle V^2_{69}\rangle$. Alle X_3 des X_7, die durch eine feste Gerade gehen und in einem festen X_5 liegen, werden auf die Punkte einer $G_{3;1}$ innerhalb von $G_{7;3}$ abgebildet, und es gibt somit ebensoviele derartige $G_{3;1}$ wie es (5, 1)-Elemente im Grundraum X_7 gibt, d. h. ∞^{20}. Im Raum $\langle V^2_{69}\rangle$ kann man dann von ebensovielen Räumen $\langle V^2(G_{3;1})\rangle$ sprechen. Jeder von diesen wird wiederum durch $V^2(G_{3;1})$ und eine Relationenpunkt R_0 aufgespannt. Die Gesamtheit der so erhaltenen Relationenpunkte bildet nach Satz 9 eine $J_{7;5,1}$ (die Kennzeichen dafür sind wieder wie in ähnlichen Fällen bei *a*) und *b*) ohne weiteres erfüllt): diese $J_{7;5,1}$ spannt anderseits nach Satz 11 zusammen mit $V^2(G_{7;3})$ eine Hyperebene des $\langle V^2_{69}\rangle$ auf, und zwar die der Fundamentalquadrik Q_{68} zugeordnete. Nun gibt es im $\langle V^2_{69}\rangle$ aber noch einen weiteren, bei unserer Darstellung offenbar in sich transformierten Punkt R_0'. Dieser R_0' ist der zu $\widehat{Q}_{68}$, d. h. derselben nicht entarteten Fundamentalquadrik, nur in dualer Auffassung als Klassengebilde, im Veroneseraum zugeordnete Punkt. R_0' kann nicht im Verbindungsraum $\langle V^2(G_{7;3})\rangle \cup \langle J_{7;5,1}\rangle$ liegen, da dies sofort zum Widerspruch mit der Tatsache führen würde, dass unsere projektive Gruppe nach Satz 7 sowohl den Raum $\langle V^2(G_{7;3})\rangle$ als auch den Raum $\langle J_{7;5,1}\rangle$ irreduzibel in sich transformiert. R_0' muss also ausserhalb von dieser Verbindung liegen, und wir haben folgende Aufspaltung:

$$\langle V^2_{69}\rangle_{2484} = \langle V^2(G_{7;3})\rangle - \langle J_{7;5,1}\rangle - R_0'.$$

Etwas allgemeiner können wir dann formulieren:

SATZ 14. - *Die Gruppe der projektiven Transformationen des X_n induziert* *im Relationenraum R der $G_{n;3}$ ($n \geq 7$) eine Darstellung durch projektive Transformationen, die in R zwei Teilräume invariant lassen, sodass R nach folgender Formel aufgespalten wird:*

$$R = \langle J_{n;\,5,\,1} \rangle - \langle G_{n;\,7} \rangle .$$

Beweis: Gegeben sei die $G_{n;3}$ als Bildmenge der X_3 des X_n. Die Gesamtheit der X_3 in einem X_7 des X_n wird dann auf die Punkte einer $G_{7;3}$ innerhalb von $G_{n;3}$ abgebildet. Die Gesamtheit aller so definierten Räume $\langle G_{7;3} \rangle$ liegt nach Satz 10 in keiner Quadrik des $\langle G_{n;3} \rangle$. In der V^2-Transformation gibt es dann in jedem Raum $\langle V^2(\langle G_{7;3} \rangle) \rangle$ einen ausgezeichneten Relationenpunkt, der oben R_0' genannt wurde. Die Gesamtheit der so erhaltenen Relationenpunkte R_0', die ersichtlich ein Abbild der X_7 des X_n darstellen, ist eine $G_{n;7}$. Denn die Bedingungen von Satz 6 zur Kennzeichnung einer solchen sind erfüllt: 1) die gruppentheoretische Forderung ohne weiteres. 2) Die Büschelbedingung ebenfalls. Dazu nehme man erst $n = 8$ an. Dann gibt es nach Satz 5 ∞^8 Fundamentalkegel durch die $G_{8;3}$, die zu je zweien ein Büschel innerhalb ihrer Gesamtheit, d. h. insgesamt ein lineares ∞^8-System bilden. Dualisiert man diese Fundamentalkegel, so sind sie gerade auf die soeben betrachteten Relationenpunkte R_0' abzubilden; die R_0' erfüllen also bei der $G_{8;3}$ einen $R_8' = G_{8;7}$. Bei $n > 8$ hat man die Teil-$G_{8;3}$ der $G_{n;3}$ ins Auge zu fassen. Sie ergeben sofort, dass allgemein die Punkte R_0' die X_7 des X_n derart representieren, dass dabei stets den X_7 eines X_8 die Punkte eines R_8' zugeordnet werden. Das bedeutet aber zusammen mit der Forderung 1), dass allgemein eine $G_{n;7}$ vorliegt. Jede einzelne $G_{7;3}$ gibt nun ihrerseits in Abhängigkeit von den darin liegenden $G_{3;1}$ Veranlassung zu Relationenpunkten R_0, die eine $J_{7;5,1}$ bilden, wie wir bereits wissen. Diese $J_{7;5,1}$ setzen sich dann aber insgesamt zu einer $j_{n;5,1}$ zusammen, deren Punkte R_0 den $G_{3;1}$ der $G_{n;3}$, d. h. den (5, 1)-Elementen des Grundraumes zugeordnet sind. Die Bedingungen von Satz 9 sind infolge der in der $j_{n;5,1}$ enthaltenen $J_{7;5,1}$ erfüllt, sodass die $j_{n;5,1}$ eine $J_{n;5,1}$ ist, die ferner nach Satz 11 zusammen mit der von den Punkten R_0' gebildeten $G_{n;7}$ den ganzen Relationenraum aufspannt.

d) Relationen der allgemeinen $G_{n;k}$.

Nach der genügenden Vorbereitung durch Behandlung der Sonderfälle sind wir jetzt ohne weiteres imstande, folgenden allgemeinen Satz, der die Satze 12 bis 14 in sich umfasst, zu formulieren:

SATZ 15. - *Die Gruppe der Projektivitäten des X_n induziert im Relationenraum R der $G_{n;k}$ ($n \geq 2k+1$) eine Darstellung durch Transformationen, die R folgendermassen in bestimmte durch J-Mannigfaltigkeiten definierte Teilräume aufspalten:*

$$(k \text{ ungerade}) \quad \langle J_{n;\,k+2,\,k-2} \rangle - \langle J_{n;\,k+4,\,k-4} \rangle - \dots - \langle J_{n;\,2k-1,\,1} \rangle - \langle J_{n;\,2k+1,\,-1} \rangle$$

$$(k \text{ gerade}) \quad \langle J_{n;\,k+2,\,k-2} \rangle - \langle J_{n;\,k+4,\,k-4} \rangle - \dots - \langle J_{n;\,2k-2,\,2} \rangle - \langle J_{n\;\,2k,\,0} \rangle .$$

Beweis: Die Gesamtheit aller X_k durch einen X_{k-2} und in einem X_{k+2} wird auf die Punkte einer $G_{3;1}$ abgebildet, die im Raum $\langle V^2(\langle G_{n;k}\rangle)\rangle$, zu einem Relationenpunkt R_0 Veranlassung gibt. Die Gesamtheit aller so erhaltenen Punkte R_0 bildet eine Bildmannigfaltigkeit aller $(k+2,\ k-2)$-Elemente des X_n. Dies gibt den ersten Bestandteil der Aufspaltung. Bei $k \geq 3$ betrachte man danach die Gesamtheit der $G_{7;3}$, wovon eine einzelne $G_{7;3}$ die Menge aller X_k durch einen X_{k-4} in einem X_{k+4} abbildet. Dies führt zu einer weiteren Menge von Relationspunkten R_0' in Abhängigkeit von den $(k+4,\ k-4)$-Elementen des X_n und ergibt den zweiten Bestandteil. Dies führe man weiter durch, bis man schliesslich bei ungeradem k zu Relationspunkten $R_0^{\left(\frac{k-3}{2}\right)}$ in Abhängigkeit von den $(2k+1,\ 1)$-Elementen und Relationspunkten $R^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}$ in Abhängigkeit von den Räumen X_{2k+1} des X_n kommt, wofür man in letzten Fall auch $(2k+1,\ -1)$-Elemente schreiben kann. Bei geradem k endet dieselbe Überlegung bei den Relationspunkten $R^{\left(\frac{k-4}{2}\right)}$ in Abhängigkeit von den $(2k-2,\ 2)$-Elementen und schliesslich Relationspunkten $R^{\left(\frac{k-2}{2}\right)}$ in Abhängigkeit von den $(2k,\ 0)$-Elementen. Dass die Relationspunkte der verschiedenen Sorten je die oben angeschriebenen J-Mannigfaltigkeiten bilden, braucht man nur für die R-Punkte mit dem höchsten Index jeweils zu beweisen, für die anderen folgt es dann nach einem leichten Induktionsansatz zusammen mit dem, was man über die $G_{a;b}$ mit $a < n$ weiss, und Satz 10. Nun besitzt erstmalig eine $G_{2k+1;k}$ mit ungeradem k einen Relationenpunkt $R_0^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}$, nach Satz 10 bilden dann die Punkte $R_0^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}$ bei der $G_{2k+2;k}$ einen $R^{\left(\frac{k-1}{2}\right)*}_{2k+2}$, und hieraus folgt alles Gewünschte für die durch die Punkte $R^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}$ aufgespannten Mannigfaltigkeiten bei der $G_{n;k}$ und $G_{n;k+1}$ $(n > 2k+2$ und k ungerade). Schliesslich ergibt sich aus Irreduzibilitätsgründen, dass alle Bestandteile unabhängig zueinander liegen und in wiederholter Anwendung der Sätze 10 und 11 folgt, dass sie zusammen den ganzen Relationenraum aufspannen. Nimmt man als allerersten Bestandteil noch den Raum $\langle V^2(G_{n;k})\rangle$, wofür man auch $\langle J_{n;k,k}\rangle$ schreiben kann, so vervollständigt man die Aufspaltung des Relationenraums zu einer übersichtlichen Aufspaltung des ganzen $\langle V^2(\langle G_{n;k}\rangle)\rangle$.